ГЛАВА 9. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И МАТРИЦЫ

§1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ДЕЙСТВИЯ НАД ОПЕРАТОРАМИ

Пусть $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — линейные пространства. Будем говорить, что задано *отображение* φ пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{Y}$

$$\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

если каждому вектору x из $\mathbf{X}$ поставлен однозначно в соответствие вектор $\varphi(x)$ из $\mathbf{Y}$.

Говорят также, что на пространстве $\mathbf{X}$ задана <u>*функция*</u>

$$\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$

со значениями в $\mathbf{Y}$.

Подчеркнем, что при этом, вообще говоря, не каждый вектор из $\mathbf{Y}$ должен быть результатом отображения некоторого вектора x из $\mathbf{X}$.

.

Отображение φ называется *линейным*, если для любых $x, y \in \mathbf{X}$ и любых α, $\beta \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

.

В линейной алгебре в основном рассматриваются линейные отображения. Обычно их называют *линейными операторами* и обозначают большими латинским буквами. Чаще всего, линейные операторы будем называть просто *операторами*.

Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводят к недоразумениям, не пишут. Так, равенство

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

применительно к оператору $\mathcal{A}$ запишется в виде

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y.$$

Из определения линейного отображения сразу вытекает, что

$$\mathcal{A}0 = 0$$

для любого оператора $\mathcal{A}$. Действительно,

$$\mathcal{A}0 = \mathcal{A}(x - x) = \mathcal{A}x - \mathcal{A}x = 0.$$

Если оператор действует из пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{X}$, то говорят, что он *действует в пространстве* $\mathbf{X}$ или является *преобразованием* пространства $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}.$$

.

Если в пространстве $\mathbf{X}_n$ фиксирован некоторый базис $\{e^j\}_{j=1}^n$, то определяя линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m,$$

достаточно описать его действие на векторы базиса, так как для любого вектора

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e^j$$

имеем

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e^j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathcal{A} e^j.$$

Действия над операторами

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — линейные операторы,

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

$$\mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

α, β — числа. Оператор

$$\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

определяемый соотношением

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x = \alpha(\mathcal{A}x) + \beta(\mathcal{B}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X},$$

называется *линейной комбинацией операторов* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — линейные операторы,

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

$$\mathcal{B} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}.$$

Оператор

$$\mathcal{B}\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Z},$$

определяемый соотношением

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X},$$

называется *произведением операторов* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

.

<u>Упражнение.</u> Показать, что отображения

$$\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}, \quad \mathcal{B}\mathcal{A}$$

есть линейные операторы.

.

Аналогично произведению двух операторов,

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X},$$

можно определить произведение любого их числа, например,

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathcal{A}x)) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

Упражнение. Показать, что если произведение операторов

$$\mathcal{C}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{A}$$

определено, то

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}.$$

Примеры операторов

.

1) ***Нулевой оператор***. Этот оператор переводит все векторы пространства $\mathbf{X}$ в нулевой вектор пространства $\mathbf{Y}$. Нулевой оператор обозначают символом 0, так что

$$\mathbf{0} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

$$\mathbf{0}x = 0, \quad x \in \mathbf{X}, \quad 0 \in \mathbf{Y}.$$

2) ***Единичный (тождественный) оператор***. Оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}$, называется единичным, если он оставляет без изменения все векторы пространства $\mathbf{X}$. Единичный оператор будем обозначать через I:

$$I : \mathbf{X} \to \mathbf{X},$$

$$Ix = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

.

3) *<u>Оператор проектирования.</u>* Пусть линейное пространство X есть прямая сумма подпространств L и M:

$$\mathbf{X} = L \dotplus M.$$

Тогда

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in L,\ x^2 \in M, \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

причем, векторы x^1 и x^2 однозначно определятся по x.

.

Определим оператор

$$\mathcal{P} : \mathrm{X} \to L,$$

полагая

$$\mathcal{P}x = x^1 \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Говорят, что оператор $\mathcal{P}$ есть оператор ***проектирования*** пространства X на подпространство L (параллельно подпространству M).

.

Если X — евклидово пространство и оно представлено, как ортогональная сумма подпространств L и M,

$$\mathbf{X} = L \oplus M,$$

то $\mathcal{P}$ называют оператором *ортогональнального проектирования*.

.

Докажем, что оператор $\mathcal{P}$ линеен.

Пусть

$$x = \mathcal{P}x + x^2, \quad \mathcal{P}x \in L,\ x^2 \in M, \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

$$y = \mathcal{P}y + y^2, \quad \mathcal{P}y \in L,\ y^2 \in M, \quad \forall y \in \mathbf{X}.$$

Тогда для любых

$$\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$$

справедливо равенство

$$\alpha x + \beta y = \alpha(\mathcal{P}x + x^2) + \beta(\mathcal{P}y + y^2) = \underline{\alpha\mathcal{P}x + \beta\mathcal{P}y} + \underline{\underline{\alpha x^2 + \beta y^2}}.$$

Вследствие того, что L **и** M **есть подпространства, получаем, что**

$$\underline{\alpha\mathcal{P}x + \beta\mathcal{P}y} \in L, \quad \underline{\underline{\alpha x^2 + \beta y^2 \in M}},$$

поэтому

$$\mathcal{P}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{P}x + \beta\mathcal{P}y.$$

.

Точно так же можно ввести оператор

$$\mathcal{Q} : \mathbf{X} \to M,$$

проектирующий пространство $\mathbf{X}$ на подпространство M:

$$\mathcal{Q}x = x^2 \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

.

Справедливо равенство

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I.$$

Действительно,

$$(\mathcal{P} + \mathcal{Q})x = \mathcal{P}x + \mathcal{Q}x = x^1 + x^2 = x \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

.

