КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Кафедра компьютерной математики и информатики

Профессионально ориентированные задачи по дисциплине «Линейная алгебра» с применением программ Maxima и Excel

для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям.

Учебно-методическое пособие

Казань – 2018

УДК 330.4

Печатается по решению

Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Протокол №1 от 24 октября 2018 г.

заседания кафедры компьютерной математики и информатики

Протокол №1 от 10 октября 2018 г.

Рецензенты:

к.т.н., доц. КГАСУ Т.Ю. Горская,

к.т.н., доц. КФУ А.Г. Багоутдинова

Воронцова Валерия Леонидовна,

Махмутова Диана Ильдаровна,

Опокина Надежда Анатольевна

Профессионально ориентированные задачи по дисциплине «Линейная алгебра» с применением программ Maxima и Excel для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям. Учебно-методическое пособие, Казань: КФУ, 2018 г. – 124 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки по направлениям 38.03.01 «Экономика», 38.05.01 «Экономическая безопасность», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.03 «Управление персоналом», 38.03.06 «Торговое дело», 43.03.01 «Сервис», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление» и др.

Пособие включает необходимые теоретические сведения, используемые при решении задач, подробно разобранные решения типовых задач как традиционными методами, так и с помощью компьютерных программ Maxima и Excel, а также профессионально ориентированные практические задания, которые могут быть использованы в качестве аудиторной и внеаудиторной работы студентов.

Для усвоения материала данного пособия достаточно владения основными понятиями дисциплины «Линейная алгебра». Данное пособие будет полезно всем желающим овладеть методикой решения задач линейной алгебры с экономическим содержанием.

Содержание

Введение

Одна из основных задач профильного обучения заключается в подготовке студентов к успешной профессиональной деятельности. Применение математического инструментария является важной частью профессиональной компетентности будущего специалиста.

Учебно-методическое пособие «Профессионально ориентированные задания по дисциплине «Линейная алгебра» с применением программ Maxima и Excel» ориентировано на изучение прикладных вопросов «Линейной алгебры» в экономической области и выработку у обучающихся опыта применения методов и моделей линейной алгебры к решению профессионально ориентированных задач.

Каждый параграф данного учебно-методического пособия содержит краткие теоретические сведения, примеры к изложенному теоретическому материалу, примеры приложения рассматриваемой темы в экономике, задания для самостоятельной работы. Решение задач с экономическим содержанием предложено несколькими способами, а именно традиционным способом, а также с помощью компьютерных программ Maxima и Excel. Эти примеры призваны сформировать у студентов понимание значимости линейной алгебры в будущей профессиональной деятельности, а также навыки математического моделирования и использования информационных технологий. В конце пособия приводится контрольная работа, содержащая 30 вариантов.

Для работы с компьютерным пакетом Maxima авторы рекомендуют ознакомится с главой 2 «Работа в программе Maxima» учебно-методического пособия «Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima для студентов, обучающихся по специальности “социология”» Абзалилов Д.Ф., Малакаев М.С., Широкова Е.А.

Набор предлагаемых задач можно использовать в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов, при проведении контрольных работ, собеседований и экзаменов. Учебно-методическое пособие предназначается для студентов экономических специальностей университета.

1. Использование алгебры матриц

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеют большое значение для экономистов, основная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в простой и компактной матричной форме. С помощью матриц удобно описывать различные экономические закономерности. Особенно этот вопрос стал актуальным при разработке баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричном виде.

Краткие теоретические сведения

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из действительных чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Горизонтальные ряды чисел матрицы называются ее *строками,* а вертикальные — *столбцами.* Числа a_{ij}, называются *элементами матрицы.* Размерность матрицы определяется количеством строк и столбцов, а именно, матрица, имеющая m строк и n столбцов, является матрицей размерности $m \times n$. Если m=n, то матрица называется *квадратной порядка n.*

Пусть заданы две матрицы одинаковой размерности $m\times n$: A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}).

а) Сложение матриц.

Суммой матриц называется $m\times n$ матрица $C = A + B = (c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2. \dots, n.$$

Другими словами, при сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+7 \\ -2+6 & 5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

б) Умножение матрицы на число.

Произведение λA *матрицы A на число* λ получается умножением всех элементов матрицы A на λ.

Пример.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 30 \\ -10 & 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

в) Умножение матриц.

Пусть заданы $m \times n$-матрица $A = (a_{ij})$ и $n \times p$-матрица $B=(b_{ij})$. *Произведением* этих матриц называется $m \times p$-матрица $C = AB = (c_{ik})$, элементы которой задаются формулой

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+ a_{i2}b_{2k}+\ldots+ a_{in}b_{nk}\,,\ i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, p.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 5 & 1\cdot 4+2\cdot 6 & 1\cdot 1+2\cdot 7 \\ 3\cdot 1+4\cdot 5 & 3\cdot 4+4\cdot 6 & 3\cdot 1+4\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 15 \\ 23 & 36 & 31 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной.* Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой.*

Пусть A — произвольная матрица. Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой столбцов строками с теми же номерами, называется *транспонированной по отношению к* A.

Рассмотрим типичные задачи, использующие понятие матриц и их свойства.

ПРИМЕР 1.1. Предприятие выпускает 4 вида изделий с использованием 4-х видов сырья. Нормы расхода сырья даны в таблице 1:

Таблица 1

Вид изделия	Вид сырья			
	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	1	2	5	6
3	7	2	3	2
4	4	5	6	8

Требуется найти затраты сырья на каждый вид изделия при заданном плане их выпуска: соответственно 60, 50, 35 и 40 ед.

РЕШЕНИЕ. Составим матрицу A нормы расхода сырья: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ и матрицу выпуска продукции $B = (60\ \ 50\ \ 35\ \ 40)$. Тогда решение задачи дается матрицей затрат, элементы которой и являются величинами затрат сырья по каждому его виду; эта матрица вычисляется как произведение матрицы B на матрицу A:

$$BA = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 35 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 120+50+245+160 & 180+100+70+200 & 240+250+105+240 & 300+300+70+320 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 575 & 550 & 835 & 990 \end{pmatrix}.$$

Покажем решение этой задачи с помощью компьютерного пакета Excel. Введем данные о норме расхода сырья и выпуске продукции. Затраты сырья будут рассчитываться с помощью функции МУМНОЖ(массив1; массив2). Количество столбцов аргумента массив1 должно совпадать с количеством строк аргумента массив2; при этом оба массива должны содержать только числа. Массив 1- это выпуск продукции, массив 2 – нормы расхода сырья. Введем формулу в ячейку, как показано на рис.1

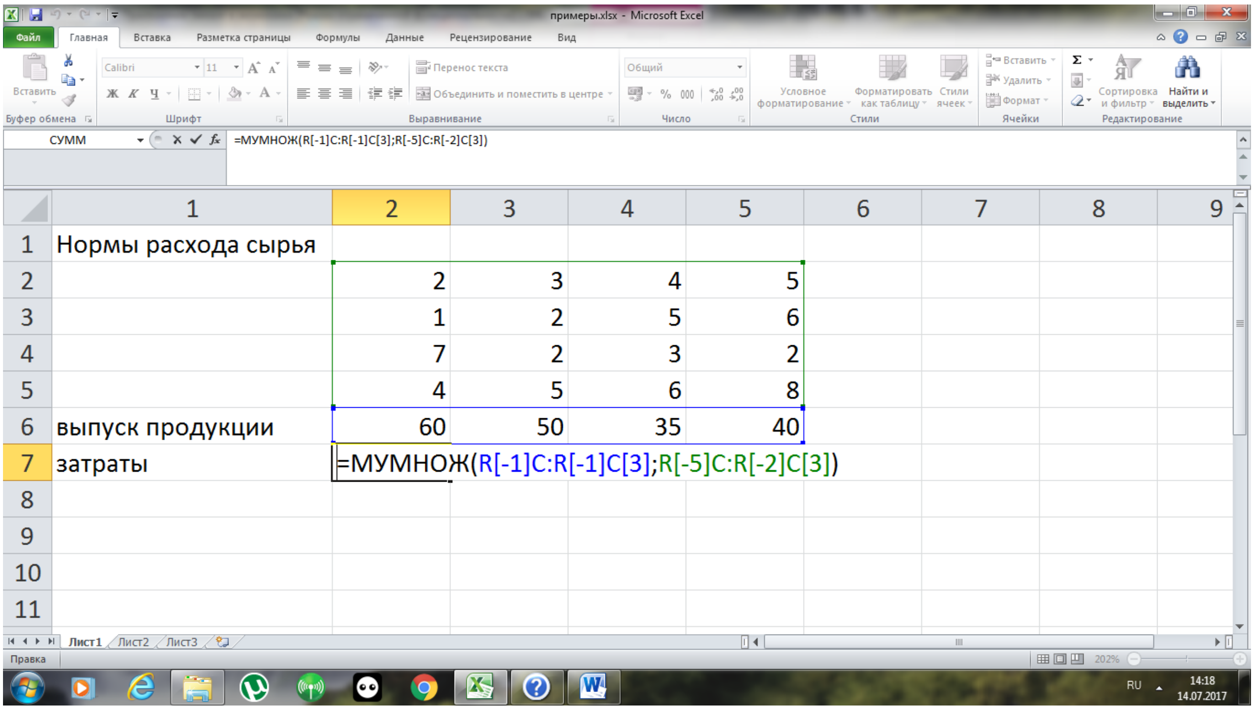


Рис 1.

Формулу в этом примере необходимо ввести как формулу массива. Выделите диапазон в строке из 4 ячеек, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем — клавиши CTRL+SHIFT+ВВОД. Если формула не будет введена как формула массива, единственное значение будет равно 575. Полученный результат представлен на рис.2

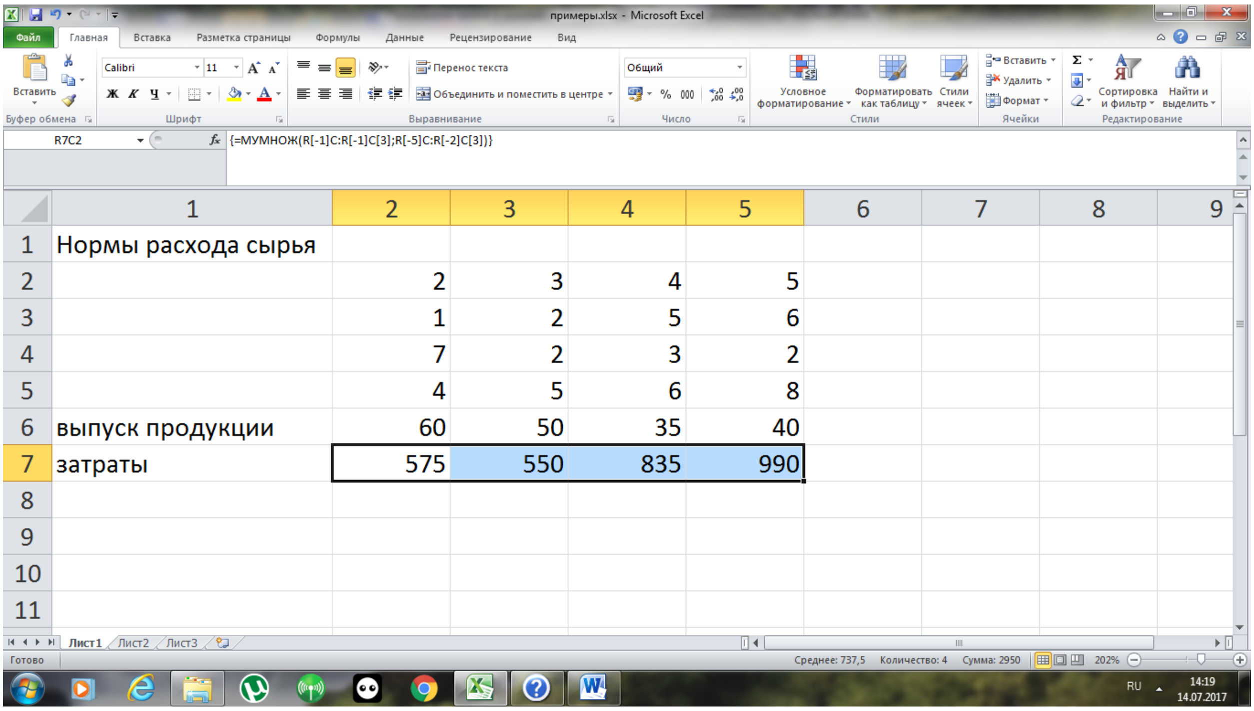


Рис.2

Решим данную задачу с помощью компьютерного пакета “MAXIMA”.

Для введения матрицы А нормы расхода сырья в командной строке выберем вкладку Алгебра $\rightarrow$Ввести матрицу… (рис. 3).

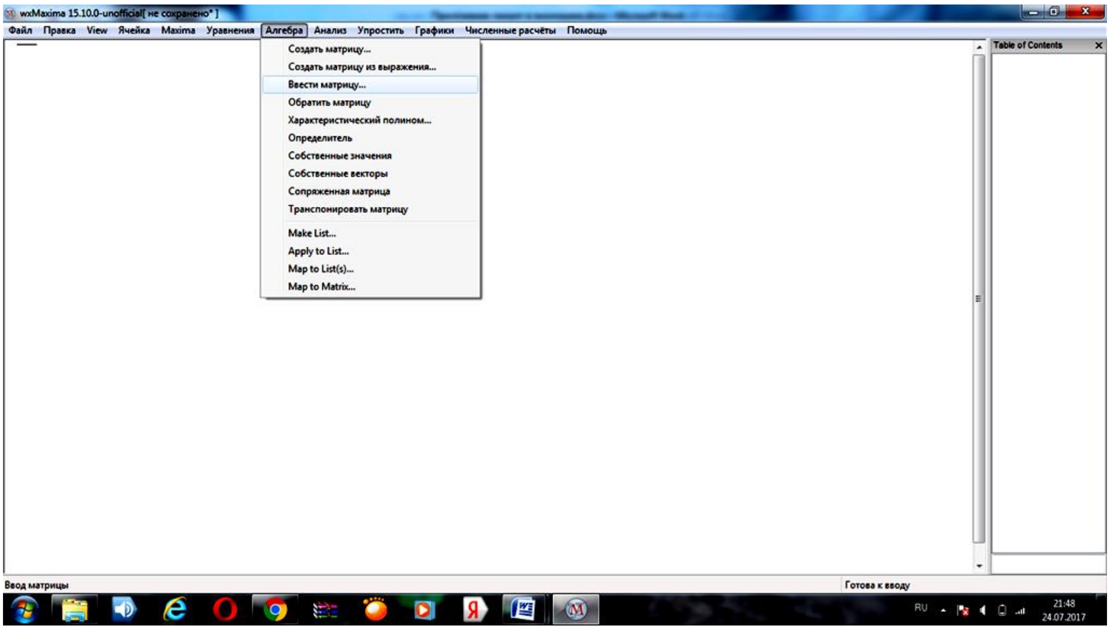


Рис.3

Задается размерность матрицы и имя (рис.4).

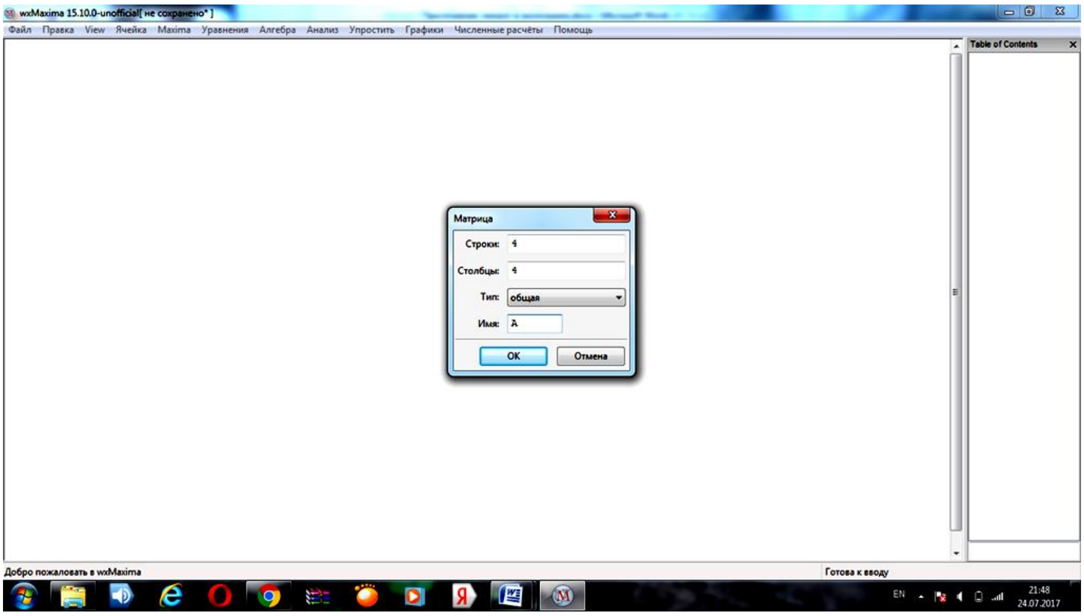


Рис.4

Вводятся данные матрицы в таблицу (рис.5).

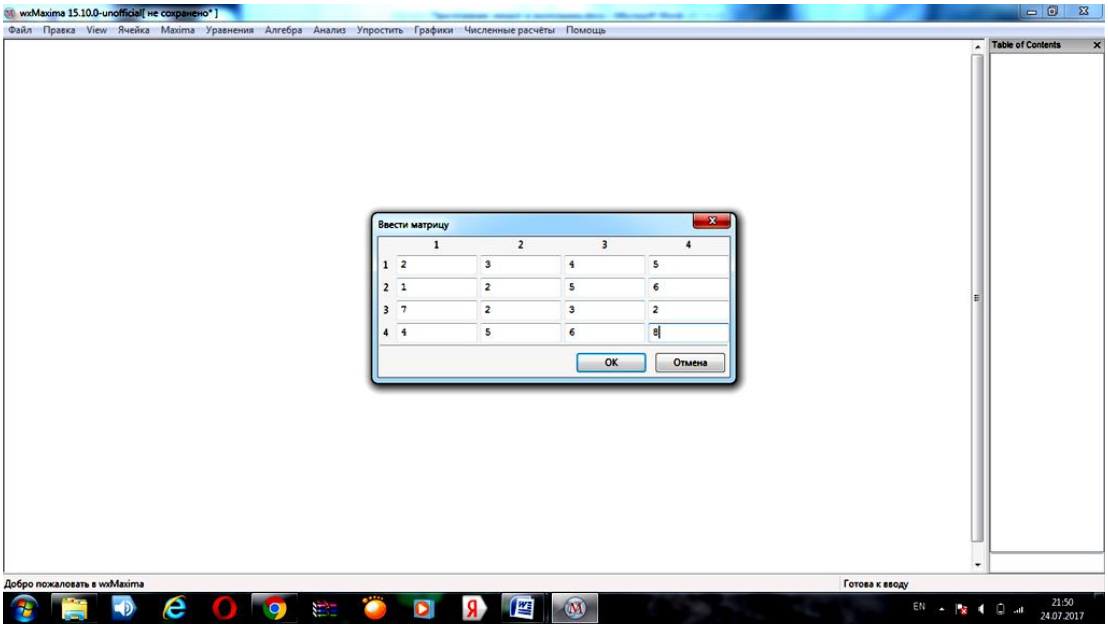


Рис.5

После нажатия «ОК», на экране появится матрица. Аналогично введем матрицу выпуска продукции B (рис.6, рис.7).

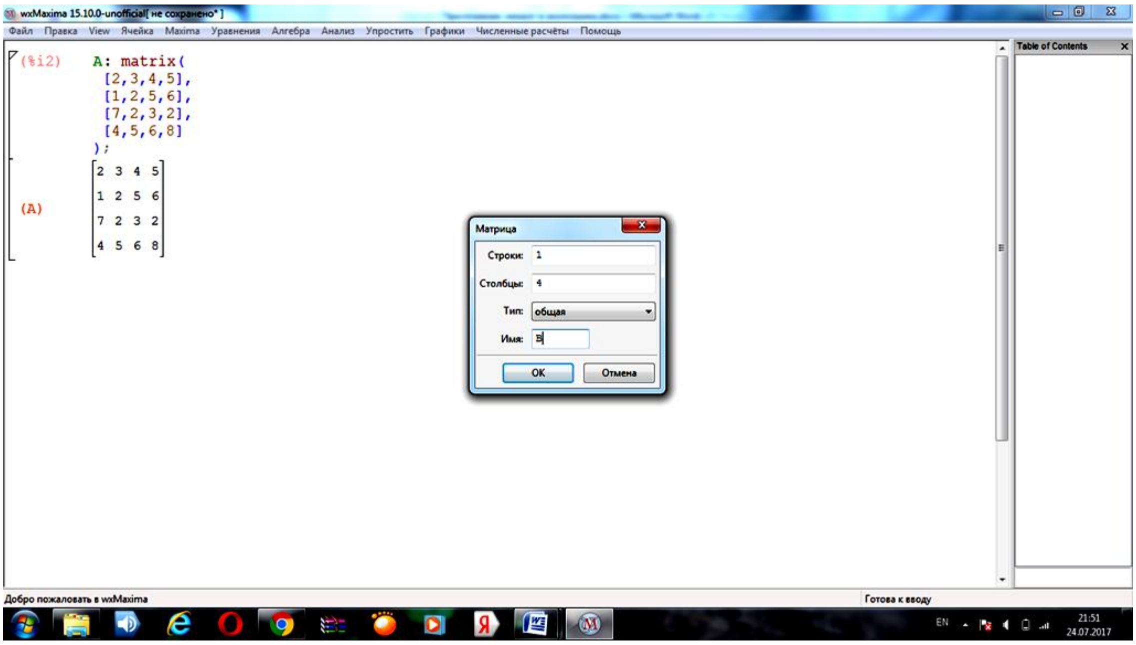


Рис.6

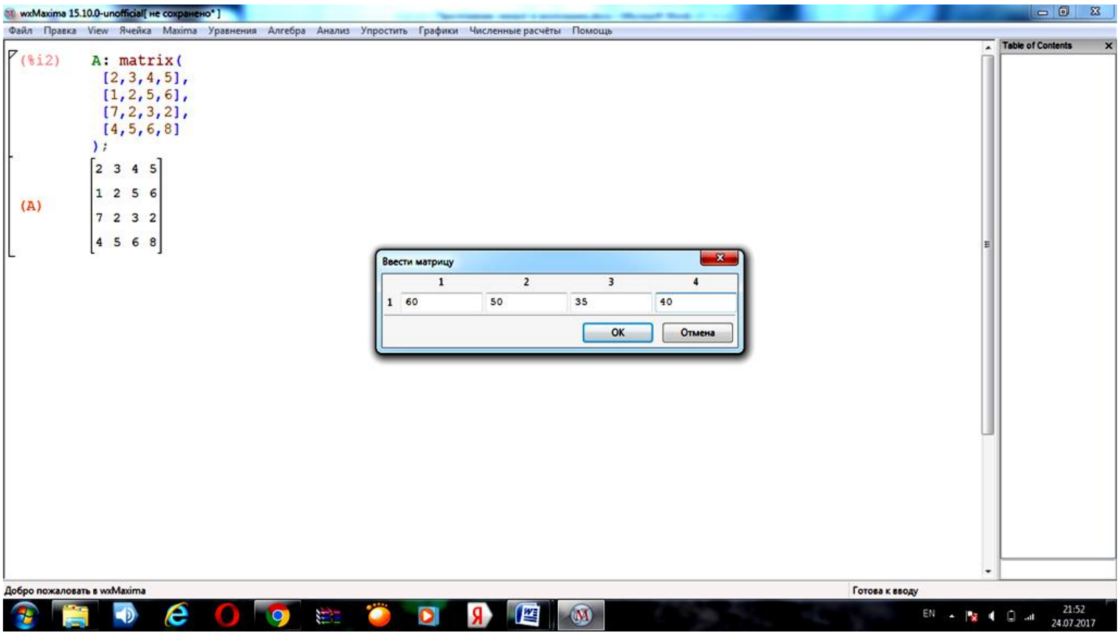


Рис.7

Для нахождения матрицы затрат введем команду **B.A** и нажмем Shift+Enter. Результат представлен на рис.8.

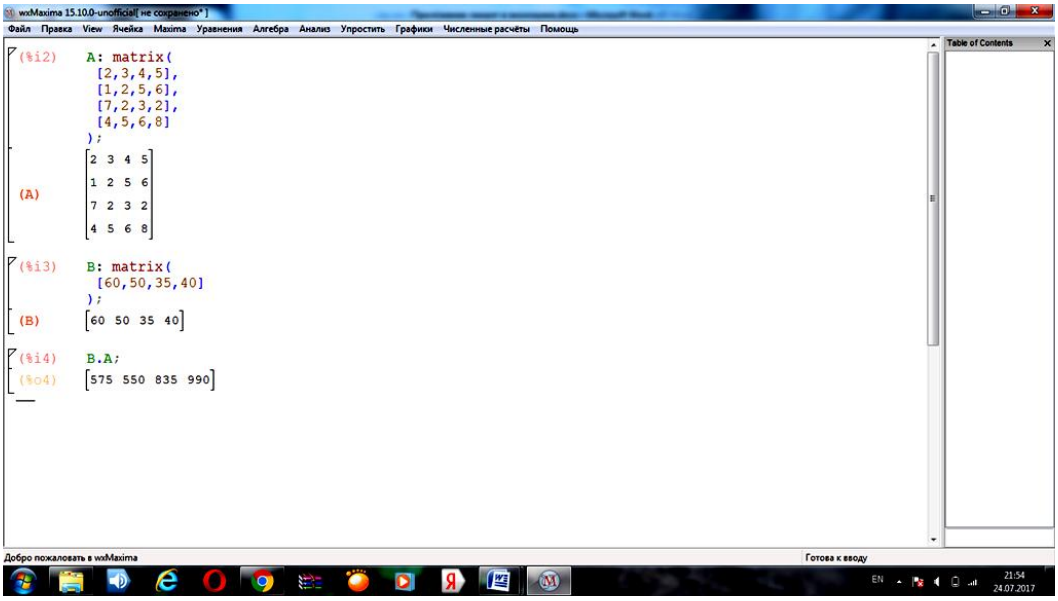


Рис.8

ПРИМЕР 1.2. Пусть затраты 4-х видов сырья на выпуск 4-х видов продукции характеризуются матрицей А, приведенной в предыдущей задаче. Требуется найти:

а) общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку;

б) общие затраты на сырье и его транспортировку при условии заданного плана предыдущей задачи, если известны себестоимости каждого вида сырья и его доставки (соответственно 4, 6, 5, 8 и 2, 1, 3, 2 ден. ед.).

РЕШЕНИЕ. Составим матрицу себестоимостей сырья и его доставки (соответственно 1-я и 2-я строки): $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Произведение матрицы А на транспонированную матрицу C^T дает ответ на заданный вопрос:

$$AC^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix}.$$

б) Суммарные затраты на сырье и его доставку (в денежных единицах) при плане выпуска продукции $B = (60\ 50\ 35\ 40)$ определяются произведением матрицы B на матрицу AC^T:

$$BAC^T = (60\,50\,35\,40) \cdot \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix} = (17695 \quad 6185).$$

Покажем решение этой задачи с помощью компьютерного пакета Excel.

а) Введем данные о норме расхода сырья и себестоимости сырья и его доставки. Транспонируем матрицу себестоимости. Для этого воспользуемся функцией **ТРАНСП**, которая возвращает вертикальный диапазон ячеек в виде горизонтального и наоборот. Аргументом функции ТРАНСП является массив (диапазон ячеек) на листе, который нужно транспонировать. Транспонирование массива заключается в том, что первая строка массива становится первым столбцом нового массива, вторая — вторым столбцом и т. д. Введем формулу ТРАНСП в ячейку, массивом которой является себестоимость сырья и его доставка.(рис.9)

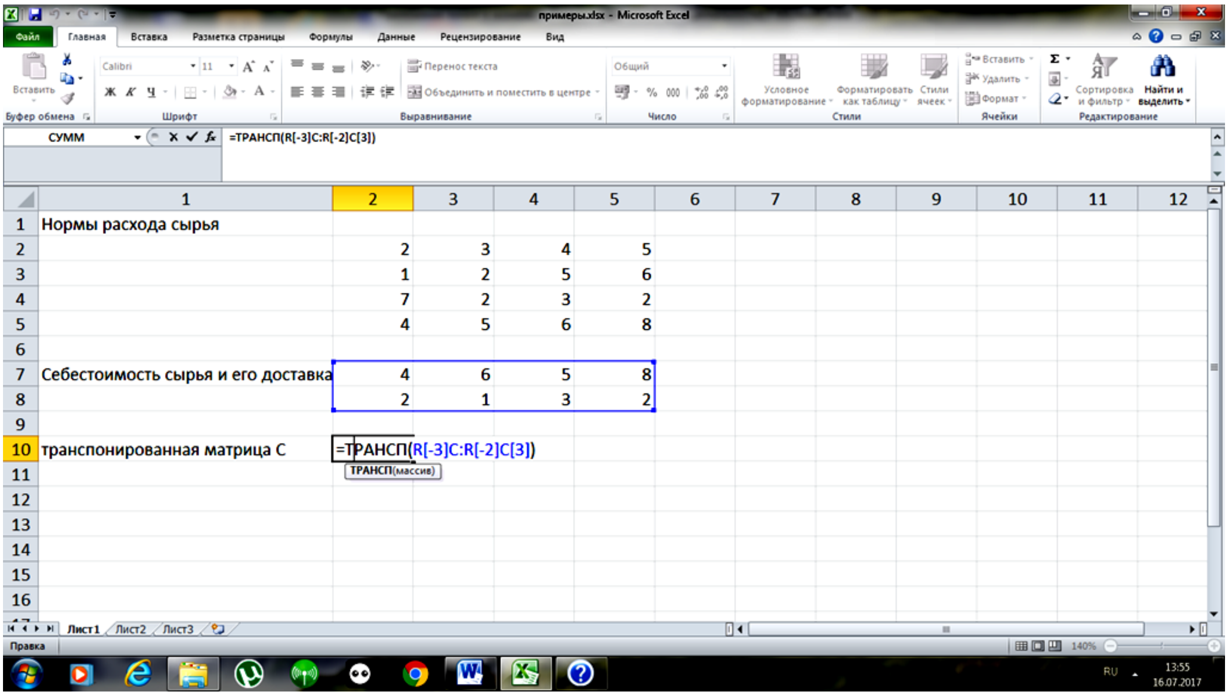


Рис. 9

Чтобы функция **ТРАНСП** работала правильно, формулу в этом примере необходимо ввести как формулу массива. Выделите диапазон, состоящий из 2-х столбцов и 4-х строк, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем — сочетание клавиш CTRL + SHIFT + ВВОД. Результат транспонирования представлен на рис.10.

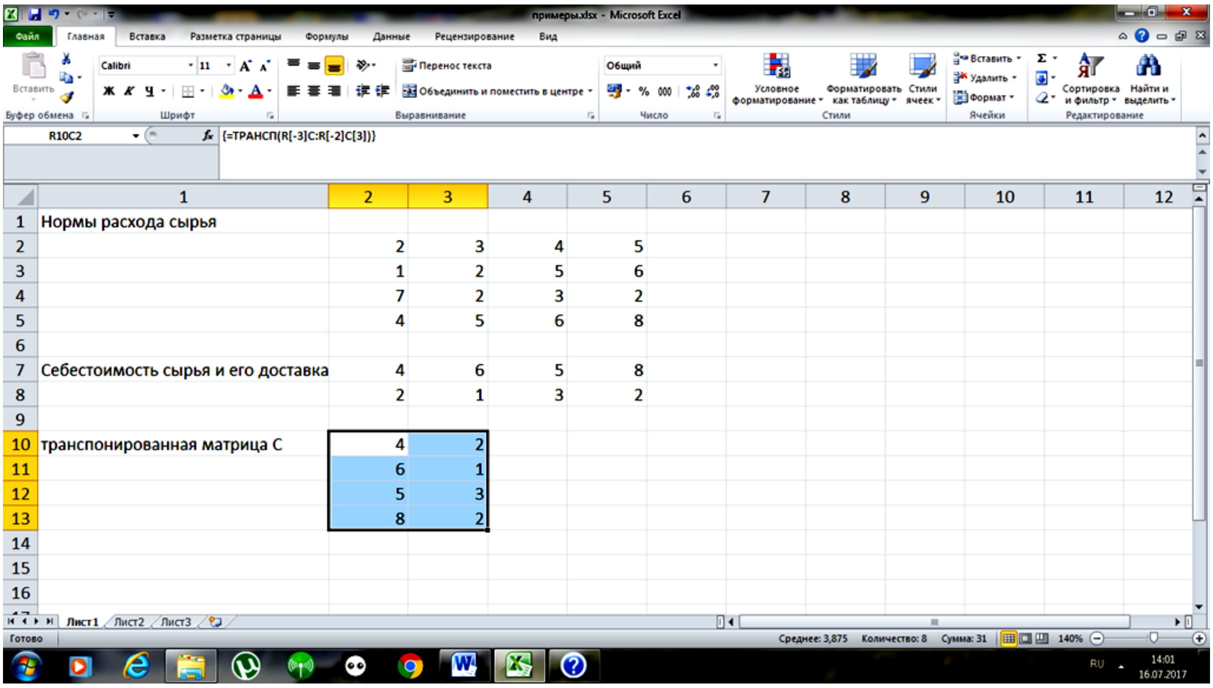


Рис.10

Общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку находятся, как произведение нормы расхода сырья на транспонированную матрицу себестоимости сырья и его доставки с помощью функции МУМНОЖ(массив1; массив2). Массив 1- это нормы расхода сырья, массив 2 – транспонированная матрица себестоимости сырья и его доставки. Введем формулу в ячейку, как показано на рис.11.

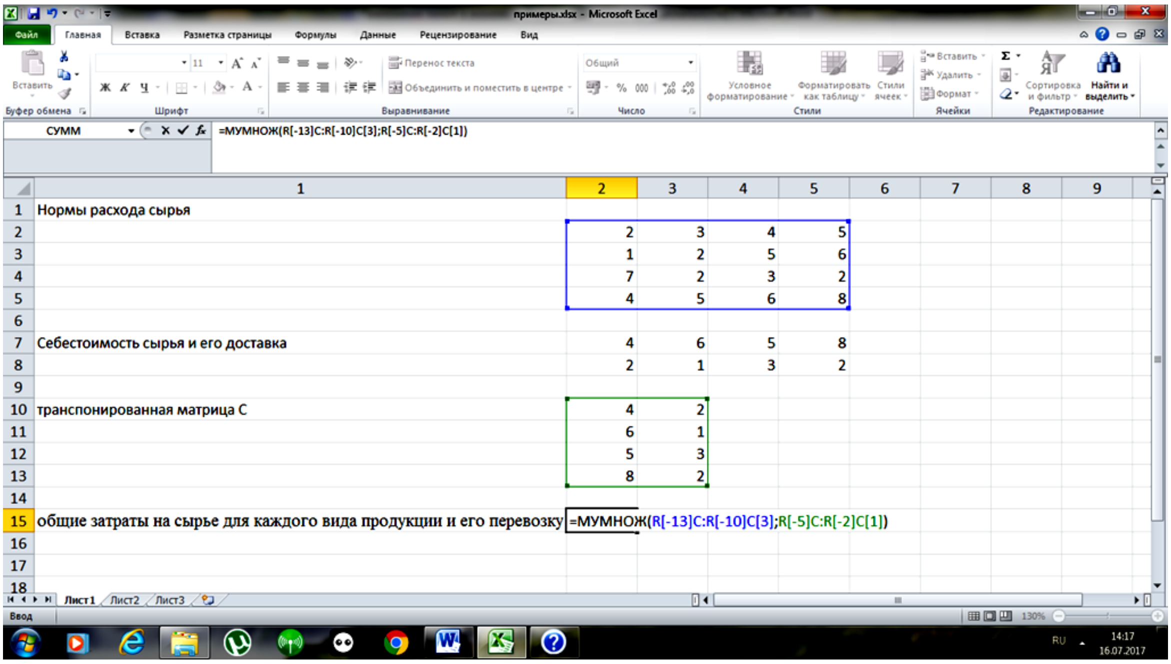


Рис.11

Выделите диапазон, состоящий из 2-х столбцов и 4-х строк, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем — клавиши CTRL+SHIFT+ВВОД. Полученный результат представлен на рис.12.

