КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНО-ФИЛОСОФСКИХ НАУК И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ

Кафедра социальной философии

А. С. Сафонов

МЕТАТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ:
учебно-методическое пособие

Казань – 2020

УДК 164.1

ББК 87.4

С 12

Рекомендовано к печати кафедрой социальной философии КФУ

Протокол №2 от 9 октября 2020 года

Автор: Сафонов А. С., кандидат философских наук, старший преподаватель кафедры социальной философии

Рецензент: доктор философских наук, заведующий кафедрой социальной философии КФУ А. Р. Каримов

С12 Сафонов А. С. Метатеоретические свойства логических систем: учебно-методическое пособие / Сафонов А. С. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2020. –19 с.

В пособии рассматриваются метатеоретические свойства логических систем: равнообъемность, непротиворечивость полнота. Приводятся доказательства метатеоретических свойств для системы со схемами аксиом (САР). Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 47.03.01 – Философия.

Содержание

Метатеоретические свойства логических систем

Метатеоретическим свойствами называют такие свойства, которыми обладает логическая система целиком.

Из предыдущих лекций мы убедились, что возможны различные представления логики высказываний. Такие представления называются логическими системами. Мы рассмотрели три из них (СНВ – система натурального вывода, АР – аксиоматика пропозиционального исчисления, САР – аксиоматика со схемами аксиом).

При помощи метатеретических свойств можно сравнивать между собой различные логические системы.

Основные виды метатеоретических свойств логических систем.

- Равнообъемность – тождественность логических систем относительно класса логических законов;
- Непротиворечивость: различают семантическую и синтаксическую непротиворечивость.
- Семантическая непротиворечивость – все доказуемые формулы системы являются тождественно-истинной формулой;
- Синтаксическая непротиворечивость – недоказуемость в логической системе противоречий.
- Полнота: семантическая и синтаксическая
- Семантическая полнота – свойство логической системы доказать любую тождественно-истинную формулу;
- Синтаксическая полнота – свойство логической системы, когда к ней нельзя прибавить ни одной недоказуемой в ней формулы без противоречия.

Интерпретация исчисления высказываний

Как можно было бы заметить рассмотренные логические системы представляют собой чисто синтаксические построения. Т.е. это системы отношения знаков, которые абстрагированы как от значений, так и от каких бы то ни было смыслов.

Семантика логических систем задается процедурой интерпретации. Что обозначают переменные логики высказываний? Пропозициональные переменные пробегают по множеству {и, л}, состоящему из двух абстрактных объектов – истина и ложь. Именно эти объекты мы рассматриваем в качестве значений переменных логики высказываний, соответственно мы интерпретируем и знаки логических констант (булевы функции) - &, v, →, ¬

Равнообъемность

Равнообъемность логических систем демонстрирует, что данные системы совпадают по классу доказуемых утверждений. Рассмотрим это метатеоретическое свойство на примере двух систем СНВ и САР.

Метатеорема: СНВ и САР являются равнообъемными (эквивалентными).

Для доказательства метатеоремы 2 достаточно показать, что все дедуктивные средства СНВ (правила вывода) являются производными теоремами в САР (доказуемы в САР), и наоборот, все дедуктивные средства САР (схемы аксиом и правила вывода) являются производными теоремами в СНВ.

Лемма 1. Все правила вывода СНВ производны в САР.

Для доказательства леммы необходимо последовательно доказать все правила вывода имеющиеся в СНВ в САР.

Правила удаления конъюнкции (УК), введения конъюнкции (ВК), введения дизъюнкции (ВД) соответствуют схемам аксиом СА3, СА4, СА5, СА6 и СА7. Поэтому доказательство этих правил элементарно. Приведем общую схему их доказательств в САР.

ВК. Для доказательства данного правила необходимо в САР обосновать след. выводимость А, В⊢ А &В

доказательство

1. А – посылка

2. В – посылка

3. А→(В → (А&В)) - СА5

4. $B \to (A\&B))$ – из 1,3 по тр

5. $A\&B$ – из 2,4 по тр ч.т.д.

Остается доказать следующие правила :

Удаление дизъюнкции УД;

Отрицание конъюнкции ОК;

Отрицание дизъюнкции ОД;

Удаление импликации УИ;

Отрицание импликации;

Ведение и удаление двойного отрицания ВДО и УДО.