Отметим еще одно равенство

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0.$$

Действительно,

$$\mathcal{P}\mathcal{Q}x = \mathcal{P}(\mathcal{Q}x) = \mathcal{P}x^2 = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

т. к.

$$x^2 \in M, \quad L \cap M = \{0\}.$$

.

Точно так же проверяется равенство

$$\mathcal{Q}\mathcal{P} = 0.$$

Действительно,

$$\mathcal{Q}\mathcal{P}x = \mathcal{Q}(\mathcal{P}x) = \mathcal{Q}x^1 = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

т. к.

$$x^1 \in L, \quad L \cap M = \{0\}.$$

.

Отметим, еще одно полезное равенство

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P},$$

т. е. оператор $\mathcal{P}^2$ действует так же, как $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}^2 x = \mathcal{P}(\mathcal{P}x) = \mathcal{P}x^1 = x^1 \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

.

Точно так же

$$\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$$

в силу

$$\mathcal{Q}^2 x = \mathcal{Q}(\mathcal{Q}x) = \mathcal{Q}x^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

.

Вообще, если $\mathbf{X}$ — прямая сумма нескольких подпространств

$$\mathbf{X} = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \cdots \dot{+} L_k,$$

а $\mathcal{P}_i$ — оператор проектирования на L_i,

$$\mathcal{P}_i : \mathbf{X} \to L_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

то

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \cdots + \mathcal{P}_k = I,$$

$$\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i,$$

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

4) ***Умножение матрицы на вектор***. Пусть

$$A(m \times n)$$

есть прямоугольная матрица. Поставим в соответствие каждому вектору $x \in \mathbb{C}^n$ вектор $y \in \mathbb{C}^m$ при помощи равенства

$$y = Ax.$$

Операция умножения матрицы на вектор — линейная операция, поэтому это соотношение определяет линейный оператор

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m.$$

§2. ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР

Говорят, что линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$

имеет ***обратный***, если существует такой оператор

$$\mathcal{B} : \mathbf{Y} \to \mathbf{X},$$

что

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X},$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B}y = y \quad \forall\, y \in \mathbf{Y}.$$

Обратный оператор, если он существует, является линейным.

.

В самом деле, пусть

$$y^1,\ y^2 \in \mathbf{Y}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

Положим

$$x^1 = \mathcal{B}y^1, \quad x^2 = \mathcal{B}y^2.$$

Тогда

$$\mathcal{A}x^1 = \mathcal{A}\mathcal{B}y^1 = y^1, \quad \mathcal{A}x^2 = \mathcal{A}\mathcal{B}y^2 = y^2.$$

Отсюда

$$\mathcal{B}(\alpha y^1 + \beta y^2) = \mathcal{B}(\alpha \mathcal{A}x^1 + \beta \mathcal{A}x^2) =$$

$$= \mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha x^1 + \beta x^2 = \alpha \mathcal{B}y^1 + \beta \mathcal{B}y^2.$$

Если оператор $\mathcal{A}$ имеет обратный, то он осуществляет взаимно однозначное отображение пространства $\mathbf{X}$ на пространство $\mathbf{Y}$. Действительно, пусть

$$x^1,\ x^2 \in \mathbf{X}, \quad x^1 \neq x^2.$$

Тогда и

$$\mathcal{A}x^1 \neq \mathcal{A}x^2.$$

В самом деле, если предположить, что

$$\mathcal{A}x^1 = \mathcal{A}x^2,$$

то

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x^1 = \mathcal{B}\mathcal{A}x^2$$

и, значит,

$$x^1 = x^2.$$

Далее, если $y \in \mathbf{Y}$, то, полагая

$$x = \mathcal{B}y,$$

получим, что

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}\mathcal{B}y = y,$$

т. е. всякий вектор из $\mathbf{Y}$ является результатом действия оператора $\mathcal{A}$ на некоторый вектор из $\mathbf{X}$.

<u>Упражнение.</u> Покажите, что линейный оператор не может иметь двух различных обратных операторов.

Обратный к оператору $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\mathcal{A}^{-1}$. Непосредственно из определения вытекает, что если оператор $\mathcal{A}^{-1}$ существует, то

$$(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}.$$

Оператор, имеющий обратный, будем называть *обратимым*.

.

Примеры.

1) Единичный оператор имеет обратный, причем

$$I^{-1} = I.$$

.

2) Нулевой оператор, очевидно, не имеет обратного.

.

3) Упражнение. Докажите, что оператор проектирования $\mathcal{P}$ на подпространство L при условии, что подпространство L не совпадает со всем пространством X, не имеет обратного.

4) Всякая квадратная матрица A порядка n определяет линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$. Если матрица A невырождена, то этот оператор имеет обратный и он порождается матрицей A^{-1}.

<u>Упражнение.</u> Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $\mathcal{B} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ — обратимые операторы. Показать, что тогда и оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ обратим, причем

$$(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}.$$

§3. ОПЕРАТОР РАЗЛОЖЕНИЯ ПО БАЗИСУ

Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$. Определим оператор, действующий из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbf{X}_n$ при помощи соотношения

$$x = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

подробнее,

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n.$$

Очевидно, что так определенный оператор линеен. Будем обозначать этот оператор через

$$\mathcal{E} : \mathbb{C}^n \to \mathbf{X}_n.$$

Поскольку $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис, то каждому $x \in \mathbf{X}_n$ однозначно соответствует $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k.$$

Это соответствие порождает ***оператор разложения по базису***, действующий из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbb{C}^n$. Обозначим этот оператор через

$$\mathcal{E}^{-1} : \mathbf{X}_n \to \mathbb{C}^n.$$

Непосредственно из определения операторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{-1}$ вытекает:

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}\xi = \xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n,$$

$$\mathcal{E}\mathcal{E}^{-1}x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е. операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{-1}$ взаимно обратны.