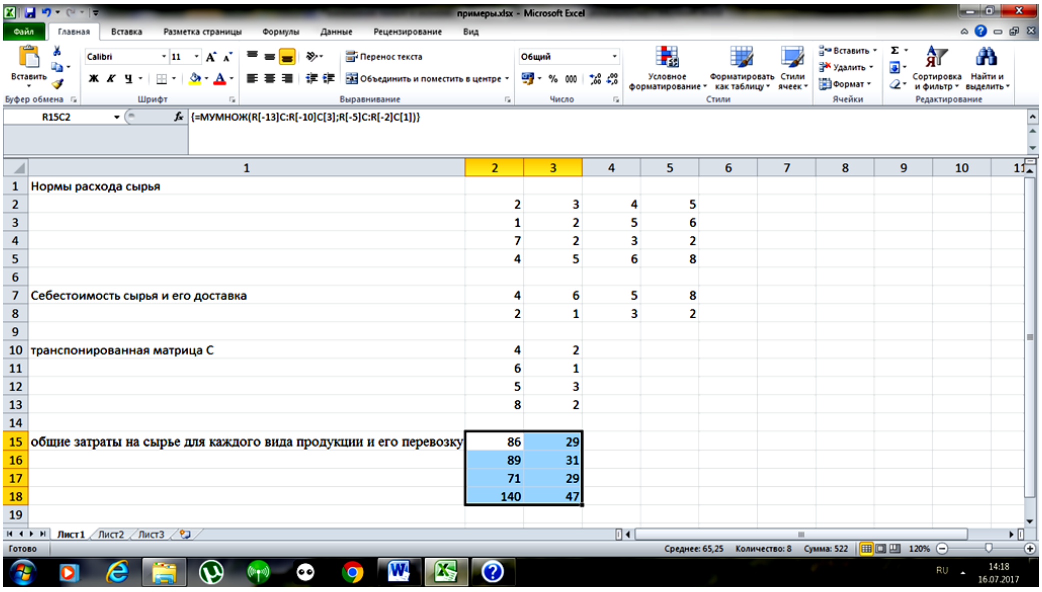


Рис.12

б) Введем заданный план выпуска. Для нахождения общих затрат на сырье и его транспортировку при условии заданного плана будем использовать функцию МУМНОЖ(массив1; массив2). Массив 1- это план выпуска, массив 2 – общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку. Введем формулу в ячейку, как показано на рис.13.

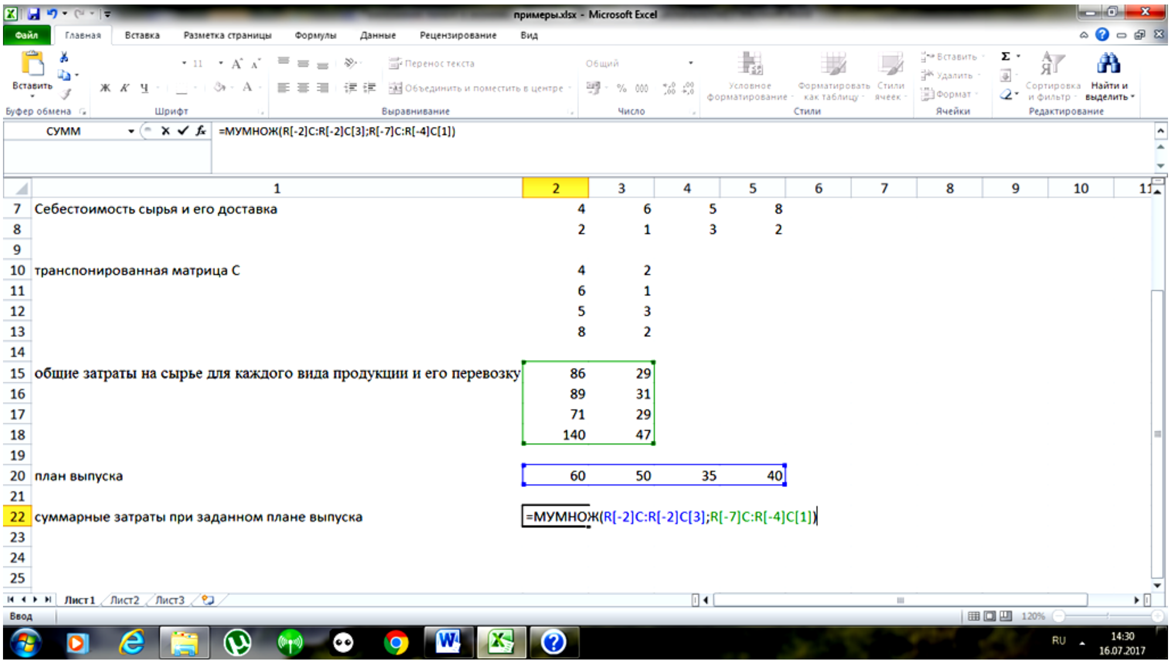


Рис. 13

Выделите диапазон в строке, состоящий из 2-х столбцов, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем — клавиши CTRL+SHIFT+ВВОД. Полученный результат представлен на рис.14.

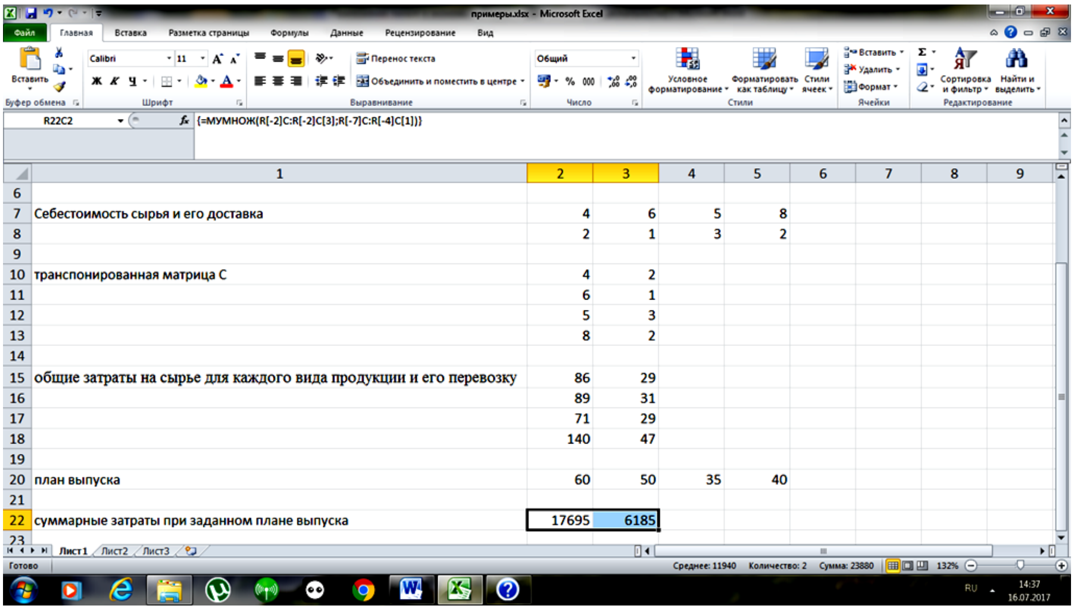


Рис.14

Решим данную задачу с помощью компьютерного пакета “MAXIMA”.

а) Введем две матрицы: А – матрица норм затрат сырья и С- себестоимость сырья и его доставки (рис.15).

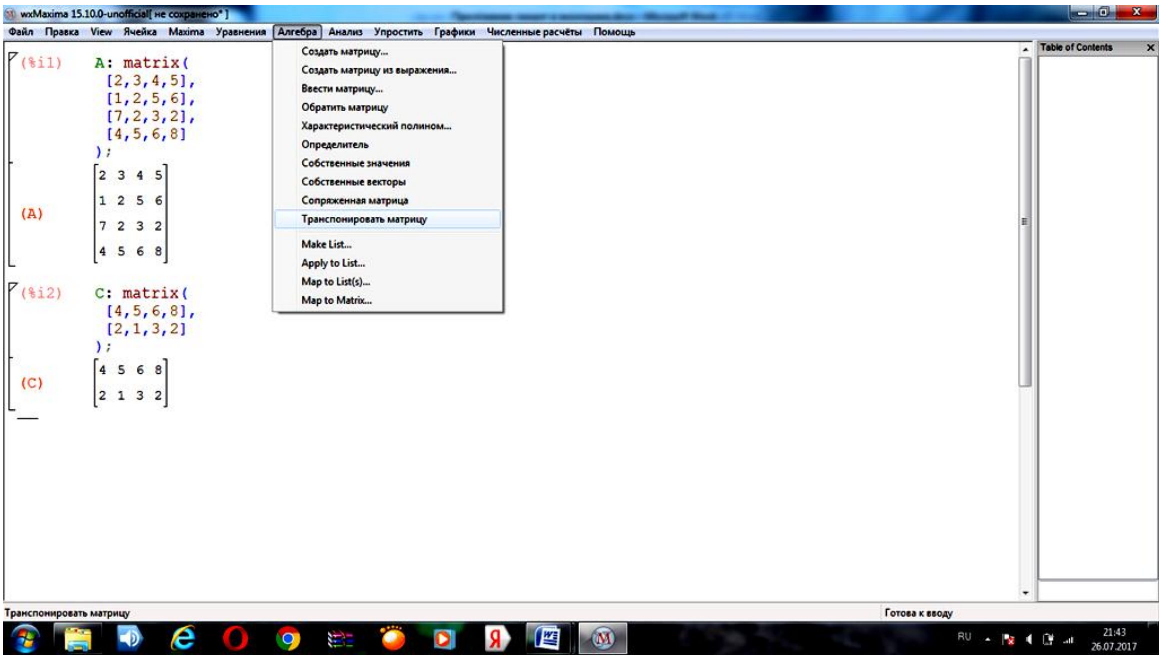


Рис.15

Транспонируем матрицу себестоимости. Для этого используем команду **transpose(C)** (рис.16).

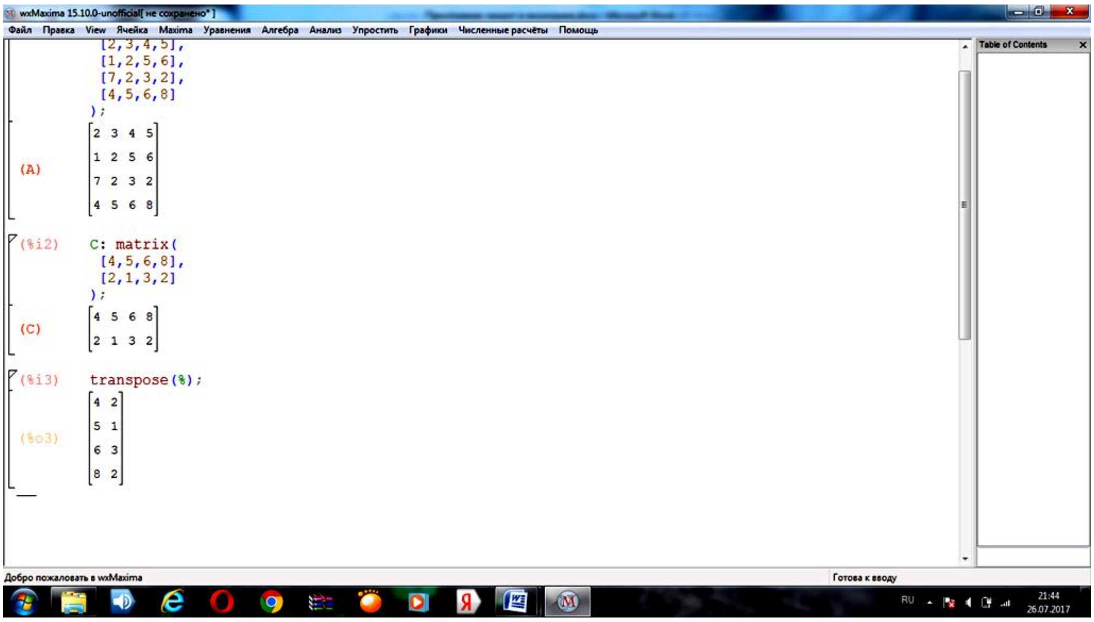


Рис.16

Общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку находятся, как AC^T (рис.17).

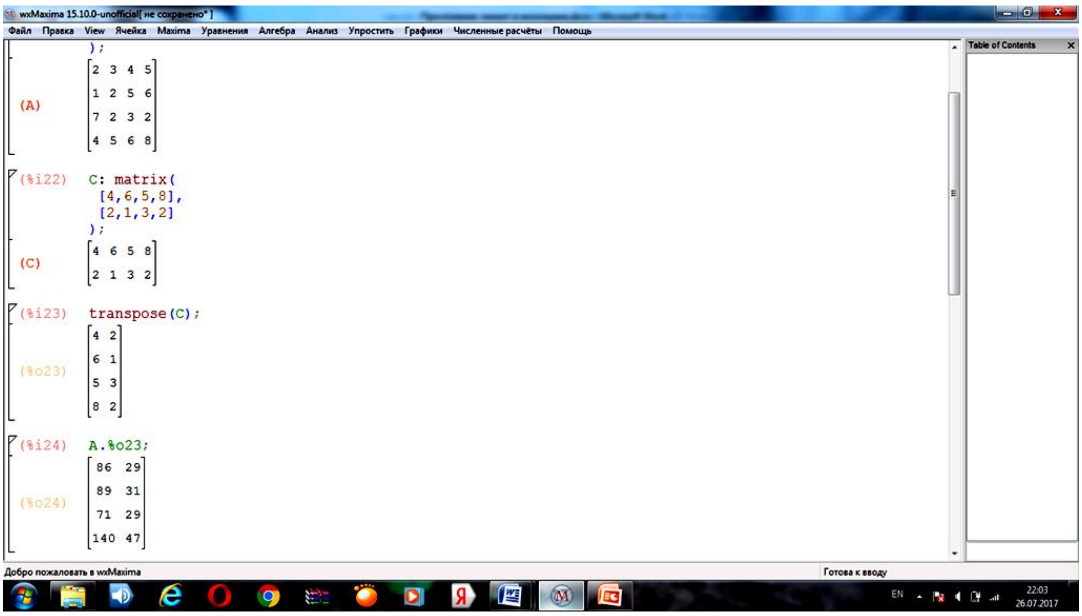


Рис.17

b) Введем матрицу B - заданный план выпуска продукции и умножим ее на матрицу общих затрат на сырье для каждого вида продукции и его перевозку, вычисленную на предыдущем шаге. Получаем общие затраты на сырье и его транспортировку (рис.18).

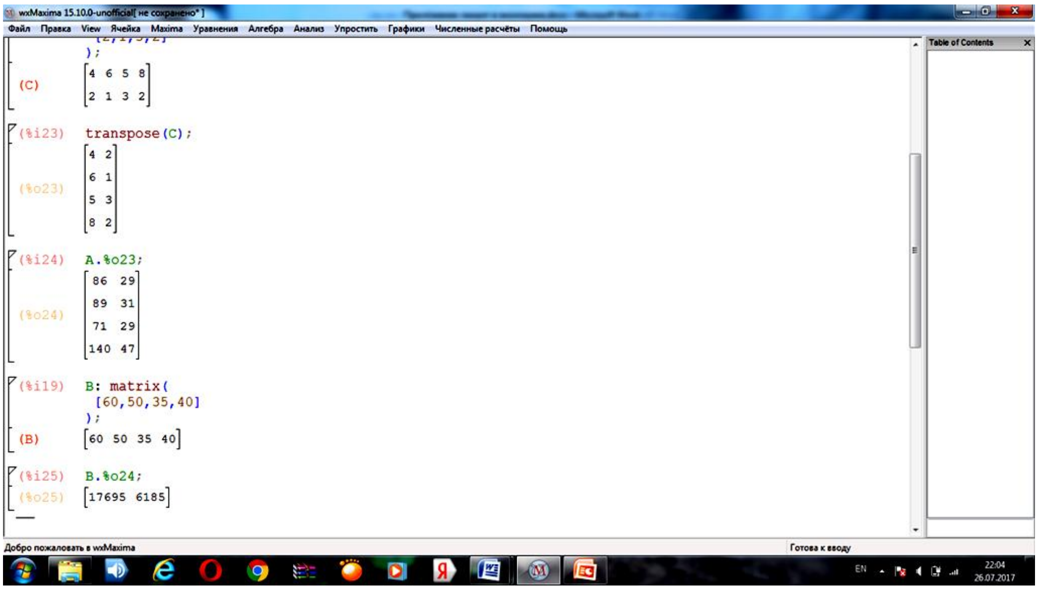


Рис.18

ПРИМЕР 1.3. В таблице 2 приведены данные о дневной производительности 5 предприятий, выпускающих 4 вида продукции с потреблением 3-х видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья.

Таблица 2

Вид изделия	**Производительность предприятий, изд./ день**					**Затраты видов сырья изделия, ед. веса/изд.**		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Кол-во рабочих дней в году					**Цена видов сырья**		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
	200	150	170	120	140	40	50	60

Требуется определить:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;

3) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска продукции указанных видов и количеств.

РЕШЕНИЕ.

1) Нужно составить матрицы, характеризующие весь интересующий нас экономический спектр производства, а затем при помощи соответствующих операций над ними получить

решение данной задачи. Прежде всего, приведем матрицу производительности предприятий по всем видам продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Каждый столбец этой матрицы соответствует дневной производительности отдельного предприятия по каждому виду продукции. Следовательно, годовая производительность j-го предприятия по каждому виду продукции получается умножением j-го столбца матрицы A на количество рабочих дней в году для этого предприятия (j = 1, 2, 3, 4, 5). Таким образом, годовая производительность каждого предприятия по каждому из изделий описывается матрицей

$$A_{год} = \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}.$$

Матрица затрат сырья на единицу изделия (эти показатели по условию одинаковы для всех предприятий) имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Дневной расход по типам сырья на предприятиях описывается произведением матрицы B на матрицу A:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix},$$

где i-я строка соответствует номеру типа сырья, а j-й столбец - номеру предприятия (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5).

2) Умножим столбцы матрицы BA на соответствующие количества рабочих дней в году для предприятий. Это и есть годовая потребность каждого предприятия в каждом виде сырья:

$$BA_{год} = \begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9010 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

3) Введем матрицу-строку стоимости сырья p = (40 50 60). Тогда стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия получается умножением матрицы p на матрицу $BA_{год}$:

$$P = pBA_{год} = \begin{pmatrix} 2008000 & 3496500 & 1878500 & 1494000 & 1552600 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, суммы кредитования предприятий для закупки сырья определяются соответствующими компонентами матрицы P.

Покажем решение этой задачи с помощью компьютерного пакета “MAXIMA”.

1) Найдем годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий. Введем матрицу А – производительность каждого предприятия по каждому из изделий (рис.19)

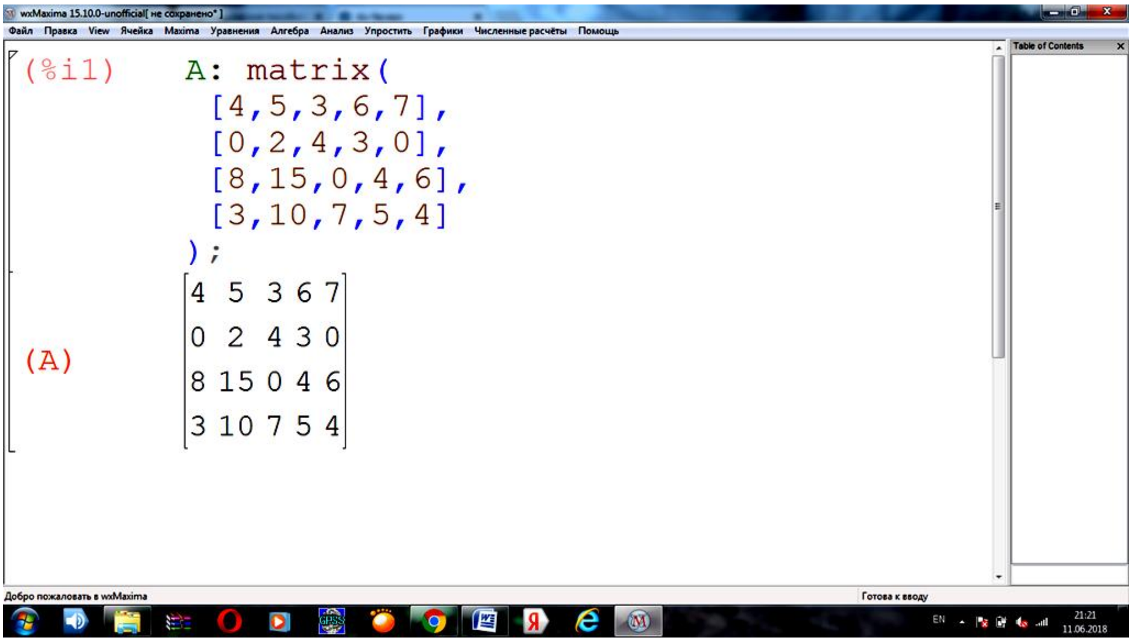


Рис.19

Каждый столбец матрицы А необходимо умножить на количество рабочих дней в году для каждого предприятия. Для этого сначала транспонируем матрицу А (рис. 20).

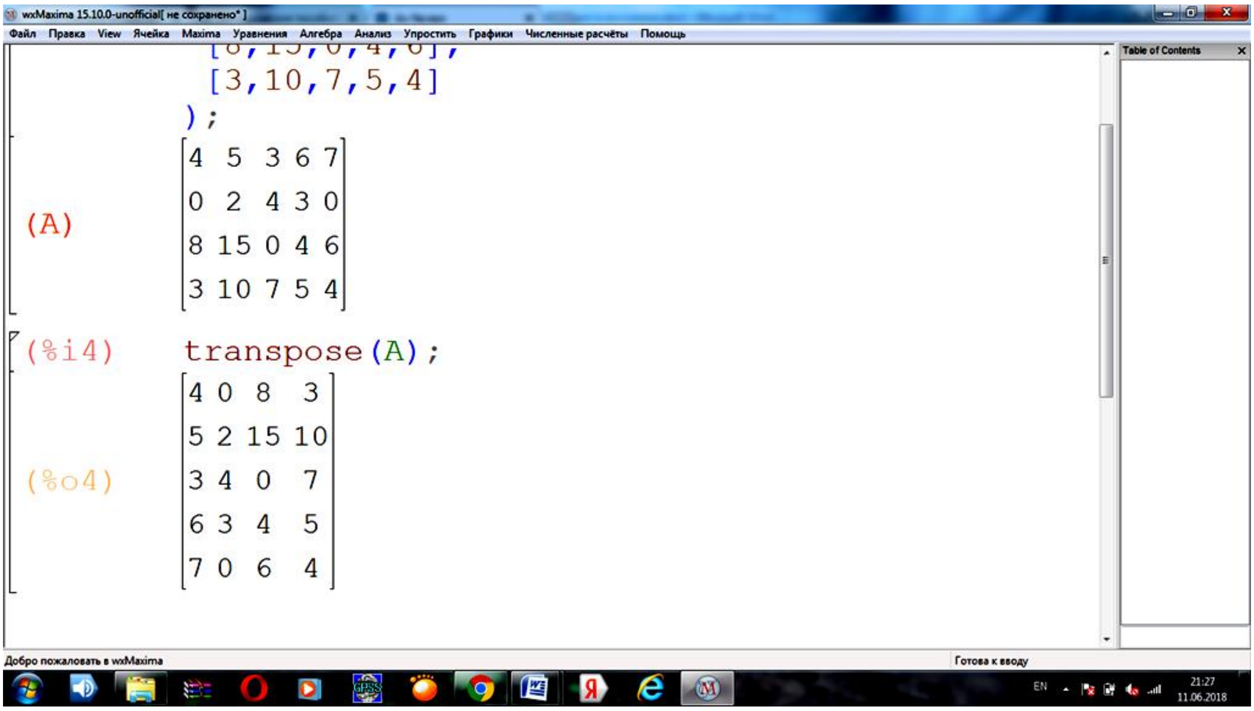


Рис.20

Возьмем первую строку полученной матрицы и умножим ее на 200 (количество рабочих дней в году для 1-ого предприятия) (рис.21).

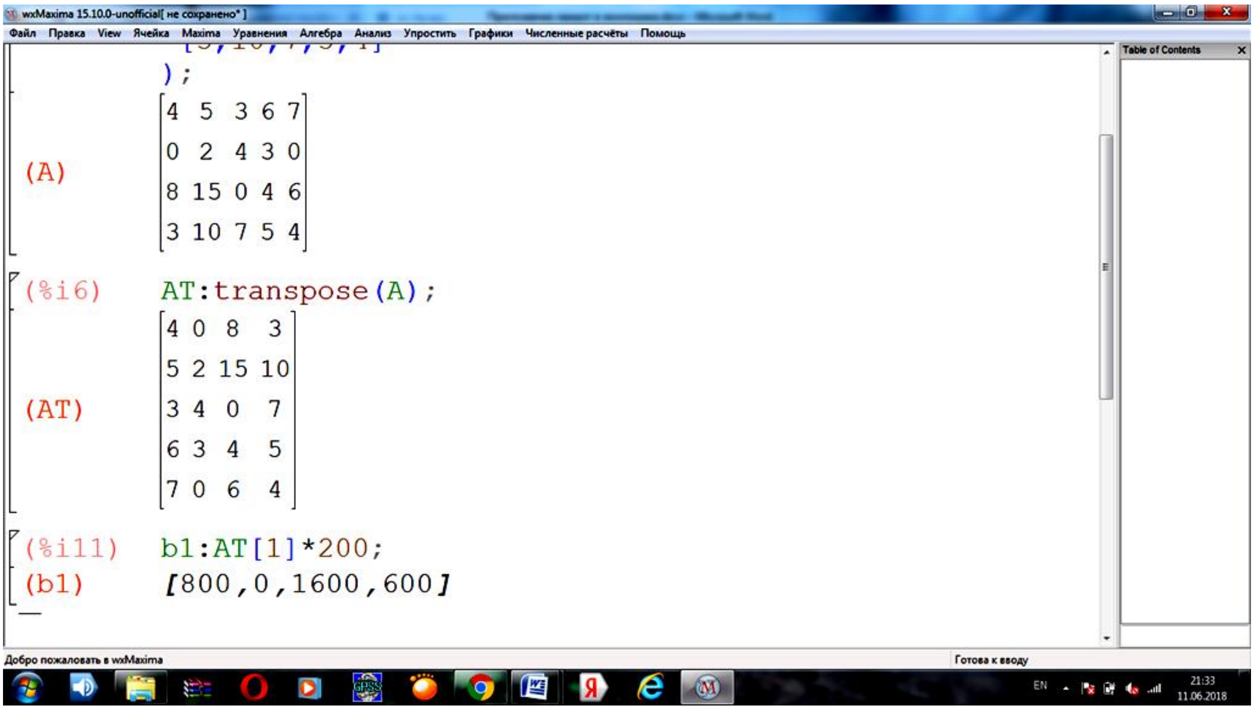


Рис.21

Аналогично, проделаем ту же самую процедуру для остальных строчек матрицы **AT** (рис.22).

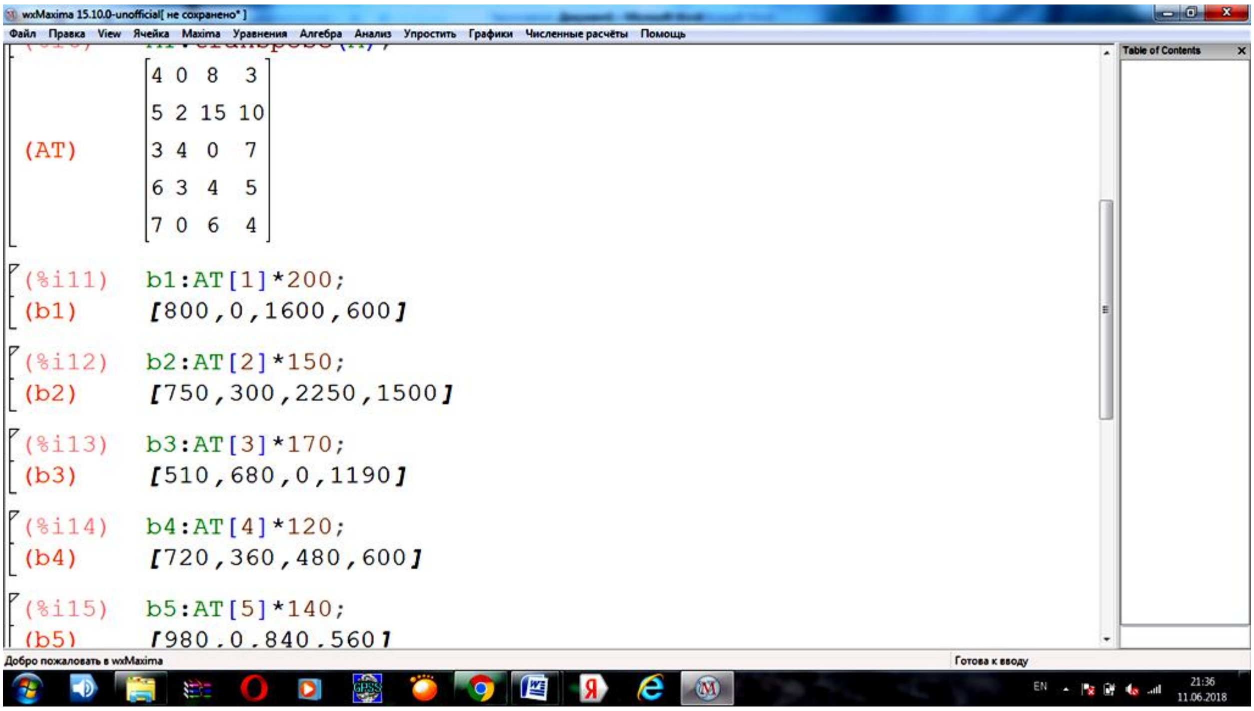


Рис.22

Составим матрицу из полученных строк (рис.23).

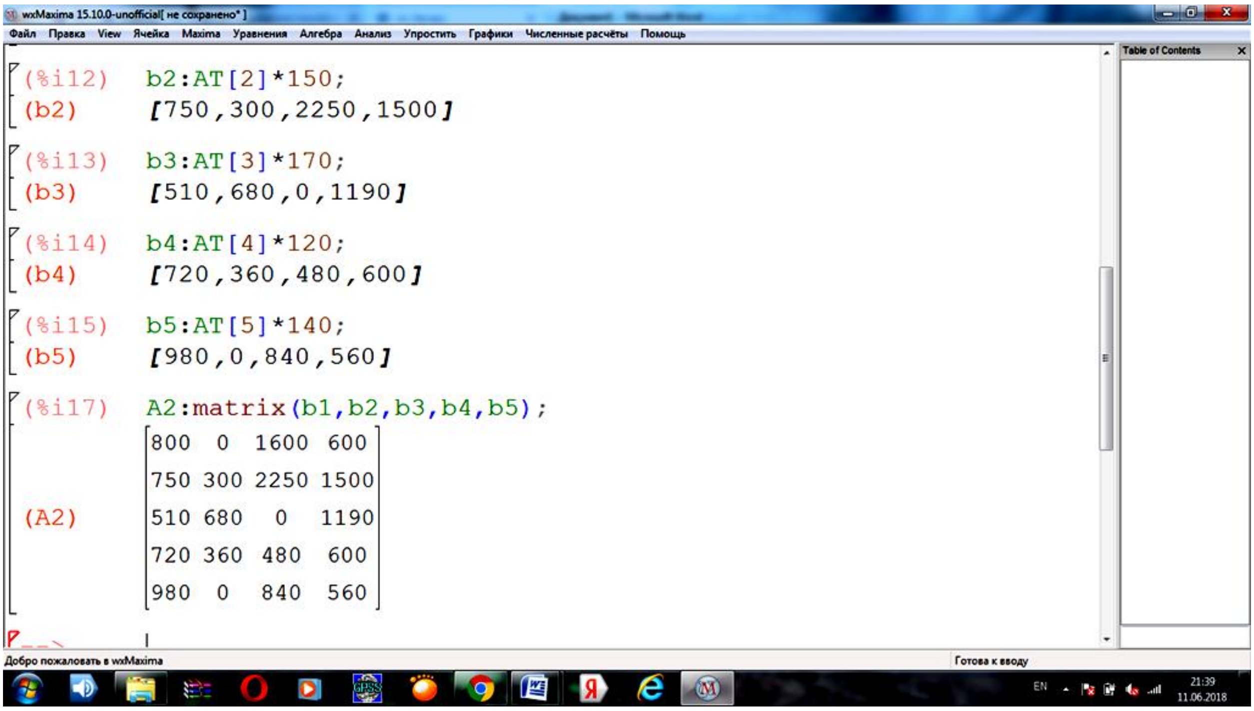


Рис.23

И ее транспонируем. Полученная матрица **Ayear** является матрицей годовой производительность каждого предприятия по каждому виду изделий (рис.24).

