УДК 530.12, 531.51

АНИЗОТРОПНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ

Гатин Х. А.[a,1], Мухарлямов Р. К.[a,2], Сушков С. В.[a,3]

[a] Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

В данной работе мы рассматриваем гравитирующее скалярное поле с неминимальной кинетической связью с кривизной. Полевые уравнения выписаны в поляризованной метрике Гауди. Соответствующее пространство-время является анизотропным и неоднородным. В своих исследованиях мы хотим получить механизмы перехода Вселенной из неоднородной фазы в однородную в рамках теории Хорндески. В этой работе мы ограничиваемся предварительным анализом полевых уравнений.

Ключевые слова: неоднородность, метрика Гауди, скалярное поле.

ANISOTROPIC AND INHOMOGENEOUS COSMOLOGICAL MODELS IN THE SCALAR-TENSOR THEORY OF GRAVITY WITH NON-MINIMAL KINETIC COUPLING

Gatin K. A.[a,1], Muharlyamov R. K.[a,2], Sushkov S. V.[a,3]

[a] Kazan State University, Kazan, 420008, Russia

In this paper, we consider a gravitating scalar field with a non-minimal kinetic coupling to the curvature. The field equations are written in the polarized Gaud? metric. The corresponding space-time is anisotropic and inhomogeneous. In our research, we want to obtain mechanisms for the transition of the Universe from an inhomogeneous phase to a homogeneous one in the framework of Horndesky's theory. In this paper, we restrict ourselves to a preliminary analysis of the field equations.

Keywords: inhomogeneity, Gowdy metric, scalar field.

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.36–40

Введение

Как показывают исследования [1–4], ряд космологических моделей в скалярно-тензорной теории Хорндески обладает градиентной неустойчивостью. Особое поведение параметра Хаббла при приближении к начальной сингулярности в этих моделях свидетельствует либо об отсутствии горизонта частиц, либо о большом его значении. Все эти факторы могут усилить эффекты неоднородности пространства вблизи сингулярности.

В данной работе мы рассматриваем гравитирующее скалярное поле с неминимальной кинетической связью с кривизной [5]. Полевые уравнения выписаны в поляризованной метрике Гауди на торе $T^3 \times R$ [6,7]. Соответствующее пространство-время является анизотропным и неоднородным. Исключая зависимость метрических потенциалов от пространственных координат, метрика Гауди сводится к частному случаю анизотропной однородной метрики Казнера.

[1] E-mail: gatinhasan@mail.ru
[2] E-mail: rmukhar@mail.ru
[3] E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

В своих исследованиях мы хотим получить механизмы перехода Вселенной из неоднородной фазы в однородную в рамках теории Хорндески. В этой работе мы ограничиваемся предварительным анализом полевых уравнений. Как будет видно ниже, неминимальная связь скалярного поля с кривизной приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных, которые нелинейны относительно высших производных. Это факт делает задачу далеко нетривиальной.

1. Полевые уравнения

Рассмотрим гравитационную теорию скалярного поля с неминимальной связью с кривизной, действие которой имеет вид [5]:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{R}{8\pi} - [g_{\mu\nu} + \kappa G_{\mu\nu}]\varphi^{,\mu}\varphi^{,\nu} - 2V(\varphi)\right\}, \tag{1.1}$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрика, $g = \det(g_{\mu\nu})$, R – скаляр кривизны, $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, κ – параметр связи с размерностью квадрата длины. Ковариантный вид полевых уравнения приведены, например, в работе [5]. Представленную теорию будем изучать в поляризованной метрике Гауди [6, 7] на топологии тора $T^3 \times R$:

$$ds^2 = e^{\lambda/2}t^{-1/2}(-dt^2 + dx^2) + t(e^P dy^2 + e^{-P}dz^2), \tag{1.2}$$

где P и λ есть функции от координат $t > 0$ и x. Пространственные координаты x, y и z принимают значения из множества $[0, 2\pi]$. На метрические потенциалы наложены граничные условия: $\lambda(t, 0) = \lambda(t, 2\pi)$, $P(t, 0) = P(t, 2\pi)$.