§4. ИЗОМОРФИЗМ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Линейные пространства $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ называются ***изоморфными***, если существует обратимый линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}.$$

Иными словами, линейные пространства изоморфны, если между ними можно установить линейное взаимнооднозначное соответствие.

Понятно, что изоморфизм обладает свойством транзитивности, и, значит, если пространства $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ изоморфны пространству $\mathbf{Z}$, то они изоморфны друг другу.

Теорема. Все конечномерные линейные комплексные пространства одной и той же размерности изоморфны.

Доказательство. Вследствие транзитивности изоморфизма достаточно заметить, что любое комплексное линейное пространство $\mathbf{X}_n$ изоморфно пространству $\mathbb{C}^n$.

Действительно, линейное взаимнооднозначное соответствие пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbf{X}_n$ осуществляет оператор

$$\mathcal{E}^{-1} : \mathbf{X}_n \to \mathbb{C}^n$$

разложения по любому фиксированному базису $\mathcal{E}_n$. $\square$

Точно так же доказывается, что все вещественные линейные пространства $\mathbf{X}_n$ изоморфны пространству $\mathbb{R}^n$.

.

<u>Теорема.</u> Если конечномерные пространства $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ изоморфны, то их размерности совпадают.

Доказательство. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}$, а линейный оператор $\mathcal{A}$ осуществляет взаимнооднозначное отображение пространства $\mathbf{X}$ на пространство $\mathbf{Y}$. Из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{A} e^k = 0$$

вытекает, что

$$\mathcal{A} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^k = 0.$$

Действуя на обе части равенства

$$\mathcal{A}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^k = 0$$

оператором $\mathcal{A}^{-1}$**, будем иметь**

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^k = 0,$$

откуда получаем, что

$$\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n = 0.$$

Итак, из

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{A} e^k = 0$$

получили

$$\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n = 0,$$

т. е. векторы

$$\{\mathcal{A} e^k\}_{k=1}^{n}$$

линейно независимы, и

$$\dim \mathbf{Y} \geqslant n = \dim \mathbf{X}.$$

Меняя в этом рассуждении местами пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, приходим к

$$\dim \mathbf{X} \leqslant \dim \mathbf{Y}.$$

Это неравенство вместе с

$$\dim \mathbf{Y} \geqslant \dim \mathbf{X}$$

дает

$$\dim \mathbf{Y} = \dim \mathbf{X}. \quad \square$$

.

Таким образом, справедлива

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы два конечномерных комплексных (или вещественных) пространства были изоморфны необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали.

Если установлен изоморфизм пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, то с точки зрения выполнения линейных операций над их элементами они оказываются эквивалентными.

Так, линейные операции над элементами любого конечномерного пространства путем введения подходящего базиса всегда можно свести к линейным операциям над пространством числовых строк ($\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$).

.

Такой подход нами применялся когда было установлено взаимно-однозначное соответствие между направленными отрезками и их координатами и показано, что линейные операции над векторами эквиваленты операциям над их координатами.

§5. ОБРАЗ ОПЕРАТОРА. ЯДРО ОПЕРАТОРА

Пусть дан линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}.$$

Множество всех векторов $y \in \mathbf{Y}$ таких что

$$y = \mathcal{A}x \quad \text{для некоторого} \quad x \in \mathbf{X}$$

называется ***областью значений*** или ***образом*** оператора и обозначается через $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$:

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{y \in \mathbf{Y} : y = \mathcal{A}x,\, x \in \mathbf{X}\}.$$

Множество всех векторов $x \in \mathbf{X}$ таких, что

$$\mathcal{A}x = 0,$$

называется *<u>ядром</u>* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$:

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbf{X} : \mathcal{A}x = 0\}.$$

.

<u>Теорема.</u> **Множество** $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ **— линейное подпространство пространства** $\mathbf{Y}$**.**

Доказательство. Пусть

$$y^1,\ y^2 \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}).$$

Тогда существуют

$$x^1,\ x^2 \in \mathbf{X}$$

такие, что

$$y^1 = \mathcal{A}x^1, \quad y^2 = \mathcal{A}x^2.$$

Для любых

$$\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$$

из

$$y^1 = \mathcal{A}x^1, \quad y^2 = \mathcal{A}x^2$$

получаем

$$\alpha y^1 + \beta y^2 = \alpha \mathcal{A}x^1 + \beta \mathcal{A}x^2.$$

Оператор $\mathcal{A}$ линеен, следовательно,

$$\alpha y^1 + \beta y^2 = \alpha \mathcal{A} x^1 + \beta \mathcal{A} x^2 = \mathcal{A}(\alpha x^1 + \beta x^2),$$

и потому

$$\alpha y^1 + \beta y^2 \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}),$$

т. е. $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ — линейное подпространство пространства $\mathbf{Y}$. $\square$

<u>Упражнение.</u> **Покажите, что** $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ **— линейное подпространство пространства** $\mathbf{X}_n$**.**

Размерность образа оператора

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Y}_m$$

называется ***<u>рангом</u>*** оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}).$$

Размерность ядра оператора

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \subset \mathbf{X}_n$$

называется *дефектом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через

$$\mathrm{def}(\mathcal{A}).$$

.

<u>Теорема.</u> **Для любого линейного оператора** $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}) + \operatorname{def}(\mathcal{A}) = n.$$

.

<u>Доказательство.</u> **Пусть $M \subset \mathbf{X}_n$ такое подпространство, что**

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \dotplus M.$$

Тогда имеем

$$n = \mathrm{def}(\mathcal{A}) + \dim(M).$$

Теперь достаточно установить, что пространства M и $\mathrm{Im}(A)$ изоморфны.