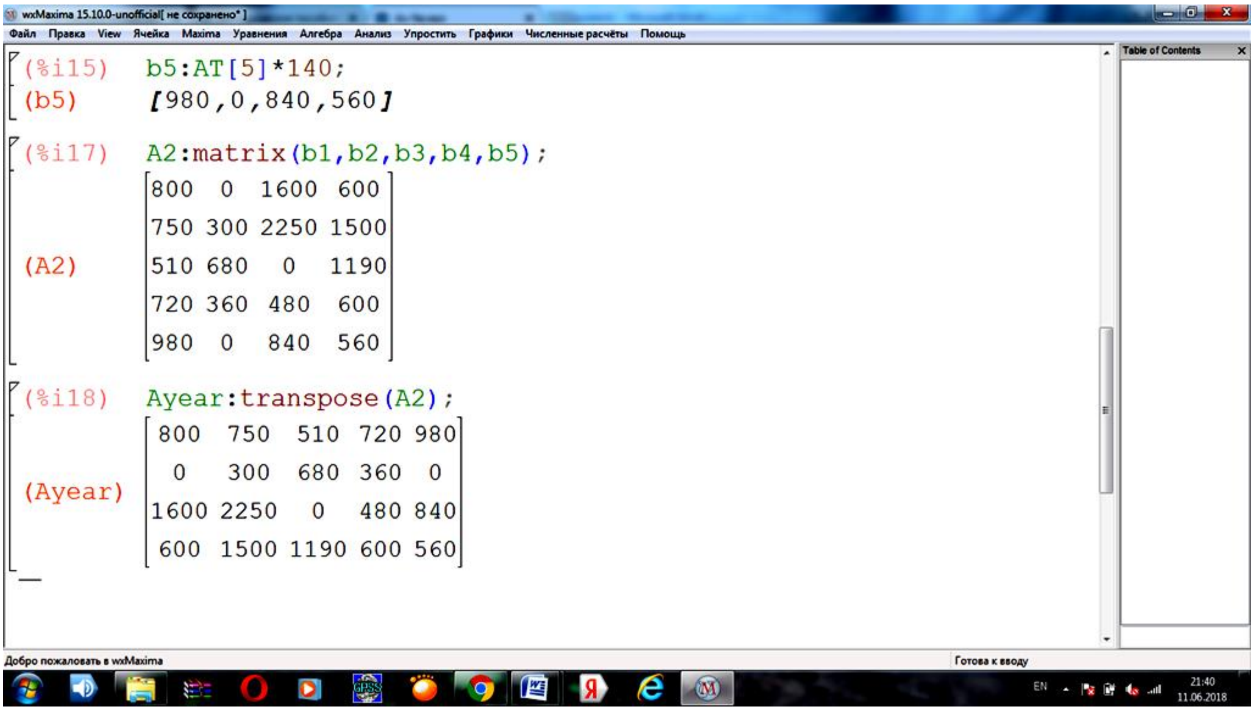


Рис.24

Введем матрицу B - матрица затрат сырья на единицу изделия и вычислим дневной расход по типам сырья на предприятиях **B.A** (рис.25)

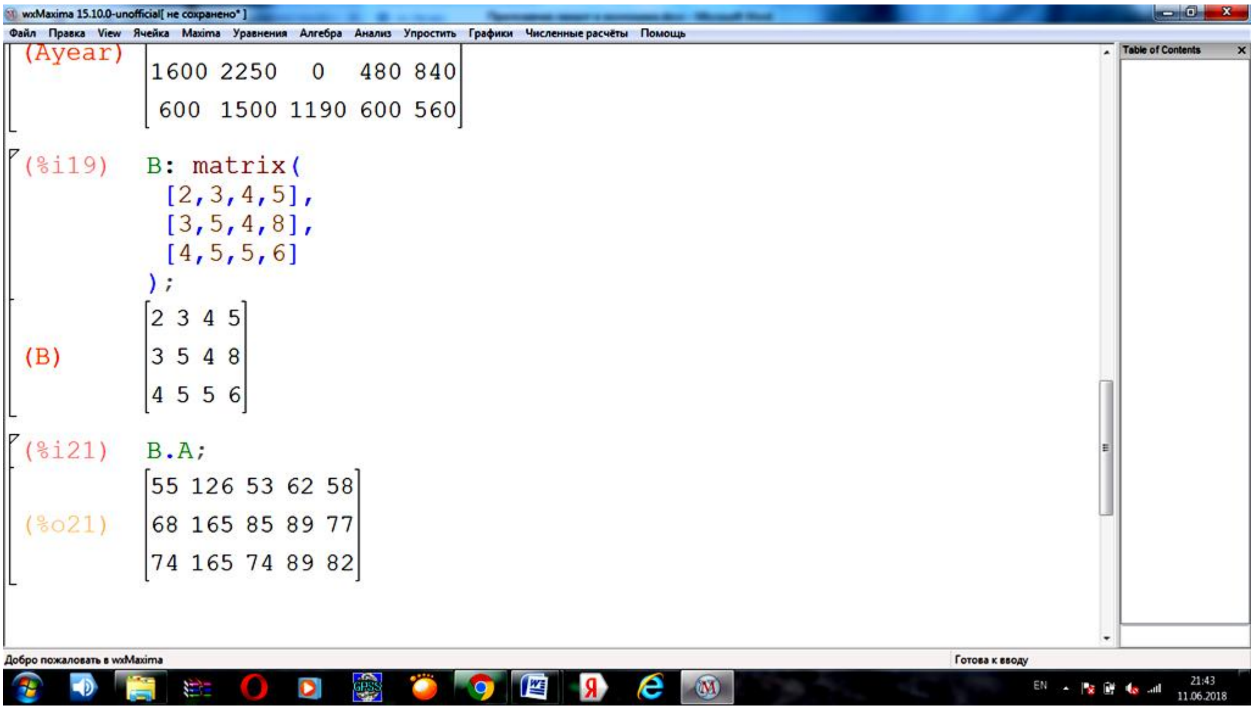


рис.25

2) Годовая потребность каждого предприятия в каждом виде сырья находится, как **B.Ayear** (рис.26).

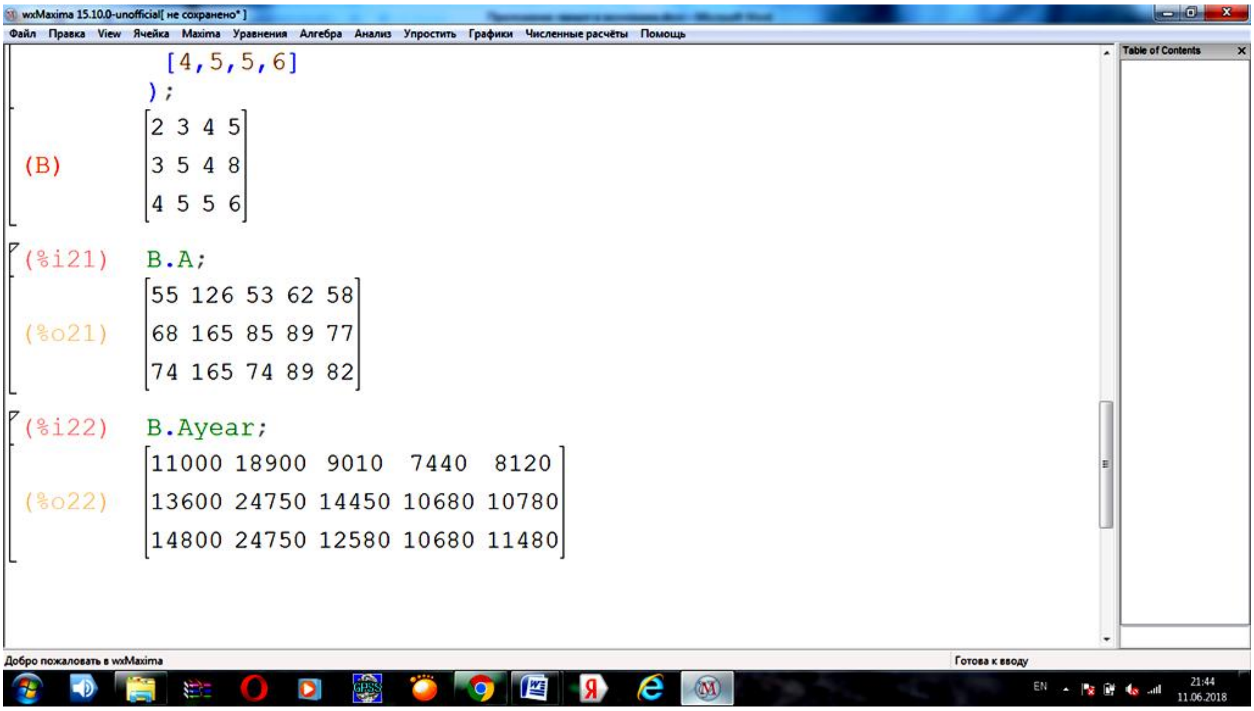


рис.26

3) Введем матрицу-строку стоимости сырья **p** и найдем суммы кредитования предприятий для закупки сырья, как **p.B.Ayear** (рис.27).

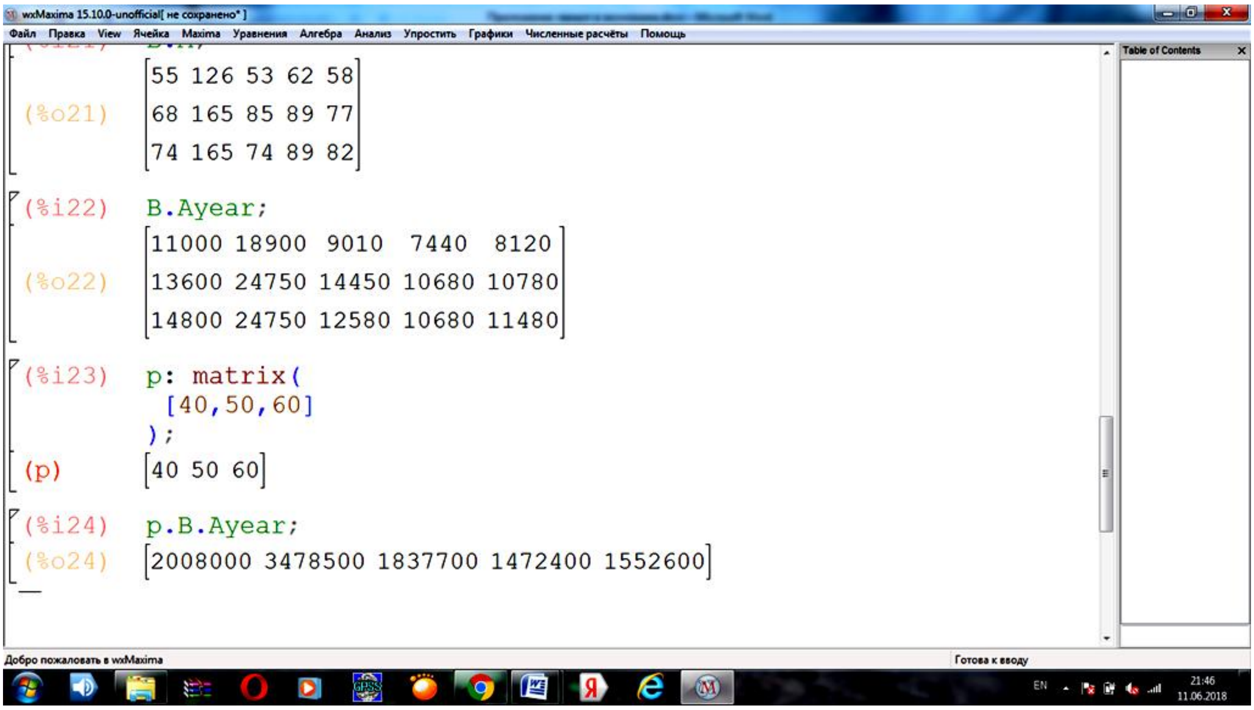


рис.27

Покажем решение этой задачи с помощью компьютерного пакета Excel.

1) Введем данные производительности предприятий по всем видам продукции и количество рабочих дней в году для каждого предприятия. Вычислим годовую производительность каждого предприятия по каждому из изделий. Для этого выделим 1

столбец, соответствующий 1-ому предприятию в таблице «Годовая производительность предприятия» и забьем формулу: 1 столбец соответствующий 1-ому предприятию в таблице «Производительность предприятия», умноженный на количество рабочих дней в году для 1-ого предприятия (рис. 28).

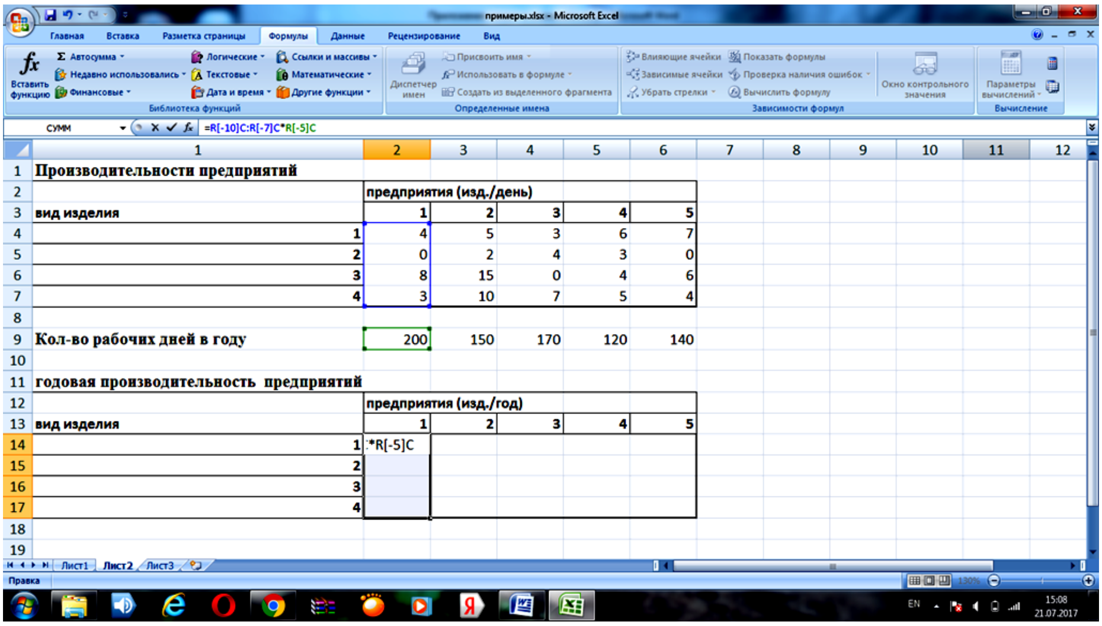


Рис.28

Нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ВВОД. Полученный результат представлен на рис.29.

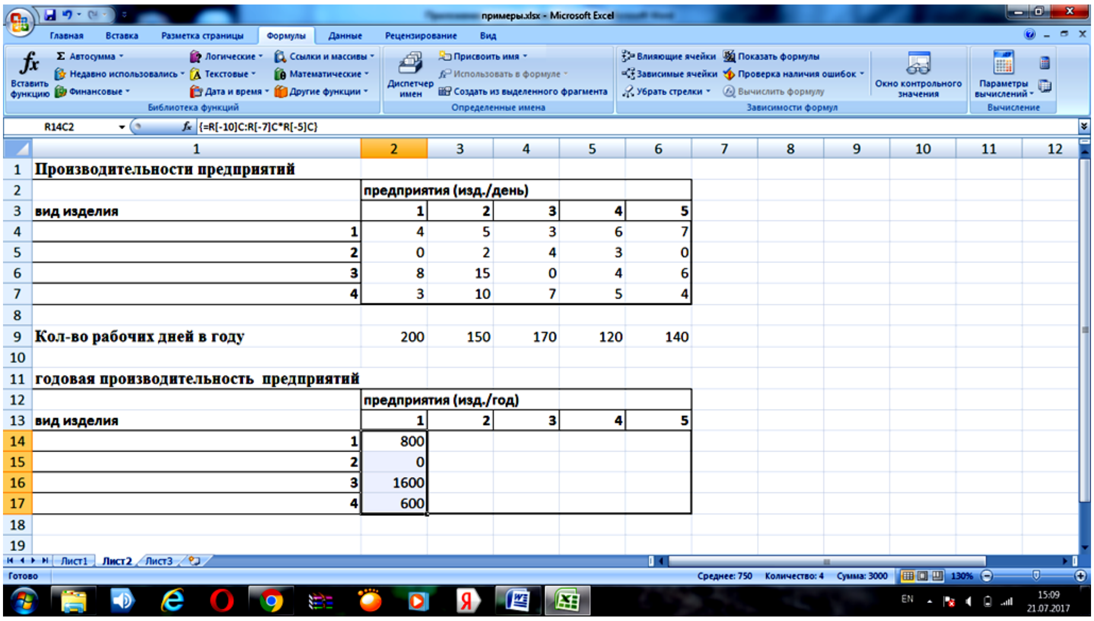


Рис.29

Далее растяните этот столбец на другие столбцы за правый нижний угол. Окончательный результат после растяжки представлен на рис 30.

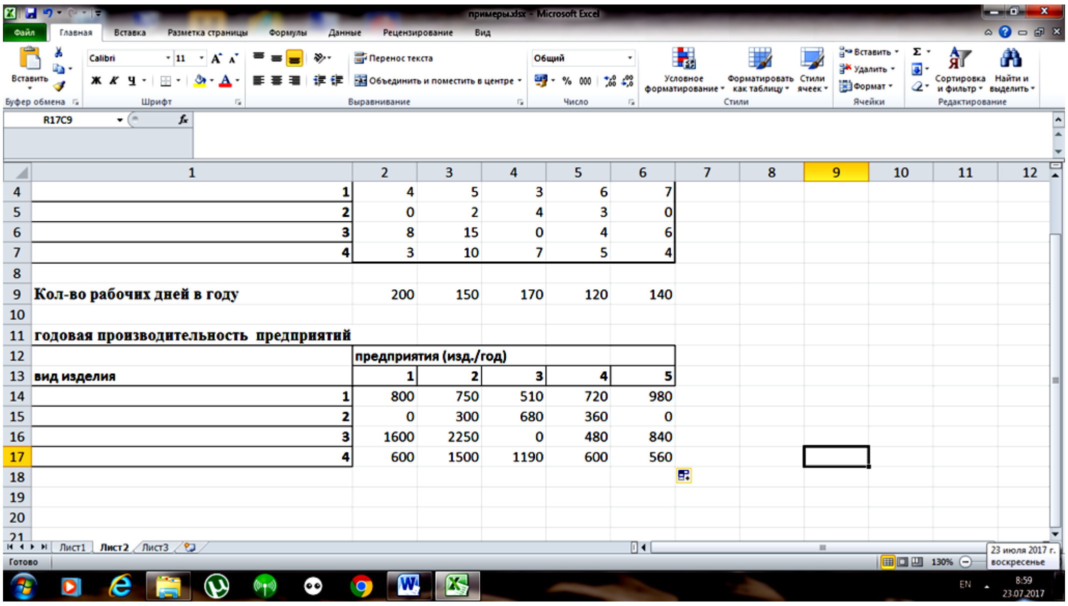


Рис. 30

2) Введем данные о затратах сырья на единицу изделия. Вычислим дневной расход по типам сырья на предприятиях. Для этого будем использовать функцию МУМНОЖ(массив1; массив2). Массив 1- это затраты сырья, массив 2 – годовая производительность каждого предприятия. Введем формулу в ячейку, как показано на рис.31.

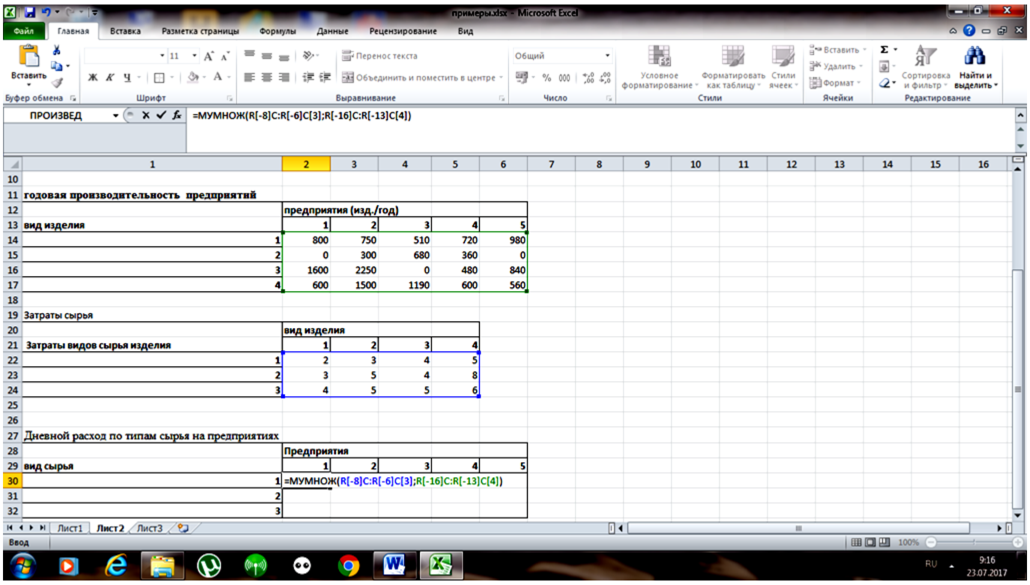


Рис.31

Выделите диапазон из 3 строк и 5 столбцов, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем — клавиши CTRL+SHIFT+ВВОД. Полученный результат представлен на рис.32.

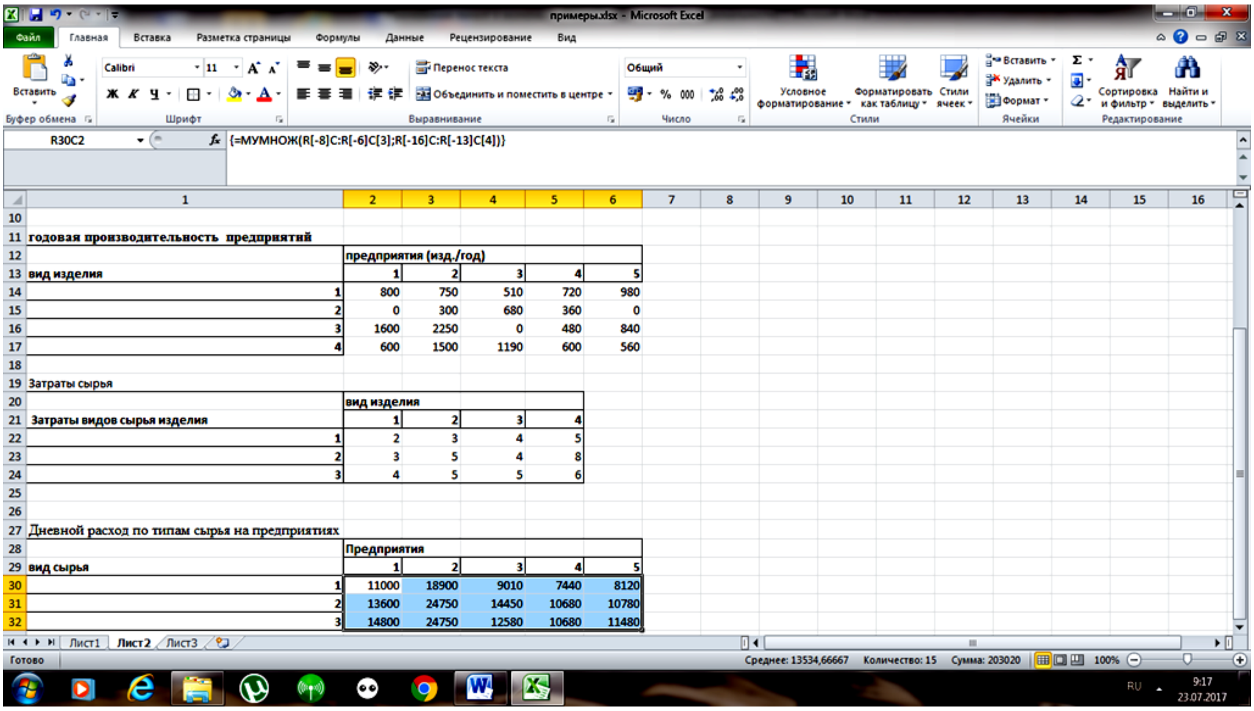


Рис.32

Введем данные о стоимости сырья и вычислим стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия. Будем использовать функцию МУМНОЖ(массив1; массив2). Массив 1- это стоимость сырья, массив 2 – дневной расход по типам сырья на предприятиях. Введем формулу в ячейку, как показано на рис.33.

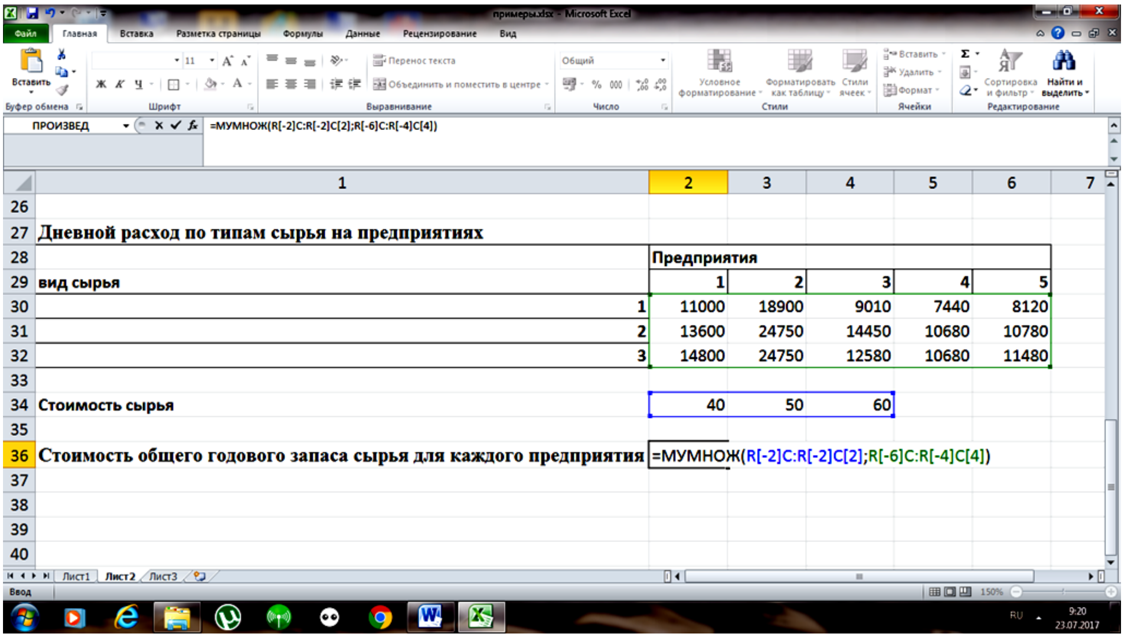
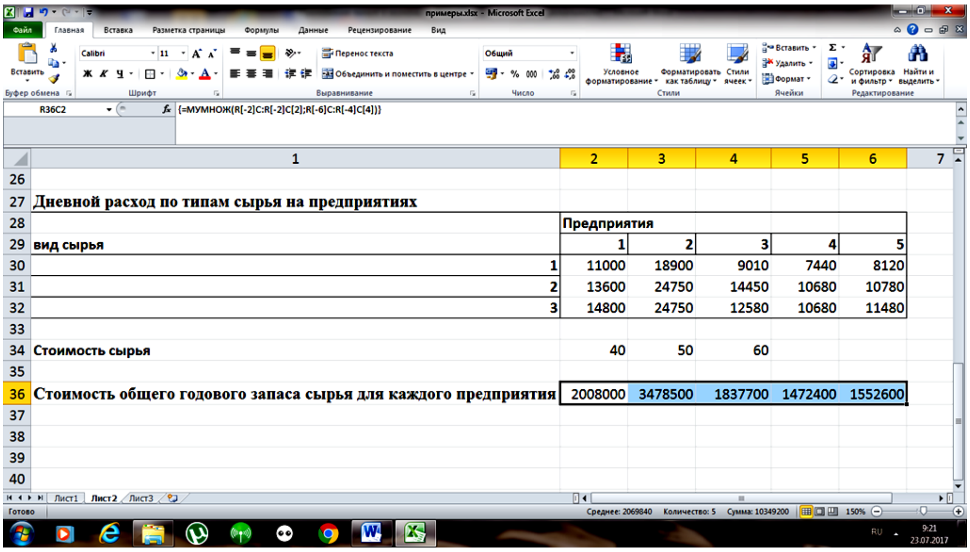


Рис.33

3) Выделите диапазон в строке, состоящий из 3-х столбцов, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем — клавиши CTRL+SHIFT+ВВОД. Полученный результат представлен на рис.34.



Дневной расход по типам сырья на предприятиях						
		Предприятия				
вид сырья		1	2	3	4	5
	1	11000	18900	9010	7440	8120
	2	13600	24750	14450	10680	10780
	3	14800	24750	12580	10680	11480
Стоимость сырья		40	50	60		
Стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия		2008000	3478500	1837700	1472400	1552600

Рис.34

ПРИМЕР 1.4. Отрасль состоит из n предприятий, выпускающих по одному виду продукции каждое; обозначим объем продукции i-го предприятия через X_i. Каждое из предприятий отрасли для обеспечения своего производства потребляет часть продукции, выпускаемой им самим и другими предприятиями. Например, в отрасли электротехнического оборудования часть продукции предприятий, выпускающих электродвигатели, силовые кабели, электрокары и т.д., употребляется практически всей отраслью. Пусть a_{ij} – доля продукции i-го предприятия, потребляемая j-м предприятием для обеспечения выпуска своей продукции объема x_j. Возникает естественный вопрос о величине y_i - количестве продукции i-го предприятия, предназначенной для реализации вне данной отрасли (объем конечного продукта). Эта величина может быть подсчитана по формуле:

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i=1,2, \dots ,n.$$

Введем в рассмотрение матрицу A размерности $n \times n$, описывающую внутреннее потребление отрасли. Тогда конечный продукт y находится с помощью решения матричного уравнения $x - Ax = y$, или с использованием единичной матрицы E получаем

$$(E - A)\, x = y. \qquad (1.1)$$

Рассмотрим конкретный пример при $n = 3$. Пусть выпуск продукции отрасли и матрица внутреннего потребления имеют соответственно вид:

$$x = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (1.1) и правило сложения матриц, получаем объем конечного продукта y, предназначенного для реализации вне отрасли, состоящей из 3-х предприятий:

$$y=(E-A)x=\begin{pmatrix}0{,}7 & -0{,}1 & 0\\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}1\\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\200\\400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}190\\40\\60\end{pmatrix}.$$

Покажем решение этой задачи с помощью компьютерного пакета «MAXIMA».

Введем через командную строку единичную матрицу E и заданную матрицу A и найдем их разность (рис.35).

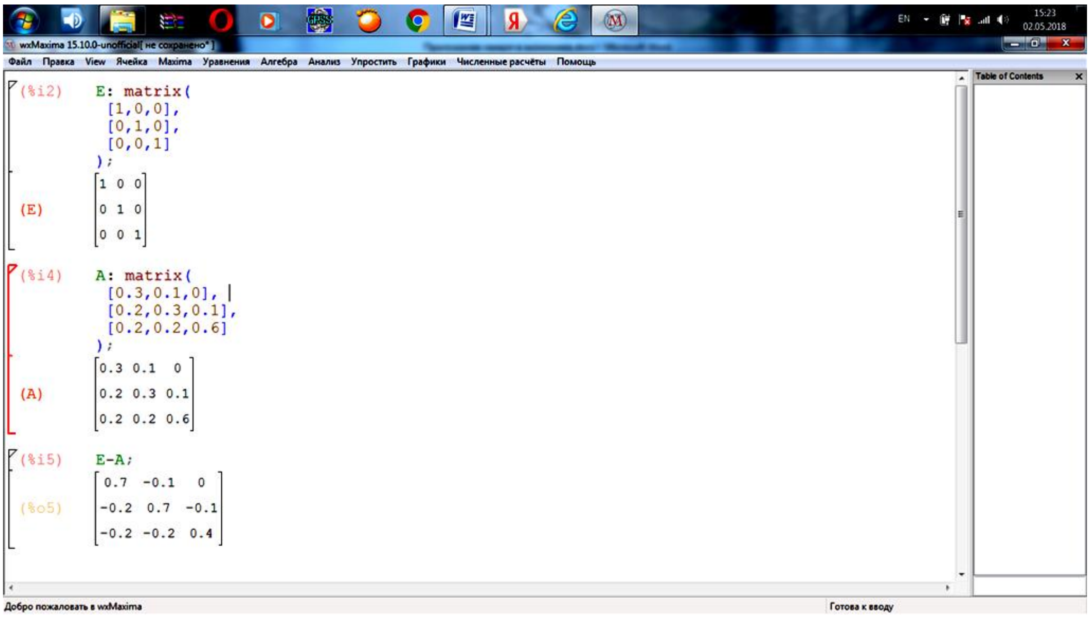


Рис.35

Введем матрицу-столбец X и найдем произведение матриц (E-A) и X. Получаем решение данной задачи (рис. 36).

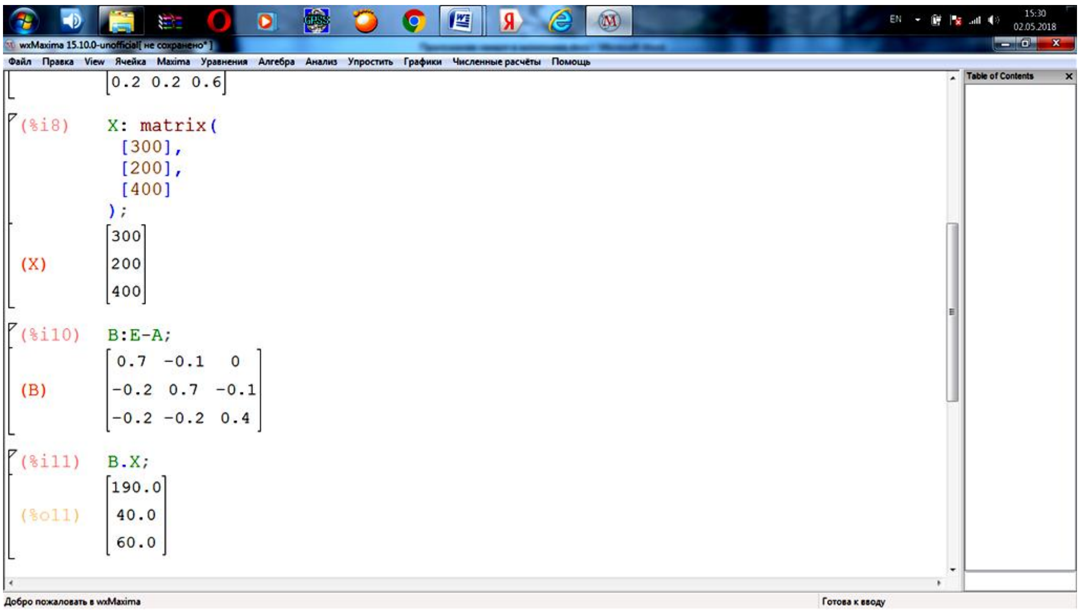


Рис.36

Покажем решение этой задачи с помощью компьютерного пакета Excel.

Введем единичную матрицу, внутреннее потребление отрасли и выпуск продукции.

Тогда конечный продукт находится с помощью функции МУМНОЖ(массив1; массив2), где массив 1- это (Е-А), массив 2 – выпуск продукции. Введем формулу в ячейку, как показано на рис.37.

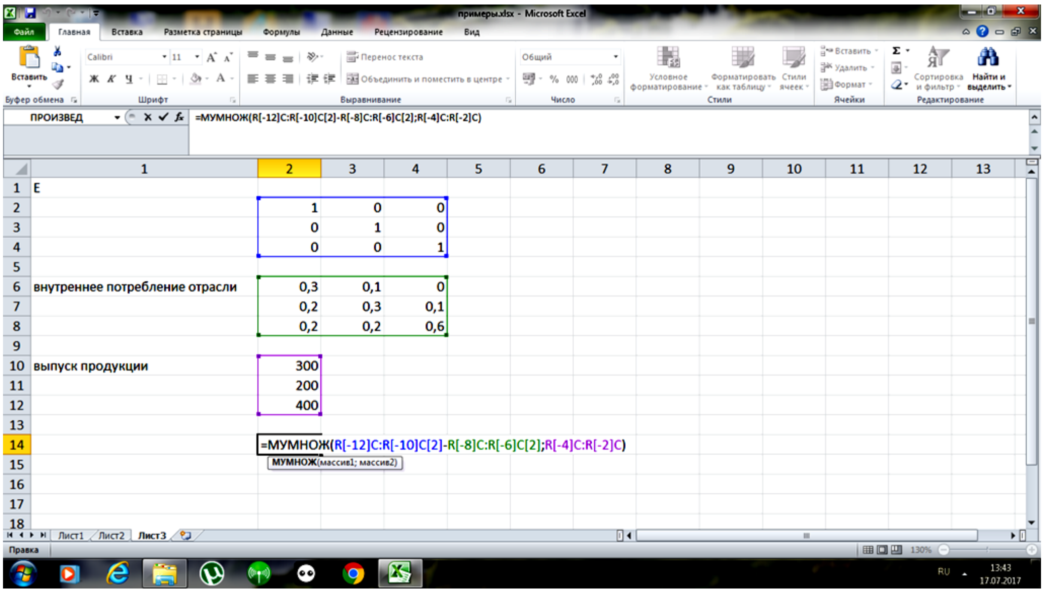


Рис.37

Выделите диапазон в столбце, состоящий из 3-х строк, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем — клавиши CTRL+SHIFT+ВВОД. Полученный результат представлен на рис.38.

