

## НЕОДНОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИОННО-ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ

© 2017 г. В. Ю. Белашов\*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

\*e-mail: vybelashov@yahoo.com

Поступила в редакцию 02.09.2016 г.

В работе на основе модели уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) аналитически и численно изучается структура и динамика ионно-звуковых волн в плазме без магнитного поля, включая случай столкновительной слабoreлятивистской плазмы, когда должны учитываться высокоэнергетичные потоки частиц, которые имеют место в магнитосферной плазме. Показано, что если скорость частиц в плазме приближается к скорости света, то при распространении двумерной уединенной ионно-звуковой волны доминируют релятивистские эффекты, сильно влияющие на ее фазовую скорость, амплитуду и характеристическую длину. Полученные результаты могут иметь применение при изучении нелинейных волновых процессов в магнитосфере, а также в лазерной и астрофизической плазме.

DOI: 10.7868/S0016794017030038

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучение нелинейных волновых процессов в реальных средах с дисперсией, несмотря на имеющий место в последние годы существенный прогресс в данной области, например, [Belashov and Vladimirov, 2005; McKerr et al., 2014, 2016] и многочисленные ссылки в данных работах, по-прежнему остается актуальным. Это, в частности, касается динамики колебаний в случаях, когда в среде (магнитосфера, компактные астрофизические системы, например, белые карлики, лазерная плазма [Haas, 2014; Shukla et al., 1984]) имеют место высокоэнергичные потоки частиц, существенно меняющие такие параметры распространяющихся волновых структур, как их фазовая скорость, амплитуда и характеристическая длина. Исследованиям такого рода релятивистских эффектов в последние и более ранние годы посвящено достаточно большое число работ, например, [Canuto and Ventura, 1977; Giamarchi, 2003; McKerr et al., 2016; Passoni et al., 2010; Rahman and Ali, 2014; Shukla and Eliasson, 2008], однако практически все они рассматривают только одномерное (1D) приближение. В частности, в работах [McKerr et al., 2014, 2016] и более ранних – [Washimi and Taniuti, 1966; Das and Paul, 1985] исследуются релятивистские эффекты на ионно-звуковой ветви колебаний в 1D плазме. Исключение, пожалуй, составляют исследования [Nejon, 1987; Taniuti and Wei, 1968], однако в этих работах изучались лишь некоторые предельные случаи.

Задача нашей работы состоит в том, чтобы исследовать релятивистские эффекты в динамике ионно-звуковых неоднородных нелинейных волновых структур в электронно-ионной плазме, что особенно важно в астрофизических приложениях и в физике магнитосферы. При решении данной задачи, в принципе, можно было бы исходить из общей системы гидродинамических уравнений для релятивистского случая, например, [Elsässer and Popel, 1997], однако, поскольку нас интересуют именно эффекты, проявляющиеся при релятивистских скоростях, в сравнении с нерелятивистским случаем, более логично рассмотреть вначале нерелятивистское приближение, а затем, введя (по аналогии с тем, как это было сделано в работе [Nejon, 1987]) релятивистский фактор, рассмотреть его влияние на параметры неоднородной нелинейной ионно-звуковой волны. Именно такой подход мы будем реализовывать далее.

В отсутствие магнитного поля и при пренебрежимо малой ионной температуре уравнения движения и неразрывности для ионов принимают вид [Белашов, 1997]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{e}{M} \nabla \phi, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

где  $M$  – масса иона,  $\phi$  – электрический потенциал. Сравнение с уравнениями в обобщенных переменных для идеального газа в пренебрежении диссипацией

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{c^2}{\rho}\nabla\rho = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

где  $\rho$  и  $c = c(\rho)$  имеют смысл обобщенных соответственно “плотности” и скорости “звука” при плотности  $\rho$  в пренебрежении дисперсией [Карпман, 1973], показывает, что в данном случае роль  $\rho$  и  $c$  играют ионная плотность  $n_i$  и скорость звука  $c_s = (T_e/M)^{1/2}$ ; “длина” дисперсии принимает вид  $\delta^2 = D^2/2 = T_e/8\pi e^2 n_0$ , где  $n_0$  – невозмущенная электронная плотность. Электроны в ионно-звуковой волне имеют распределение Больцмана:

$$n_e = n_0 \exp(e\phi/T_e), \quad (2)$$

плотности ионов и электронов связаны с потенциалом  $\phi$  уравнением Пуассона

$$\Delta\phi = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (3)$$

Дисперсионное уравнение для системы (1)–(3) имеет вид [Данилов и Петвиашвили, 1983]