Для произвольного $x \in \mathbf{X}_n$ имеем

$$x = x^0 + x^1, \quad x^0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}),\ x^1 \in M,$$

следовательно,

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}x^0 + \mathcal{A}x^1 = \mathcal{A}x^1.$$

Таким образом, всякий элемент из $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ — образ некоторого элемента из M.

.

Осталось доказать, что если

$$\mathcal{A}x' = \mathcal{A}x'', \quad x',\ x'' \in M,$$

то

$$x' = x'',$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ осуществляет взаимнооднозначное отображение

$$\mathcal{A} : M \to \operatorname{Im}(\mathcal{A}).$$

Равенство $\mathcal{A}x' = \mathcal{A}x''$ запишем в виде

$$\mathcal{A}(x' - x'') = 0,$$

а это означает, что

$$x' - x'' \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

С другой стороны, M — подпространство, x', $x'' \in M$, поэтому

$$x' - x'' \in M.$$

.

Итак,

$$x' - x'' \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \cap M.$$

Напомним, что

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \dotplus M.$$

Для того чтобы сумма подпространств была прямой необходимо и достаточно, чтобы их пересечение равнялось нулю:

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \cap M = \{0\}.$$

Значит $x' - x'' = 0$, **или**

$$x' = x''. \ \square$$

§6. МАТРИЦА ОПЕРАТОРА

Пусть дан линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m.$$

Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ базис

$$\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n,$$

а в пространстве $\mathbf{Y}_m$ — базис

$$\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m.$$

Представим каждый вектор

$$\mathcal{A}e^i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

в виде разложения по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$\mathcal{A}e^i = a_{1i}^{(eq)}q^1 + a_{2i}^{(eq)}q^2 + \cdots + a_{mi}^{(eq)}q^m, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \ldots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \ldots & a_{2n}^{(eq)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \ldots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A_{eq} называют ***матрицей оператора*** $\mathcal{A}$. Она однозначно определяется оператором $\mathcal{A}$ и базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$.

.

Соотношения

$$\mathcal{A}e^i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} q^j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

можно записать более кратко

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq}.$$

Действительно,

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \left\{\mathcal{A}e^i\right\}_{i=1}^{n}, \quad \mathcal{Q}_m A_{eq} = \left\{\sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} q^j\right\}_{i=1}^{n}.$$

Пусть

$$x = \mathcal{E}_n \xi \in \mathbf{X}_n, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Представим $y = \mathcal{A}x$ в виде разложения по базису:

$$y = \mathcal{A}x = \mathcal{Q}_m \eta \in \mathbf{Y}_m, \quad \eta \in \mathbb{C}^m.$$

Тогда, используя

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq},$$

получим

$$\mathcal{Q}_m \eta = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\mathcal{E}_n \xi = \mathcal{Q}_m A_{eq} \xi,$$

следовательно,

$$\eta = A_{eq} \xi.$$

Эта формула показывает, как связаны коэффициенты разложения векторов x и $\mathcal{A}x$ по базисам пространств $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$.

Из равенства

$$\eta = A_{eq}\xi.$$

вытекает, что если матрица A_{eq} оператора $\mathcal{A}$ известна, то по заданному вектору

$$x \in \mathbf{X}_n$$

вектор

$$y = \mathcal{A}x \in \mathbf{Y}_m$$

можно построить следующим образом.

.

1) Найти вектор

$$\xi \in \mathbb{C}^n$$

коэффициентов разложения x по базису $\mathcal{E}_n$. Это можно представить в операторном виде:

$$\xi = \mathcal{E}^{-1} x.$$

2) Умножив матрицу A_{eq} на вектор ξ, получить вектор

$$\eta = A_{eq}\xi \in \mathbb{C}^m$$

коэффициентов разложения элемента

$$y = \mathcal{A}x \in \mathbf{Y}_m$$

по базису $\mathcal{Q}_m$.

.

3) Вычислить элемент y по найденному вектору η, что опять можно записать в операторной форме:

$$y = \mathcal{Q}\eta.$$

Итак, используя операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{Q}$, порожденные базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$, соотношение

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq}$$

можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}, \quad \text{или} \quad \mathcal{A} = \mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}.$$

Поясним, что

$$A_{eq}\xi = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n, \qquad \mathcal{A}x = \mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

.

Равенства

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}, \qquad\qquad \mathcal{A} = \mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}$$

иллюстрируют следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbf{Y}_m \\ \mathcal{E}\Big\uparrow & & \Big\downarrow\mathcal{Q}^{-1} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow[A_{eq}]{} & \mathbb{C}^m \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbf{Y}_m \\ \mathcal{E}^{-1}\Big\downarrow & & \Big\uparrow\mathcal{Q} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow[A_{eq}]{} & \mathbb{C}^m \end{array}$$

.

Если в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ фиксированы некоторые базисы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{Q}_m$, то всякому линейному оператору

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

однозначно соответствует матрица

$$A_{eq}(m \times n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$

оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах.

Наоборот, всякой матрице

$$A(m \times n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$

однозначно соответствует оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m,$$

определяемый по формуле

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q} A \mathcal{E}^{-1}.$$

.

Если

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n,$$

то

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n A_e,$$

или

$$A_e = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E},$$

где A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^{n}$.

.

Отметим два случая, когда матрица оператора не зависит от выбора базиса:

Нулевой оператор. Его матрица в любом базисе нулевая.

Тождественный оператор I. Его матрица, как видно из

$$I\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n I,$$

единичная матрица I при любом выборе базиса $\mathcal{E}_n$.

Из определения матрицы оператора сразу же вытекает, что для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ и для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha A + \beta B)_{eq} = \alpha A_{eq} + \beta B_{eq},$$

т. е. линейным операциям на операторами соответствуют линейные операции над их матрицами.

