АСИМПТОТИКА МОДУЛЯ ПОЛИГОНАЛЬНОГО ОКНА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ЕГО ВДОЛЬ ОДНОЙ ИЗ ОСЕЙ

С. Р. Насыров (г. Казань)
e-mail: snasyrov@ksu.ru

В последнее время возрос интерес к изучению свойств конформных модулей четырехсторонников, двусвязных областей и емкостей конденсаторов в случае областей с полигональными границами. Особый интерес представляет изучение вопросов зависимости модулей и емкостей от параметров области, исследование их поведения при различных изменениях области, их численный подсчет, асимптотическое поведение при вырождении. В этой связи отметим обзор Р. Кюнау [1] и статьи [1–4].

В данной работе мы изучаем асимптотические свойства модулей двусвязных областей, которые являются разностью двух гомотетичных прямоугольников.

Пусть вещественные числа $\gamma > 1$, A, $B > 0$. Рассмотрим на плоскости двусвязную область

$$D_\gamma = D_\gamma(A,B) = ([-\gamma A, \gamma A] \times [-\gamma B, \gamma B]) \setminus ([-A, A] \times [-B, B]).$$

М. Вуоринен оставил вопрос: как ведет себя модуль $m(D_\gamma)$ области D_γ, когда один из параметров, скажем, B фиксирован, а другой — $A \to +\infty$? В силу конформной инвариантности модуля можно считать, что $B = 1$, $A = M$. Для краткости будем писать $D_\gamma(M)$ вместо $D_\gamma(M, 1)$

В [1] найдена явная зависимость модуля $m(D_\gamma)$ от отношения M в случае, когда $\gamma = 2$. Для этого, с использованием принципа симметрии для аналитических функций, часть области D_γ, лежащую в первой четверти, можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость. Далее $m(D_\gamma)$ выражается через эллиптические и элементарные функции.

В [5] была доказана

Теорема 1. *Модуль области D_2 равен*

$$m(D_2) = \frac{K(l')}{16K(l)},$$

где

$$l = \frac{\sqrt{1-\cos(\alpha+\beta)} - \sqrt{2\sin\alpha\sin\beta}}{\sqrt{1-\cos(\alpha+\beta)} + \sqrt{2\sin\alpha\sin\beta}}, \quad l' = \sqrt{1-l^2},$$

$$\alpha = \frac{1}{3}(\pi - 2\kappa), \quad \beta = \frac{1}{3}(3\pi - 2\kappa), \quad \kappa = \arcsin\frac{1-k}{1+k},$$

а параметр k находится из условия

$$\frac{2K(k)}{K(k')} = M.$$

Здесь

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

эллиптический интеграл первого рода, $0 < k < 1$, $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Как следствие теоремы 1, получаем, что

$$m(D_2(M)) \sim \frac{1}{4M} \quad \text{при} \quad M \to +\infty.$$

В данной работе получена асимптотика модуля $m(D_\gamma(M))$. Доказана

Теорема 2. *Для любых фиксированных $\gamma > 1$, $B > 0$ имеет место эквивалентность*

$$m(D_\gamma(M)) \sim \frac{\gamma - 1}{4M},$$

$M \to +\infty$.

Установлены также некоторые следствия и обобщения теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-97008-р_поволжье, 11-01-00762).

Библиографический список

1. Kühnau R. *The conformal module of quadrilaterals and of rings* // In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, (ed. by R. Kühnau) Vol. 2. North Holland, Amsterdam: Elsevier, 2005. P. 99–129.

2. Betsakos D., Samuelsson K., Vuorinen M. The computation of capacity of planar condensers Publications De L'institut Mathematique. 2004. V. 75.

No 89. P. 233–252.
3. Dubinin V.N., Vuorinen M. *On conformal moduli of polygonal quadrilaterals* // Israel Journal of Mathematics. 2009. V. 171. No 1. P. 111–125.
4. Hakula H., Rasila A., Vuorinen M. *On Moduli of Rings and Quadrilaterals: Algorithms and Experiments* // Siam Journal on Scientific Computing. 2011. V. 33. No 1. P. 279–302.
5. Борисова Е. В., Насыров С. Р. *Асимптотика модуля двусвязной области, являющейся разностью гомотетичных прямоугольников* // Труды матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 44. С. 62-63.