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 / (1 + D^2 k^2). \quad (4)$$

Следуя далее технике, развитой в работе [Belashov and Vladimirov, 2005] и исходя из представленных соображений, получим основное уравнение, описывающее динамику ионно-звуковых волн в столкновительной плазме без магнитного поля, обсудим его возможные решения и затем, как указывалось выше, введя релятивистский фактор, рассмотрим эффекты, связанные с движением частиц со скоростями, достаточно близкими к скорости света.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим волновой пакет, распространяющийся в направлении, близком к оси  $x$ . Пусть волновые числа образующих его гармоник малы и удовлетворяют неравенствам

$$kD \ll 1, \quad k_x^2 \gg k_\perp^2, \quad v' \ll c_s, \quad (5)$$

где  $v'$  –  $x$ -компонента ионной скорости. Известно, что акустические волны со слабой дисперсией [первое неравенство (5)] укрупняются в направлении распространения, поэтому в надлежащее время “включается” второе неравенство (5). Условия (5) позволяют привести дисперсионное соотношение (4) к виду

$$\omega \approx c_s k_x \left(1 + k_\perp^2 / 2k_x^2 - \delta^2 k_x^2\right),$$

поэтому, ограничиваясь в разложении квадратичными нелинейными членами и интересуясь решением вида  $u = u(t, x - c_s t, r_\perp)$ , а также проделав процедуру, изложенную в работе [Belashov and Vladimirov, 2005], получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + c_s \frac{\partial v}{\partial x} - c_s \delta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v v_x \right) = \pm \frac{c_s}{2} \Delta_\perp v, \quad (6)$$

после преобразования подобия и перехода в систему координат, движущуюся вдоль оси  $x$  со скоростью  $c_s$ , совпадающее с уравнением Кадомцева–Петвиашвили (КП) стандартного вида [Белашов, 1997]:

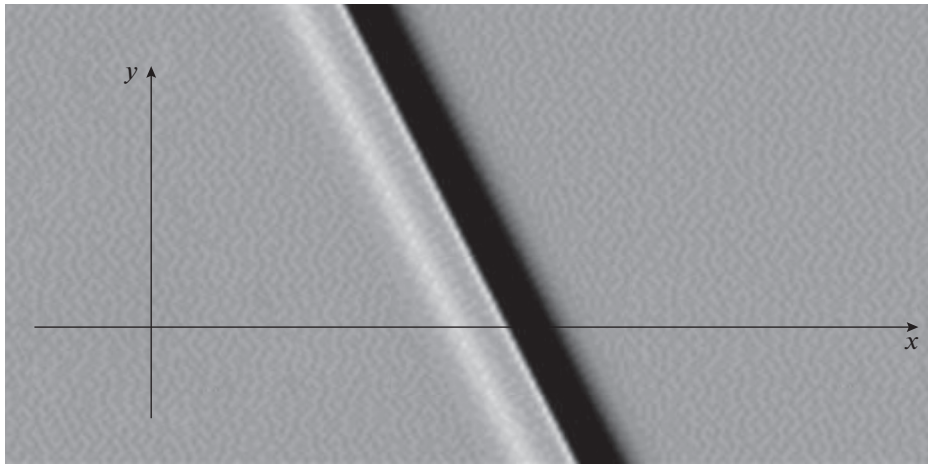
$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = \kappa \int_{-\infty}^x \Delta_\perp u dx, \quad \Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2, \quad (7)$$

где  $\kappa = 1$  относится к положительной,  $\kappa = -1$  – к отрицательной дисперсии, коэффициенты уравнения для случая ионного звука определяются соотношениями [Карпман, 1973]:

$$\alpha = \frac{3}{2} c_s / n_i, \quad \kappa = c_s / 2, \quad \beta = c_s D^2 / 2, \\ c_s = \sqrt{T_e / M}, \quad D^2 = T / 4\pi n_0 e^2.$$