Действительно, рассмотрим линейную комбинацию операторов

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m,$$

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x = \alpha(\mathcal{A}x) + \beta(\mathcal{B}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Умножим обе части этого равенства слева на оператор разложения по базису $\{q^k\}_{k=1}^m$ пространства $\mathbf{Y}_m$ и используем представление

$$x = \mathcal{E}\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда

$$\mathcal{Q}^{-1}(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})\mathcal{E}\xi = \alpha\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi + \beta\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{E}\xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n.$$

.

Теперь из

$$\mathcal{Q}^{-1}(\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B})\mathcal{E}\xi=\alpha\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi+\beta\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{E}\xi\quad\forall\,\xi\in\mathbb{C}^n,$$

и соотношений вида

$$A_{eq}=\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}$$

сразу же вытекает, что

$$(\alpha A+\beta B)_{eq}=\alpha A_{eq}+\beta B_{eq},$$

т. е. линейным операциям на операторами соответствуют линейные операции над их матрицами.

.

Аналогичное при определенных условиях справедливо и для произведения операторов. Пусть

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m, \quad \mathcal{B} : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{Z}_p$$

есть линейные операторы.

Будем считать, что в пространствах

$$\mathbf{X}_n, \quad \mathbf{Y}_m, \quad \mathbf{Z}_p$$

заданы базисы

$$\{e^k\}_{k=1}^n, \quad \{q^k\}_{k=1}^m, \quad \{r^k\}_{k=1}^p.$$

Покажем, что тогда

$$(BA)_{er} = B_{qr} A_{eq}.$$

.

Действительно, применяя формулы вида

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E},$$

получим

$$(BA)_{er} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{E} =$$

$$= \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}B_{qr}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E} = B_{qr}A_{eq}.$$

Важно, что здесь при определении матриц операторов $\mathcal{A}$ и B использовался один и тот же базис $\{q^k\}_{k=1}^m$. В дальнейшем указанное согласование всегда предполагается выполненным.

<u>Примеры.</u> 1) Определим оператор $\mathcal{A} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ по формуле

$$\mathcal{A}x = (x_2, x_1, x_3 + x_4, x_4), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4.$$

Построим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе. Имеем

$$\mathcal{A}i^1 = \mathcal{A}(1,0,0,0) = (0,1,0,0) = i^2,$$

$$\mathcal{A}i^2 = \mathcal{A}(0,1,0,0) = (1,0,0,0) = i^1,$$

$$\mathcal{A}i^3 = \mathcal{A}(0,0,1,0) = (0,0,1,0) = i^3,$$

$$\mathcal{A}i^4 = \mathcal{A}(0,0,0,1) = (0,0,1,1) = i^3 + i^4,$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) В трехмерном линейном пространстве $\mathbf{Q}_2$ всех полиномов степени не выше двух с комплексными коэффициентами определим оператор $\mathcal{T}$ при помощи соотношения

$$\mathcal{T} q_2(z) = q_2(z+h), \quad q_2 \in \mathbf{Q}_2.$$

Здесь h — фиксированное комплексное число (сдвиг). Построим матрицу оператора $\mathcal{T}$, принимая за базис пространства $\mathbf{Q}_2$

$$\varphi_0(z) \equiv 1, \quad \varphi_1(z) = z, \quad \varphi_2(z) = z^2.$$

.

Имеем $\varphi_0(z) \equiv 1$, $\varphi_1(z) = z$, $\varphi_2(z) = z^2$,

$$\mathcal{T}\varphi_0(z) = \varphi_0(z+h) = 1 = \varphi_0,$$

$$\mathcal{T}\varphi_1(z) = \varphi_1(z+h) = z + h = h\varphi_0 + \varphi_1,$$

$$\mathcal{T}\varphi_2 = \varphi_2(z+h) = (z+h)^2 = z^2 + 2zh + h^2 = h^2\varphi_0 + 2h\varphi_1 + \varphi_2,$$

следовательно, матрица оператора $\mathcal{T}$ **есть**

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Поэтому, если

$$q_2(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2,$$

то

$$\mathcal{T} q_2(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2,$$

где

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ha_1 + h^2 a_2 \\ a_1 + 2ha_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Упражнение.</u> Пусть $\mathbf{P}_n$ — линейное пространство полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Определим на этом пространстве линейный оператор $\mathcal{A}$, полагая

$$\mathcal{A}p_n(x) = ap_n'(x) + b$$

для любого $p_n \in \mathbf{P}_n$. Здесь a, b — произвольным образом фиксированные вещественные числа. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\}$.

Матрица оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

определяется заданием базисов пространств $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$. Выясним, как она изменяется при изменении базисов.

Пусть наряду с базисами

$$\{e^k\}_{k=1}^n, \quad \{q^k\}_{k=1}^m$$

заданы базисы

$$\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n, \quad \{\widetilde{q}^k\}_{k=1}^m,$$

и им соответствует матрица $A_{\widetilde{e}\widetilde{q}}$.

.

Имеем

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1},$$

$$A_{\widetilde{e}\widetilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{A} \widetilde{\mathcal{E}}.$$

Следовательно,

$$A_{\widetilde{e}\widetilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1} \widetilde{\mathcal{E}}.$$

Будем считать известными матрицы T, R перехода к новым базисам, так что

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T, \quad \widetilde{\mathcal{Q}}_m = \mathcal{Q}_m R.$$

Значит, для любого $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n \xi = \mathcal{E}_n T \xi,$$

поэтому

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} T,$$

откуда получаем, что

$$\mathcal{E}^{-1} \widetilde{\mathcal{E}} = T, \quad \text{аналогично}, \quad \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{Q} = R^{-1}.$$

Итак,

$$A_{\widetilde{e}\widetilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}\widetilde{\mathcal{E}}.$$

Кроме того,

$$\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{Q} = R^{-1}, \quad \mathcal{E}^{-1}\widetilde{\mathcal{E}} = T.$$

Таким образом,

$$A_{\widetilde{e}\widetilde{q}} = R^{-1}A_{eq}T.$$

.