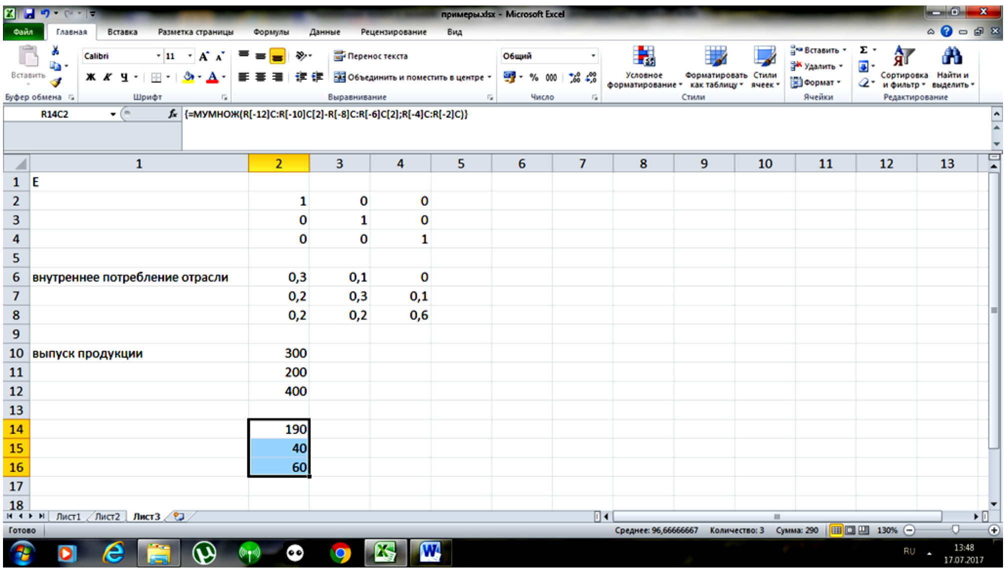


Рис.38

Задания для самостоятельной работы

1.1. Три завода выпускают пять видов продукции. Даны объемы выпуска за январь, февраль, март:

$$A_1=\begin{pmatrix}2100 & 750 & 1100 & 3100 & 530\\ 1900 & 730 & 1180 & 420 & 210\\ 1960 & 800 & 1160 & 3700 & 200\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2000 & 780 & 800 & 2500 & 570\\ 1700 & 590 & 1300 & 1600 & 580\\ 1400 & 800 & 700 & 4800 & 120\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}2400 & 800 & 520 & 4010 & 600\\ 3300 & 770 & 1320 & 2600 & 1200\\ 1400 & 820 & 830 & 5000 & 160\end{pmatrix},$$

Найти: а) матрицу выпуска продукции за первый квартал года; б) проанализировать матрицы прироста выпуска продукции за каждый месяц.

1.2. Завоз определенных товаров на 1 склад можно представить следующей матрицей:

$$A_1=\begin{pmatrix}34 & 28 & 19\\ 31 & 46 & 21\\ 42 & 19 & 30\end{pmatrix},$$

Завоз тех же видов товаров на 2 склад представить в виде матрицы:

$$A_2=\begin{pmatrix}29 & 30 & 24\\ 33 & 37 & 17\\ 45 & 25 & 39\end{pmatrix},$$

Найти: а) сумму завоза всех товаров; б) сумму годового завоза, если производится ежемесячный завоз идентичных партий товара.

1.3. Данные о производстве продуктов трех видов –молоко (л), мясо (кг), сыр (кг) в двух фермерских хозяйствах за 2016 и 2017 годы приведены в виде матриц:

$$A_{16}=\begin{pmatrix}24000 & 4200 & 3600\\ 30000 & 7700 & 5000\end{pmatrix},\quad A_{17}=\begin{pmatrix}28500 & 4450 & 3200\\ 31000 & 6600 & 5000\end{pmatrix}$$

Найти: а) объемы произведенной продукции за эти годы; б) прирост объемов производства в 2017 году по сравнению с 2016 годом по видам продукции и фермерским хозяйствам; в) матрицу среднегодового производства продуктов.

1.4. По заказу с завода в магазин доставили товары, поступление которых описывается матрицей:

$$A_1=\begin{pmatrix}1400 & 268 & 1209\\ 731 & 1460 & 281\\ 1542 & 519 & 830\end{pmatrix},$$

Но данные товары не пользуются большим спросом. Найти количество товаров, оставшихся на складе, если количество купленных товаров описывается матрицей:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1032 & 127 & 885 \\ 124 & 1156 & 94 \\ 726 & 461 & 639 \end{pmatrix}.$$

1.5. Пусть в трех регионах добывается 4 вида твердых полезных ископаемых. Данные о добыче ископаемых в регионах группируются по строкам, а данные о сырье – по столбцам. Тогда добыча полезных ископаемых (тыс. т) в 2016 и 2017 годах может быть представлена с помощью соответствующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 6{,}4 & 84{,}5 & 75{,}7 & 3{,}3 \\ 5{,}6 & 28 & 62{,}5 & 8 \\ 4{,}1 & 52{,}7 & 12{,}2 & 7{,}9 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 10{,}8 & 82 & 88{,}2 & 11 \\ 5{,}1 & 28 & 61{,}8 & 8{,}8 \\ 4{,}3 & 60{,}1 & 10{,}5 & 8{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) суммарную добычу полезных ископаемых за 2 года; б) матрицу приростов добычи за 2017 год; в) матрицу, характеризующую средние размеры добычи.

1.6. В некоторой отрасли m предприятий выпускают n видов продукции. Матрица A размерности $m \times n$ задает объемы продукции на каждом предприятии в первом полугодии, матрица B размерности $m \times n$ – во втором, a_{ij}, b_{ij} – объемы продукции j-го вида на i-м предприятии в первом и втором полугодии соответственно.

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 60 & 20 \\ 20 & 30 & 40 & 15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 60 & 60 & 120 & 10 \\ 20 & 90 & 30 & 45 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) годовой объем выпуска продукции; б) изменение объемов производства во втором полугодии по сравнению с первым по видам продукции и предприятиям; в) годовую выручку каждого предприятия, если известны цены на все виды продукции:

$$C = \begin{pmatrix} 50 \\ 35 \\ 40 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

1.7. Предприятие выпускает n видов продукции, объемы производства заданы матрицей A размерности $1 \times n$. Цена реализации единицы продукции i-го вида в j-м регионе задается матрицей B размерности $n \times k$, где k – число регионов, в которых реализуется продукция.

Найти матрицу выручки по регионам.

$$A = \begin{pmatrix} 1200 & 350 & 240 & 320 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 25 \\ 40 & 35 & 45 \\ 30 & 35 & 35 \\ 50 & 60 & 70 \end{pmatrix}.$$

Какой из регионов наиболее выгоден для реализации?

1.8. Предприятие выпускает n видов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат i-го вида ресурса на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей A размерности $m \times n$. Объем выпуска продукции задан матрицей X размерности $n \times 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) матрицу затрат ресурсов каждого вида на производство заданного объема продукции; б) стоимость всех затраченных на производство ресурсов, если стоимость каждого вида ресурсов задана матрицей P размерности $1 \times m$, $P = (20 \quad 20 \quad 10)$.

1.9. Предприятие выпускает четыре вида продукции, используя четыре вида ресурсов. Нормы расхода ресурсов заданы матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – затраты ресурсов j-го вида на производство единицы i-го вида продукции.

Найти затраты ресурсов на каждый вид продукции при заданном объеме выпуска 50, 30, 65 и 20 единиц соответственно.

1.10. Пусть затраты 4-х видов ресурсов на выпуск 4-х видов продукции характеризуются матрицей A, приведенной в задаче 1.9.

Найти: а) общие затраты на ресурсы для каждого вида продукции и на доставку этих ресурсов; б) общие затраты на ресурсы и их доставку при условии заданного плана выпуска предыдущей задачи, если известны себестоимости каждого вида ресурсов и стоимость их доставки (соответственно 12, 20, 15, 18 и 8, 14, 5, 3 усл. ден. ед.).

1.11. Фирма планирует свою производственную деятельность на очередной период. В свою производственную деятельность она включает три изделия — И1, И2 и И3. Потребление ресурсов Р1, Р2 и Р3 на изготовление единицы готового изделия (расходуемые нормы производственного процесса) приведены в таблице:

Вид изделия	Вид ресурсов		
	Р1	Р2	Р3
И1	5	6	4

И2	3	4	5
И3	7	2	1

Фирма имеет заказ на изготовление 70 единиц изделия И1, 60 единиц И2 и 30 единиц И3. Стоимость единицы каждого из ресурсов 3, 6 и 7 усл. ед. соответственно. Найти бюджет необходимый для обеспечения выполнения заказа.

1.12. В условиях задачи 1.11 фирма рассматривает 4 варианта производства:

Вид изделия	Вариант производства, ед			
	1	2	3	4
И1	35	45	40	80
И2	44	30	35	40
И3	75	100	60	85

Найти количество ресурсов, необходимое для обеспечения каждого варианта производства.

1.13. Предприятие выпускает продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы расхода сырья *i*-го типа на производство единицы продукции *j*-го вида заданы матрицей $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 6\end{pmatrix}$ (усл. ед.), называемой матрицей норм расхода. План выпуска продукции задан матрицей столбцом $X=\begin{pmatrix}120\\ 70\\ 100\end{pmatrix}$ (усл. ед.), а стоимость единицы сырья каждого вида - матрицей строкой $C=\begin{pmatrix}40 & 50\end{pmatrix}$ (ден. ед.). Определить затраты сырья каждого вида, необходимые для планового выпуска продукции и прибыль предприятия, если стоимость единицы продукции каждого вида задана матрицей $P=\begin{pmatrix}400 & 300 & 150\end{pmatrix}$ (ден. ед.).

1.14. В отрасли, состоящей из трех предприятий матрица внутреннего потребления и выпуск продукции отрасли имеют соответственно вид:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0 & 0{,}6\\ 0 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}100\\ 200\\ 150\end{pmatrix}.$$

Найти объемы конечного продукта.

1.15. В таблице приведены данные о дневной производительности 3 предприятий, выпускающих 3 вида продукции с потреблением 3-х видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья:

Вид изделия	Производительность предприятия			Затраты сырья		
	I	II	III	1	2	3
1	3	5	7	2	4	8
2	7	3	3	8	2	2
3	8	2	4	9	4	6
	Кол-во дней, отработанных в году			Цена видов сырья		
	200	160	180	200	100	50

Найти: а) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;
б) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;
в) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска продукции указанных видов и количеств.

1.16. В таблице приведены данные о дневной производительности 5 предприятий, выпускающих 4 вида продукции с потреблением 3-х видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья.

Вид изделия	Производительность предприятий, изд./ день					Затраты видов сырья изделия, ед. веса/изд.		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	6	5	4	7	8	2	4	5
2	2	3	5	4	1	3	6	8
3	9	16	0	5	7	4	5	6
4	4	11	8	6	5	5	9	7
	Кол-во рабочих дней в году					Цена видов сырья		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	210	160	180	130	150	60	70	100

Найти: а) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;
б) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;
в) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска продукции указанных видов и количеств.

1.17. Предприятие выпускает три вида продукции и на производство данной продукции использует два вида сырья, нормы расхода которого заданы матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

где каждый элемент a_{ij} показывает, сколько сырья j-го типа может быть израсходовано на производство продукции i-го типа. Стоимость первого вида сырья 6 усл. ден. ед., второго – 5 усл. ден. ед. План выпуска продукции 80, 60 и 110 шт. соответственно. Найти общую стоимость сырья. Продемонстрировать на этом примере выполнение закона ассоциативности для умножения матриц.

1.18. Два предприятия производят три вида продукции. Количество продукции каждого вида, производимые за месяц, приведены в таблице:

Предприятие	Количество продукции (шт.)		
	П1	П2	П3
1	600	350	420
2	780	440	630

Данные о выручке (в усл. ден. ед.) от реализации единицы каждого вида изделий в каждый из трех месяцев приведены в таблице:

Продукция	Прибыль (усл. ден. ед.)		
	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь
П1	2799	2849	2899
П2	5570	5430	5610
П3	5250	5750	5990

Составить матрицу выручки каждого предприятия в каждый из трех месяцев.

1.19. Предприятие по выпуску мягких игрушек планирует выпустить 1110 единиц собак, 1620 единиц котят и 1360 единиц мишек. Для их изготовления используется пять видов сырья. Расход сырья, а также стоимость единицы каждого вида сырья (в усл. ден. ед.) указаны в таблице:

Вид игрушек	Тип сырья				
	Ткань, м	Мех, м	Синтепон, кг	Синтепух, кг	Нитки, м
Собаки	0,02	0,4	0,5	0,05	3
Котята	0,01	0,2	0,2	0,1	2
Мишки	0,05	0,6	1,1	0,07	6
Стоимость единицы сырья	70	90	64	98	0,4

Найти: а) количество каждого вида сырья, необходимое для обеспечения плана; б) стоимость сырья для единицы каждого вида продукции; в) общую стоимость всего сырья для всей продукции.

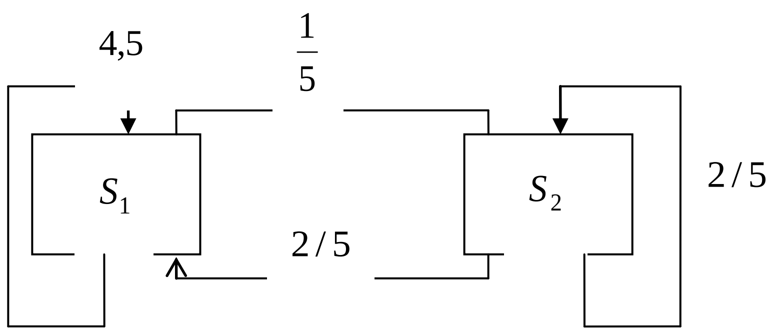
1.20. На лесопилке из еловой и пихтовой древесины делают фанеру и брусы. На 100 кв. м фанеры нужно 2 куб. м еловой и 6 куб. м пихтовой древесины и прибыль равна 150 дол. На 100 пог. м (т.е. по длине) елового бруса нужно 5 куб. м, а на 100 пог. м пихтового бруса нужно 4 куб. м древесины, прибыль же равна соответственно 70 и 90 дол. Сколько видов продукции производит лесопилка? Сколько видов ресурсов используется? Составьте матрицу норм расхода, векторы удельной прибыли и запасов ресурсов. Докажите, что фанеру производить невыгодно, и найдите план, дающий максимальную прибыль.

1.21. Курс акций некоторого банка определяется системой $S\,(s_1, s_2, s_3)$, S_1, S_2, S_3 фазовые состояния S , S_1 – высокий, S_2 – средний и S_3 – низкий. Вероятность начальных состояний задается матрицей $P_0 = (0{,}4\ 0{,}5\ 0{,}1)$. Матрица вероятностей переходов p_{ij} – из состояния S_i в состояние S_j равна

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найти вероятности состояний курса акций через 2 момента времени.

1.22. Продукция завода имеет два состояния s_1 –спрос есть, s_2 –спроса нет. Начальная матрица вероятностей $P_0 = (1{,}0)$, то есть спрос есть. Задан граф состояний с вероятностями переходов, имеющий вид:



Найти матрицу вероятностей перехода и вероятность спроса через 1 год; 2 года; 3 года.

2. Использование систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим задачи, приводящие к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений.

Общая постановка задачи прогноза выпуска продукции. Пусть матрица *C* размерности $m \times n$ – матрица затрат сырья *m* видов при выпуске продукции *n* видов. Тогда при известных объемах запаса каждого вида сырья $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ план выпуска продукции

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ определяется из решения системы *m* уравнений с *n* неизвестными *CX*=*B*.

Краткие теоретические сведения

Способы решения систем линейных алгебраических уравнений.

1. Метод Крамера.

Рассмотрим систему линейных систем из n уравнений относительно n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + a_{n3} \cdot x_3 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Существует **правило Крамера** решения системы (2.1), в соответствии с которым $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta},\ j = 1,\ldots,n,$ где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$ – главный определитель системы, а

Δ_j – также определитель n-го порядка, отличающийся от Δ j-м столбцом: он заменен столбцом из свободных членов $b_i,\ i = 1,\ldots,n$.

Очевидно, что правило Крамера применимо, если $\Delta \neq 0$, и при этом исходная система имеет **единственное** решение. В том случае, если $\Delta = 0$ и существует хотя бы один из определителей Δ_j такой, что $\Delta_j \neq 0$, система не имеет решений.

2. Матричный метод

Система вида (2.1) может быть представлена в матричном виде $A \cdot X = B$, где A – квадратная матрица. Решить – это значит, найти матрицу-столбец X. Для решения заданной системы в случае, когда $\det A \neq 0$, тоже можно найти A^{-1} – матрицу, обратную к матрице A,– и получить решение по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Пусть A – квадратная матрица такая, что определитель $|A| \neq 0$. Тогда существует *обратная* матрица A^{-1}, для которой должны выполняться равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1°. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A называется *вырожденной* и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A *невырожденная* и обратная матрица существует.

2°. Находим матрицу A^T, транспонированную к A.

3°. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы A^T и составляем из них присоединенную матрицу A^*.

4°. Вычисляем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

5°. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения.

3. Метод Гаусса.

Дана прямоугольная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в этой матрице k произвольных строк и k произвольных столбцов. Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором* k-го порядка матрицы A. Рассмотрим всевозможные миноры матрицы A, отличные от нуля. *Рангом матрицы A* называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимают равным нулю. Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором* матрицы. Ранг матрицы A будем обозначать через $r(A)$. Если $r(A) = r(B)$, то матрицы A и B называются *эквивалентными*. В этом случае пишут $A \sim B$.

Ранг матрицы не изменится от элементарных преобразований. Под *элементарными преобразованиями* понимают:

a) замену строк столбцами, а столбцов — соответствующими строками;
b) перестановку строк матрицы;
c) вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;
d) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
e) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{mn2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.2)$$

Система уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной.*

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называются соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей системы*.

Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы (теорема Кронекера—Капелли).

Предположим, что система (2.2) совместна, причем $r < n$. Рассмотрим какой-нибудь базисный минор матрицы *A.* Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при r неизвестных в одном из уравнений системы (2.2). Эти r неизвестных называются *базисными неизвестными* рассматриваемой системы уравнений. Остальные $n - r$ неизвестных системы (2.2) называются *свободными неизвестными.*

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x - y + z = 4; \\ 3x + 4y - 5z = -14; \\ 2x + 5y - z = 7. \end{cases}$$

Решение. Запишем коэффициенты системы и правые части уравнений в матрицу, которая называется *расширенной матрицей* системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & 5 & -1 & 7 \end{array}\right).$$

Матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных, называется *основной матрицей* системы.

При решении системы можно прибавлять к строке расширенной матрицы другую строку, умноженную на какое-нибудь число. Мы стремимся получить нули во всех точках ниже диагонали основной матрицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & 5 & -1 & 7 \end{array}\right).$$

Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-3), а к третьей – первую умноженную на (-2).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -8 & -26 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right)(-3);\ (-2)$$

Нам осталось получить один ноль в третьей строке и втором столбце. Для этого прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (-1).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -8 & -26 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right)(-1).$$

Этой матрице соответствует система

$$\begin{cases} x - y + z = 4; \\ \quad 7y - 8z = -26; \\ \qquad 5z = 25. \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z = 5$. Подставляем это значение во второе уравнение: $7y - 8 \cdot 5 = -26 \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = 2$. Подставляем эти значения в первое уравнение $x - 2 + 5 = 4 \Rightarrow x = 1$.

<u>Ответ:</u> $x = 1; y = 2; z = 5$.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 5; \\ 5x - y + z = 9; \\ 7x + 5y - 7z = 19. \end{cases}$$

Записываем матрицы системы и преобразуем их

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 9 \\ 7 & 5 & -7 & 19 \end{array}\right) \begin{matrix}(-5) & (-7) \\ & \\ & \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -16 & 21 & -16 \\ 0 & -16 & 21 & -16 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -16 & 21 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Число неизвестных больше, чем число уравнений, значит можно ожидать, что решений будет бесконечное множество или их вообще не будет. Сравним ранги основной и расширенной матриц. Любой минор третьего порядка содержит нулевую строку и поэтому равен нулю. С другой стороны существуют миноры второго порядка неравные нулю. Например, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$. Этот минор принадлежит обеим матрицам, поэтому ранги обоих матриц равны 2. По теореме Кронекера-Капелли система, в которой ранги основной и расширенной матриц совпадают должна иметь решения. Так как число неизвестных на единицу больше чем ранги обеих матриц, то система имеет бесконечное множество решений и одно из неизвестных можно положить свободным, а другие выразить через него. Например, пусть z – свободная переменная. Выразим y из второго уравнения: $-16 + 21z = -16 \Rightarrow -16y = -16 - 21z \Rightarrow y = 1 + \frac{21}{16}z$. Подставим эти значения в первое уравнение: $x = 5 - 3(1 + \frac{21}{16}z) + 4z = 2 + (4 - \frac{43}{16})z = 2 + \frac{21}{16}z$.

<u>Ответ:</u> Система имеет множество решений. При любом значении z тройка чисел $(2 + \frac{21}{16}z; 1 + \frac{21}{16}z; z)$ является решением системы.

ПРИМЕР 2.1. Прогноз выпуска продукции по запасам сырья. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в табл.2.

Таблица 2

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.			Запас сырья, вес. ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья. Задачи такого рода типичны для прогнозов и оценок функционирования предприятий, экспертных оценок проектов освоения месторождений полезных ископаемых, а также для планирования микроэкономики предприятий.

РЕШЕНИЕ. Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1, x_2 и x_3. Тогда при условии полного расхода запасов для каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах) $x_1 = 150$, $x_2 = 250$, $x_3 = 100$.

Решим эту задачу в пакете «MAXIMA». Для введения системы линейных уравнений выбреем в командной строке Уравнения ->Solve Linear System… (рис. 39).

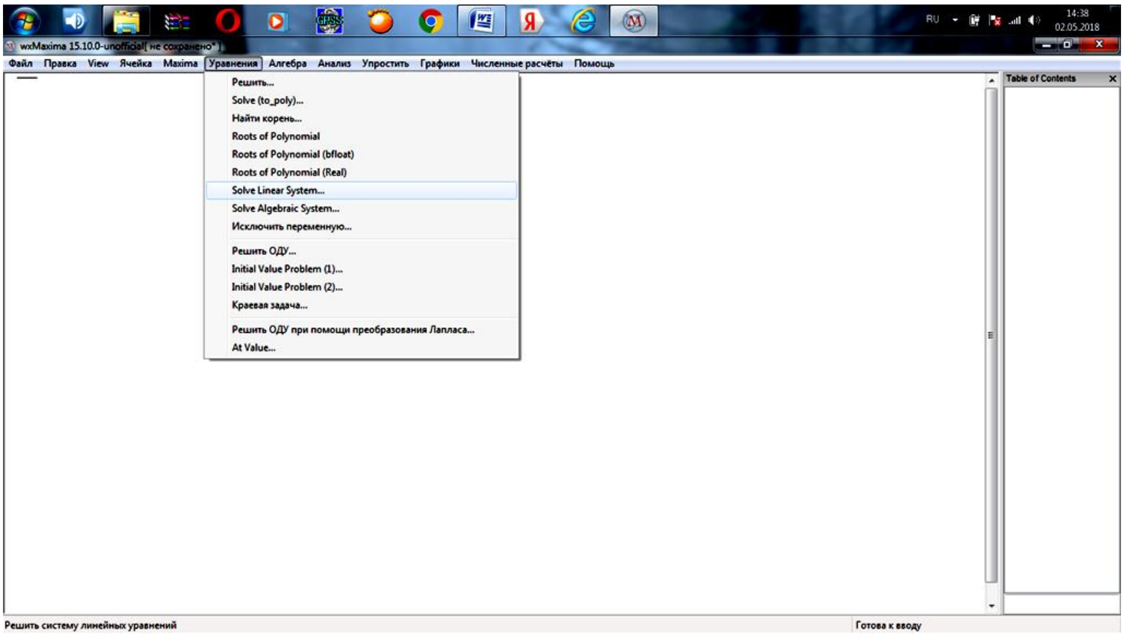


Рис. 39

Введем число уравнений - 3 (рис.40).

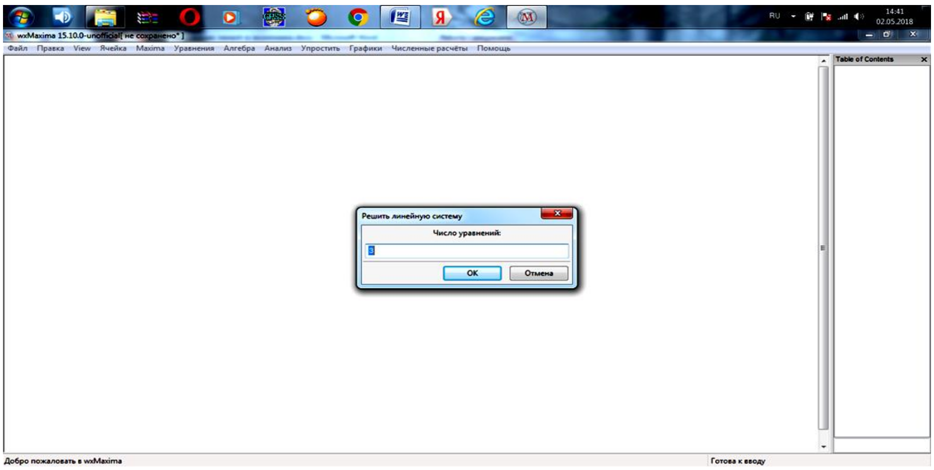


Рис. 40

Нажимаем «ОК» и после этого в появившуюся на экране таблицу вводим систему линейных уравнений. В строке «Переменные» вводятся переменные через запятую (рис.41).

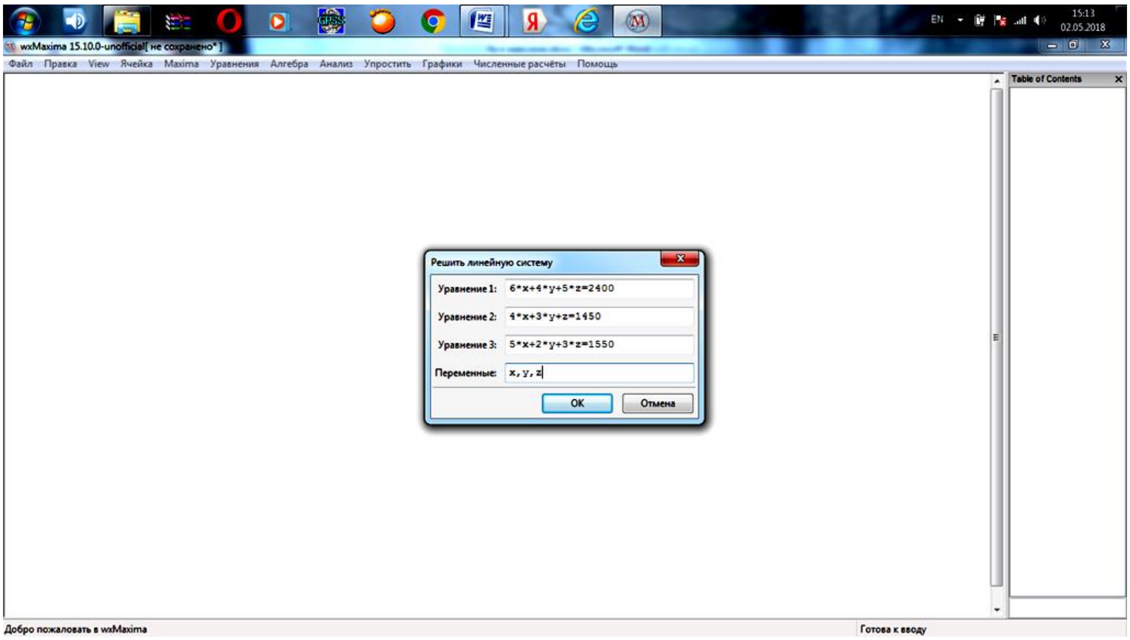


Рис .41

После нажатия на «ОК», получаем ответы решения этой системы уравнений (рис.42).

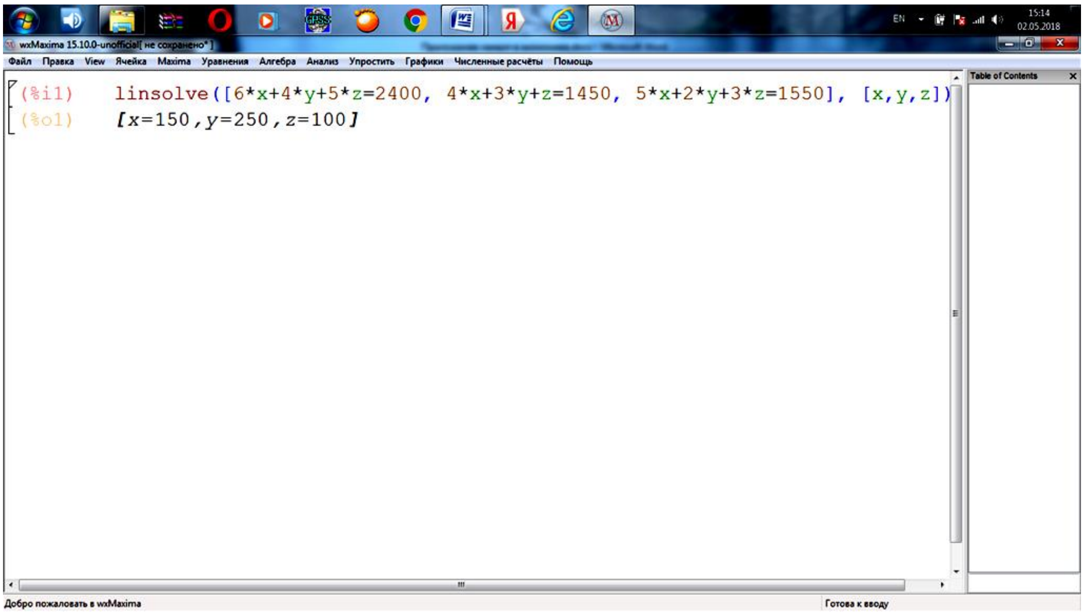


Рис 42

Решим эту задачу в пакете Excel.

Введем данные задачи и найдем обратную матрицу для матрицы расходов сырья по видам продукции. Для этого используем функцию **МОБР(массив)**. Для этого в ячейки забиваем формулу, где в роли массива выступает расходы сырья по видам продукции, а именно **=МОБР(C4:E6)** (рис.43).

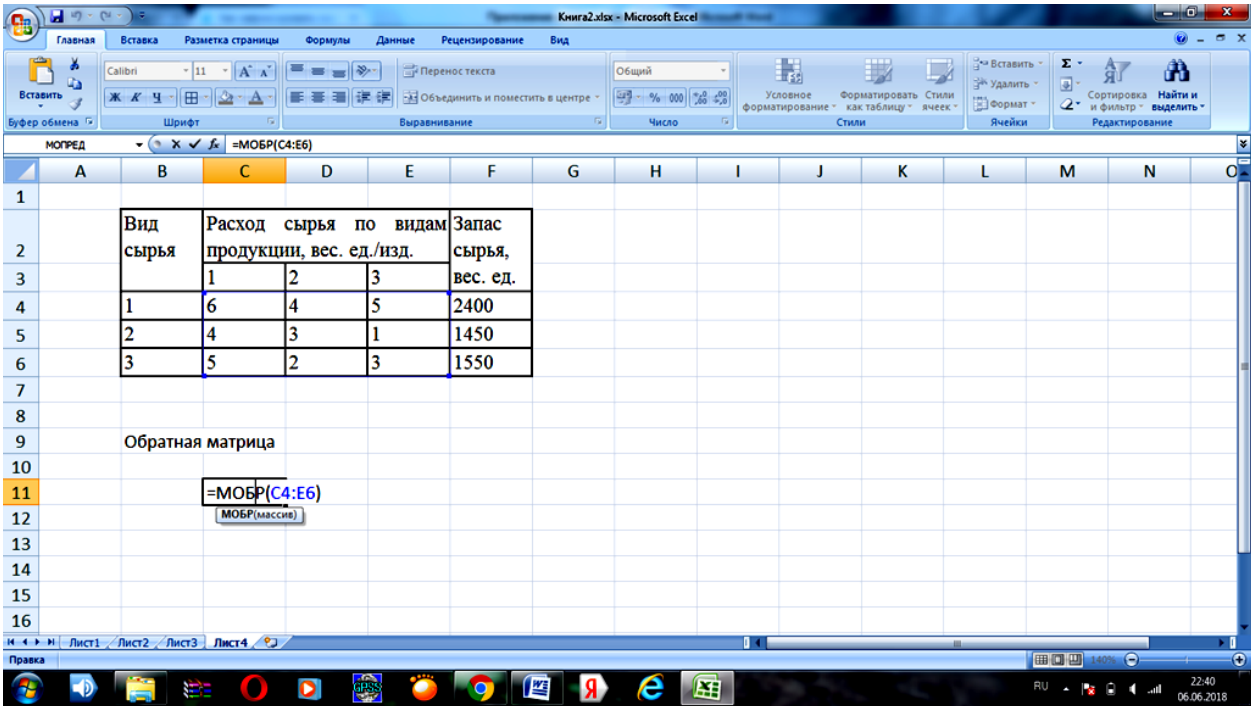


Рис.43

Получаем следующий результат, как показано на рис. 44.

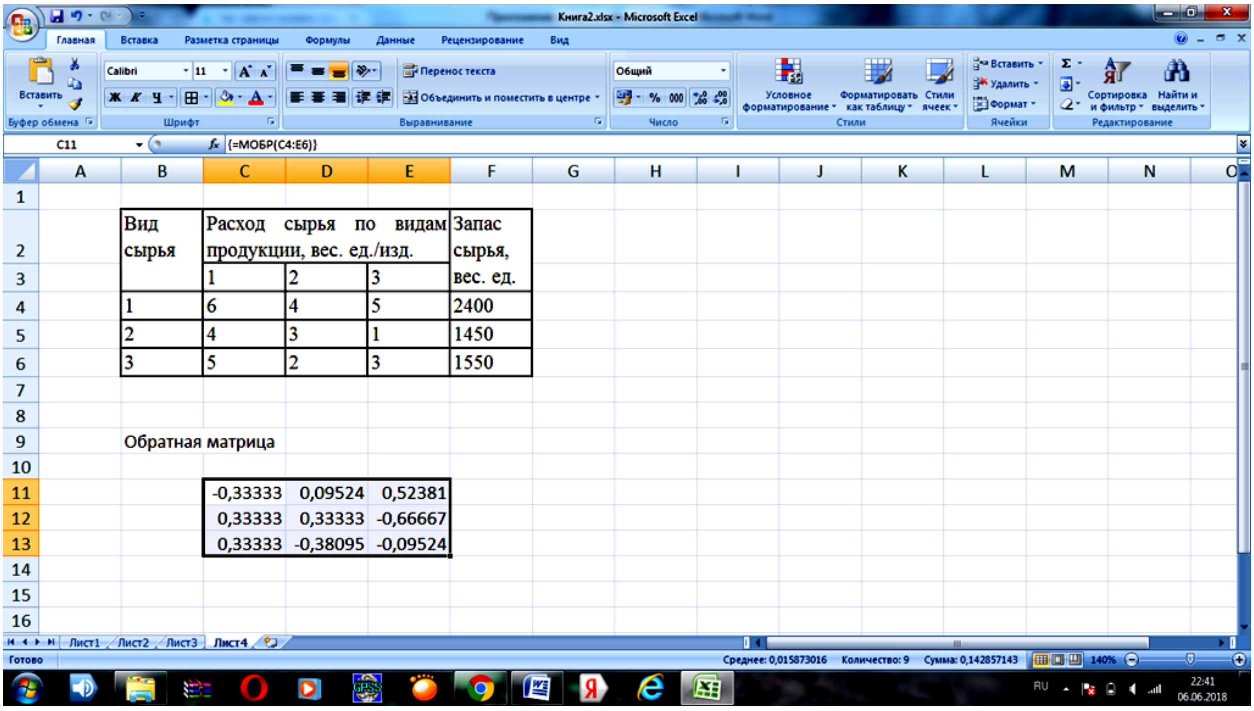


Рис. 44

Найдем объем выпуска продукции. Умножение матриц необходимо проделать также, как в примере 1.1. (рис.45, 46).