Введение и удаление эквивалентности ВЭ и УЭ

УД. $A \vee B, \neg A \vdash B$

Доказательство

$(A\to B) \to((B \to B) \to((A \vee B) \to B)$ – *СА8*

$A \to(\neg A \to B)$- *з. утверждения антецедента рдф*

$(A \to(\neg A \to B)) \to((A \to\neg A) \to(A \to B))$ - *СА2*

$(A \to\neg A) \to(A \to B)$ – *из 2,3 по тр*

$\neg A \to(A \to\neg A)$ – *СА1*

$\neg A$ – *посылка*

$(A \to\neg A)$ – *из 5,6 по тр*

$(A \to B)$- *из 4,7 по тр*

$(B \to B) \to((A \vee B) \to B)$ *из 1,8 по тр*

$B \to B$ – *з. тождества рдф.*

$(A \vee B) \to B$ – *из 9, 10 по тр*

$A \vee B$ – *посылка*

B – *из 11,12 по тр чтд*

ОД:$\neg(A\vee B) \vdash \neg A\&\neg B$

$\neg(A\vee B)$ – *посылка*

$(\neg \neg A\to \neg(A\vee B))\to ((\neg \neg A \to (A\vee B))\to \neg A)$ – *СА9*

$\neg(A\vee B) \to(\neg \neg A\to \neg(A\vee B))$ - *СА1*

$(\neg \neg A\to \neg(A\vee B))$ – *из 1,3 по тр*

$((\neg \neg A \to (A\vee B))\to \neg A)$ – *из 2,4 по тр*

¬ ¬A →A– з. снятия до рдф

A → (AvB) – CA6

¬¬A → (AvB) – по транзитивности из 6,7

¬A – из 8, 5 по тр

¬B – доказывается аналогичным образом как в шагах 1-9

¬A→¬B→(¬A&¬B) – CA5

¬A&¬B – из 9,10 и 11 по тр 2 раза чтд

ОК ¬(A&B) ⊦ ¬A v ¬B

¬(A&B) –посылка

¬(¬Av¬B)→¬¬A&¬¬B – отрицание дизъюнкции рдф

(¬¬A&¬¬B) →(A&B) – рдф

¬(¬Av¬B) → (A&B) – из 2 и 3 по транзитивности

¬(¬Av¬B) → (A&B) → ¬(A&B) → ¬¬ (¬Av¬B) з. контрапозиции рдф

¬(A&B) → ¬¬ (¬Av¬B) – из 3,5 по тр

¬¬ (¬Av¬B) – из 1,6 по тр

¬¬ (¬Av¬B) → (¬Av¬B) – з. снятия до рдф

(¬Av¬B) – из 7,8 по тр чтд

Доказательства ОИ И УИ опускаются. Самостоятельно доказать их выводимость в САР по алгоритмам доказательств, приведенных ранее.

Правила ВДО и УДО ранее нами уже были доказаны

Правила для эквивалентности ВЭ И УЭ рассматриваются след.образом. Поскольку алфавит САР не содержит знака эквивалентности, то ее можно ввести по определению $A \equiv B =_{df} (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$. Т.е. доказательство этих правил сводится к элементарному доказательству след. выводимостей

ВЭ: (A→B),(B→A) ⊦ (A→B)&(B→A)

УЭ (A→B)&(B→A) ⊦ (A→B)

Завершить доказательство леммы следует рассмотрение доказуемости в САР выводов с использованием эвристических приемов. Эвристики в СНВ можно разделить на два вида: те, которые относятся к прямому выводу, например первая эвристика (введение в качестве посылок антецедентов кратной импликации), и те, которые относятся к косвенному выводу, например эвристики позволяющие дополнительно вводить в качестве допущения отрицание консеквента кратной импликации).

Первые эвристические приемы соответствуют теореме дедукции. Правомерность этой теоремы для САР мы уже доказали в метатеореме 1. Собственно, первая эвристика и основывается на этой теореме.

Вторые эвристические приемы требуется доказать.