В метрике (1.2) компоненте G_{00} тензора Эйнштейна соответствует уравнение гравитации

$$\begin{aligned} 00:\quad & -\frac{1}{4}[P_t^2 + P_x^2 - t^{-1}\lambda_t] = 4\pi(\varphi_t^2 + \varphi_x^2) + 8\pi e^{\lambda/2}t^{-1/2}V(\phi) + \\ & + \pi\kappa t^{-3/2}e^{-\lambda/2}[((3P_t^2 + P_x^2)\varphi_t^2 - 4\varphi_t\varphi_x P_t P_x + (P_t^2 - P_x^2)\varphi_x^2)t^2 + \\ & + (-3\varphi_t^2\lambda_t + (-2\varphi_x\lambda_x + 8\varphi_{xx})\varphi_t + \varphi_x^2\lambda_t)t - 2\varphi_x^2]\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для других нетривиальных компонент $G_{\mu\nu}$ имеем уравнения:

$$\begin{aligned} 11:\quad & -\frac{1}{4}[P_t^2 + P_x^2 - t^{-1}\lambda_t] = 4\pi(\varphi_t^2 + \varphi_x^2) - 8\pi e^{\lambda/2}t^{-1/2}V(\phi) - \\ & - \pi\kappa t^{-3/2}e^{-\lambda/2}[((3P_x^2 + P_t^2)\varphi_x^2 - 4\varphi_t\varphi_x P_t P_x + \\ & + (P_x^2 - P_t^2)\varphi_t^2)t^2 + (3\varphi_t^2\lambda_t + (2\varphi_x\lambda_x - 8\varphi_{tt})\varphi_t - \varphi_x^2\lambda_t)t - 2\varphi_t^2]\,, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} 01:\quad & -\frac{1}{4}[2P_xP_t - t^{-1}\lambda_x] = 8\pi\varphi_x\varphi_t + \\ & + \pi\kappa t^{-1/2}e^{-\lambda/2}[2(\varphi_t^2 - \varphi_x^2)P_tP_xt + 2(P_t^2 - P_x^2)\varphi_t\varphi_xt + \\ & + \varphi_x^2\lambda_x - 2\varphi_t\varphi_x\lambda_t - 3\varphi_t^2\lambda_x + 8\varphi_t\varphi_{tx}]\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} 22:\quad & \frac{1}{4}[P_x^2 - P_t^2 + \lambda_{xx} - \lambda_{tt} + 2(P_{tt} - P_{xx}) + 2P_tt^{-1}] = -4\pi(\varphi_x^2 - \varphi_t^2) - \\ & - 8\pi t^{-1/2}e^{\lambda/2}V(\varphi) - (1/2)\kappa\pi t^{-3/2}e^{-\lambda/2}[((-2P_t^2 - 2P_t\lambda_t - 2P_x^2 - 2P_x\lambda_x + \\ & + \lambda_t^2 - \lambda_x^2 + 4P_{xx} + 2\lambda_{xx} + 4P_{tt} - 2\lambda_{tt})\varphi_t^2 + (((8P_x + 4\lambda_x)P_t + 4P_x\lambda_t - 16P_{tx})\varphi_x + \\ & + 8(\varphi_{tt} - \varphi_{xx})P_t - 4(\varphi_{tt} + \varphi_{xx})\lambda_t + 8\varphi_{tx}\lambda_x)\varphi_t + (-2P_t^2 - 2P_t\lambda_t - 2P_x^2 - 2P_x\lambda_x + \\ & + \lambda_x^2 - \lambda_t^2 + 4P_{xx} - 2\lambda_{xx} + 4P_{tt} + 2\lambda_{tt})\varphi_x^2 + (8\varphi_{tx}\lambda_t - 4(\varphi_{tt} + \varphi_{xx})\lambda_x - \\ & - 8P_x(\varphi_{tt} - \varphi_{xx}))\varphi_x - 16\varphi_{tx}^2 + 16\varphi_{tt}\varphi_{xx})t^2 + (6\varphi_t^2P_t + ((-12P_x - 4\lambda_x)\varphi_x - \\ & - 4\varphi_{tt} + 12\varphi_{xx})\varphi_t + (4\lambda_t + 6P_t)\varphi_x^2 - 8\varphi_{tx}\varphi_x)t + (\varphi_x^2 - \varphi_t^2)]\,, \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$
\begin{aligned}
33:\quad & \frac{1}{4}[P_x^2 - P_t^2 + \lambda_{xx} - \lambda_{tt} + 2(P_{xx} - P_{tt}) - 2P_t t^{-1}] = 4\pi(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) - \\
& - 8\pi t^{-1/2} e^{\lambda/2} V(\varphi) + (1/2)\pi\kappa t^{-3/2} e^{-\lambda/2}[((-2P_t^2 - 2P_t\lambda_t + 2P_x^2 - 2P_x\lambda_x + \\
& + \lambda_x^2 - \lambda_t^2 + 4P_{xx} - 2\lambda_{xx} + 4P_{tt} + 2\lambda_{tt})\varphi_t^2 + (((-8P_x + 4\lambda_x)P_t + \\
& + 4P_x\lambda_t - 16P_{tx})\varphi_x + 8(\varphi_{tt} - \varphi_{xx})P_t + 4(\varphi_{tt} + \varphi_{xx})\lambda_t - 8\varphi_{tx}\lambda_x)\varphi_t + \\
& + (2P_t^2 - 2P_t\lambda_t + 2P_x^2 - 2P_x\lambda_x + \lambda_t^2 - \lambda_x^2 + 4P_{xx} + 2\lambda_{xx} + 4P_{tt} - 2\lambda_{tt})\varphi_x^2 + \\
& + (-8\varphi_{tx}\lambda_t + 4(\varphi_{tt} + \varphi_{xx})\lambda_x - 8P_x(\varphi_{tt} - \varphi_{xx}))\varphi_x + 16\varphi_{tx}^2 - 16\varphi_{tt}\varphi_{xx})t^2 + \\
& + (6\varphi_t^2 P_t + ((-12P_x + 4\lambda_x)\varphi_x + 4\varphi_{tt} - 12\varphi_{xx})\varphi_t + \\
& + (-4\lambda_t + 6P_t)\varphi_x^2 + 8\varphi_{tx}\varphi_x)t + (\varphi_t^2 - \varphi_x^2)]\,. \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