Вообще говоря, для ионного звука в правой части уравнения (6) стоит знак плюс (дисперсия отрицательна, в уравнении (7)  $\kappa = -1$ ). Однако есть случаи, когда для других мод дисперсия положительна, т.е. в правой части уравнения (6) стоит знак минус. Главное слагаемое  $c_s \partial_x v$  описывает распространение волны вдоль оси  $x$  со скоростью звука, все остальные слагаемые, ответственные за дисперсию, нелинейность и дифракцию, описывают медленные изменения звукового поля на фоне быстрого движения волны со скоростью  $c_s$ . Такой тип звуковых волн в основном характерен для изотропных сред (плазма без магнитного поля), но иногда он встречается и в анизотропных средах. Так, если характеристические частоты ионно-звукового волнового пакета много больше ионной циклотронной частоты  $\omega_{Hi}$ , анизотропией можно пренебречь и тем самым свести уравнение (6) к уравнению КП (7) [Данилов и Петвиашвили, 1983]. В случае же, если  $\omega \ll \omega_{Hi}$ , пренебрежение анизотропией становится недопустимым. В этом случае в правой части уравнения движения (1) появляется дополнительный член  $\omega_{Hi} [\mathbf{i}, \mathbf{v}]$  ( $\mathbf{i}$  – безразмерный вектор оси  $x$ ), а знак второго члена в дисперсионном уравнении меняется на минус. При этом, тоже будем иметь уравнение класса КП, но с правой частью вида  $\mu \Delta_\perp \partial_x u$  [Захаров и Кузнецов, 1974]. Верхний знак в данном равенстве, как и в уравнении (6), относится к отрицательной, нижний к положительной дисперсии.

В работе [Belashov, 1997] впервые рассматривался изотропный случай уравнения (7) для ионно-звуковых волн в плазме без магнитного поля. Далее, в [Belashov and Vladimirov, 2005] результаты были обобщены на более широкий спектр нелинейных систем. Используя предложенные в



Общий вид 2D решения уравнения КП (7) при  $\alpha = 6, \beta = 1$ .

этих работах подходы, нами, на основе специально развитых высокоточных методов [Belashov, 1991; Belashov and Vladimirov, 2005], было проведено численное моделирование эволюции уединенного начального возмущения вида  $u(0, x, y) = u_0 \exp[-(x/l_x + y/l_y)^2/L^2]$  с периодическими граничными условиями. На рисунке показан пример результатов, полученных для двумерного (2D) ( $\Delta_{\perp} = \partial_y^2$ ) уравнения (7).

Из рисунка видно, что в результате эволюции 2D звукового возмущения  $u(0, x, y)$  в изотропной плазме формируется 1D солитон уравнения КП, форма которого отвечает аналитическим результатам при отрицательной дисперсии, полученным в работе [Кадомцев и Петвиашвили, 1970] методом Крылова–Боголюбова и в работе [Захаров и др., 1980] методом обратной задачи рассеяния (метод ОЗР). В численных экспериментах было установлено, что при достаточно больших  $t$  в пределах точности численного эксперимента скорость солитона и первые три интеграла 2D уравнения КП сохраняются, а именно:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathfrak{S}_1 &= \partial_t \iint u dx dy = 0 + O(\tau^2, h_{x,y}^4), \\ \partial_t \mathfrak{S}_2 &= \partial_t \iint u^2 dx dy = 0 + O(\tau^2, h_{x,y}^4), \\ \partial_t \mathfrak{S}_3 &= \partial_t \iint \left[ \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 - \frac{1}{2} \kappa \left( \int_{-\infty}^x \partial_y u dx \right)^2 - u^3 \right] \times \\ &\quad \times dx dy = 0 + O(\tau^2, h_{x,y}^4), \end{aligned}$$

где  $\tau$  и  $h_{x,y}$  – шаги по временной и пространственной сетке, соответственно (последние два интеграла имеют смысл импульса и энергии среды, описываемой уравнением КП), что подтверждает ранее полученные результаты [Belashov, 1997] и

сам факт существования в такой физической системе 2D ионно-звукового солитона. Исследуем теперь вопрос влияния на эволюцию ионно-звуковой волны релятивистских эффектов.