Требуется доказать след. правило

$$\frac{\Gamma, \neg C \vdash B \,\&\neg B}{\Gamma \vdash C}$$

$\Gamma, \neg C \vdash B \,\&\neg B$ – посылка

$\Gamma \vdash \neg C \to (B \,\&\neg B)$ - теорема дедукции

$\Gamma \vdash (B \,\&\neg B) \to B$ на основе СА3

$\Gamma \vdash (B \,\&\neg B) \to \neg B$ на основе СА3

$\Gamma \vdash ((B \,\&\neg B) \to B) \to (\neg C \to ((B \,\&\neg B) \to B))$ на основе СА1

$\Gamma \vdash ((B \,\&\neg B) \to \neg B) \to (\neg C \to ((B \,\&\neg B) \to \neg B))$ на основе СА1

$\Gamma \vdash (\neg C \to ((B \,\&\neg B) \to B))$ по mp из 3,5

$\Gamma \vdash (\neg C \to ((B \,\&\neg B) \to \neg B))$ по mp из 4,6

$\Gamma \vdash (\neg C \to ((B \,\&\neg B) \to B)) \to ((\neg C \to (B \,\&\neg B)) \to (\neg C \to B))$ на основе СА2

$\Gamma \vdash (\neg C \to ((B \,\&\neg B) \to \neg B)) \to ((\neg C \to (B \,\&\neg B)) \to (\neg C \to \neg B))$ на основе СА2

$\Gamma \vdash \neg C \to B$ по mp из 7,2, 9 (2 раза)

$\Gamma \vdash \neg C \to \neg B$ по mp из 8,2, 10 (2 раза)

$\Gamma \vdash (\neg C \to \neg B) \to ((\neg C \to B) \to C)$ – на основе СА9

$\Gamma \vdash C$ по mp из 11,12, 13 (2 раза) чтд

Т.о.лемма 1 доказана, т.е. СНВ равнообъемна САР.

Доказательства первой леммы завершает первую половину доказательства метатеоремы 2 о взаимной равнообъемности СНВ и САР. Для завершения доказательства метатеоремы требуется доказать еще одну лемму.

Лемма 2. Все аксиомы и правила вывода САР производны в СНВ. Для доказательства данной лемму требуется средствами СНВ последовательно доказать все аксиомы САР и правило вывода Modus ponens. Опустим доказательство, оставив его для самостоятельного выполнения.

После доказательства леммы 2 можно считать, что метатеорема о равнообъемности СНВ и САР доказана.

Непротиворечивость

- Выделяют два вида непротиворечивости логических систем – семантическую и синтаксическую.
- Семантическая непротиворечивость – непротиворечивость относительно логических значений
- Синтаксическая непротиворечивость – непротиворечивость относительно логических знаков
- ***Определение.***
- *Произвольная логическая теория (система) Т называется семантически непротиворечивой, если любая доказуема в ней формула является тождественно-истинной.*
- ***Метатеорема 3. Система САР семантически непротиворечива***
- **Разрешающая процедура**
- ***Логическая теория называется разрешимой, если существует эффективная процедура (алгоритм), позволяющая для любой формулы языка данной теории в конечное число шагов ответить на вопрос, является ли эта формула теоремой или нет.***

Для различных систем логики высказываний универсальной разрешающей процедурой является метод таблиц истинности. Данный метод эффективно позволяет ответить на вопрос является ли та или иная формула теоремой или нет. Достаточно, чтобы конечной столбец таблицы истинности содержал в себе только значения «истина». Иными словами, если формула является тождественно истинной, т.е. данная формула является теоремой.

Достаточно легко показать, что система САР разрешима, а табличный метод представляет собой ее разрешающую процедуру.

Для того, чтобы доказать семантическую непротиворечивость и разрешимость САР, необходимо показать, что все аксиомы построенные по схемам САР являются тождественно-истинными формулами, а также то, что применяя к аксиомам (тождественно-истинным формулам) единственное правило вывода modus ponens мы получаем также тождественно истинные формулы.

- *Доказательство.*
- Доказать, что все аксиомы, построенные по схемам САР являются тождественно-истинными достаточно легко. Достаточно для каждой схемы составить таблицу истинности для каждой схемы аксиом.
-

A	***B***	***B→A***	***A→ (B→A)***
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	Л	И
л	л	И	И

Таблица 1. Истинные значения СА1

Аналогичным образом можно показать тождественную-истинность для СА2-СА9

Докажем, что применение Modus ponens к тождественно-истинной формуле, дает также тождественно-истинную формулу.