В важном частном случае, когда $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, получаем

$$A_{\widetilde{e}} = T^{-1} A_e T.$$

Квадратные матрицы B, C связанные соотношением

$$B = D^{-1} C D,$$

где D — невырожденная матрица, называют ***подобными***.

Таким образом, матрицы одного и того же оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

в разных базисах подобны:

$$A_{\widetilde{e}} = T^{-1} A_e T, \quad \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} T.$$

<u>Теорема.</u> Если матрица оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$, то существует такое число α, что

$$\mathcal{A} = \alpha I.$$

.

<u>Доказательство.</u> Пусть матрица оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$. Обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.

Поскольку матрицы одного и того же оператора в различных базисах подобны, то

$$A = BAB^{-1}$$

для любой невырожденной матрицы B.

.

Из равенства

$$A = BAB^{-1}$$

следует

$$AB = BA$$

для любой невырожденной матрицы B**.**

.

Пусть E_{ik} — матрица, у которой элемент в позиции (i,k) равен единице, а все остальные элементы — нули:

$$E_{ik} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & k & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0\ldots & & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots & & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i. \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Матрица

$$E_{ik} + I$$

это треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали и потому обратима. Значит,

$$A(E_{ik} + I) = (E_{ik} + I)A,$$

следовательно,

$$AE_{ik} = E_{ik}A.$$

.

Будем считать, что

$$i \neq k.$$

Покажем, что

$$AE_{ik}$$

есть матрица, у которой только k-й столбец отличен от нуля и он состоит из элементов

$$a_{1i},$$

$$a_{2i},$$

$$\ldots,$$

$$a_{ni}.$$

$$AE_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} \end{array}$$

Покажем, что в матрице

$$E_{ik}A$$

только i-я строка отлична от нуля и она состоит из элементов

$$a_{k1}, \quad a_{k2}, \; \ldots, \; a_{kn}.$$

.

$$E_{ik}A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Поэтому равенство

$$AE_{ik} = E_{ik}A$$

может быть выполнено лишь в случае, когда

$$a_{ii} = a_{kk},$$

а все элементы с различающимися индексами равны нулю:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \begin{matrix} & & k & & \end{matrix} & & \begin{matrix} & & k & & \end{matrix} & \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 \ldots & \ldots & a_{1i} & \ldots & 0 \\ \ldots \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots & \ldots & a_{ii} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{ni} & \ldots & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i. \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

.

Итак,

$$a_{ii} = a_{kk}, \quad a_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\; n,$$

т. е.

$$A = \alpha I,$$

но тогда

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}(\alpha I)\mathcal{E}^{-1} = \alpha \mathcal{E}\mathcal{E}^{-1} = \alpha I. \; \square$$

§7. МАТРИЦА ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

Определители подобных матриц B и C совпадают:

$$\det(B) = \det(C).$$

Действительно, если

$$B = DCD^{-1},$$

то

$$\det(B) = \det(D)\det(C)\det(D^{-1}),$$

Для любой невырожденной матрицы D имеем

$$\det(D^{-1}) = \frac{1}{\det(D)}.$$

Следовательно,

$$\det(B) = \det(C).$$

Матрицы одного и того же оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

в разных базисах подобны:

$$A_{\widetilde{e}} = T^{-1} A_e T.$$

В связи с этим можно назвать ***определителем оператора*** $\mathcal{A}$ определитель матрицы этого A_e оператора в любом базисе.

Такая характеристика оператора не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$, т. е. является инвариантом оператора. Определитель оператора $\mathcal{A}$ будем обозначать через

$$\det \mathcal{A}.$$

Будем называть оператор $\mathcal{A}$ ***невырожденным***, если

$$\det \mathcal{A} \neq 0.$$

.

Для любого невырожденного оператора $\mathcal{A}$ существует обратный.

.

Действительно, фиксируем некоторый базис

$$\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$$

и определим оператор

$$\mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

соотношением

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1}.$$

.

Поскольку

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1},$$

а

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1},$$

то

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E} I \mathcal{E}^{-1} = I,$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1} \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E} I \mathcal{E}^{-1} = I,$$

значит,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}.$$

Как следует из предыдущих рассуждений, матрица обратного оператора

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1}$$

обратна к матрице исходного оператора:

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1}.$$

.

<u>Теорема.</u> Если оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ имеет обратный, то он невырожден.

<u>Упражнение.</u> Докажите эту теорему.

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\mathcal{A}x = 0$$

имело только тривиальное решение $x = 0$.

<u>Упражнение.</u> Докажите эту теорему.

§9. РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть $A(m,n)$ — произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы векторов назовем ***рангом матрицы*** $A(m,n)$:

$$\operatorname{rank}(A).$$

Напомним, что размерность образа оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$,

$$\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \{y \in \mathbf{Y}_m : y = \mathcal{A}x,\ x \in \mathbf{X}_n\},$$

называется *рангом* оператора $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}).$$

<u>Теорема.</u> **Пусть**

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

A_{eq} — **матрица оператора** $\mathcal{A}$ **относительно произвольным образом фиксированных базисов**

$$\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n, \quad \{q_k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m.$$

Тогда

$$\mathrm{rank}(A_{eq}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}).$$

.

Доказательство. Пусть

$$x = \mathcal{E}_n \xi \in \mathbf{X}_n.$$

Тогда

$$\mathcal{A}x = \mathcal{Q}_m \eta,$$

где

$$\eta = A_{eq} \xi.$$

Обозначим

$$L_r \subset \mathbb{C}^m$$

подпространство, натянутое на столбцы матрицы A_{eq}**. Тогда**

$$\eta = A_{eq}\xi \in L_r,$$

кроме того,

$$\dim(L_r) = \operatorname{rank}(A_{eq}).$$

.