### 3. СЛАБОРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Как показано выше, ионно-звуковые волны в плазме могут быть описаны уравнением КП вида (7). Однако, если скорость частиц в плазме достаточно велика (настолько, что уже становится значимой в сравнении со скоростью света), то при распространении 2D уединенной ионно-звуковой волны начинают доминировать релятивистские эффекты, сильно влияющие на ее фазовую скорость, амплитуду и характеристическую длину.

В работе [Nejon, 1987] для 2D ионно-звуковых уединенных волн в слаборелятивистской столкновительной плазме с помощью редуцированного метода возмущений [Taniuti and Wei, 1968] было получено уравнение КП вида (7), которое с учетом релятивистского фактора  $u/c$  может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + \alpha (\vartheta_1) \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \beta (\vartheta_1) \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi^3} = \\ = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} d\xi, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\Phi_1 = \vartheta_1^{1/2} u_1$  – малое возмущение электростатического потенциала  $\Phi = \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots$ ,  $\epsilon$  – малый параметр;  $u_1$  – малое возмущение скорости частиц ( $u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$ ),

Сравнение полученных результатов с результатами для трех предельных случаев

Параметр	Полученные результаты	Результаты работ [Кадомцев и Петвиашвили, 1970; Nejon, 1987; Washimi and Taniuti, 1966; Das and Paul, 1985]		
		$u_0/c = 0, \eta \neq 0$	$u_0/c = 0, \eta = 0$	$u_0/c \neq 0, \eta = 0$
$\lambda$	$u_0 + \vartheta_1^{-1/2}$	1	1	$u_0 + \vartheta_1^{-1/2}$
$\alpha$	$\vartheta_1^{-1/2}(1 - \vartheta_2/\vartheta_1^{3/2})$	1	1	$\vartheta_1^{-1/2}(1 - \vartheta_2/\vartheta_1^{3/2})$
$\beta$	$\vartheta_1^{-1/2}$	1	1	$\vartheta_1^{-1/2}$
$\Phi_0$	$3\delta\vartheta_1^{1/2}(1 - \vartheta_2/\vartheta_1^{3/2})$	$3\delta$	$3s$	$3s\vartheta_1^{1/2}(1 - \vartheta_2/\vartheta_1^{3/2})$
$W$	$\vartheta_1^{-1/4}(2/\delta)^{1/2}$	$(2/\delta)^{1/2}$	$(2/s)^{1/2}$	$\vartheta_1^{-1/4}(2/s)^{1/2}$

$$\alpha(\vartheta_1) = \beta(\vartheta_1) \left( 1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1^{3/2}} \right), \quad \beta(\vartheta_1) = \vartheta_1^{-1/2}, \quad (9)$$

$$\vartheta_1 = 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{u_0}{c} \right)^2, \quad \vartheta_2 = \frac{3u_0}{2c^2}.$$

Уравнение (8) записано в движущейся вдоль оси  $x$  системе координат:  $\xi = \varepsilon^{1/2}(x - \lambda t)$ ,  $\eta = \varepsilon y$ ,  $\tau = \varepsilon^{3/2}t$ , где  $\lambda$  – фазовая скорость. Заметим, что коэффициент при нелинейном члене  $\alpha > 0$ , так как  $\vartheta_1 \gg \vartheta_2$ . В этом случае можно получить стационарное решение в виде распространяющейся в системе уединенной волны. Вводя переменную  $\zeta = k_x \xi + k_y \eta - \omega \tau$  и подставляя ее в уравнение (8), запишем решение в виде двумерной волны

$$\Phi_1 = \Phi_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{W} \left( \zeta + \frac{k_y}{k_x} \eta - \frac{\omega}{k_x} \tau \right) \right\}, \quad (10)$$