Составим таблицу истинности для МР $A\to B$, $A\vdash B$. При этом поскольку мы рассматриваем применение МР к т.-истинным формулам, то мы полагаем, что посылки $A\to B$, A – т.- истинны. Т.о. из таблицы должно получиться, что B является также т.-истинной формулой

A	***B***	***A→B***
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Таблица 2. Истинностные значения импликации

A	**B**	**A→B**
И	*И*	*И*
~~**И**~~	~~**Л**~~	~~**Л**~~
~~**Л**~~	~~**И**~~	~~**И**~~
~~**Л**~~	~~**Л**~~	~~**И**~~

Таблица 3. Истинностные значения modus ponens

Из таблицы истинности для импликации, необходимо вычеркнуть строки, где A и $A\to B$ принимают значение ложь.

Как видно из таблицы после вычеркивания, B м.б. только истинной. Т.е., если применять МР к т.-истинным формулам, то мы будем получать только т.-истинные формулы.

Тем самым доказано, что из тождественно-истинных аксиом по единственному правилу вывода – modus ponens, - можно получить только такие теоремы, которые являются тождественно-истинными. Следовательно метатеорема о семантической непротиворечивости САР доказана.

- *Примечание. Исходя из непротиворечивости САР можно доказать семантическую непротиворечивость равнообъемной системы АР, достаточно показать инвариантность правила подстановки относительно свойства тождественной-истинности.*

Синтаксическая непротиворечивость

Доказательство метатеоремы 4 о синтаксической непотиворечивости тесно связана с теоремой семантической полноте. Что дает нам некоторое понимание о взаимосвязи синтаксиса и семантики логической теории.

Так, например, синтаксически противоречивая система, которая является семантически непротиворечивой, должна доказывать утверждение некоторой тождественно-истинной формулы и отрицание этой же тождественно истинной формулы.

- *Доказательство метатеоремы 4.*

1. *Доказательство будем вести от противного.*

- *Предположим, что САР синтаксически противоречива, и в ней можно доказать некоторую формулу и доказать отрицание этой же самой формулы*

2. *Допустим, что в САР имеется формула, для которой верно, что как она сам, так и ее отрицание доказуемы в данной системе, т.е. имеет место факт следующей выводимости* $CAP \vdash A \& CAP \vdash \neg A$
3. $CAP \vdash A$
4. $CAP \vdash \neg A$
5. $CAP \vdash A \Rightarrow \models A$ *– метатеорема о семантической полноте САР*
6. $CAP \vdash \neg A \Rightarrow \models \neg A$
7. $\models A$
8. $\models \neg A$
9. $\not\models A$ *– из 8 согласно табличному определению знака* $\neg$
10. *7, 9 – пртврч.*
11. $\neg \exists A(CAP \vdash A \& CAP \vdash \neg A)$ *– метатеорема доказана*

Полнота

Определение

Логическая теория (система) называется *семантически полной*, если в ней доказуема любая тождественно-истинная (общезначимая) формула, сформулированная на языке теории Т.

$$\forall A(\vDash A \Rightarrow T \vdash A)$$

Метатеорема 5. САР семантически полно.

Прежде чем перейти к доказательству метатеоремы сформулируем некоторые вспомогательные понятия

Пусть А – произвольная формула, пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – пропозициональные переменные, входящие в А. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_j$ (где $j <= n$) – логические значения переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$. При этом логическое значение А есть Т.

t_j есть p_n, если p_n принимает логическое значение «истина»,

t_j есть $\neg p_n$, если p_n принимает логическое значение «ложь»,

Т есть А, если А – «истина», Т есть ¬А, сели А – «ложь»

емма. В САР доказуема выводимость

$$t_1, t_2, \ldots, t_j \vdash T$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_j \vdash A$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_j \vdash \neg A$$

Доказательство будем мести методом возвратной индукции по количеству логических связок, входящих в А. Предположим, что лемма верна для всх формул, содержащее меньшее, чем n логических связок (т.е. для случая, когда нет логических связок и когда есть только одно отрицание)

Случай 0. Рассмотрим формулу А, в которую не входит никаких логических связок. В данном случае формула А совпадает с пропозициональной переменной из $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Иными словами, А должна совпадать с одной из переменных, входящих в $p_1, p_2, \ldots, p_n$. . Для того, чтобы доказать лемму для данного случая нужно доказать выводимость $t_j \vdash t_j$ (Т есть t_j)

Поскольку t_j может быть p_n и $\neg p_n$, то требуется доказать две выводимости

$p_n \vdash p_n$ и $\neg p_n \vdash \neg p_n$

Доказательство этих выводимостей в САР элементарно.

Случай 1. Пусть А представлена формулой с отрицанием, например, $\neg$B.