Скалярное поле φ удовлетворяет также уравнению

$$
\begin{aligned}
& \varphi_{tt} + t^{-1}\varphi_t - \varphi_{xx} + t^{-1/2}e^{\lambda/2}V_\varphi + (1/8)\kappa t^{-3/2}e^{-\lambda/2}\{[(P_t^2\lambda_t + (-2P_x\lambda_x - 4P_{tt} + 4P_{xx})P_t + P_x^2\lambda_t)\varphi_t + \\
& +(\varphi_x\lambda_x - 2\varphi_{tt} - 2\varphi_{xx})(P_t^2 + P_x^2) + (8\varphi_{tx} - 2\varphi_x\lambda_t)P_tP_x + 4P_x(P_{tt} - P_{xx})\varphi_x]t^2 + [(\lambda_x^2 - \lambda_t^2 - \\
& -3P_x^2 - 3P_t^2 + 2(\lambda_{tt} - \lambda_{xx}))\varphi_t + 6\varphi_xP_tP_x + 2(\varphi_{tt} + \varphi_{xx})\lambda_t - 4\varphi_{tx}\lambda_x]t + \varphi_t\lambda_t - \varphi_x\lambda_x\} = 0\,, \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

которое является следствием уравнений (1.3)-(1.7).

Нам неизвестны три функции P, λ и φ, а система (1.3)-(1.7) содержит пять уравнений, таким образом на первый взгляд система переопределена. По умолчанию уравнения не являются совместными. Сравнивая уравнения (1.3), (1.4), получаем одно из условий совместимости:

$$
\kappa\Big([(P_x^2 + P_t^2)(\varphi_x^2 + \varphi_t^2) - 4P_xP_t\varphi_x\varphi_t]t^2 + 4\varphi_t(\varphi_{xx} - \varphi_{tt})t - (\varphi_x^2 + \varphi_t^2)\Big) + 8te^{\lambda}V = 0\,. \qquad (1.9)
$$

Другое условие:

$$
\lambda_{xt} = \lambda_{tx}\,. \qquad (1.10)
$$

Наложение условий совместимости снимают вопрос переопределённости системы. Продемонстрируем на примере минимальной связи $\kappa = 0$.

В случае минимальной связи $\kappa = 0$ условие совместимости (1.9) приводит к равенству $V = 0$. Тогда уравнение (1.3) и (1.4) совпадают и дают одно следствие:

$$
t^{-1}\lambda_t = 16\pi(\varphi_t^2 + \varphi_x^2) + P_t^2 + P_x^2\,, \qquad (1.11)
$$

и уравнение (1.8) упрощается

$$
\varphi_{tt} + t^{-1}\varphi_t - \varphi_{xx} = 0\,. \qquad (1.12)
$$

Уравнение (1.5) преобразуется так

$$
t^{-1}\lambda_x = 32\pi\varphi_x\varphi_t + 2P_xP_t\,. \qquad (1.13)
$$

Подстановкой (1.11), (1.13) в уравнения (1.6) и (1.7) убеждаемся, что они дают одно и тоже следствие

$$
P_{tt} + t^{-1}P_t - P_{xx} = 0\,. \qquad (1.14)
$$

Другое условие совместимости (1.10) приводит к уже полученному уравнению (1.14). Система (1.11)-(1.14) содержит три независимых уравнения, так как (1.12) есть следствие остальных уравнений. Таким образом, в случаи минимального взаимодействия полевые уравнения совместимы для безмассового скалярного поля, а также в отсутствии скалярного поля. Эти утверждения также справедливы для неполяризованной метрики Гауди на торе $T^3 \times R$.