Имеем

$$\eta \in L_r,$$

$$\mathcal{Q}\eta = \mathcal{A}x \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}).$$

Следовательно,

$$\mathcal{Q} : L_r \to \mathrm{Im}(\mathcal{A}).$$

Линейный оператор

$$\mathcal{Q} : L_r \to \mathrm{Im}(\mathcal{A})$$

обратим, следовательно, подпространство L_r **изоморфно** $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, **и**

$$\dim\left(L_r\right) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})).$$

Итак,

$$\dim(L_r) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})),$$

но

$$\dim(L_r) = \mathrm{rank}(A_{eq}), \quad \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}),$$

следовательно,

$$\mathrm{rank}(A_{eq}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}). \ \square$$

.

Таким образом, ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, и можно было бы дать эквивалентное определение *ранга оператора* как ранга его матрицы.

Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из пространства $\mathbb{C}^n$. Ранг этой системы строк обозначим через r_s.

.

Теорема. Для любой матрицы $A(m,n)$ выполнено равенство

$$r_s = \operatorname{rank}(A),$$

т. е. ранг системы ее строк равен рангу системы ее столбцов.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что первые r_s строк матрицы $A(m,n)$ линейно независимы, а каждая из последующих линейно выражается через первые r_s строк матрицы $A(m,n)$.

.

Пусть $A(r_s, n)$ — матрица, состоящая из первых r_s строк матрицы $A(m, n)$. Используем для преобразования матрицы $A(r_s, n)$ алгоритм, совпадающий, фактически, с прямым ходом метода Гаусса.

.

Выберем в первой строке матрицы $A(r_s, n)$ ненулевой элемент. Это возможно, так как ни одна строка матрицы $A(r_s, n)$ не может быть нулевой.

.

Переставим столбцы матрицы $A(r_s, n)$ так, чтобы столбец, содержащий указанный ненулевой элемент оказался первым. Сохраним за преобразованной таким образом матрицей прежнее обозначение.

Умножим первую строку на $-a_{21}/a_{11}$ и сложим со второй:

$$\widetilde{a}^2 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} a^1 + 1 \cdot a^2.$$

.

Затем аналогичные преобразования проделаем со всеми последующими строками матрицы $A(r_s, n)$.

.

В результате получим матрицу, у которой все элементы первого столбца, кроме элемента a_{11}, равны нулю, причем $a_{11} \neq 0$.

Вторая строка преобразованной матрицы есть нетривиальная линейная комбинация первых двух (линейно независимых) строк, поэтому она отлична от нуля:

$$\widetilde{a}^2 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}a^1 + 1 \cdot a^2 \neq 0.$$

Поменяв местами при необходимости второй столбец с одним из последующих, мы получим матрицу, у которой

$$a_{22} \neq 0.$$

.

Умножим вторую строку на $-a_{32}/a_{22}$ и сложим с третьей:

$$\widetilde{a}^3 = -\frac{a_{32}}{a_{22}}a^2 + 1 \cdot a^3.$$

.

Аналогичные преобразования проделаем и с последующими строками матрицы $A(r_s, n)$.

Продолжая такие преобразования, мы, в результате, придем к матрице, которую можно представить в блочном виде

$$(\widetilde{A}(r_s, r_s), B(r_s, n - r_s)),$$

где $\widetilde{A}(r_s, r_s)$ — верхняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали.

.

Описанные выше преобразования не могут «сорваться», так как в ходе указанных вычислений каждый раз возникает строка, которая является нетривиальной линейной комбинацией предыдущих (линейно независимых) строк матрицы $A(r_s, n)$, и потому не может оказаться нулевой.

.

Очевидно, что, не ограничивая общности рассуждений, можно считать что первые r_s столбцов исходной матрицы $A(r_s, n)$ таковы, что выполняя описанные выше преобразования и не прибегая к перестановке столбцов, мы придем к матрице вида

$$(\widetilde{A}(r_s, r_s), B(r_s, n - r_s)).$$

Ясно, что $\det(\widetilde{A}(r_s, r_s)) \neq 0$, поэтому первые r_s столбцов исходной матрицы $A(r_s, n)$ линейно независимы. Но тогда, и первые r_s столбцов матрицы $A(m, n)$ линейно независимы.

.

Покажем, что добавление к ним любого столбца матрицы $A(m, n)$ приводит к линейно зависимой системе.

.

Пусть Δ_{r_s} — главный минор порядка r_s матрицы $A(m,n)$. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\Delta_{r_s} \neq 0.$$

Итак, $\Delta_{r_s} \neq 0$, поэтому система линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r_s}x_{r_s} = a_{1k},$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r_s}x_{r_s} = a_{2k},$$

$$\ldots$$

$$a_{r_s1}x_1 + a_{r_s2}x_2 + \cdots + a_{r_sr_s}x_{r_s} = a_{r_sk}$$

имеет решение при любом $k = 1, 2, \ldots, n$.

Каждая строка матрицы $A(m,n)$ с номером, большим r_s, линейно выражается через первые r_s строк матрицы $A(m,n)$:

$$a_{pk} = \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip} a_{ik}, \quad p = r_s + 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n.$$

.

Пусть вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_{r_s})$ есть решение системы

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, r_s, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip} \sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip}a_{ik}, \quad p = r_s + 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n,$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^{r_s} \left(\sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip}a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip}a_{ik}, \quad p = r_s + 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n.$$

.