Если формула А = и, то В = л. В силу того, что В содержит меньшее, чем n количество логических терминов, для нее (согласно индуктивному допущению) лемма выполнена. $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg B$ обосновывает выводимость $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash A$

Если А=«л», то требуется доказать выводимость $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg\neg B$. Формула В принимает в этом случае значение «и». Тогда

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B$ - индуктивное допущение

$B \vdash \neg\neg B$ – з. введения двойного отрицания

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg\neg B$ – по транзитивности чтд

Случай 2.Пусть А представлена формулой B&C

Пусть А = «и», требуется доказать $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B\&C$

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B$ – индуктивное допущение

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash C$ – индуктивное допущение

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B\to (C\to(B\&C))$ - СА5

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B\&C$ – по тр

Пусть А = «л», требуется доказать $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg(B\&C)$

Согласно табличным значениям B&C ложно тогда, когда В – ложно или С – ложно. Рассмотрим оба случая.

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg B$ – индуктивное допущение

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash (B\&C) \to B$ – СА3

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash ((B\&C) \to B) \to(\neg B \to \neg(B\&C))$ контрапозиция

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash (\neg B \to \neg(B\&C))$по тр

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg(B\&C)$ – по тр чтд

Случай $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg C$ доказывается аналогично

Случай 3. Пусть А представлена формулой BvC

Пусть А = «и», требуется доказать $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B\vee C$

BvC истинно, если истинно B или C. Рассмотрим оба случая

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B$ – *индуктивное допущение*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B \rightarrow (BvC)$ – *CA6*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash (BvC)$ - *по тр чтд*

В случае $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash C$ – доказывается аналогично

Пусть А = «л», требуется доказать $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg (BvC)$

BvC ложно, если ложно B и C. Тогда

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg B$ – *индуктивное допущение*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg C$ – *индуктивное допущение*

$\vdash (\neg\neg(BvC) \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg\neg(BvC) \rightarrow B) \rightarrow \neg(BvC))$ – *CA9*

$\vdash \neg B \rightarrow (\neg\neg(BvC) \rightarrow \neg B)$ – *CA1*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash (\neg\neg(BvC) \rightarrow \neg B)$

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg\neg(BvC) \rightarrow (BvC)$ - *з. удо*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg C \rightarrow ((BvC) \rightarrow B)$ – *удаление дизъюнкции*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash (BvC) \rightarrow B$ –*по тр*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg\neg(BvC) \rightarrow B$ – *по транзитивности*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg(BvC)$ -*чтд*

Случай 4. Пусть А представлена формулой B→C

Пусть А = «и», требуется доказать $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash B \rightarrow C$.

B → C истинно, если ложно B или истинно C. Рассмотрим оба случая

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg B$ – *индуктивное допущение*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$ – *з. отрицания антецедента*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash (B \rightarrow C)$ *по тр чтд*

Случай, когда C истинно

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash C$

$\vdash C \rightarrow (B \rightarrow C)$ – *CA1*

$t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash (B \rightarrow C)$ *по тр чтд*

Пусть А = «л», требуется доказать $t_1,t_2,\ldots, t_j \vdash \neg(B \rightarrow C)$

$B \to C$ ложно, если истинно B и ложно C.

$t1, t2, \ldots, tj \vdash B$ – индуктивное допущение

$t1, t2, \ldots, tj \vdash \neg C$ – индуктивное допущение

$\vdash (\neg\neg(B \to C) \to \neg B) \to ((\neg\neg(B \to C) \to B) \to \neg(B \to C))$ – CA9

$\vdash (B \to C) \to (\neg C \to \neg B)$ – контрапозиция

$\vdash (B \to C) \to (\neg C \to \neg B) \to ((B \to C) \to \neg C) \to ((B \to C) \to \neg B))$ – CA2

$t1, t2, \ldots, tj \vdash ((B \to C) \to \neg C) \to ((B \to C) \to \neg B))$ по mp

$\vdash \neg C \to ((B \to C) \to \neg C)$ – CA1

$t1, t2, \ldots, tj \vdash ((B \to C) \to \neg C)$ по mp

$t1, t2, \ldots, tj \vdash ((B \to C) \to \neg B))$ по mp

$t1, t2, \ldots, tj \vdash \neg\neg(B \to C) \to (B \to C)$ удаление до

$t1, t2, \ldots, tj \vdash \neg\neg(B \to C) \to \neg B)$ – по транзитивности

$t1, t2, \ldots, tj \vdash (\neg\neg(B \to C) \to B) \to \neg(B \to C)$ – по mp

$\vdash B \to (\neg\neg(B \to C) \to B)$ – CA1

$t1, t2, \ldots, tj \vdash \neg\neg(B \to C) \to B$ по mp

$t1, t2, \ldots, tj \vdash \neg(B \to C)$ – по mp чтд

Т.о. мы рассмотрели все случаи. Лемма доказана.