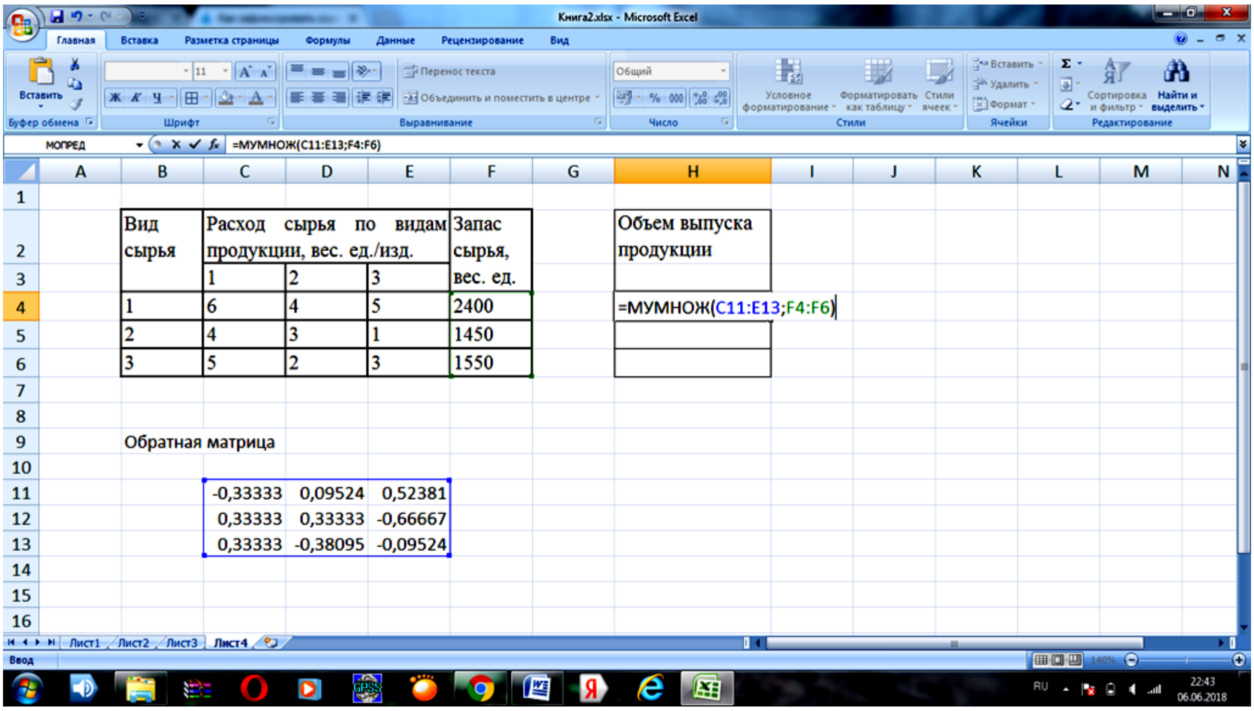


Рис .45

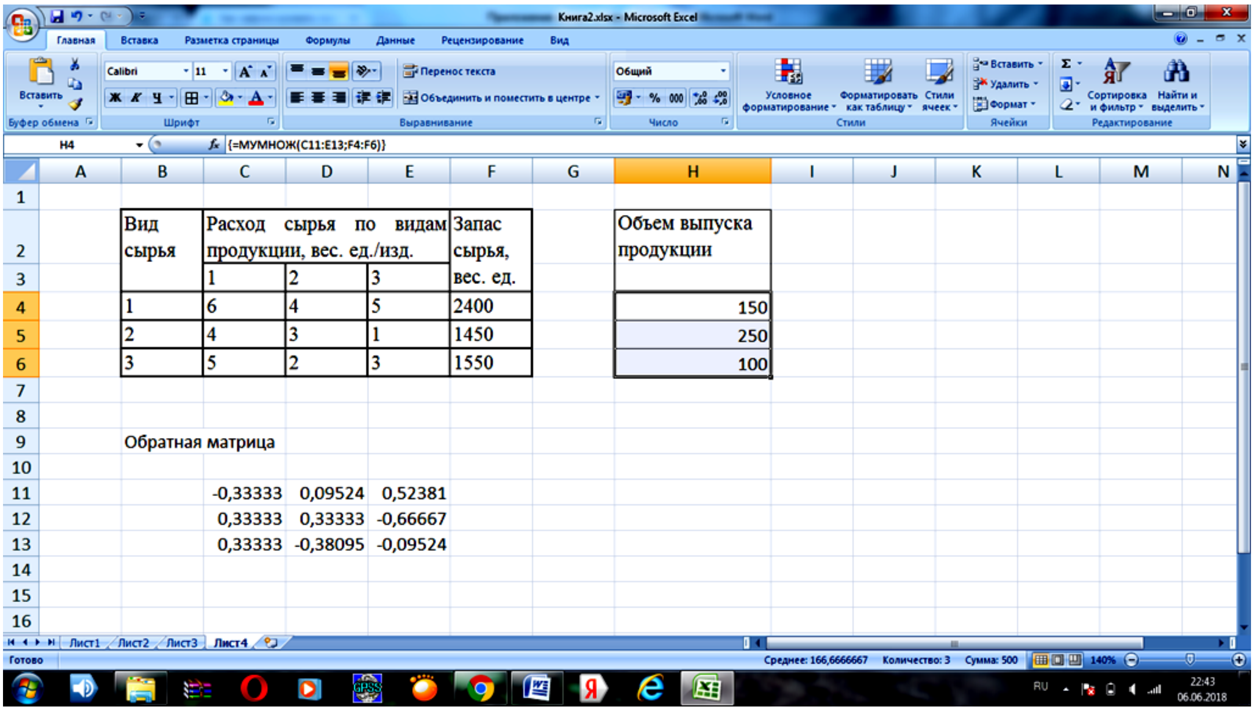


Рис.46

ПРИМЕР 2.2. Из определенного листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице 3:

Таблица 3

Тип заготовки	**Способ раскроя**		
	1	**2**	**3**
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

РЕШЕНИЕ. Обозначим через *x*, *y*, *z* количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя *x* листов будет получено 3 заготовок типа А, при втором – 2*y*, при третьем – *z*. Для полного выполнения задания по заготовкам типа А должно выполняться равенство: $3x+2y+z=360$. Таким же способом получаем уравнения: $x+6y+2z=300$, $4x+y+5z=675$. Имеем систему:

$$\begin{cases} x+6y+2z=300 \\ 3x+2y+z=360 \\ 4x+y+5z=675 \end{cases}.$$

Решим систему методом Гаусса.

1. Запишем систему в виде матрицы.

2. Составим расширенную матрицу системы.

3. Приведём полученную матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}.$$

Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x+6y+2z=300 \\ \quad 2y+9z=570 \\ -67x=-4020 \end{cases}.$$

Решая полученную систему, имеем: $x = 90$, $y = 15$, $z = 60$.

Решим эту же задачу в пакете «MAXIMA».

Повторим процедуру ввода систем линейных уравнений, описанную в примере 2.1. В результате получаем ответы, представленные на рисунке 47.

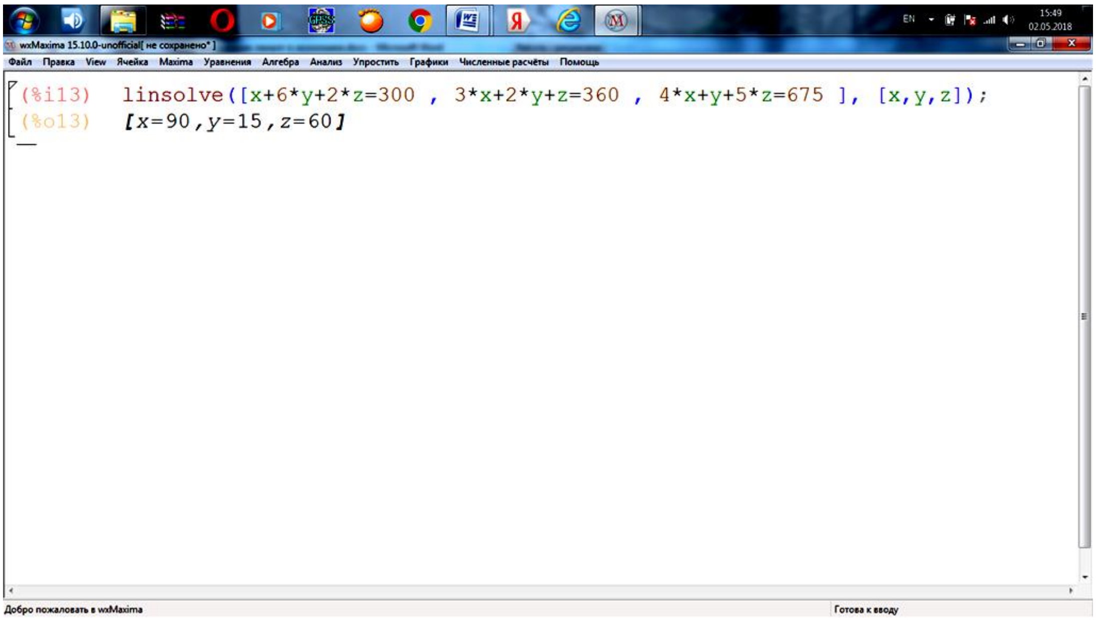


Рис. 47

Решим эту же задачу в пакете Excel.

Найдем обратную матрицу, как показано в примере 2.1 (рис.48-49).

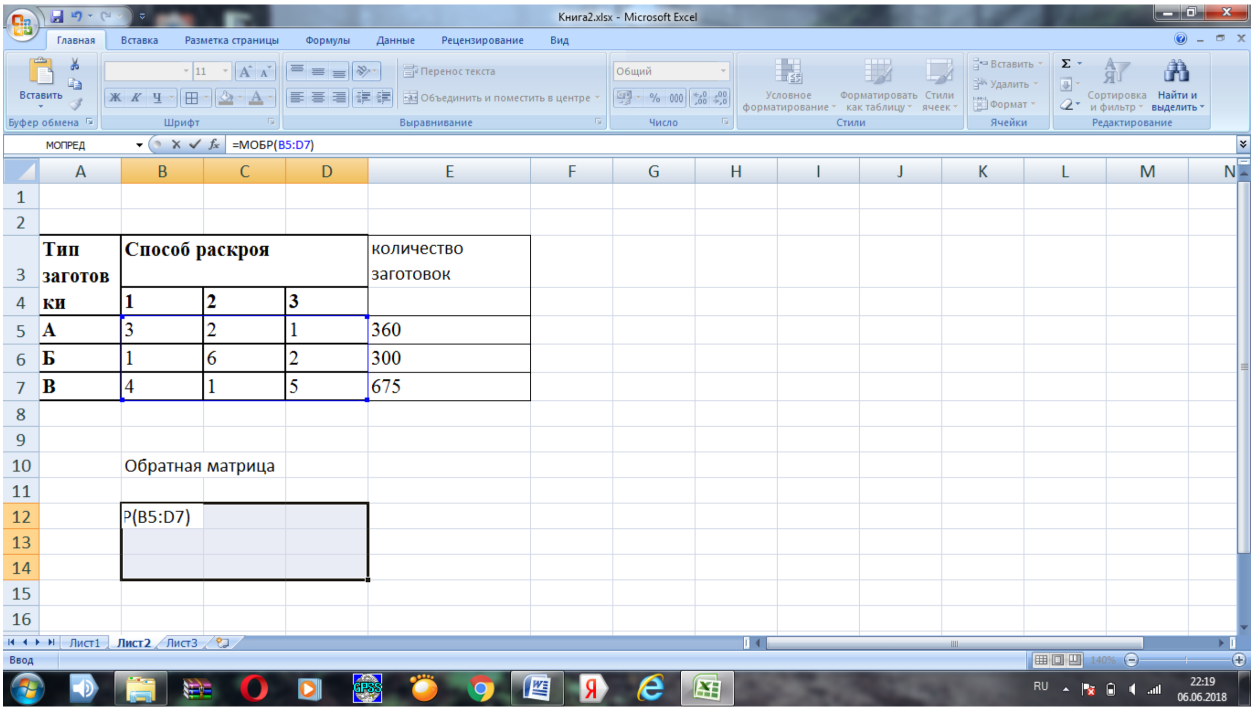


Рис.48

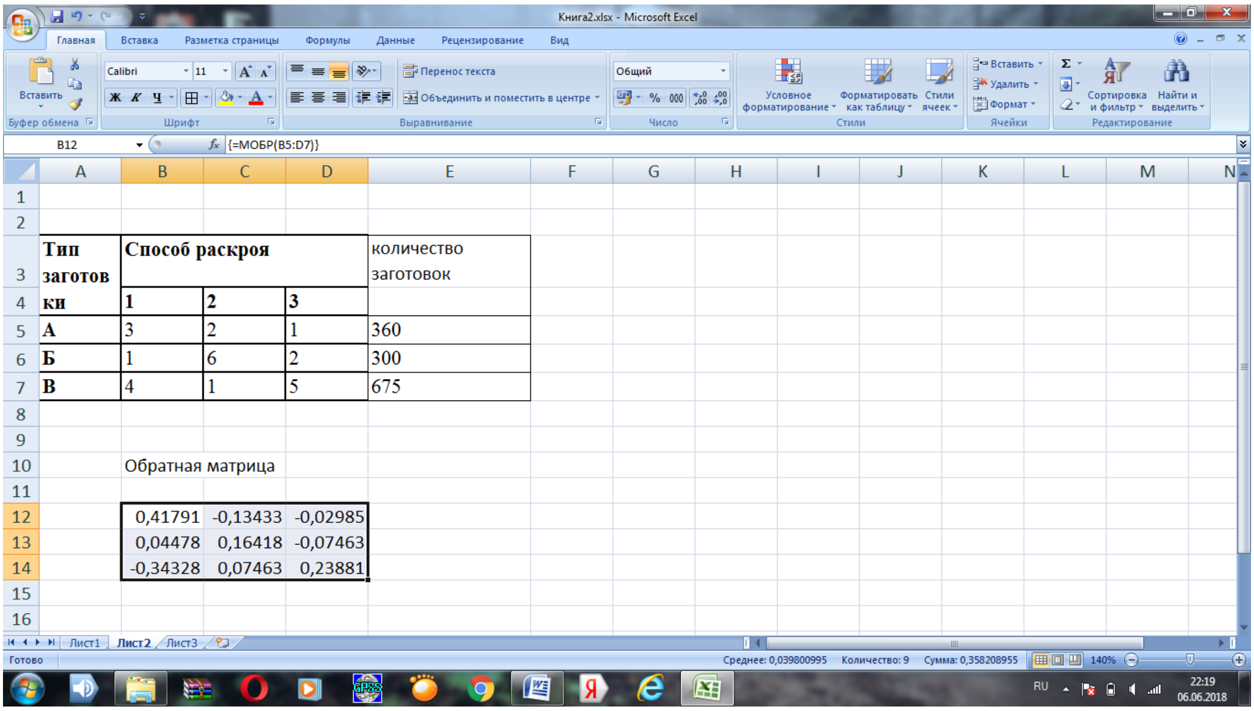


Рис.49

Найдем количество листов материала, используя умножение матриц, как показано в примере 1.1. (рис.50-51).

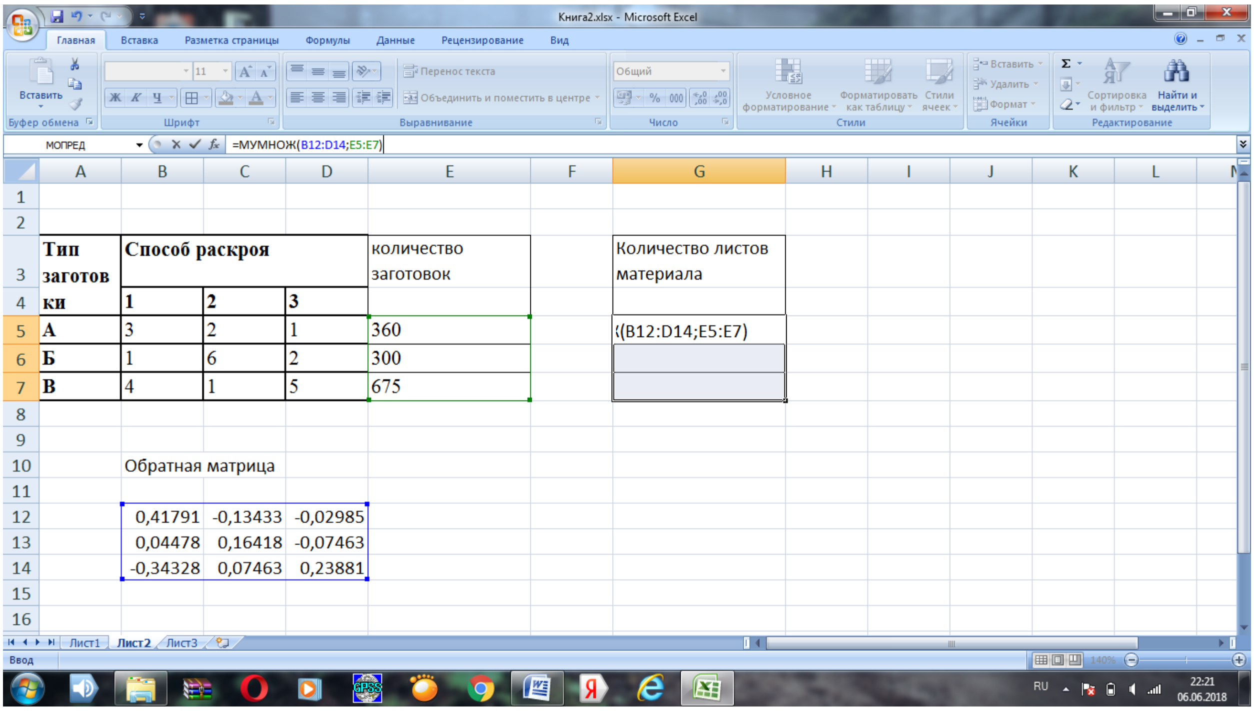


Рис.50

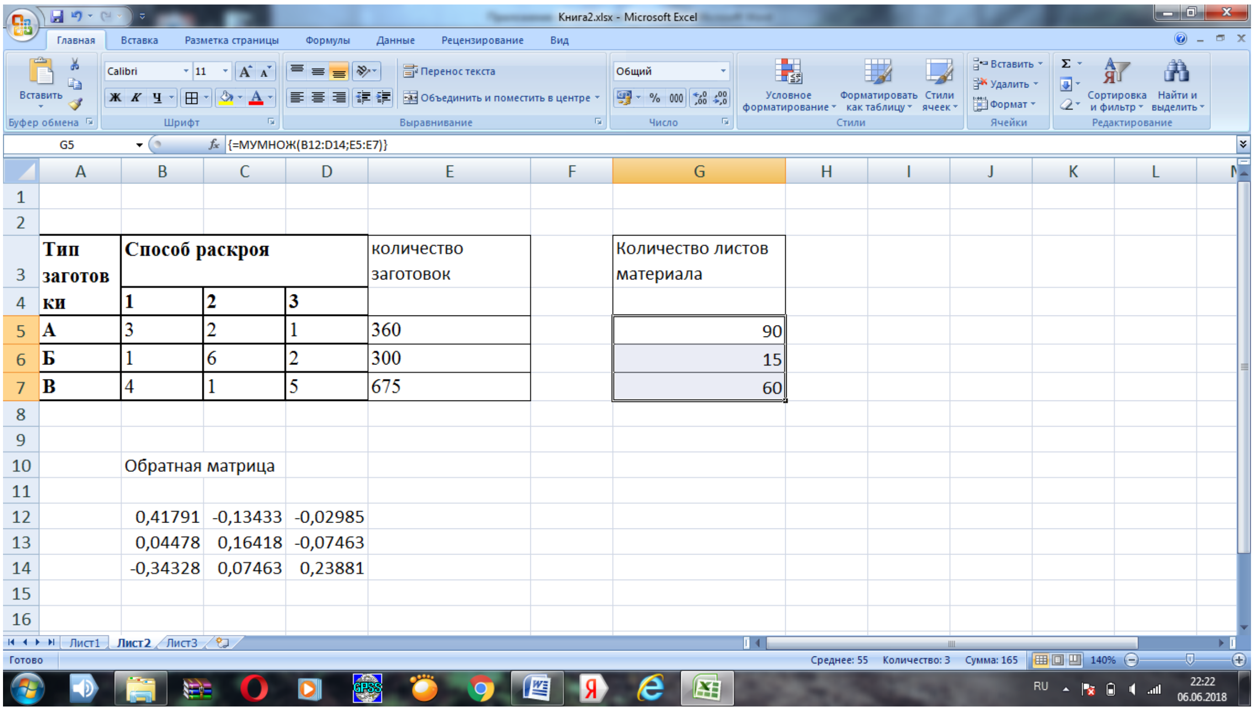


Рис.51

Задания для самостоятельной работы

2.1. Предприятие имеет два подразделения, суммарная величина прибыли которых за истекший год составила 25 у.е. На этот год запланировано увеличение прибыли первого подразделения на 60%, второго – на 10%. В результате суммарная прибыль должна вырасти на 40%. Найти величину прибыли каждого подразделения в прошлом году.

2.2. Завод производит три вида продукции. В таблице приведены объемы выпуска продукции и денежные затраты за три периода времени:

Период	Объем выпуска продукции (единиц)			Затраты (у.е.)
	I	II	III	
1	30	10	25	1225
2	40	15	20	1350
3	45	20	30	1800

Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

2.3. Предприятие выпускает продукцию трех видов P_1, P_2, P_3. Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции каждого вида, общее количество ресурсов приведены в таблице:

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на ед. продукции			Запасы ресурсов
	P_1	P_2	P_3	
Сырье (кг)	9	1	3	195
Материалы (кг)	6	2	5	240
Оборудование (ед)	3	4	6	270

а) Записать систему уравнений, характеризующих полное использование ресурсов.

б) Определить объем производства каждого вида продукции при полном использовании запасов ресурсов.

2.4. Из пункта A в пункт B необходимо перевезти оборудование четырех типов: I типа – 44 ед., II – 99 ед., III типа – 91 ед., IV типа – 66 ед. Для перевозки оборудования завод может заказать четыре вида транспорта. Количество оборудования каждого вида, вмещающегося на определенный вид транспорта, дано в таблице:

Тип оборудования	Вид транспорта			
	1	2	3	4
I	1	7	4	2
II	5	6	3	9
III	2	10	8	5
IV	3	4	5	4

а) Записать систему уравнений, характеризующую условия перевозки, при которых оборудование вывозится полностью.

б) Найти количество транспорта каждого вида, необходимого для перевозки оборудования.

2.5. Предположим, что производится три изделия A, B, C. При этом применяются три производственных процесса: штамповка, сборка и окраска. Мощности цехов штамповки, сборки и окраски составляют соответственно 450, 650 и 1050 (чел.-час), а трудоемкость каждого процесса при производстве единицы продукции составляет

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – число чел.-час, требующееся для i -ой стадии обработки единицы j -го изделия.

а) Написать с помощью матричных обозначений систему уравнений, характеризующих равенство используемых и имеющихся мощностей для каждого цеха.

б) В предположении, что мощность каждого цеха используется полностью, определить, каков будет при этом выпуск каждого вида продукции.

2.6. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 460 заготовок типа А, 435 заготовок типа Б и 845 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. При первом способе раскроя получается 4 заготовки типа А, 1 заготовка типа Б и 4 заготовки типа В, при втором способе раскроя получается 2 заготовки типа А, 7 заготовок типа Б и 3 заготовка типа В, при третьем способе раскроя получается 1 заготовка типа А, 2 заготовки типа Б и 5 заготовок типа В. Записать в математической форме условия выполнения задания. Найти количество листов, раскраиваемых 1-м, 2-м и 3-м способом.

2.7. Три судна доставили в порт 5500 т чугуна, 4500 т железной руды и 4000 т апатитов. Разгрузку можно производить как в железнодорожные вагоны для доставки потребителям, так и на склады. В вагоны можно разгрузить 9000 т, а остаток груза придется направить на склады. Стоимость выгрузки 1 т в вагоны составляет соответственно 5,10, 5,95 и 3,25 ден. ед. Стоимость выгрузки на портовые склады составляет соответственно 8,80, 7,20 и 4,35 ден. ед. Записать в математической форме условия полной разгрузки судов, если затраты на нее должны составить 77750 ден. ед, а апатиты должны быть вывезены полностью.

2.8. На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	4	2	9	3
Б	5	10	1	2

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 80 ед. сырья 608 изделий А и 224 изделий Б.

2.9. Для производства 5 видов продукции А, Б, В, Г, Д предприятие использует два вида сырья S_1, S_2 соответственно в количестве 240 и 600 кг. Нормы расхода сырья на единицу продукции и прибыль, получаемая от реализации единицы продукции, даны в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на ед. продукции (кг)				
	А	Б	В	Г	Д
S_1	1	2	4	0	2
S_2	0	3	3	1	6
Прибыль (усл.ед.)	10	5	8	2	15

а) Написать систему уравнений, характеризующих равенство используемых и имеющихся запасов сырья каждого вида.

б) Написать функцию, выражающую суммарную прибыль от реализации всей произведенной продукции.

в) Определить все опорные решения системы уравнений.

г) Среди опорных решений выбрать то, которое позволяет получить наибольшую прибыль от реализации всей произведенной продукции.

2.10. Хозяйство располагает следующими ресурсами: удобрения 200 ед., трудовые ресурсы 380 ед. Затраты на производство единицы продукции каждого вида и прибыль от реализации единицы продукции даны в таблице:

Ресурсы	Затраты на производство единицы продукции		
	пшеница	Рожь	гречиха
Трудовые ресурсы Удобрения	3 1	2 3	2 2
Прибыль (усл.ед.)	40	25	35

а) Написать систему уравнений, характеризующих равенство используемых и имеющихся ресурсов;

б) написать функцию, выражающую суммарную прибыль от реализации всей произведенной продукции;

в) определить все опорные решения системы линейных уравнений;

г) среди опорных решений выбрать то, которое позволяет получить наибольшую прибыль от реализации всей продукции.

2.11. Фирма выпускает три продукта П1, П2 и П3 посредством трех ресурсов Р1, Р2 и Р3. За весь будущий период она может обеспечить производство с 2 вариантами начальных запасов ресурсов. В таблице приведены расходуемые нормы, запасы ресурсов, прибыль за единицу каждого продукта.

	Продукты			Варианты запасов	
	П1	П2	П3	1	2
Р1	0,1	0,5	0,2	41	45
Р2	0,3	0,2	0,3	33	29
Р3	0,2	0,1	0,6	36	37
Прибыль	10	7	12		

Найти два возможных варианта производства. Определить более выгодный.

2.12. Кондитерский цех специализируется на производстве карамели четырех видов (К1, К2, К3, К4), используя в качестве сырья сахар, патоку, фруктовое пюре и шоколад. Нормы расхода сырья каждого вида на 1 т карамели, объем расхода сырья на 1 день, прибыль от реализации 1 т продукции приведены в таблице:

	Расход сырья на 1 т карамели				Сырье на день
	К1	К2	К3	К4	
Сахар	0,5	0,8	0,6	0,7	12,6
Патока	0,4	0,1	0,3	0,2	4,5
Фруктовое пюре	0,3	0,2	0	0,1	3,2
Шоколад	0	0,1	0,3	0	1,9
Прибыль за 1 т (д.е.)	20	35	48	30	

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида карамели и полученную прибыль.

2.13. В первом полугодии предприятие вложило в производство изделий трех видов 15 млн. д.е. и получило 960 тыс. д.е. прибыли. Во втором полугодии планируется увеличить затраты на производство изделий первого и третьего видов в 2 и 3 раза соответственно, а затраты на производство изделий второго вида оставить на прежнем уровне. На это предполагается затратить 29 млн. д.е. Какую прибыль получит предприятие во втором полугодии, если изделия первого вида дают 5% прибыли на вложенные средства, а изделия второго и третьего вида – 6 и 8% соответственно?

2.14. Бивалютная корзина стоимостью 67,47022 руб. на 55% состоит из доллара, а на 45% из евро. Если бы она на 55% состояла из евро, а на 45% из доллара, то ее стоимость была бы равна 68,51238 руб. Найти курсы доллара и евро.

2.15. Для откорма животных на ферме в ежедневный рацион каждого животного включается 6 ед. питательного вещества А и 9 ед. питательного вещества В. При этом используются корма К1, К2 и К3. Данные о содержании питательных веществ в одной весовой единице корма и ее стоимости приведены в следующей таблице:

Корм	Содержание пит. вещества		Стоимость ед. корма (усл. ден. ед.)
	А	В	
К1	2	1	5
К2	1	2	4
К3	3	5	9

Найти состав еженедельного рациона для откорма животных стоимостью в 129 усл. ден. ед., содержащего норму питательных веществ.

3. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Межотраслевой баланс — это экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимым для обеспечения этого выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах.

Цель балансового анализа – ответить на вопрос, связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: каким должен быть объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли? При этом каждая отрасль выступает с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями. Связь между отраслями, как правило, отражается в таблице межотраслевого баланса, а математическая модель, позволяющая их анализировать, разработана в 1936 г. американским экономистом В. Леонтьевым.

Предположим, что рассматривается n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Продукция каждой отрасли идет на:

1) внутрипроизводственное потребление (используется в качестве сырья, полуфабрикатов и средств производства в других отраслях, в том числе и в данной);

2) внепроизводственное потребление (конечный продукт Y – используется для накопления и возмещения основных фондов, прироста запасов, на личное потребление и обслуживание населения, оборону, экспорт и т.д.).

Рассмотрим математическую модель межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве в стоимостном выражении за один отчетный период времени (например, год).

		Потребляющие отрасли 1 2 … n	Конечная продукция Y	Валовая продукция X
Производящие	1	x_{11} x_{12} … x_{1n}	Y_1	X_1
отрасли	2	x_{21} x_{22} … x_{2n}	Y_2	X_2
	.	… … … …	…	…
	.	1-й квадрант	2-й квадрант	
	n	x_{n1} x_{n2} … x_{nn}	Y_n	X_n
Оплата труда	V	V_1 V_2 ... V_n	$V_{кон}$	
		3-й квадрант	4-й квадрант	
Чистый доход	m	m_1 m_2 ... m_n	$m_{кон}$	
Валовая продукция	X	X_1 X_2 ... X_n		X

Введем следующие обозначения:

X_i – общий (валовой) объем продукции i-ой отрасли ($i = 1,2,...,n$), где i – номер любой производящей отрасли; j – номер любой потребляющей отрасли;

x_{ij} – стоимость части продукции (средств производства), произведенной в i-й отрасли и потребляемой в качестве материальных затрат в j-й отрасли для производства ее валовой продукции ($i, j=1,2,...,n$);

Y_i –затраты продукции i-ой отрасли вне сферы материального производства, т.е. для целей конечного потребления (удовлетворение спроса населения, накопление, экспорт, военные нужды) для непроизводственного потребления.

В столбцах межотраслевого баланса отражается структура материальных затрат и чистой продукции каждой отрасли. Так первый столбец x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1} характеризует структуру материальных затрат 1-й отрасли за отчетный год. Элемент x_{11} показывает стоимость продукции 1-й отрасли для собственных нужд, x_{21} отражает затраты на продукцию 2-й отрасли для нужд 1-й отрасли. Кроме материальных затрат, в балансе отражена чистая продукция отраслей. Так, чистая продукция 1-й отрасли характеризуется суммой оплаты труда V_1 и чистого дохода (прибыли) m_1. Сумма материальных затрат и чистой продукции равна валовой продукции отрасли. Можно записать систему уравнений по столбцам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{n1} + V_1 + m_1 = X_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{n2} + V_2 + m_2 = X_2 \\ ... \quad .... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad .... \quad .... \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{nn} + V_n + m_n = X_n \end{cases}.$$

В строках межотраслевого баланса содержатся данные о распределении годового объема продукции каждой отрасли материального производства. Т.к. валовой объем продукции любой i-ой отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то по данным строк можно составить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + Y_1 = X_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + Y_2 = X_2 \\ ... \quad .... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + Y_n = X_n \end{cases}. \qquad (3.1)$$

Уравнения (3.1) называются **соотношениями баланса**.

В схеме баланса выделяют четыре части, которые называются квадрантами баланса. В 1-м квадранте содержатся межотраслевые потоки средств производства. По форме он представляет собой квадратную матрицу. Данные 1-го квадранта играют важную роль в анализе структуры материальных затрат отраслей. Во 2-м квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, т.е. продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования – на потребление и накопление. Таким образом, данные 2-го квадранта характеризуют отраслевую материальную структуру национального дохода. Показатели 3-го квадранта также характеризуют национальный доход со стороны его стоимостного состава как сумму оплаты труда и чистого дохода всех отраслей материального производства. 4-й квадрант отражает конечное распределение и использование национального дохода.

Введем **коэффициенты прямых затрат**

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \ (i, j = 1,2,...,n),$$

показывающие затраты продукции *i*-ой отрасли на производство единицы продукции *j*-ой отрасли. Можно полагать, что в некотором промежутке времени коэффициенты a_{ij} будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства. Это означает линейную зависимость материальных затрат от валового выпуска, т.е. $x_{ij} = a_{ij} X_j \ (i, j = 1,2,...,n)$, вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название **линейной**.

Теперь соотношение баланса (3.1) примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i = X_i \ (i, j = 1,2,...,n).$$

Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ ... \\ Y_n \end{pmatrix},$$

где X – вектор валового продукта, Y – вектор конечного продукта, A – **матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица**). Все элементы a_{ij} матрицы A неотрицательны и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Тогда систему (3.1) можно записать в матричном виде:

$$X = AX + Y \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) представляет собой систему балансовых уравнений, описывающую экономико-математическую **модель межотраслевого баланса** (**модель В.В. Леонтьева**).

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого вектора валового выпуска *X*, который при известной матрице прямых затрат *A* обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y.

Перепишем уравнение (3.2) в виде:

$$(E–A)X=Y\ ,$$

где $E-A=\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & .. & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & 1-a_{nn} \end{bmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ ... \\ Y_n \end{pmatrix}.$

Матрица (*E*–*A*) называется **матрицей Леонтьева.**

Если матрица (*E*–*A*) невырожденная, т.е. $|E-A|\neq 0$, то по формуле матричного метода $X=C^{-1}\cdot D$ (для системы $C\cdot X=D$)

$$X=(E-A)^{-1}\cdot Y\ .$$

Получаем уравнение, которое выражает зависимость валовой продукции каждой отрасли от конечной продукции всех отраслей.

Обозначим $(E-A)^{-1}=D^{-1}$, а ее элементы через d_{ij}, тогда

$$D^{-1}=(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & .. & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ d_{n1} & d_{n2} & ... & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица $(E-A)^{-1}$ называется матрицей коэффициентов полных затрат. Элементы d_{ij} $(i=1,...,n;\ j=1,...,n)$ называются коэффициентами полных материальных затрат. Они включают в себя как прямые, так и косвенные затраты продукции отрасли *i* на единицу продукции отрасли *j*. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся к предшествующим стадиям производства и входят в продукт не прямо, а через другие средства производства. Матрица коэффициентов косвенных затрат:

$$D^{-1}-A=(E-A)^{-1}-A\ .$$

ПРИМЕР 3.1. Дан межотраслевой баланс межотраслевой модели хозяйства

	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовой продукт	Y'
№ отрасли производства	1	30	60	60	150	300	200
	2	30	0	30	140	200	150
	3	60	40	45	5	150	70

Определить:

1) технологическую матрицу;
2) матрицу коэффициентов полных затрат;
3) дать экономический анализ каждого столбца матрицы коэффициентов полных затрат;
4) матрицу коэффициентов косвенных затрат;
5) определить валовой выпуск X' на новый ассортимент конечной продукции Y'.

РЕШЕНИЕ

1)Находим коэффициенты прямых затрат: $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$

$$a_{11} = \frac{30}{300} = 0{,}1;\ a_{12} = \frac{60}{200} = 0{,}3;\ a_{13} = \frac{60}{150} = 0{,}4;$$
$$a_{21} = \frac{30}{300} = 0{,}1;\ a_{22} = \frac{0}{200} = 0;\ a_{23} = \frac{30}{150} = 0{,}2;$$
$$a_{31} = \frac{60}{300} = 0{,}2;\ a_{32} = \frac{40}{200} = 0{,}2;\ a_{33} = \frac{45}{150} = 0{,}3;$$

Матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ имеет неотрицательные элементы <1.