где амплитуда  $\Phi_0$  и характеристический размер  $W$  определяются как

$$\Phi_0 = \frac{3\delta}{\alpha(\vartheta_1)}, \quad W = \left[ \frac{2\beta(\vartheta_1)}{\delta} \right]^{1/2}, \quad (11)$$

а  $\delta = \omega/k_x - \frac{1}{2}(k_y/k_x)^2$ , и в качестве граничных

условий выбраны  $\Phi_1 \rightarrow 0$ ,  $\partial_\zeta^n \Phi_1 \rightarrow 0$  при  $n = 1, 2$  и  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Дисперсионное соотношение для описываемых волн будет иметь вид

$$\omega = k_x \left[ 2\beta(\vartheta_1)k_x^2 + k_y^2/2k_x^2 \right].$$

Из уравнения (9) видно, что коэффициенты при нелинейном члене и члене, описывающем дисперсию, определяются релятивистским фактором  $\vartheta_1$ , формулы (11) показывают зависимость амплитуды и характеристического размера 2D ионно-звукового солитона уравнения КП от слабoreлятивистских эффектов. Сравнение следующих из выражений (9)–(11) результатов с резуль-

татами для трех предельных случаев, рассмотренных в работах [Кадомцев и Петвиашвили, 1970; Nejon, 1987; Washimi and Taniuti, 1966; Das and Paul, 1985], представлено в таблице. Здесь

$$s = (\omega/k) \cong v_0 + \vartheta_1^{-1/2} \left( 1 - \frac{1}{2}k^2 \right),$$

$v_0$  – скорость потока ионов (если  $v_0 \sim 0$  и релятивистские эффекты не рассматриваются, то  $s \cong 1 - \frac{1}{2}k^2$ ). Из таблицы видно, что полученные результаты включают и три предельных случая, однако они являются существенно более общими: описывают влияние релятивистских эффектов на такие параметры, как амплитуда, характеристический размер и фазовая скорость 2D уединенной волны, которые, в свою очередь, определяются зависимостями коэффициентов при нелинейном и дисперсионном членах уравнения КП:  $\alpha(\vartheta_1)$  и  $\beta(\vartheta_1)$ , соответственно, от скорости частиц  $u$ . Можно также видеть, что зависимости амплитуды волны и ее характеристического размера от релятивистского фактора существенно отличаются для 2D и 1D случаев (ср. второй и последний столбцы в таблице): в выражениях для  $\Phi_0$  и  $W$  присутствуют параметры  $\delta$  и  $s$ , соответственно.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной работе на основе модели уравнения КП аналитически и численно исследованы структура и динамика ионно-звуковых волн в плазме без магнитного поля, включая случай столкновительной слабoreлятивистской плазмы, когда в соответствующих задачах следует учитывать высокоэнергетичные потоки частиц. В частности, когда кинетическая энергия ионов  $Mu_0^2/2$  при  $u_0/c \cong 0.1$  достигает значений  $\cong 4.7$  МэВ, 2D слабoreлятивистские ионно-звуковые уединенные волны будут описывать движение энергич-

ных протонов со скоростью, значимой в сравнении со скоростью света, что наблюдается в магнитосферной плазме (область захвата, внешний радиационный пояс, плазменный слой) [Vette, 1970]. Нами было показано, что если скорость частиц в плазме принимает значения, соответствующие уже десятым долям скорости света (например, в области максимума внешнего радиационного пояса на магнитной оболочке  $L = 3.1$  [Krimigis and Van Allen, 1967]), то при распространении 2D уединенной ионно-звуковой волны начинают играть существенную роль релятивистские эффекты, которые определяющим образом влияют на фазовую скорость, амплитуду и характеристические размеры 2D волны. Отметим также, что помимо физики нелинейных волновых процессов в магнитосфере, исследование релятивистских нелинейных волн имеет также приложимость в таких физических системах, как лазерная плазма [Shukla et al., 1984] и астрофизика [Canuto and Ventura, 1977; Arons, 1979; Haas, 2014; Rahman and Ali, 2014].