Метатеорема 5. Система CAP семантически полно.

Доказательство.

Пусть дана произвольная тождественно-истинная формула A. Вне зависимости какие значения примет входящие в ее состав переменные, A истинно всегда. Т.е. для любого набора будет иметь место $t1, t2, \ldots, tj \vdash A$ (согласно доказанной лемме)

$t1, t2, \ldots, pn \vdash A$ – по лемме

$t1, t2, \ldots, \neg pn \vdash A$- по лемме

$t1, t2, \ldots, tj\text{-}1 \vdash pn \to A$ – по теореме дедукции

$t1, t2, \ldots, tj\text{-}1 \vdash \neg pn \to A$ – по теореме дедукции

$\vdash (pn \to A) \to ((\neg pn \to A) \to ((pn \lor \neg pn) \to A))$ – CF8

$\vdash (pn \lor \neg pn) \to A)$ – по mp

$\vdash$ (pn V ¬ pn) – з. исключенного третьего

t1,t2,…, tj-1$\vdash \to$ A

Т.о. переменная pn была исключена из посылок при выведении формулы А. Если повторить это рассуждение n раз, то мы можем исключить все посылки и вывести тождественную формулу из пустого множества посылок $\vdash$ А, что означает, что произвольная тождественно-истинная формула является теоремой САР. Метатеорема доказана.

Синтаксическая полнота

Логическая теория высказываний Т, сформулированная с помощью схем аксиом, считается <u>синтаксически полной (максимальной),</u> если к ней нельзя присоединить без противоречия ни одной недоказуемой в ней схемы формул.

∀A(T$\nvdash$A ⇒T+A противоречива)

Метатеорема 6. САР синтаксически непротиворечива.

Доказательство.

Допустим, что САР не максимальна. Тогда существует некоторая формула А, имеющая набор пропозициональных переменных В1,…,Вn, которая недоказуема в САР.

В силу недоказуемости А в САР, она не будет являться тождественно-истинной формулой (согласно теореме о семантической полноте).

Имеется такой набор В1,…,Вn, при котором А – ложно.

Образуем новую формула А* путем замены в данном наборе В1,…,Вn на тождественно-истинную формулу pV¬p всех истинных переменных, и на тождественно-ложную формулу p&¬p всех ложные переменные.

А* выводима из новой теории САР+А. САР+А $\vdash$A*

А* является тождественно-ложной формулой, т.к мы заменили в А все ложные переменные т.-ложной формулами, а все истинные переменные – т.-истинной формулой.

Тогда если приписать А* знак отрицания, то мы получим т.-истинную формулу, а следовательно она будет выводима а САР: САР $\vdash$¬ А*

Поскольку САР является часть более объемной системы САР+А, то значит, что ¬ А* доказуема САР+А: САР+А ⊢А*

САР+А ⊢А* и САР ⊢¬ А* - противоречие, следовательно, начальное предположение неверно. САР - максимально

Метатеорема доказана.

Рекомендуемая литература по теме

1) Бочаров В.А., Маркин В.И. Введение в логику: учеб. М.: ИД «Форум»: ИНФРА-М, 2011. 560 с

2) Символическая логика: учебник / Под. ред. Я. А. Слинина, Э. Ф. Караваева, А. И. Мигунова. Изд. СПбГУ 2005. 506 с.

3) Математическая логика: Учебное пособие / В.И. Игошин. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 399 с.: 60х90 1/16 + CD-ROM. - (Высшее образование). (переплет, cd rom) ISBN 978-5-16-005204-5, 1000 экз. Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=242738

4) Логика: Учебное пособие / В.К. Батурин. - М.: КУРС: НИЦ Инфра-М, 2012. - 96 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование). (обложка) ISBN 978-5-90555-406-3, 1000 экз

5) Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=262207

6) Логика: Учебник / Демидов И.В.; Под ред. Каверин Б.И., - 7-е изд. - М.:Дашков и К, 2018. - 348 с.: ISBN 978-5-394-02125-1 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/332257