2) Найдем матрицу полных затрат.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1-0{,}1 & 0-0{,}3 & 0-0{,}4 \\ 0-0{,}1 & 1-0 & 0-0{,}2 \\ 0-0{,}2 & 0-0{,}2 & 1-0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Вычислим $|E-A| = 0{,}9\cdot 1\cdot 0{,}7 + (-0{,}4)\cdot(-0{,}1)\cdot(-0{,}2) + (-0{,}2)\cdot(-0{,}3)\cdot(-0{,}2) -$
$-((-0{,}2)\cdot 1\cdot(-0{,}4)) + 0{,}7\cdot(-0{,}3)\cdot(-0{,}1) + 0{,}9\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2) = 0{,}473 \neq 0$

Обозначим $E - A = D$ и вычислим алгебраические дополнения матрицы D.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}7\end{vmatrix}=0{,}7-0{,}04=0{,}66;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-0{,}1 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}7\end{vmatrix}=-(-0{,}07-0{,}04)=0{,}11;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-0{,}1 & 1\\ -0{,}2 & -0{,}2\end{vmatrix}=0{,}02+0{,}2=0{,}22;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-0{,}3 & -0{,}4\\ -0{,}2 & 0{,}7\end{vmatrix}=-(-0{,}21-0{,}08)=0{,}29;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0{,}9 & -0{,}4\\ -0{,}2 & 0{,}7\end{vmatrix}=0{,}63-0{,}08=0{,}55;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0{,}9 & -0{,}3\\ -0{,}2 & -0{,}2\end{vmatrix}=-(-0{,}18-0{,}06)=0{,}24;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-0{,}3 & -0{,}4\\ 1 & -0{,}2\end{vmatrix}=0{,}06+0{,}4=0{,}46;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0{,}9 & -0{,}4\\ -0{,}1 & -0{,}2\end{vmatrix}=-(-0{,}18-0{,}04)=0{,}22;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0{,}9 & -0{,}3\\ -0{,}1 & 1\end{vmatrix}=0{,}9-0{,}03=0{,}87;$$

Присоединенная матрица:

$$D^{*}=\begin{pmatrix}0{,}66 & 0{,}29 & 0{,}46\\ 0{,}11 & 0{,}55 & 0{,}22\\ 0{,}22 & 0{,}24 & 0{,}87\end{pmatrix}$$

По формуле нахождения обратной матрицы:

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}D^{*}=\frac{1}{0{,}473}\begin{pmatrix}0{,}66 & 0{,}29 & 0{,}46\\ 0{,}11 & 0{,}55 & 0{,}22\\ 0{,}22 & 0{,}24 & 0{,}87\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}395 & 0{,}613 & 0{,}973\\ 0{,}233 & 1{,}163 & 0{,}465\\ 0{,}465 & 0{,}507 & 1{,}839\end{pmatrix}.$$

Получили матрицу коэффициентов полных затрат.

3. Экономический анализ

Столбец с номером *j* матрицы коэффициентов полных затрат означает какой необходим ассортимент (в валовом исчислении) производства продукции различных отраслей для производства одной единицы конечного продукта *j*-ой отрасли.

Первый столбец означает, что для того, чтобы получить для потребления одну единицу продукции предприятия 1-ой отрасли нужно произвести 1,395 единиц продукции 1-ой отрасли, 0,233 единиц продукции 2-ой отрасли, 0,465 единиц продукции 3-ей отрасли.

Второй столбец означает, что для того, чтобы получить для потребления одну единицу продукции предприятия 2-ой отрасли нужно произвести 0,613 единиц продукции 1-ой отрасли; 1,163 единиц продукции 2-ой отрасли; 0,507 единиц продукции 3-ей отрасли.

Третий столбец означает, что для того, чтобы получить для потребления одну единицу продукции предприятия 3-ой отрасли нужно произвести 0,973 единиц продукции 1-ой отрасли, 0,465 единиц продукции 2-ой отрасли, 1,839 единиц продукции 3-ей отрасли.

4) матрица коэффициентов косвенных затрат:

$$D^{-1} - A = (E-A)^{-1} - A$$

$$D^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1{,}395 & 0{,}613 & 0{,}973 \\ 0{,}233 & 1{,}163 & 0{,}465 \\ 0{,}465 & 0{,}507 & 1{,}839 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}295 & 0{,}313 & 0{,}573 \\ 0{,}133 & 1{,}163 & 0{,}265 \\ 0{,}265 & 0{,}307 & 1{,}539 \end{pmatrix}$$

5) Найдем валовой выпуск на новый ассортимент конечной продукции по формуле:

$$X' = (E-A)^{-1} \cdot Y' = \begin{pmatrix} 1{,}395 & 0{,}613 & 0{,}973 \\ 0{,}233 & 1{,}163 & 0{,}465 \\ 0{,}465 & 0{,}507 & 1{,}839 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 439{,}112 \\ 253{,}488 \\ 297{,}886 \end{pmatrix},$$

т.е. валовой выпуск первой отрасли на новый ассортимент конечной продукции 439,112 условных единиц, второй отрасли 253,488 условных единиц, третьей отрасли 297,886 условных единиц.

Решим данную задачу с помощью пакета компьютерной программы “MAXIMA”.

1) Введем исходную матрицу и ее транспонируем (рис.52).

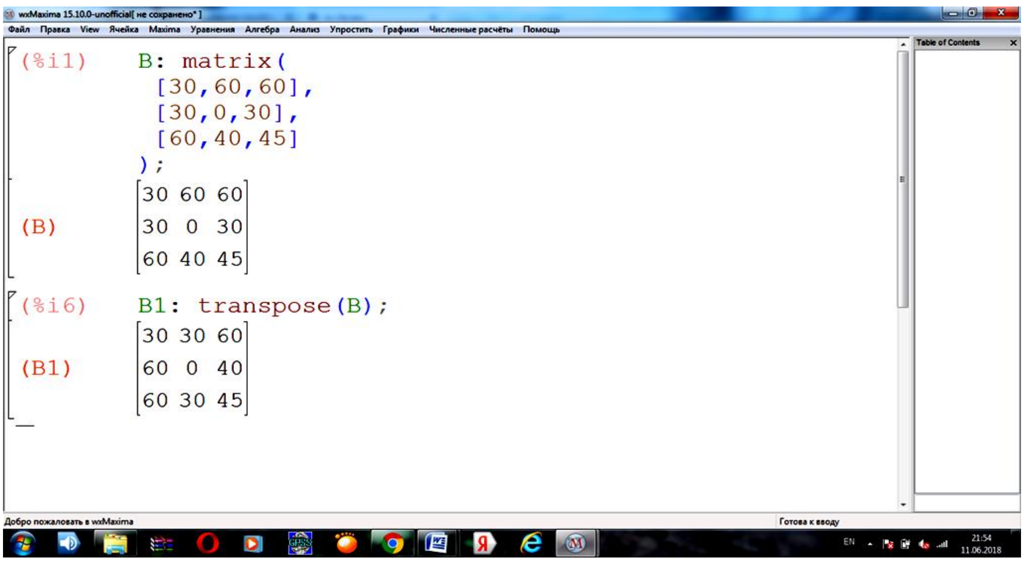


Рис.52

Выведем строки полученной матрицы и поделим элементы каждой строки на соответствующий валовой объем производства (рис.53).

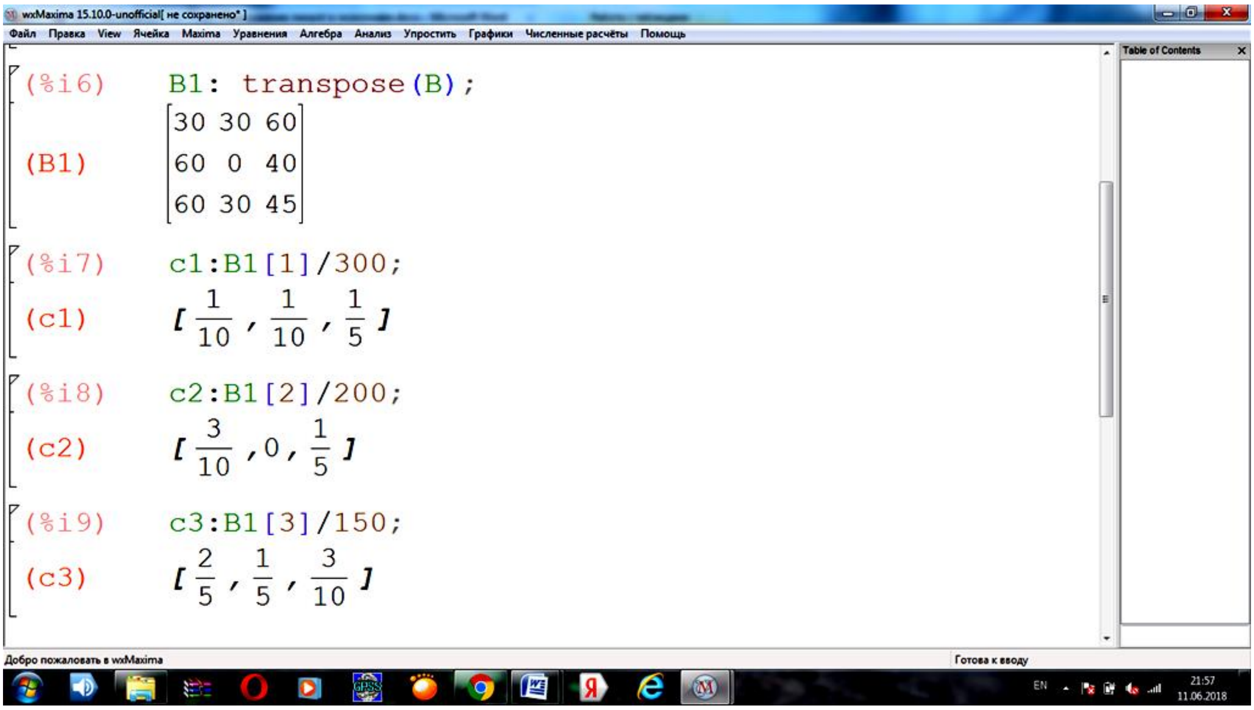


Рис.53

Составим из полученных строк матрицу и ее транспонируем. Тем самым получим матрицу технологических затрат (рис.54-55).

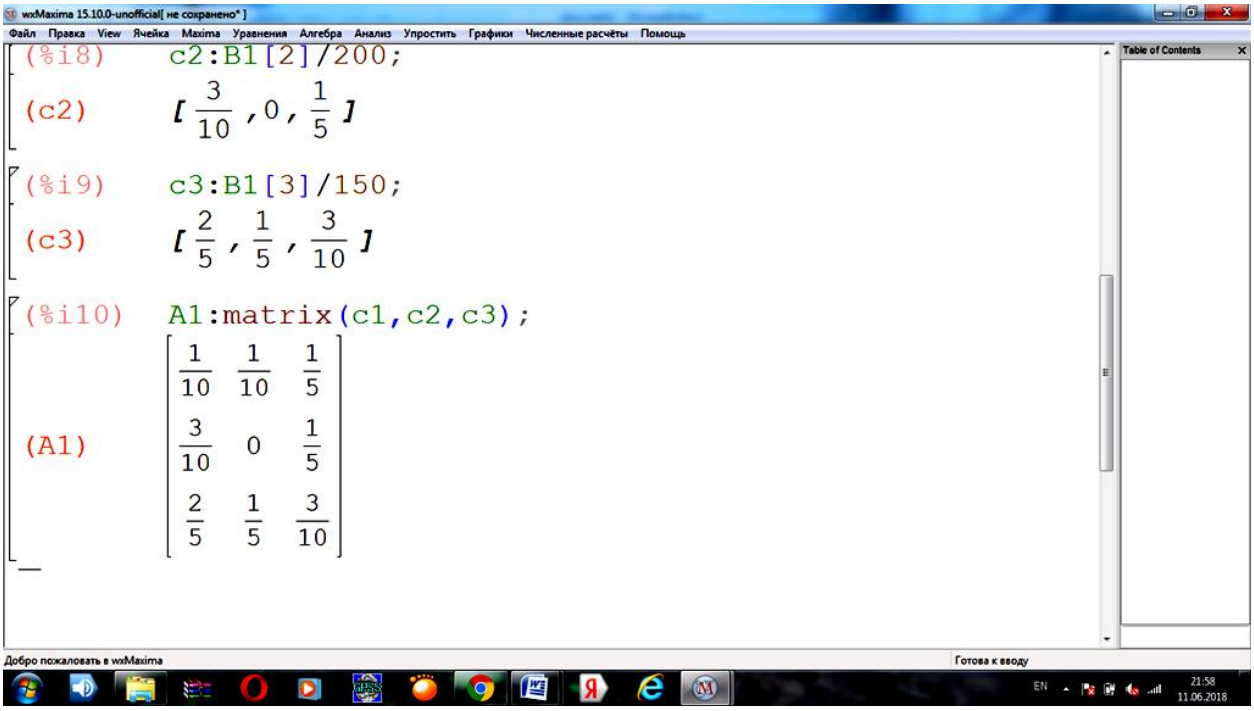


Рис.54

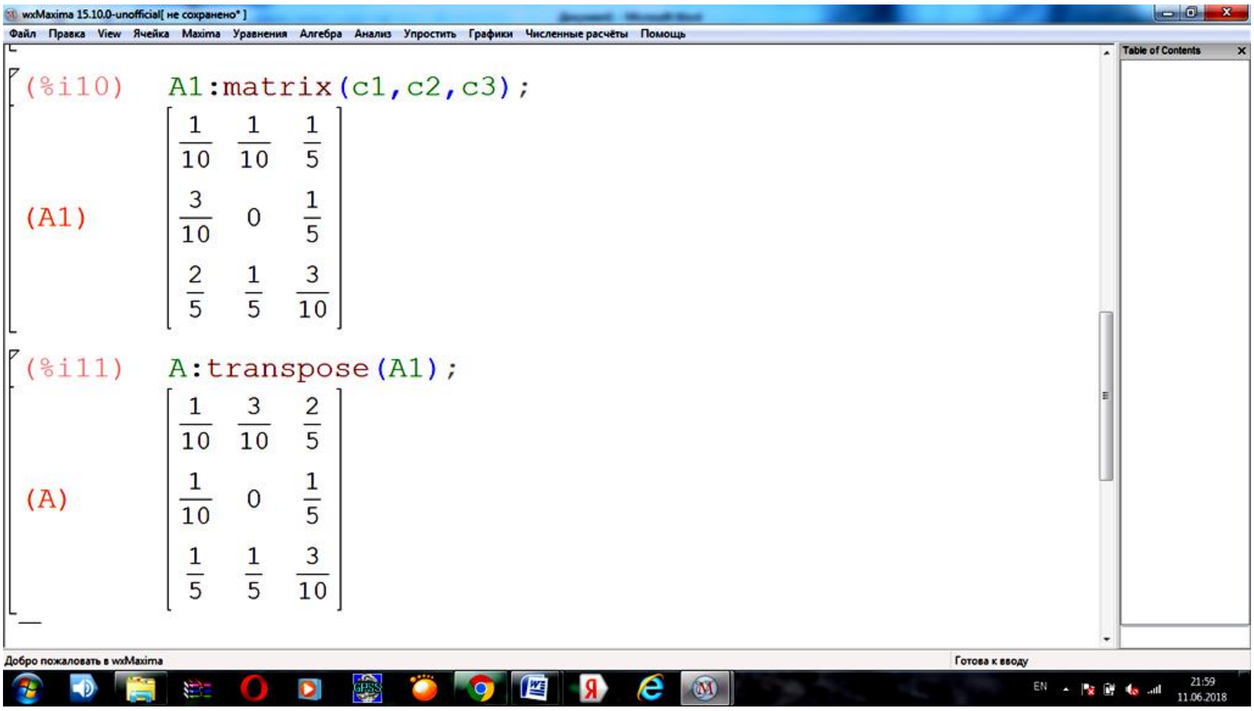


Рис.55

2) Введем единичную матрицу и вычислим матрицу Леонтьева (рис.56).

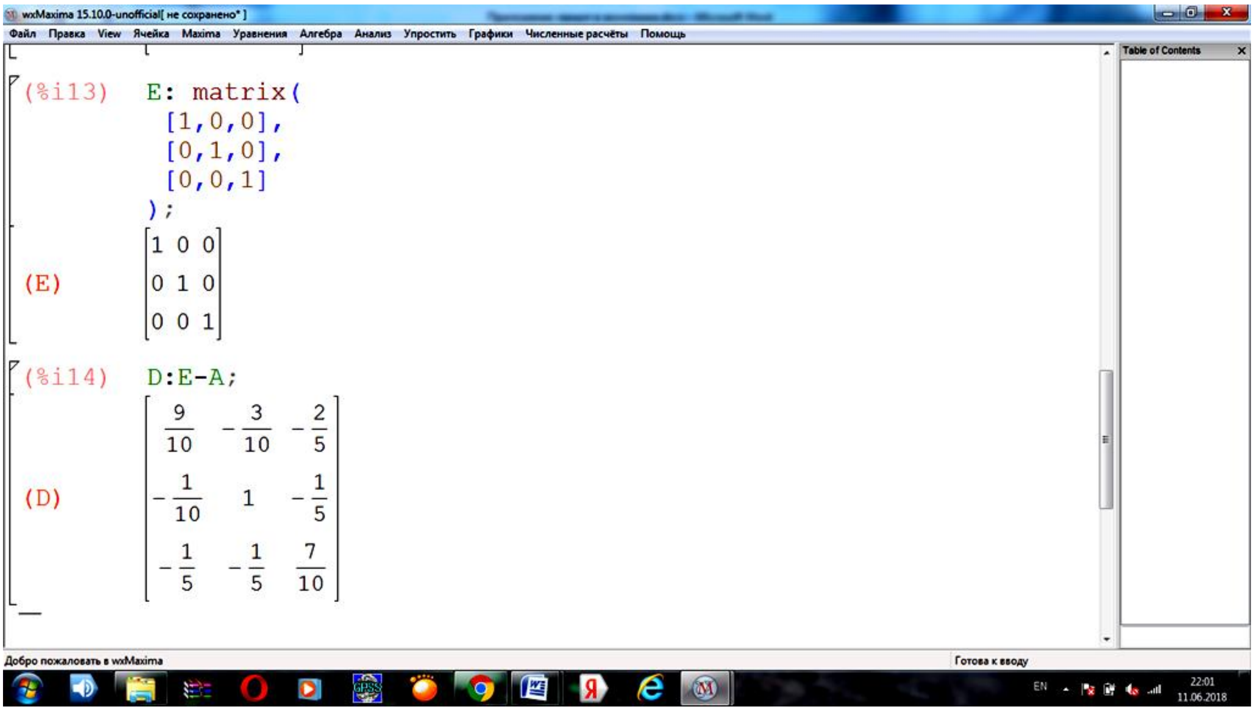


Рис.56

Найдем обратную матрицу для матрицы D (рис.57).

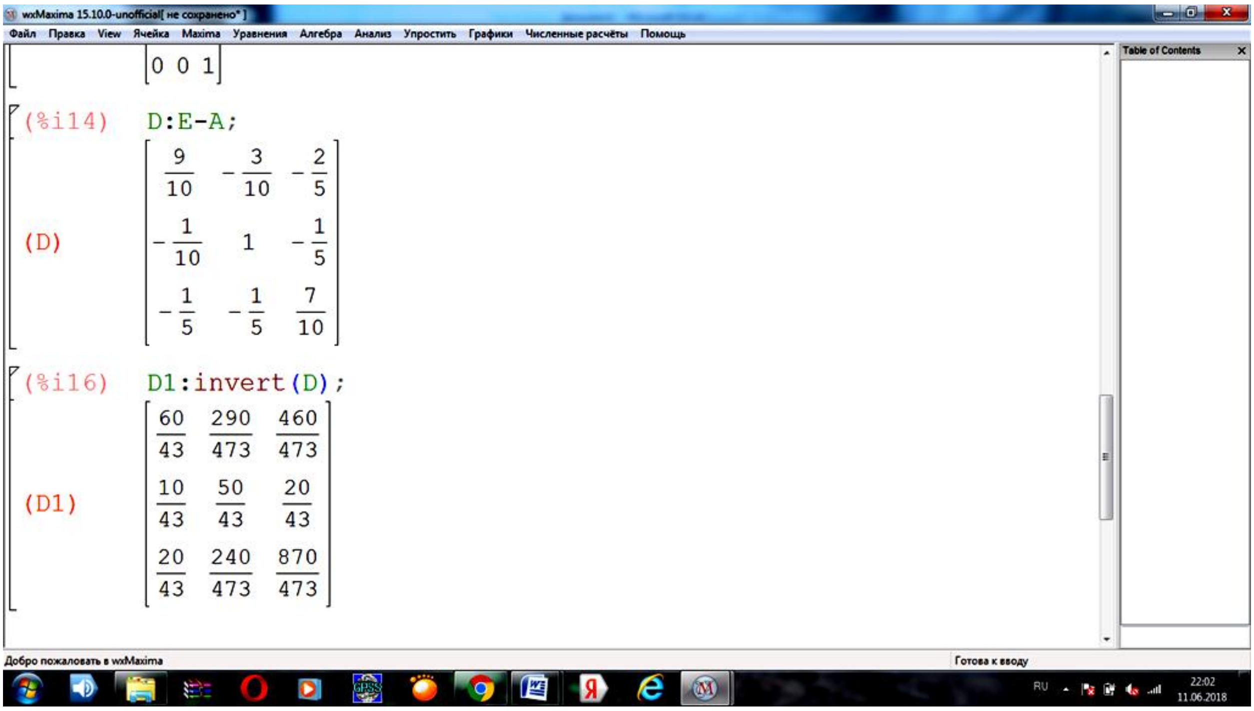


Рис.57

У нас получились дробные значения, что не удобно для экономической интерпретации. Так как результат надо получить в десятичной форме, то после команды надо дописать **,numer**. Для того чтобы эти значения были с какой-нибудь точностью, необходимо записать команду, например **fpprintprec:3,** т.е. получим число с выводом до 3 знаков после запятой (рис.58).

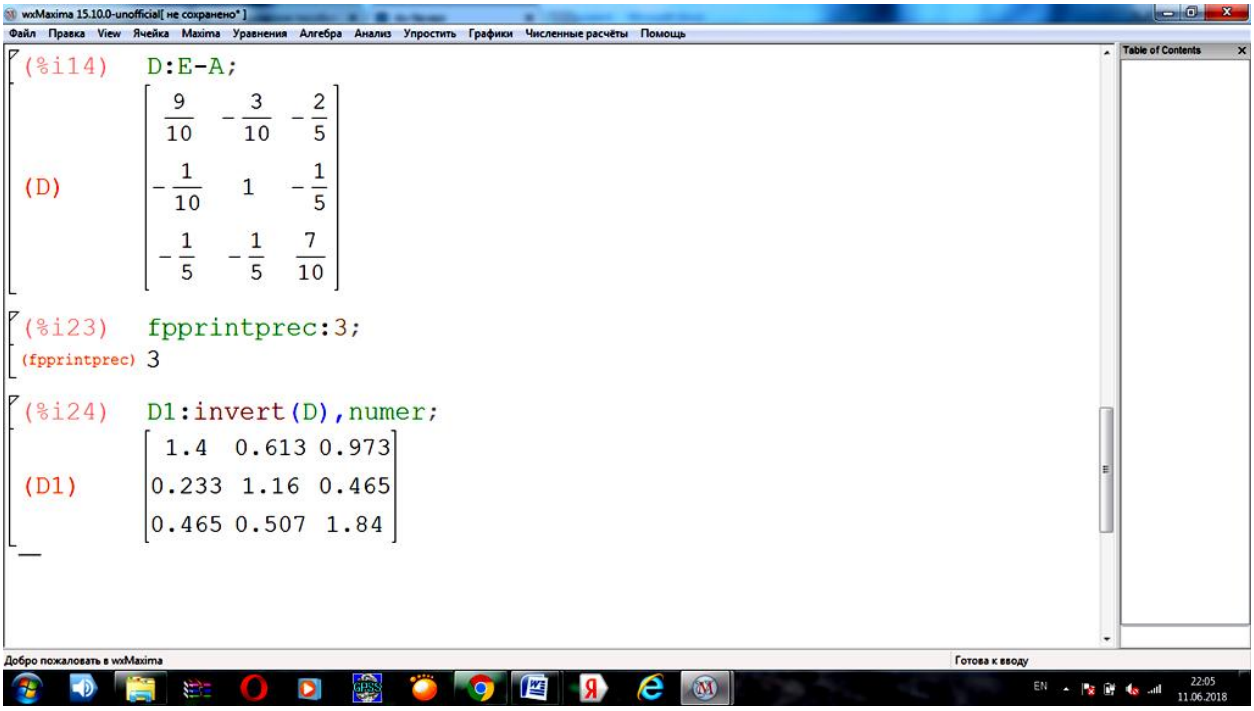


Рис.58

3) Найдем матрицу косвенных затрат, как разность матриц полных и прямых затрат (рис.59).

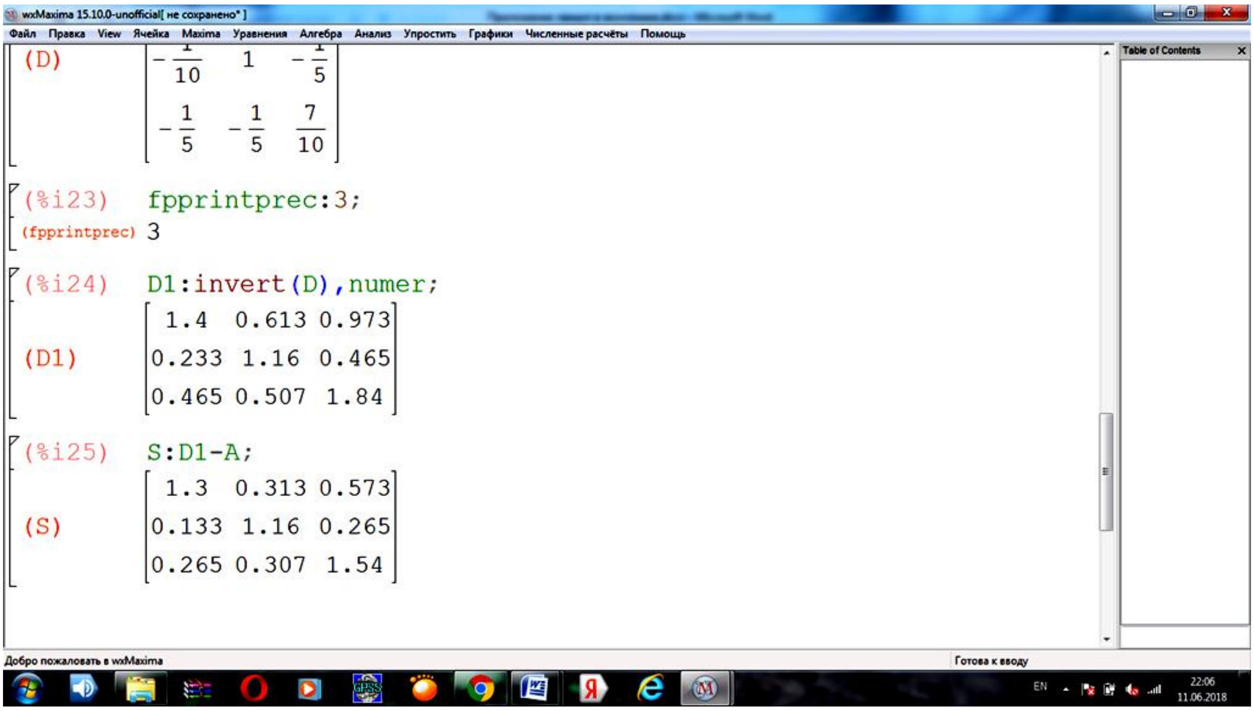


Рис.59

4) Введем матрицу-столбец (новый ассортимент конечной продукции) и найдем новый валовой выпуск (рис.60).

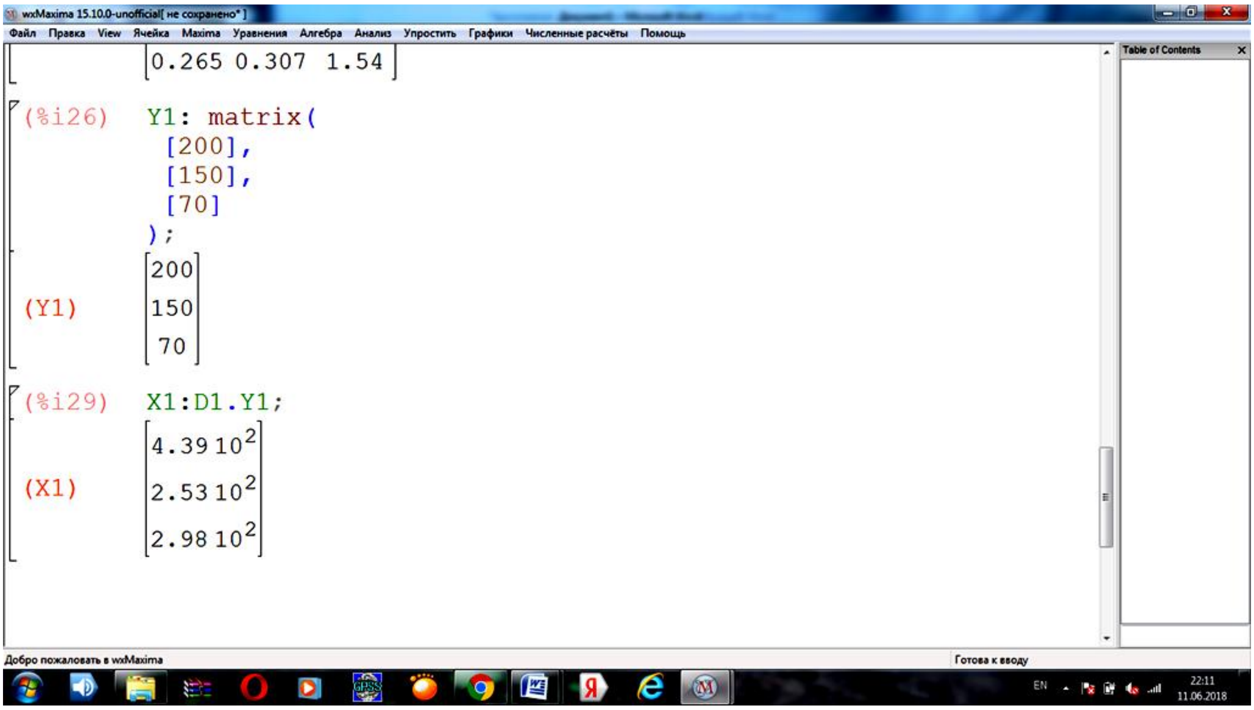


Рис.60

Решим задачу с помощью компьютерного пакета Excel.

1) Введем первоначальные данные и найдем технологическую матрицу. Для этого в первую ячейку технологической матрицы введем формулу **=D4/H4**. И растянем эту формулу по первому столбцу. Команда **H4** закрепила ячейку, тем самым при

растяжении формулы все элементы первого столбца делились на фиксированный элемент, находящийся в ячейки **H4**, а именно 300 (рис. 61).

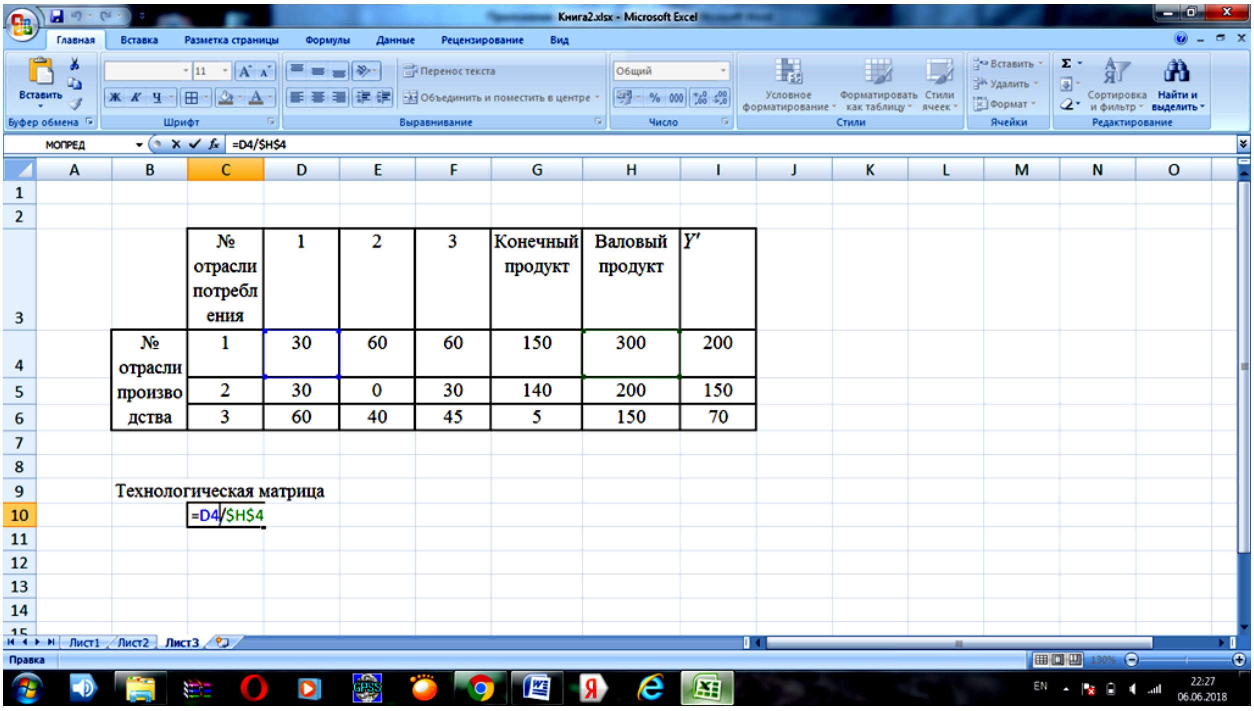


Рис.61

Аналогичную процедуру проделываем со вторым и третьим, получая при этом матрицу прямых затрат (рис.62).

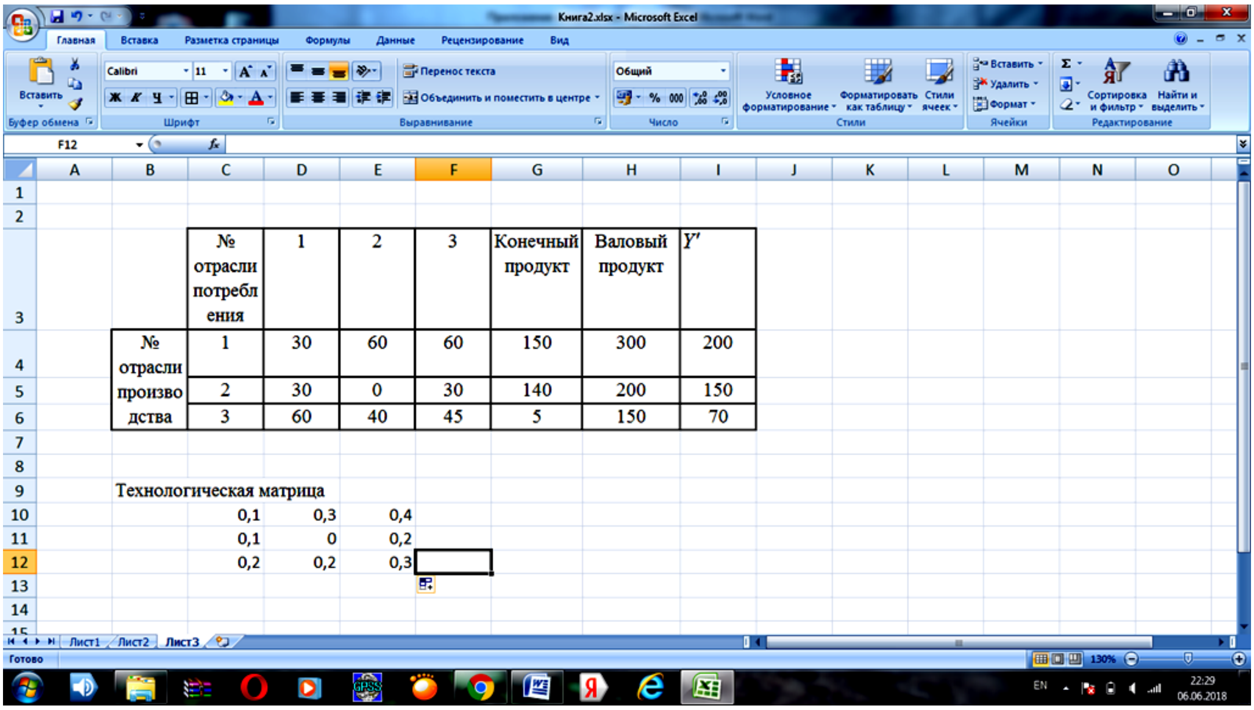


Рис.62

2) Введем единичную матрицу. Найдем матрицу Леонтьева. В первую ячейку введем формулу разности соответствующих ячеек единичной и технологической матрицы (рис. 63).