Настоящая работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Белашов В.Ю.* Уравнение КП и его обобщения. Теория, приложения. Магадан: СВКНИИ ДВО РАН. 162 с. 1997.
- *Данилов Ю.А., Петвиашвили В.И.* Солитоны в плазме // Итоги науки и техники. Физика плазмы. М.: ВИНТИ, Т. 4. С. 5–47. 1983.
- *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* О трехмерных солитонах // ЖЭТФ. Т. 66. Вып. 2. С. 594–597. 1974.
- *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 319 с. 1980.
- *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // ДАН СССР. Т. 192. № 4. С. 753–756. 1970.
- *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 175 с. 1973.
- *Arons J.* Some problems of pulsar physics // Space Sci. Rev. V. 24. P. 417–510. 1979.
- *Belashov V.Yu.* The methods for numerical integration of nonlinear evolutional KP-class equations // XX Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Pisa, Italy, 1991. Contributed papers. V. 6. P. 1241–1242. 1991.
- *Belashov V.Yu.* Numerical study of dynamics of 3D ion-acoustic and FMS nonlinear waves in plasma using spectral approach // Proc. of 5th Int. School/Symp. for Space Simulation (ISSS-5), Kyoto, Japan, 1997. RASC, Kyoto Univ., Kyoto, Japan. P. 118–122. 1997.
- *Belashov V.Yu., Vladimirov S.V.* Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo. 305 p. 2005.
- *Canuto V., Ventura J.* Quantizing magnetic fields in astrophysics // Fundamentals of Cosmic Physics. V. 2. Gordon and Breach Science Publishers, UK. P. 203–353. 1977.
- *Das G.C., Paul S.N.* Ion-acoustic solitary waves in relativistic plasmas // Phys. Fluids. V. 28. P. 823–837. 1985.
- *Elsässer K., Popel S.* Plasma equations in general relativity // Phys. Plasmas. V. 4. P. 2348–2356. 1997.
- *Giamarchi T.* Quantum Physics in One Dimension. Oxford University Press, New York. 448 p. 2003.
- *Haas F.* Relativistic hydrodynamic equations for fully degenerate plasma / 17th Int. Congress on Plasma Physics – ICPP 2014, Lisbon, Portugal, 2014. Book of Abstracts. BAP.15. 2014.
- *Krimigis S.M., Van Allen J.A.* Geomagnetically trapped alpha particles // J. Geophys. Res. V. 72. P. 5779–5797. 1967.
- *McKerr M., Haas F., Kourakis I.* Relativistic theory for localized electrostatic excitations in degenerate electron-ion plasmas // Phys. Rev. E. V. 90. Iss. 3. 033112. 2014.
- *McKerr M., Haas F., Kourakis I.* Ion-acoustic envelope modes in a degenerate relativistic electron-ion plasma // Phys. Plasmas. V. 23. 052120. 2016.
- *Nejon Y.* A two-dimensional ion acoustic solitary wave in a weakly relativistic plasma // J. Plasma Phys. V. 38. Part 3. P. 439–444. 1987.
- *Passoni M., Bertagna L., Zani A.* Target normal sheath acceleration: theory, comparison with experiments and future perspectives // New J. Phys. V. 12. 0450122. 2010.
- *Rahman A., Ali S.* Solitary and rogue waves in Fermi-Dirac plasmas: relativistic degeneracy effects // Astrophys. Space Sci. V. 351. Iss. 1. P. 165–172. 2014.
- *Shukla P.K., Yu M.Y., Tsintsadze N.L.* Intense solitary laser pulse propagation in a plasma // Phys. Fluids. V. 27. P. 327–334. 1984.
- *Shukla P.K., Eliasson B.* Nonlinear theory for a quantum diode in a dense Fermi magnetoplasma // Phys. Rev. Lett. V. 100. 036801. 2008.
- *Taniuti T., Wei C.C.* Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation, I // J. Phys. Soc. Japan. V. 24. P. 941–946. 1968.
- *Vette J.I.* Particles and Fields in the Magnetosphere / Ed. McCormac B.M., Reidel. 305 p. 1970.
- *Washimi H., Taniuti T.* Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude // Phys. Rev. Lett. V. 17. № 17. P. 966–971. 1966.