Равенства

$$\sum_{j=1}^{r_s}\left(\sum_{i=1}^{r_s}\alpha_{ip}a_{ij}\right)x_j=\sum_{i=1}^{r_s}\alpha_{ip}a_{ik},\quad p=r_s+1,\,\dots,\,m,\quad k=1,\,\dots,\,n,$$

учитывая

$$a_{pk}=\sum_{i=1}^{r_s}\alpha_{ip}a_{ik},\quad p=r_s+1,\,\dots,\,m,\quad k=1,\,\dots,\,n,$$

можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{r_s}a_{pj}x_j=a_{pk},\quad p=r_s+1,\,\dots,\,m,\quad k=1,\,\dots,\,n.$$

.

Итак, если вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_{r_s})$ есть решение системы

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, r_s, \quad k = 1, \ldots, n,$$

то он удовлетворяет и равенствам

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = r_s + 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n.$$

.

Равенства

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n,$$

означают, что каждый столбец матрицы $A(m,n)$ есть линейная комбинация ее первых r_s столбцов, следовательно,

$$\mathrm{rank}(A(m,n)) = r_s. \ \square$$

.

Квадратная матрица порядка n невырождена тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}(A) = n.$$

Любая перестановка строк или столбцов матрицы, очевидно, не меняет ее ранга.

.

<u>Теорема.</u> **Пусть $A(m,n)$ — произвольная матрица, а $B(m,m)$ и $C(n,n)$ — квадратные невырожденные матрицы. Тогда**

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(BA),$$

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AC).$$

<u>Доказательство.</u> Для проверки равенства

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BA),$$

достаточно заметить, что если матрица B невырождена, то для линейной независимости системы столбцов

$$Ba^1, \ \ldots, \ Ba^p$$

необходимо и достаточно линейной независимости столбцов

$$a^1, \ \ldots, \ a^p$$

Действительно, если матрица B невырождена, то

$$Ax = 0 \iff BAx = 0.$$

.

Имеем

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BA).$$

Следовательно,

$$\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A^T B^T).$$

Обозначим

$$D = A^T, \quad C = B^T.$$

Тогда

$$\operatorname{rank}(D) = \operatorname{rank}(DC). \ \square$$

<u>Упражнение.</u> **Показать, что для любых допускающих умножение прямоугольных матриц A, B справедливо неравенство**

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

§10. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ

Главным минором порядка k называется минор Δ_k, образованный элементами матрицы, стоящими на пересечении ее первых k строк и первых k столбцов.

Пусть матрица A имеет ранг равный r. Тогда можно так переставить столбцы и строки этой матрицы, что главный минор Δ_r порядка r полученной матрицы будет отличен от нуля. Его принято называть *базисным минором* матрицы A.

.

Сформулируем и докажем, в некотором смысле обратное, утверждение. Пусть A — произвольная прямоугольная матрица, Δ_r — ее главный минор порядка r.

Назовем главный минор Δ_{r+1} окаймляющим минором для минора Δ_r. Переставляя строки и столбцы матрицы A с номерами, большим чем r, можно построить различные окаймляющие миноры для минора Δ_r.

Лемма. Пусть главный минор Δ_r матрицы A не равен нулю, а все окаймляющие его миноры — нули. Тогда ранг матрицы A равен r.

Доказательство. Поскольку

$$\Delta_r \neq 0,$$

первые r столбцов матрицы A линейно независимы. Покажем, что любой столбец матрицы A с номером, большим чем r, линейно выражается через ее первые r столбцов. Это и будет означать, что

$$\operatorname{rank}(A) = r.$$

Предположим противное. Тогда, присоединяя к первым r столбцам матрицы A некоторый столбец с большим номером, мы получим, что образованная таким образом матрица имеет ранг $r+1$.

Поэтому она имеет $r+1$ линейно независимую строку. Причем первые ее r строк линейно независимы, так как $\Delta_r \neq 0$.

Значит, найдется строка с номером, большим чем r, которая не выражается линейно через первые r строк. Делая указанную строку $(r+1)$-й строкой матрицы A, получим, что

$$\Delta_{r+1} \neq 0,$$

чего по условию леммы быть не может. □

Доказательство леммы подсказывает следующий способ вычисления ранга матрицы.

1) Просматриваем элементы матрицы. Если все они нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

.

2) Если найден элемент матрицы отличный от нуля, то, переставляя соответствующие строки и столбцы матрицы, помещаем его на место первого элемента первого столбца.

3) Окаймляем элемент a_{11}, т. е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов. Если все эти определители второго порядка — нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец. Значит ранг матрицы равен единице.

.

4) Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путем перестановки строк и столбцов матрицы превращаем этот определитель в определитель вида Δ_2 (в левом верхнем углу) и окаймлением строим определители третьего порядка, пока не получим среди них отличный от нуля и т. д.

Если на каком-то шаге описанного алгоритма получен определитель Δ_r, не равный нулю, а все определители порядка $r+1$, построенные по нему окаймлением, — нули, то это означает, что ранг матрицы равен r.

Понятно, что на практике этот процесс иногда может быть ускорен. Именно, пусть удалось установить, что определитель, образованный элементами, стоящими на пересечении каких-то r строк и каких-то r столбцов матрицы не равен нулю. Строим окаймлением этого определителя определители порядка $r+1$. Если среди них есть ненулевой процесс продолжается. Если все такие определители — нули, то ранг матрицы равен r.

.

<u>Пример.</u> **Найдем ранг матрицы**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

.

Заметим, что в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

содержится минор

$$d = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},$$

не равный нулю.

.

В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

минор третьего порядка

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор d, не равен нулю.

В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

первый минор четвертого порядка окаймляющий d' равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

и второй минор четвертого порядка окаймляющий d', **равен нулю:**

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

.

Максимальный порядок отличных от нуля миноров равен трем, поэтому

$$\operatorname{rank}(A) = 3.$$