Минимальная модель исследовалось, например, в работе [8]. Авторы нашли общее решение в виде бесконечного ряда. Было показано, что наличие скалярного поля меняет характер асимптотики метрических потенциалов при приближении к начальной сингулярности. Асимптотика типа

Казнера заменяется более общим поведением типа Белинского-Халатникова-Лифшица [9]. В следствии вида уравнений (1.12), (1.14) решение имеет волновой характер. В ходе эволюции Вселенной в будущее реализуется высокочастотный предел решения, который сглаживает пространственную неоднородность. Вселенная асимптотически приближается к однородной фазе. Таким образом, в минимальной модели реализуется волновой механизм перехода к однородной фазе.

Как мы видим, в неминимальном случае полевые уравнения имеют другую структуру – они содержат нелинейные слагаемые относительно высших производных. Наша задача выявить для этой модели возможные механизмы перехода к однородной фазе. Будет ли допустим волновой вариант? В отличии от минимального случая есть дополнительная степень свободы в виде потенциала скалярного поля $V(\varphi)$. Как вид функции $V(\varphi)$ будет влиять на эволюцию пространственных неоднородностей? Условия совместимости системы полевых уравнений будут ограничивать форму потенциала $V(\varphi)$?

Список литературы

1. Starobinsky A.A., Sushkov S.V., Volkov M.S. *Phys. Rev. D*, 2020, **101**, 064039.
2. Galeev R., Muharlyamov R.K., Starobinsky A.A., Sushkov S.V., Volkov M.S. *Phys. Rev. D*, 2021, **103**, 104015.
3. Muharlyamov R.K., Pankratyeva T.N. *Mod. Phys. Lett. A*, 2022, **37**, 2250108.
4. Muharlyamov R.K., Pankratyeva T.N. *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, **136**, 590.
5. Saridakis E.N., Sushkov S.V. *Phys. Rev. D*, 2010, **81**, 083510.
6. Gowdy R.H. *Phys. Rev. Lett.*, 1971, **27**, 827.
7. Gowdy R.H. *Ann. Phys.*, 1974, **83**, 203.
8. Charach Ch., Malin S. *Phys. Rev. D*, 1979, **19**, 1058.
9. Belinskii V.A., Lifshitz E.M., Khalatnikov I.M. *Sov. Phys. Usp.*, 1971, **13**, 745; *Adv. Phys.*, 1970, **19**, 525.

References

1. Starobinsky A.A., Sushkov S.V., Volkov M.S. *Phys. Rev. D*, 2020, **101**, 064039.
2. Galeev R., Muharlyamov R.K., Starobinsky A.A., Sushkov S.V., Volkov M.S. *Phys. Rev. D*, 2021, **103**, 104015.
3. Muharlyamov R.K., Pankratyeva T.N. *Mod. Phys. Lett. A*, 2022, **37**, 2250108.
4. Muharlyamov R.K., Pankratyeva T.N. *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, **136**, 590.
5. Saridakis E.N., Sushkov S.V. *Phys. Rev. D*, 2010, **81**, 083510.
6. Gowdy R.H. *Phys. Rev. Lett.*, 1971, **27**, 827.
7. Gowdy R.H. *Ann. Phys.*, 1974, **83**, 203.
8. Charach Ch., Malin S. *Phys. Rev. D*, 1979, **19**, 1058.
9. Belinskii V.A., Lifshitz E.M., Khalatnikov I.M. *Sov. Phys. Usp.*, 1971, **13**, 745; *Adv. Phys.*, 1970, **19**, 525.

Авторы

Гатин Хасан Айдарович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: gatinhasan@mail.ru

Мухарлямов Руслан Камилевич, к.ф.-м.н., доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: rmukhar@mail.ru

Сушков Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Гатин Х. А., Мухарлямов Р. К., Сушков С. В. Анизотропные и неоднородные космологические модели в скалярно-тензорной теории гравитации с неминимальной кинетической связью. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2023. № 1. С. 36–40.

Authors

Gatin Khasan Aidarovich, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: gatinhasan@mail.ru

Muharlyamov Ruslan Kamilevich, Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: rmukhar@mail.ru

Sushkov Sergey Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Docent, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Please cite this article in English as:
Gatin K. A., Muharlyamov R. K., Sushkov S. V. Anisotropic and inhomogeneous cosmological models in the scalar-tensor theory of gravity with non-minimal kinetic coupling. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 36–40.