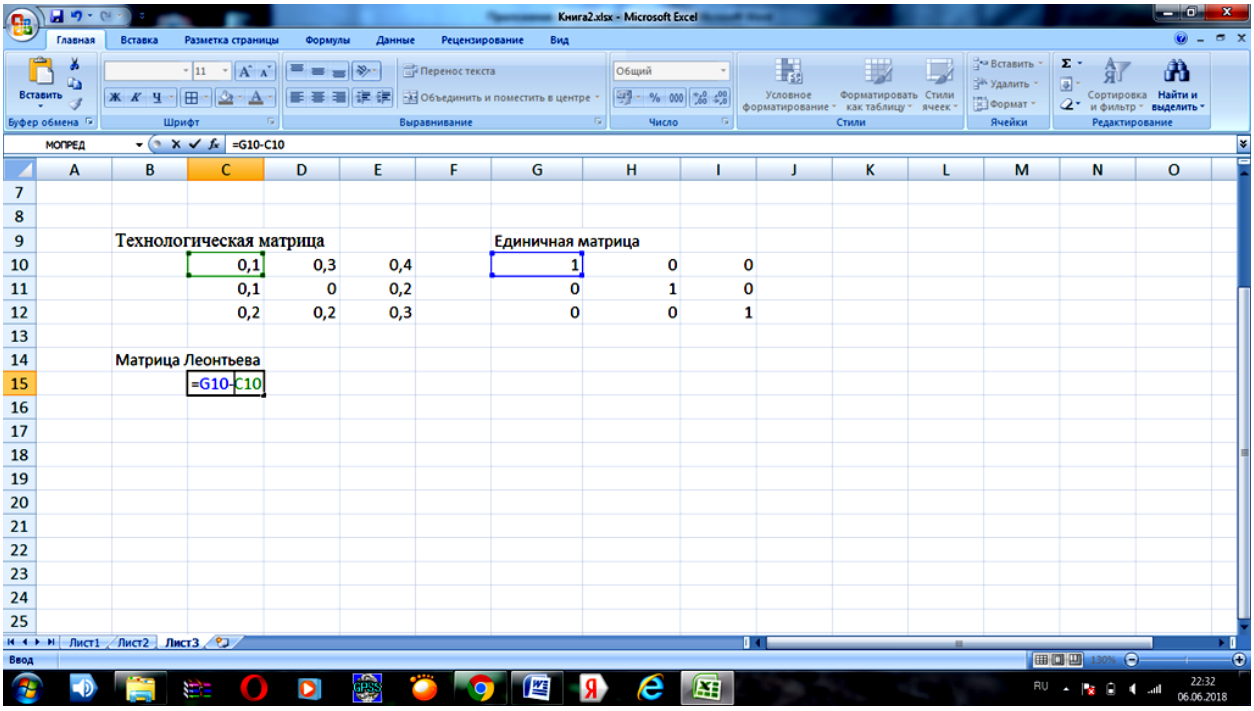


Рис.63

И растянем ее по столбцам и строкам. Получим матрицу Леонтьева (рис.64).

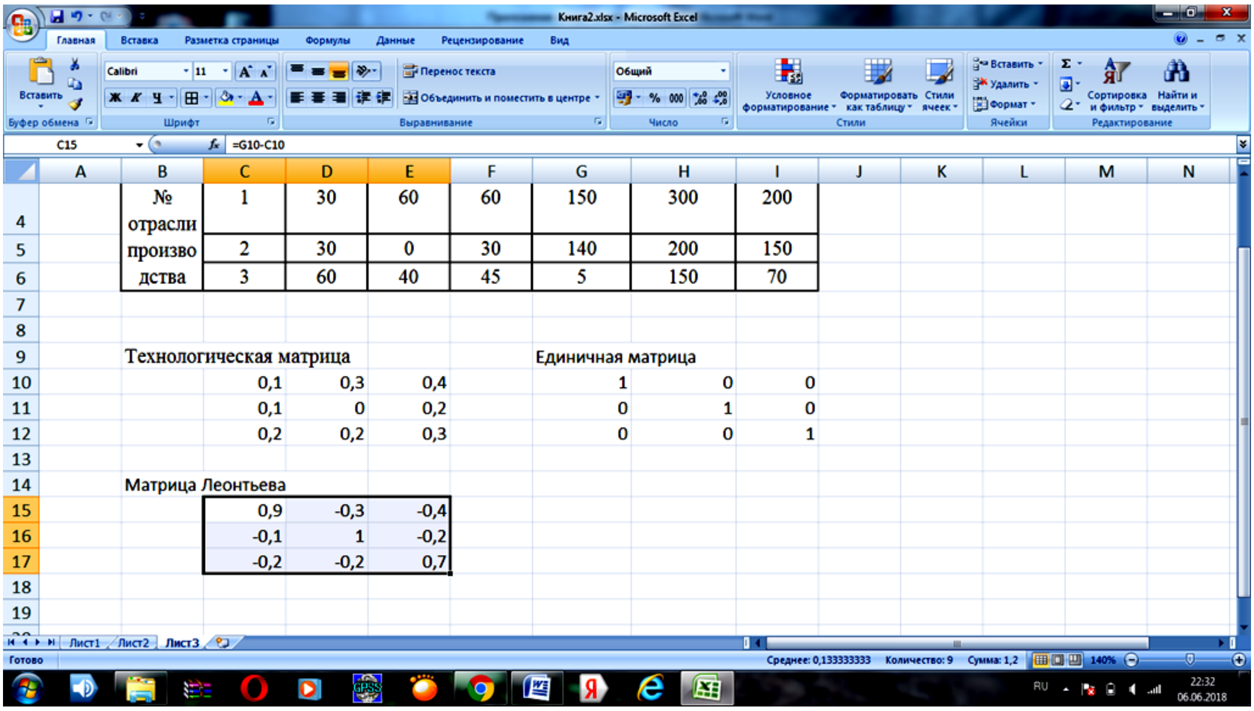


Рис.64

Матрица полных затрат находится, как обратная матрица для матрицы Леонтьева. Процедура нахождения обратной матрицы описана в примере 2.1. (рис. 65).

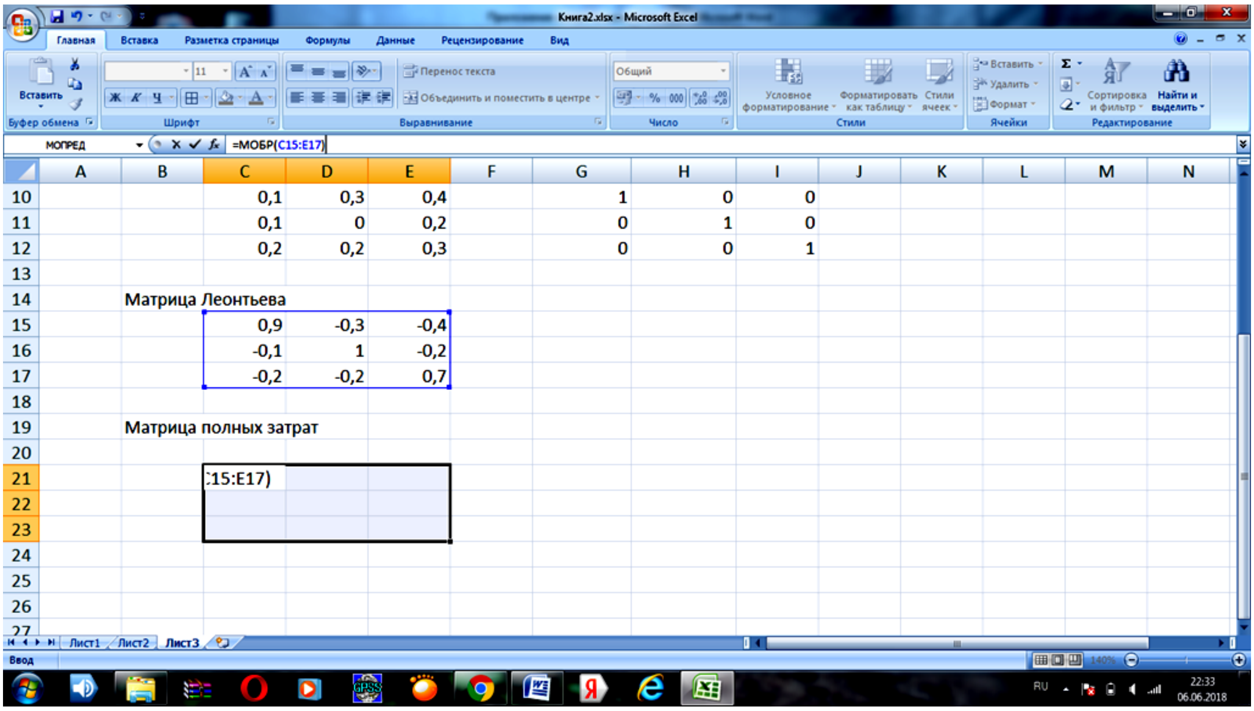


Рис.65

На рисунке 66 представлена получена матрица полных затрат.

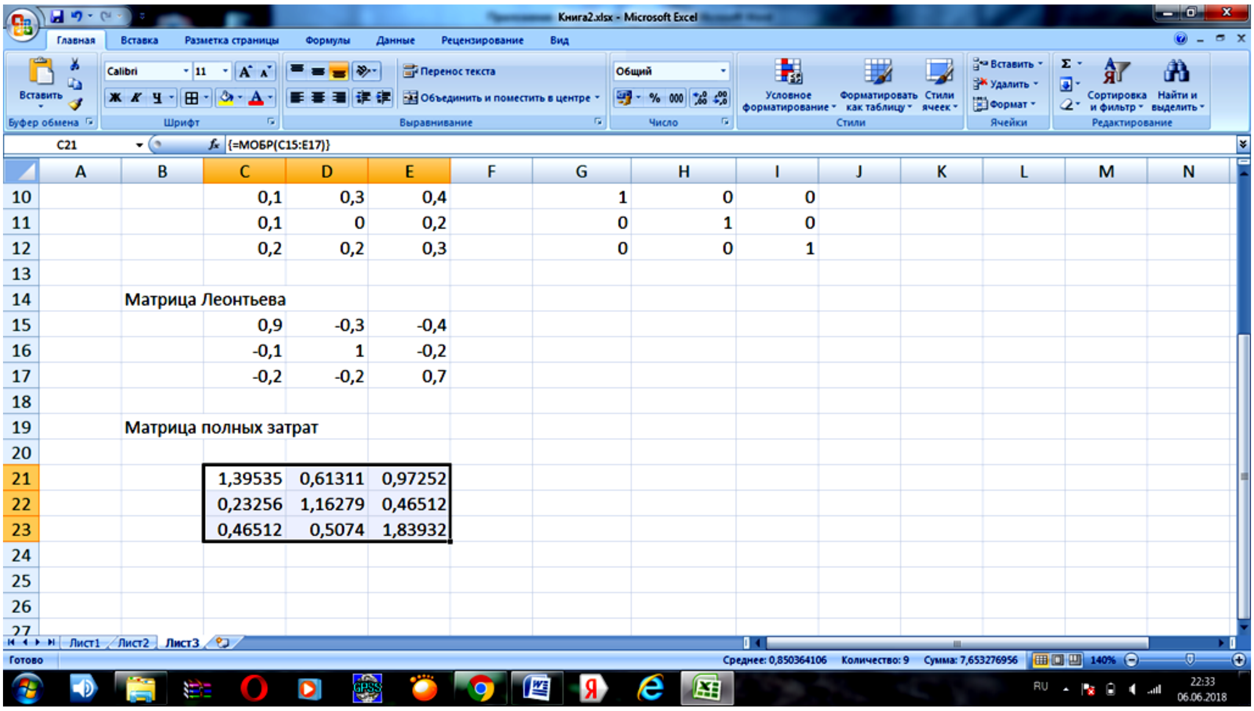


Рис.66

3) Валовой выпуск на новый ассортимент конечной продукции находится умножением двух массивов: матрица полных затрат и $Y^{/}$ (рис. 67).

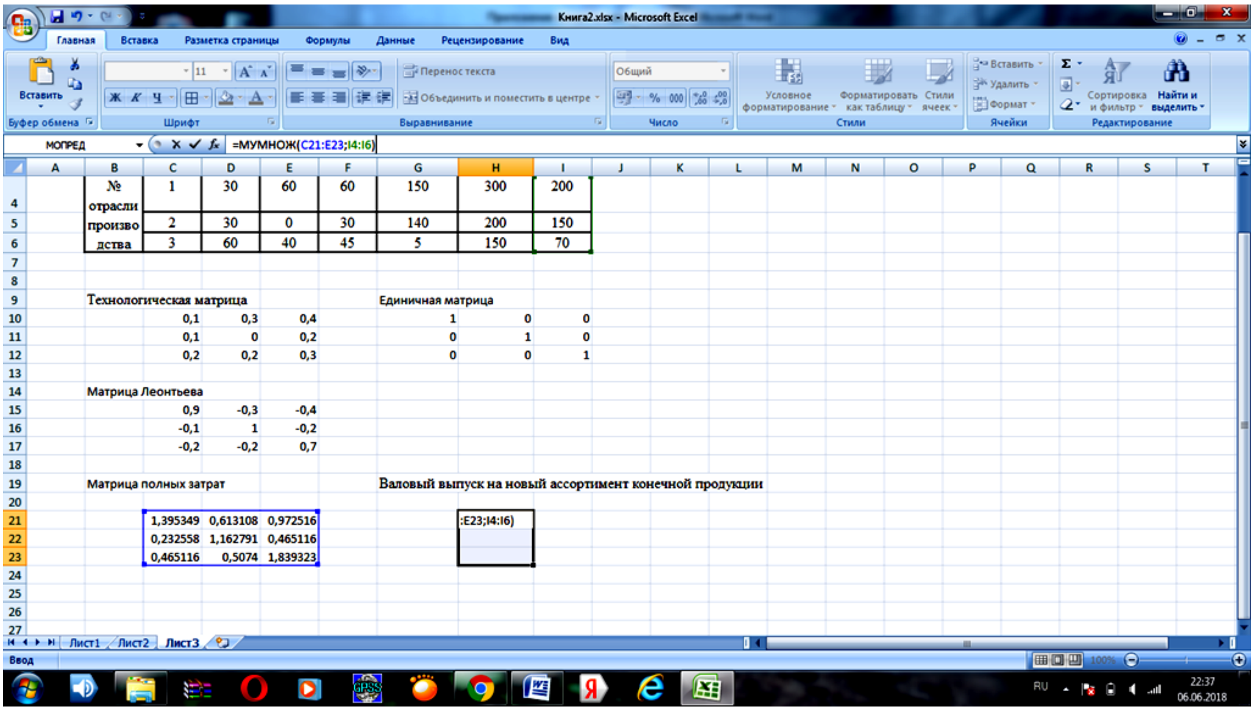


Рис.67

Итак, валовой выпуск на новый ассортимент конечной продукции представлен на рисунке 68.

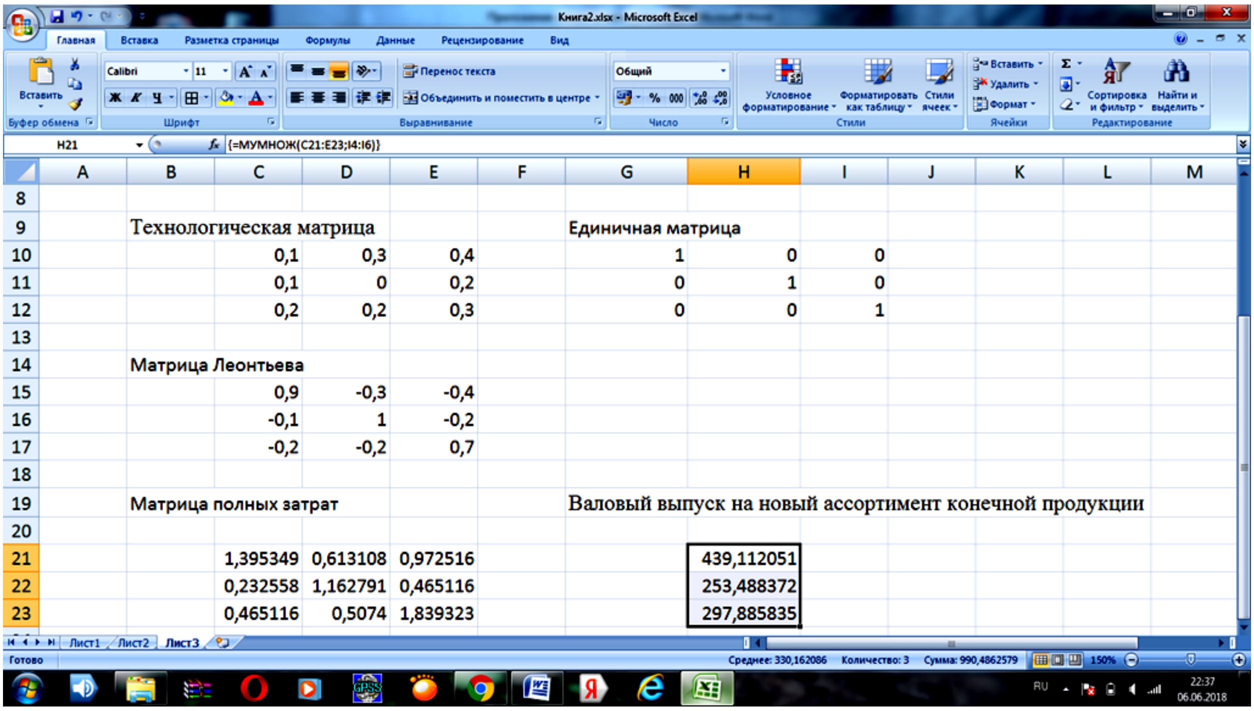


Рис.68

Задания для самостоятельной работы

3.1. В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, у.е.

Отрасли		потребления		Конечный продукт
		1	2	
производства	1	0,4	0,1	400
	2	0,2	0,3	200

Найти: а) планируемый объем валовой продукции отраслей, структуру материальных затрат (межотраслевые поставки), чистую продукцию отраслей;

б) необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление первой отрасли уменьшится на 10%, а второй отрасли увеличится на 40%.

3.2. Дан межотраслевой баланс трехотраслевой модели хозяйства:

N отраслей потребления / N отраслей производст.	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт
1	120	15	50	115	300
2	30	60	50	10	150
3	60	30	75	85	250

Определить:

а) технологическую матрицу;

б) матрицу коэффициентов полных затрат;

в) валовый выпуск $X' = (X'_1, X'_2, X'_3)$ на новый ассортимент конечной продукции $Y' = (100,30,90)$.

3.3. Дан межотраслевой баланс четырехотраслевой модели хозяйства (таблица 23.3, 1–4 строки). По итогам исполнения баланса определены также фактические затраты на оплату труда m_j $(j = \overline{1,4})$:

N отраслей потребления / N отраслей производст.	1	2	3	4	Конечная продукция (млн.руб.)	Валовая продукция (млн.руб.)
1	60	42	55	36	107	300
2	75	120	110	44	251	600
3	75	210	44	60	161	550
4	30	90	22	76	182	400
Оплата труда	20	48	67,5	70		

Найти: а) матрицу коэффициентов прямых затрат A;

б) матрицу коэффициентов полных затрат $(E-A)^{-1}$;

в) матрицу коэффициентов косвенных затрат;

г) чистый доход отраслей;

д) валовый выпуск X' на новый ассортимент конечной продукции $Y' = (110,\ \ 230,\ \ 100,\ \ 250)$.

3.4. Потоки товаров и услуг между пятью предприятиями представлены в таблице:

Предприятия	Потребление					Конечный продукт, тыс. руб.	Валовый выпуск, тыс. руб.
	Транспорт	Пище-комбинат	Водо-канал	Электро-сети	Тепло-сети		
Транспорт	9,044	1,771	57,204	24,771	57,96	753,65	904,4
Пищекомбинат	4,522	5,313	15,89	33,028	27,048	268,399	354,2
Водоканал	27,132	0,3542	15,89	16,514	30,912	544,7978	635,6
Электросети	22,61	1,0626	54,026	16,514	27,048	704,4124	825,7
Теплосети	40,698	1,771	25,424	8,257	19,32	677,33	772,8

Найти объем валового выпуска каждого вида продукции на перспективу при условии неизменности коэффициентов прямых затрат по сравнению с отчётными показателями, если конечное потребление на первых трёх предприятиях увеличить соответственно до 790,5; 350; 625,5 тыс. рублей, а на предприятиях «Электросети» и «Теплосети» оставить без изменения.

3.5. Используя балансовые соотношения, завершите составление баланса.

		Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
		1	2	3		
Производящие отрасли	1	15		20		100
	2	30		25	60	
	3	10		20		85
Чистый продукт			50			
Валовая продукция	X		150			

4. Модель равновесных цен

Рассмотрим балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева-модель равновесных цен. A – матрица прямых затрат, X – вектор валового выпуска.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим через P вектор цен единицы продукции каждой отрасли: $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$, где p_i – цена единицы продукции i-ой отрасли; x_i – количество единиц продукции i-ой отрасли. Тогда первая отрасль получит доход p_1x_1, вторая – p_2x_2 и т.д. Для выпуска единицы продукции 1-ой отрасли (x_1=1), ей необходима продукция 1-ой отрасли в объеме a_{11}, 2-ой отрасли – в объеме a_{21}, и т.д. На закупку этой продукции 1-ой отраслью будет затрачена сумма: $a_{11}p_1+a_{21}p_2+\dots+a_{n1}p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 1-ой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей: $x_1(a_{11}p_1+a_{21}p_2+\dots+a_{n1}p_n)$.

Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, обозначим через V_1 (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции). Таким образом, имеем равенство:

$$x_1(a_{11}p_1+a_{21}p_2+\dots+a_{n1}p_n)+V_1=x_1p_1.$$

Разделим левую и правую часть последнего равенства на x_1:

$$a_{11}p_1+a_{21}p_2+\dots+a_{n1}p_n+v_1=p_1,$$

где $v_1 = \dfrac{V_1}{x_1}$ –норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции).

Подобным же образом получив уравнения для остальных n – 1 отраслей, запишем систему:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n + v_1 = p_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{n2}p_n + v_2 = p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{nn}p_n + v_n = p_n \end{cases}. \qquad (4.1)$$

Запишем систему (4.1) в матричной форме:

$$A^T P + v = P, \qquad (4.2)$$

где $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ - вектор норм добавленной стоимости. Уравнение (4.2) называется **моделью равновесных цен.**

Как видим, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева ($AX + Y = X$) с той лишь разницей, что X заменен на P, Y – на v, A – на A^T. Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукции отраслей.

Уравнение (4.2) можно записать в виде:

$$P = (D^T)^{-1} v, \qquad (4.3)$$

где $(D^T)^{-1} = (E - A^T)^{-1}$ –транспонированная матрица полных затрат.

ПРИМЕР 4.1. Дана межотраслевая модель, состоящая из трех отраслей. Назовем их условно топливно-энергетическая, промышленность и сельское хозяйство. Пусть известна транспонированная матрица прямых затрат: $A^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Вектор норм добавленной стоимости $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$. Определим равновесные цены.

РЕШЕНИЕ.

$$E - A^T = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

$$\left| E - A^T \right| = 0{,}576 - 0{,}018 - 0{,}004 - (0{,}032 + 0{,}024 + 0{,}054) = \\ = 0{,}554 - 0{,}11 = 0{,}444$$

Найдем обратную матрицу:

$$(D^T)^{-1} = (E - A^T)^{-1} = \\ = \frac{1}{0{,}444} \begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}14 & 0{,}18 \\ 0{,}28 & 0{,}68 & 0{,}24 \\ 0{,}25 & 0{,}29 & 0{,}69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}306 & 0{,}315 & 0{,}405 \\ 0{,}631 & 1{,}532 & 0{,}541 \\ 0{,}563 & 0{,}653 & 1{,}554 \end{pmatrix}$$

По формуле (4.3) найдем вектор Р:

$$P = (D^T)^{-1} \cdot v = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Допустим теперь, что в топливно-энергетической отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1,11. Определим равновесные цены в этом случае. Принимая во внимание, что $v = \begin{pmatrix} 5{,}11 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$,находим, что $P = (D^T)^{-1} \cdot v = \begin{pmatrix} 11{,}45 \\ 20{,}7 \\ 15{,}625 \end{pmatrix}$.

Таким образом, продукция первой отрасли подорожала на 14,5%, второй – на 3,5%, третьей отрасли – на 4,17%.

10 – 100%

1,45 – x%

x=(100*1,45/10)=14,5%.

Решим задачу с помощью компьютерного пакета MAXIMA. Введем матрицу A и единичную матрицу E, как диагональную матрицу (рис.69 -70).

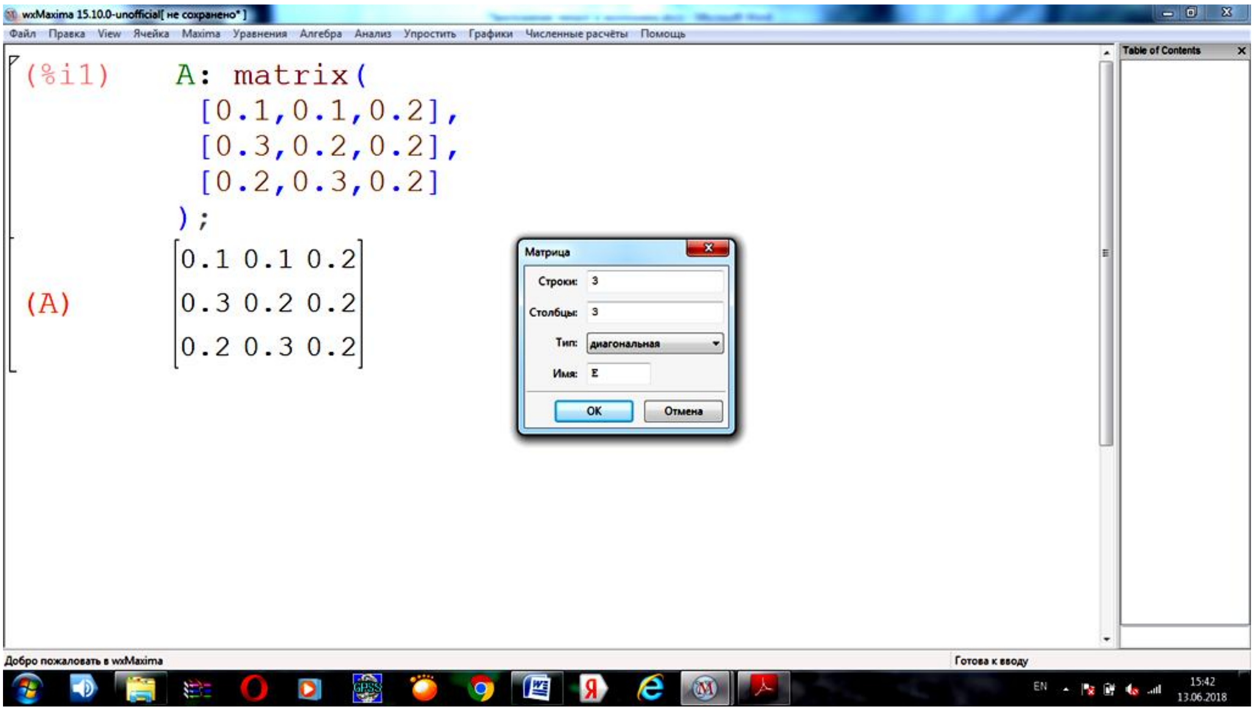


Рис.69

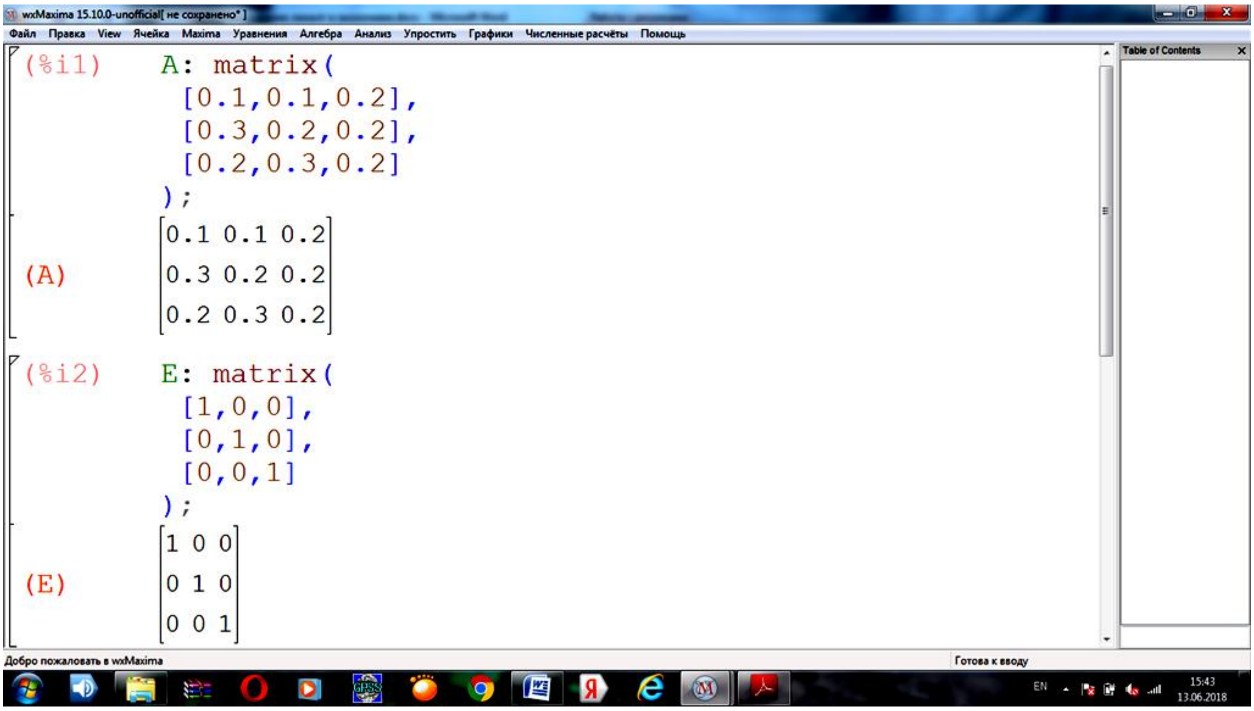


Рис.70

Вычислим матрицу D, задав следующую команду **D:A-E**, и для нее обратную (рис.71).

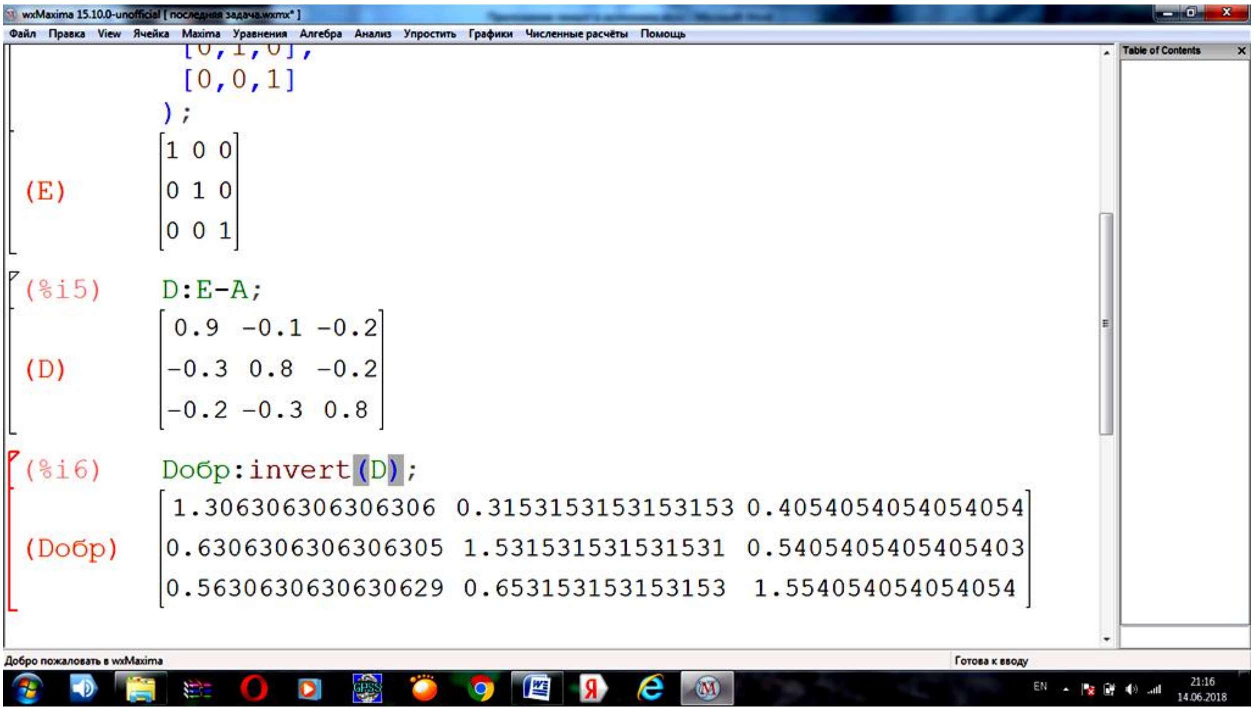


Рис.71

Результаты округлим с точностью до 3 знаков после запятой, введя команду **fpprintprec:3** (рис. 72).

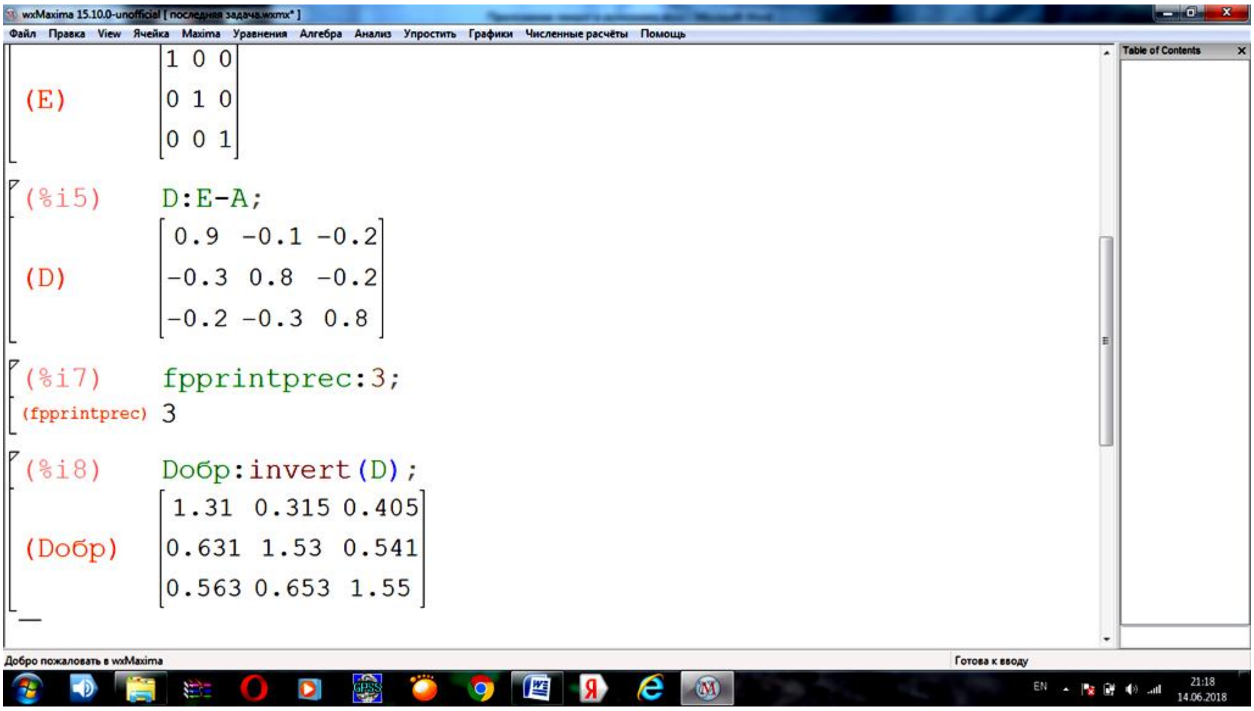


Рис.72

Введем вектор норм добавленной стоимости и вычислим равновесные цены P (рис.73).

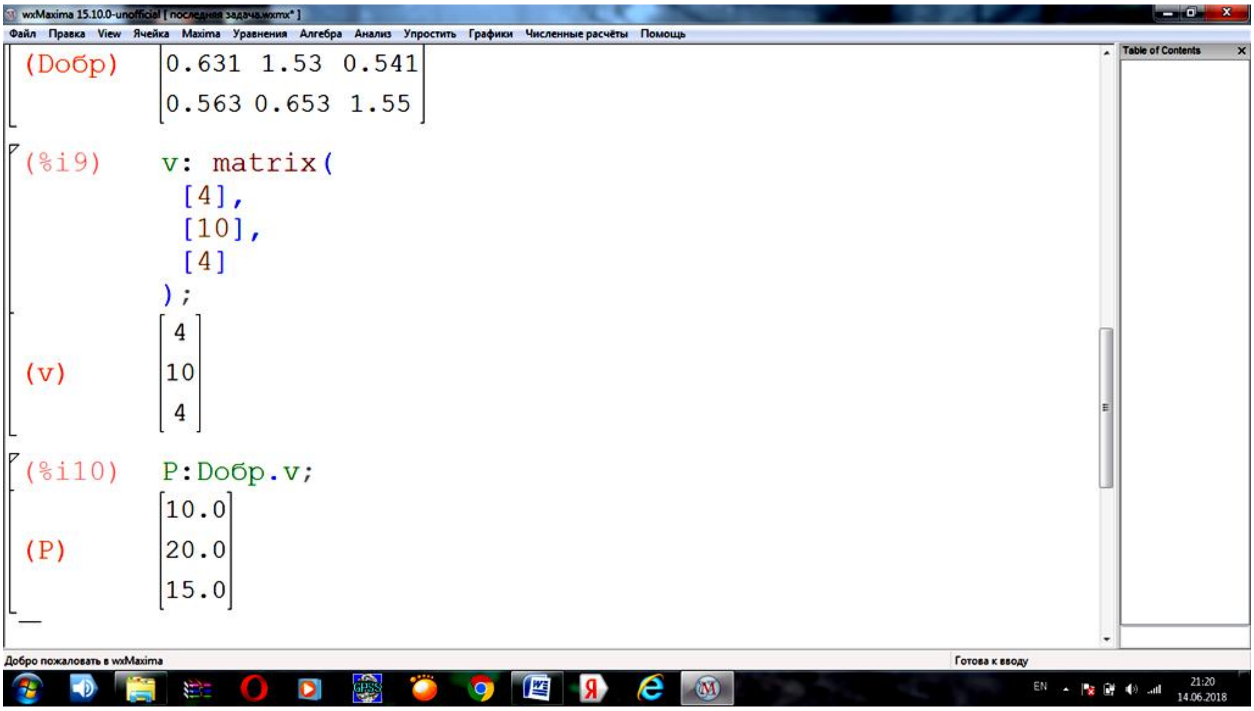


Рис.73

Решим задачу с помощью компьютерного пакета Excel.

Введем данные задачи: транспонированную матрицу прямых затрат, вектор норм добавленной стоимости, а также единичную матрицу. Найдем матрицу E-D^T. В первую ячейку запишем формулу разности соответствующих ячеек единичной и транспонированной матрицы прямых затрат и растянем ее до размеров 3×3 (рис.74).

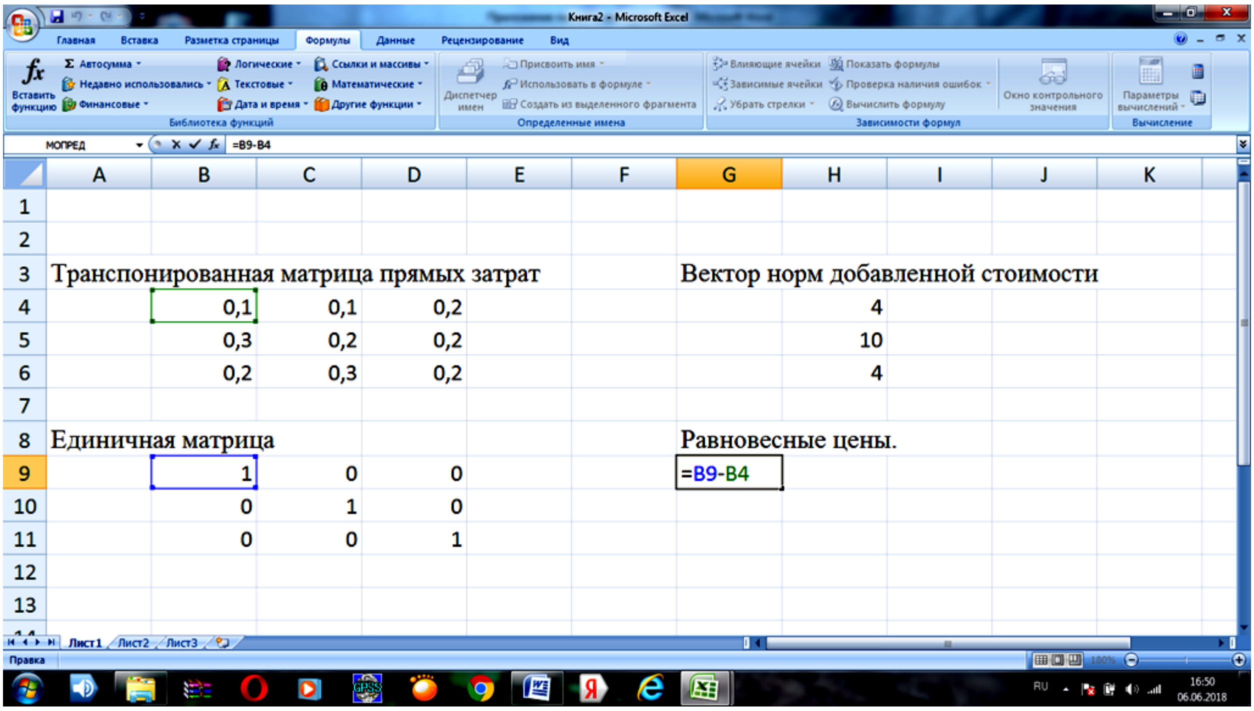


Рис.74

На рисунке 75 представлен результат.

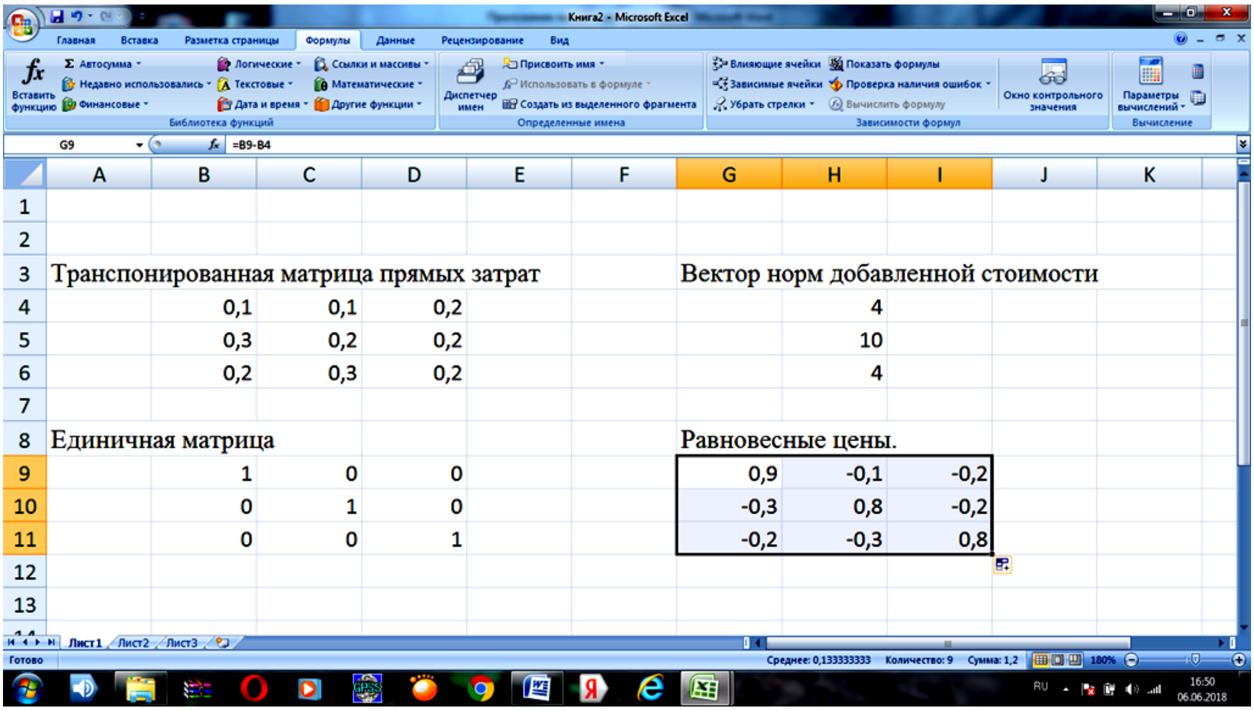


Рис.75

Найдем обратную матрицу к транспонированной матрице полных затрат. Для этого выделим диапазон 3×3, и в строке формул ввести формулу «**=МОБР(диапазон)**» и нажать комбинацию клавиш CTRL+SHIFT+ENTER (рис 76).

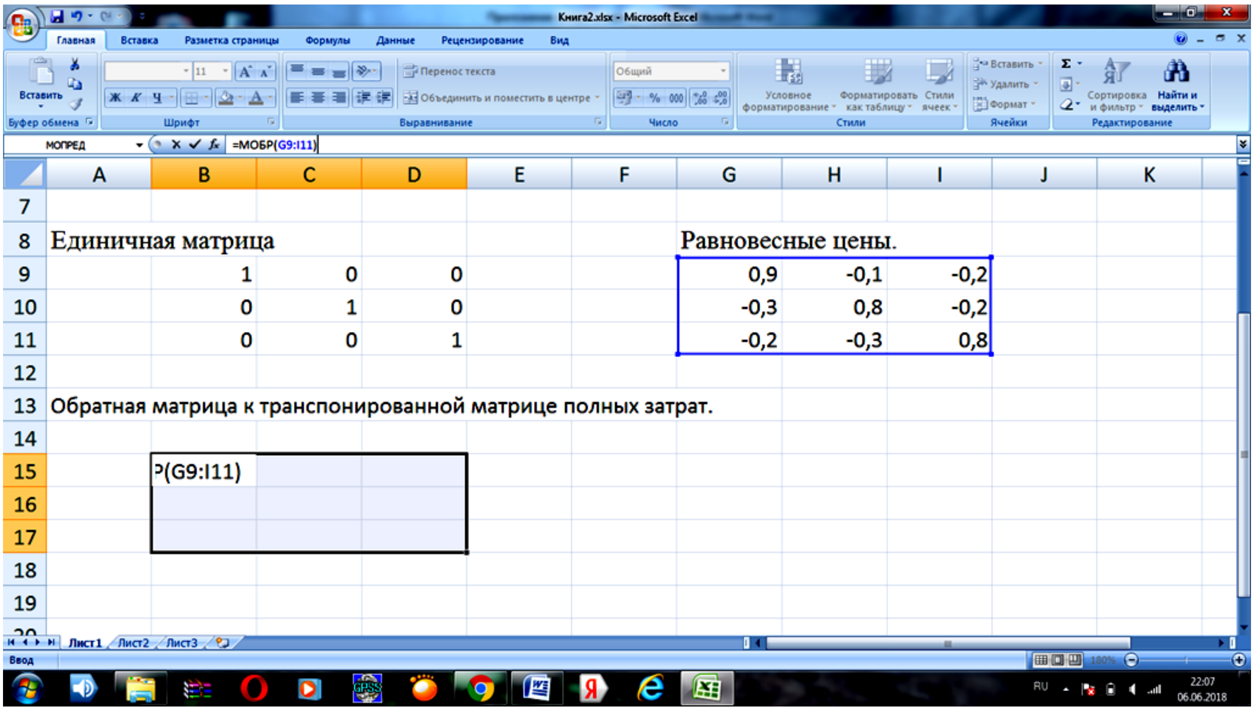


Рис.76

Результат этого действия представлен на рисунке 77.

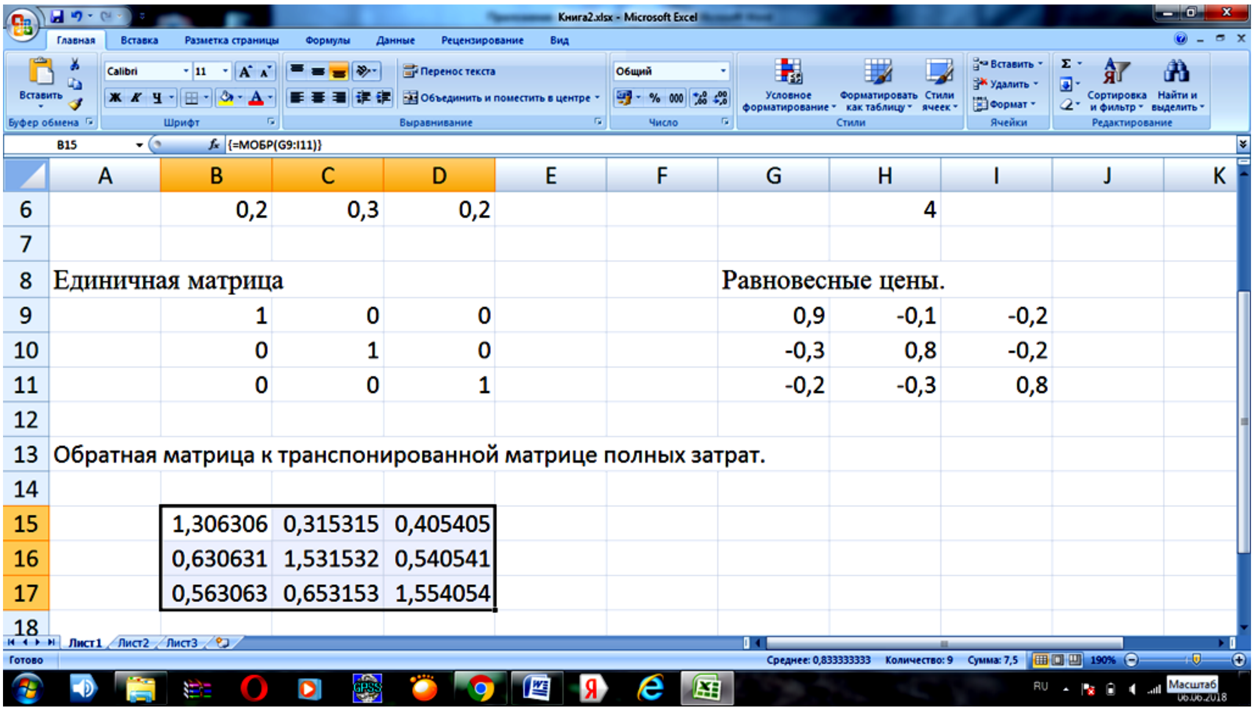


Рис.77

Умножим полученную матрицу на вектор добавленной стоимости с помощью функции МУМНОЖ(массив1; массив2) (рис.78).

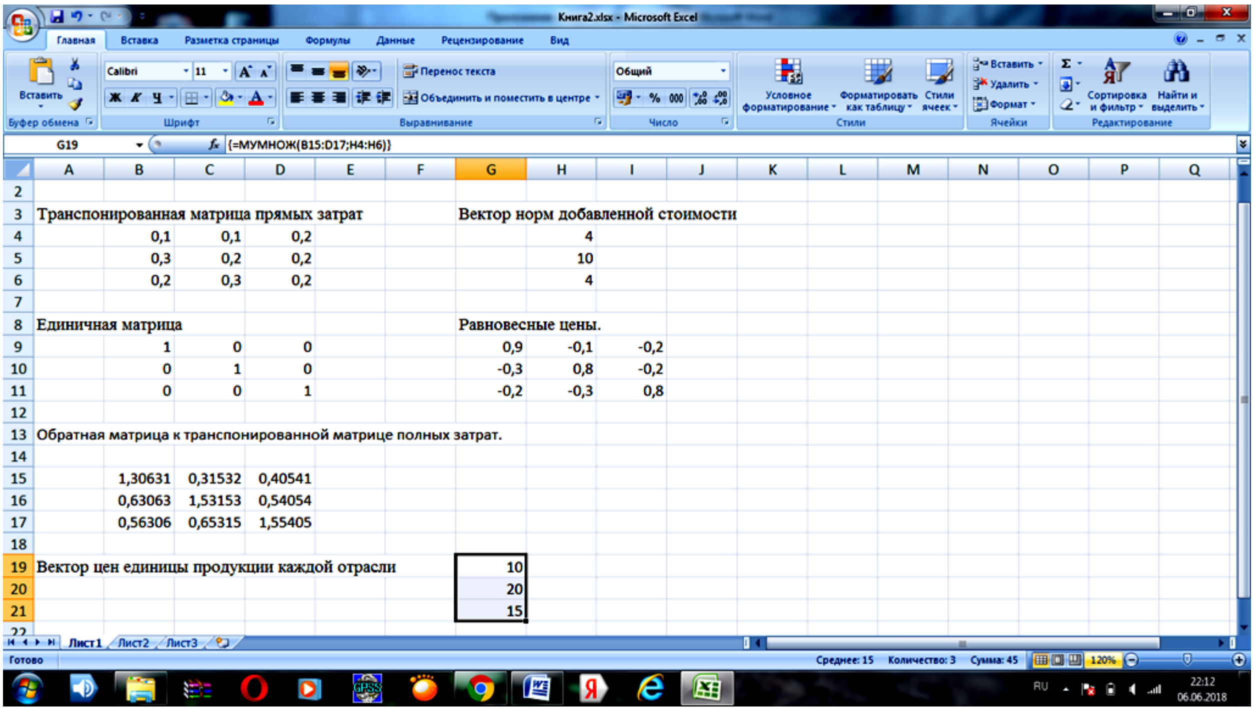


Рис.78

Задания для самостоятельной работы

4.1. Дана матрица прямых затрат системы из двух отраслей и вектор норм добавленной стоимости:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Определить равновесные цены.

4.2. Используя данные задачи 3.2, определить цены на продукцию отраслей, если по прогнозу добавленная стоимость производства продукции второй отрасли увеличится на 100%. Заданы исходные цены на продукцию отраслей $P = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$.

4.3. Составить транспонированную матрицу прямых затрат и для вектора норм добавленной стоимости $v = (1, 2, 3)^T$ найти изменение цены всех отраслей, если в первой отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1.3.

а) $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$.

5. Векторы

Краткие теоретические сведения

Направленный отрезок AB называется *вектором.* Буква A означает начало вектора, а буква B — его конец. Вектор также обозначают и одной буквой с черточкой наверху, например $\bar{a}$. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым.* Длина вектора обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\bar{a}|$. Если $|\bar{a}| = 1$, то вектор a называется *единичным.*

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными,* если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными,* если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины равны.

Сложение векторов. *Суммой* $\bar{a}+\bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ при условии, что конец вектора $\bar{a}$ совмещен с началом $\bar{b}$, называется вектор $\bar{c}$, соединяющий начало вектора $\bar{a}$ с концом $\bar{b}$.

Умножение вектора на число. *Произведением* $\lambda\bar{a}$ вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор $\bar{b}$ такой, что 1) $|\bar{b}| = |\lambda||\bar{a}|$; 2) $\bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$ и направлен в ту же сторону при $\lambda > 0$, и в противоположную сторону при $\lambda < 0$.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось *u* называется величина $A'B'$ направленного отрезка $A'B'$ на оси *u,* где А— проекция точки A на ось *u,* а B' — проекция точки B на эту ось. Обозначение: $пр_u \overline{AB}$.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось *u* определяется формулой

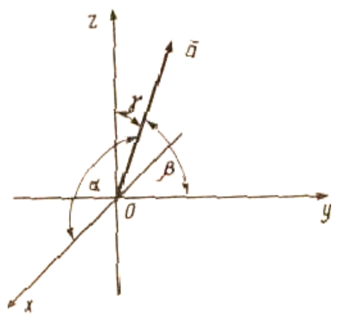
$$пр_u \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi,$$

где φ — угол между вектором $\overline{AB}$ и осью *u.*

Пусть $X = пр_{OX}\overline{AB}$, $Y = пр_{OY}\overline{AB}$, $Z = пр_{OZ}\overline{AB}$. Проекции X, Y, Z вектора $\overline{AB}$ на оси координат называют его *координатами.* При этом пишут $\overline{AB} = \{X;Y;Z\}$.

Каковы бы ни были две точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, координаты вектора AB определяются следующими формулами:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$



Пусть дан произвольный вектор $\bar{a} = \{X; Y; Z\}$. Формула

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

выражает длину произвольного вектора через его координаты.

Обозначим через α, β, γ углы между вектором $\bar{a}$ и осями координат. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, называются *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$. Сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна 1.

Пусть векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы такие, что вектор $\bar{i}$ — лежит на оси *Ox,* вектор $\bar{j}$ — на оси *Oy,* вектор $\bar{k}$ — на оси *Oz* и каждый из них направлен на своей оси в положительную сторону. Тройка векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называется *базисом.*

Любой вектор $\bar{a}$ может быть разложен по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, т. е. представлен в виде

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

где X, Y, Z — координаты вектора $\bar{a}$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, которое обозначается $\bar{a}\,\bar{b}$ и равно произведению числовых значений длин этих векторов и косинуса угла между ними;

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi.$$

Если из двух векторов по крайней мере один нулевой, то скалярным произведением этих векторов называется число нуль.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}$;

2) $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\,\bar{b})$, где λ – любое действительное число;

3) $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c}$;

4) $\bar{a}\,\bar{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} \perp \bar{b}$;

5) $\bar{a}\,\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора.

Если векторы $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *заданы своими координатами* $\bar{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, *то их скалярное произведение определяется формулой*

$$\bar{a}\,\bar{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2,$$

а *угол между векторами* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{3; 4; 7\}$ и $\bar{b} = \{2; -5; 2\}$.

Решение. Находим $\bar{a}\,\bar{b} = 3\cdot2+4\cdot(-5)+7\cdot2 = 0$. Поскольку $\bar{a}\,\bar{b} = 0$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Пример. Найти угол между векторами $\bar{a}$ ={1; 1; 0} и $\bar{b}$ = *{1;0;1}*.

Решение. Получаем

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен π/3.

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$ называются *компланарными,* если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Тройка векторов называется *упорядоченной,* если указано, какой из них считается первым, какой — вторым, какой — третьим.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой,* если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой.*

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a}\times\bar{b}$, который определяется тремя условиями:

1) $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ образуют правую тройку векторов.

Основные свойства векторного произведения:

1°. $\bar{a}\times\bar{b}=0$, если $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ — коллинеарные векторы;

2°. S=$|\bar{a}\times\bar{b}|$, где S - площадь параллелограмма, построенного на этих векторах;

3°. $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$;

4°. $(\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \lambda(\bar{a}\times\bar{b})$, где λ – любое действительное число;

5°. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a}=\{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\bar{b}=\{X_2; Y_2; Z_2\}$, то векторное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ определяется формулой

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}+9\bar{b}$ и $5\bar{a}+\bar{b}$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$ и угол между векторами равен 30°.

Решение. Согласно определению и свойствам векторного произведения, имеем

$$(\bar a+9\bar b)\times(5\bar a+\bar b)=5\bar a\times\bar a+\bar a\times\bar b+9\bar b\times\bar b+45\bar b\times\bar a=5\cdot 0-44\ \bar a\times\bar b+9\cdot 0=-44\bar a\times\bar b.$$

Тогда

$$s=\left|(\bar a+9\bar b)\times(5\bar a+\bar b)\right|=\left|-8\bar a\times\bar b\right|=8|\bar a||\bar b|\sin 30°=8\cdot 1\cdot 1\cdot 0{,}5=4.$$

Пример. Даны векторы $\bar a=\{2;\ 5;\ 7\}$ и $\bar b=\{1;\ 2;\ 4\}$. Найти $\bar a\times\bar b$.

Решение. Векторное произведение равно

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 2 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\bar i(5\cdot 4-2\cdot 7)-\bar j(2\cdot 4-7\cdot 1)+\bar k(2\cdot 2-5\cdot 1)=6\bar i-\bar j-\bar k$$

или $\bar a\times\bar b=\{6;\ -1;-1\}$.

Смешанным произведением трех векторов $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ называется число, которое обозначается $\bar a\,\bar b\,\bar c$ и определяется формулой

$$\bar a\,\bar b\,\bar c=(\bar a\times\bar b)\bar c.$$

Геометрический смысл. Смешанное произведение векторов $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$, с точностью до знака, равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, т.е. $\bar a\,\bar b\,\bar c=V$, если тройка $(\bar a,\bar b,\bar c)$ – правая, и $\bar a\,\bar b\,\bar c=-V$, если тройка $(\bar a,\bar b,\bar c)$ – левая.

Равенство $\bar a\,\bar b\,\bar c=0$ является необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$.

Если векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ *заданы своими координатами* $\bar a=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$, $\bar b=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$, $\bar c=\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\}$, *то смешанное произведение определяется формулой*

$$\bar a\bar b\bar c=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.$$

ПРИМЕР 5.1. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели, которые приведены в таблице 4.

Таблица 4

Вид изделия	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден.ед./изд.
1.	20	5	10	30
2.	50	2	5	15
3.	30	7	15	45
4.	40	4	8	40

Требуется определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

РЕШЕНИЕ. По данным таблицы составим четыре вектора, характеризующие весь производственный цикл:

$\bar{q}$ = (20, 50, 30, 40) - вектор ассортимента,

$\bar{s}$ = (5, 2, 7, 4) - вектор расхода сырья,

$\bar{t}$ = (10, 5, 15, 8) - вектор затрат рабочего времени,

$\bar{p}$ = (30, 15, 45, 20) - ценовой вектор.

Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие скалярные произведения вектора ассортимента $\bar{q}$ на три других вектора, т.е.

S= $\bar{q}\ \bar{s}$ = 100 + 100 + 210 + 160 = 570 кг, T = $\bar{q}\ \bar{t}$ = 1220 ч, P =$\bar{q}\ \bar{p}$ = 3500 ден. ед.

Решим эту задачу с помощью пакета MAXIMA.

Введем, как матрицу-столбец, вектор ассортимента и вектор затрат рабочего времени (рис.79).

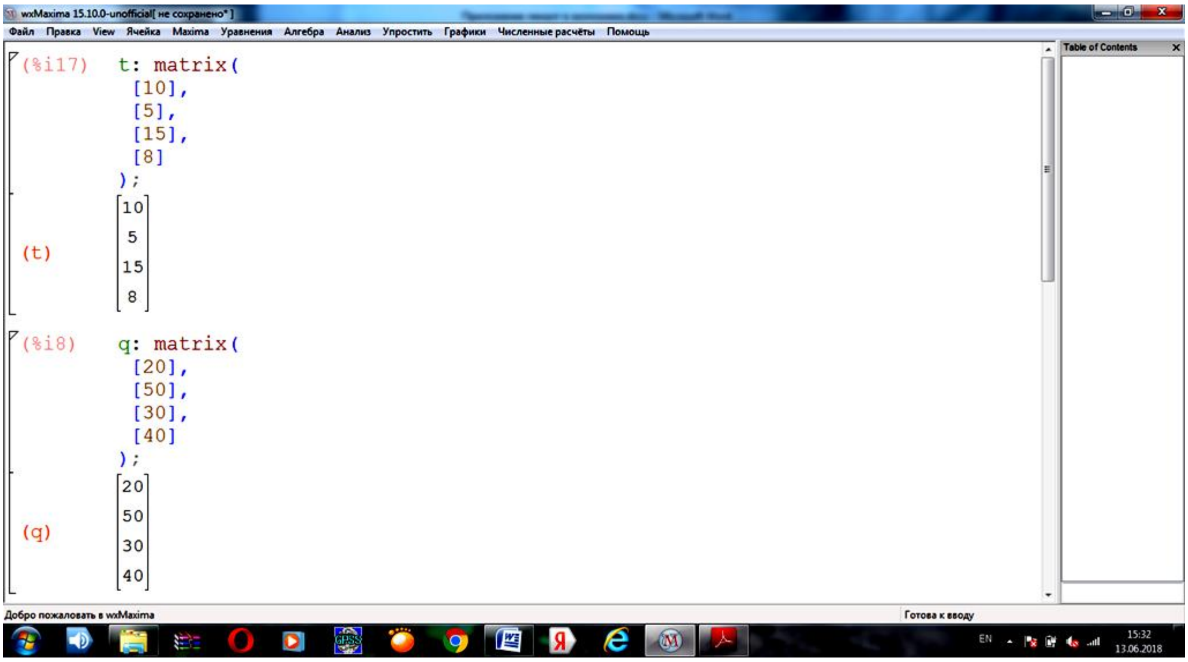


Рис.79

Умножим поэлементно столбец на столбец с помощью команды **T:q∗t**, а потом суммируем элементы полученного столбца с помощью команды **sum(T[i],i,1,4)** (рис.80).

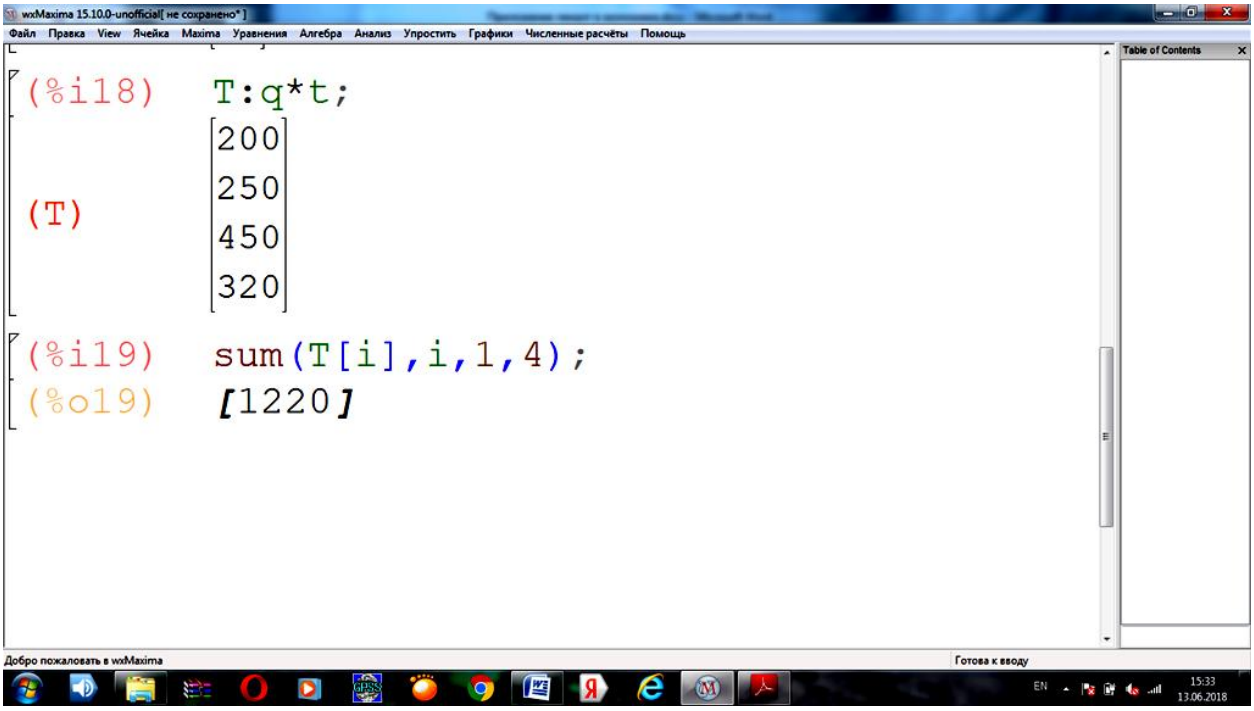


Рис.80

Аналогично находятся расход сырья S и стоимость P выпускаемой продукции (рис.81-82).

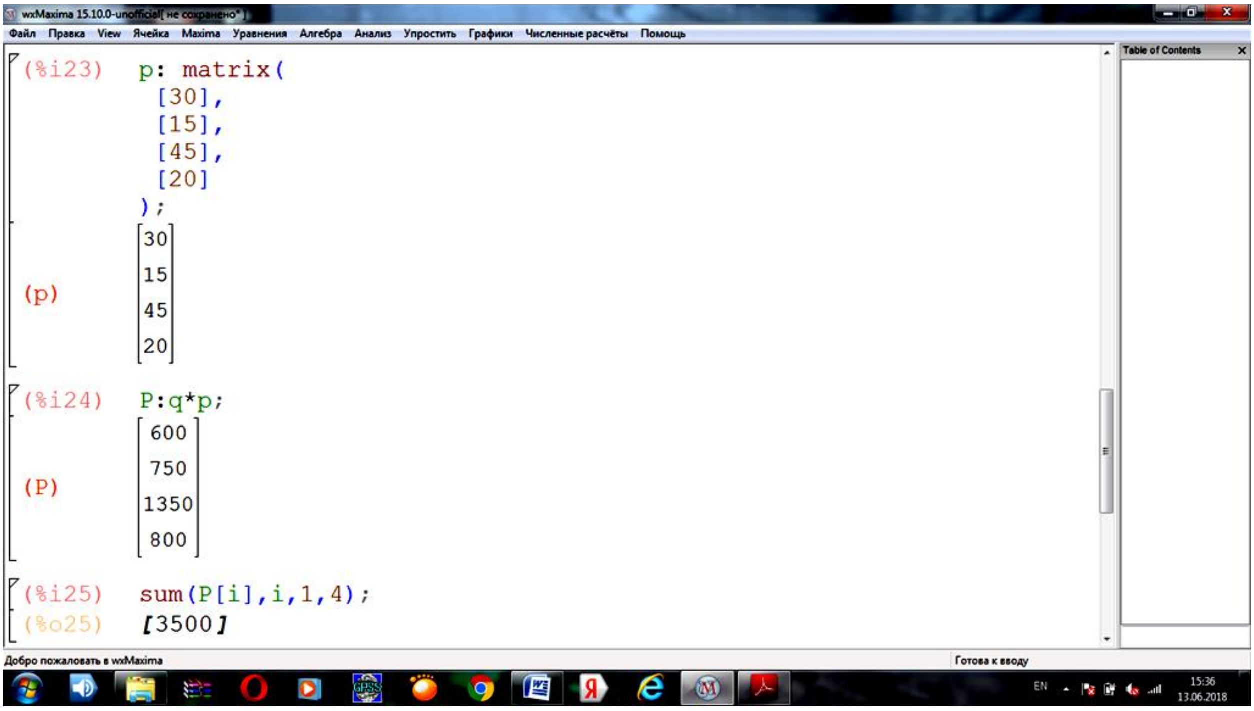


Рис.81

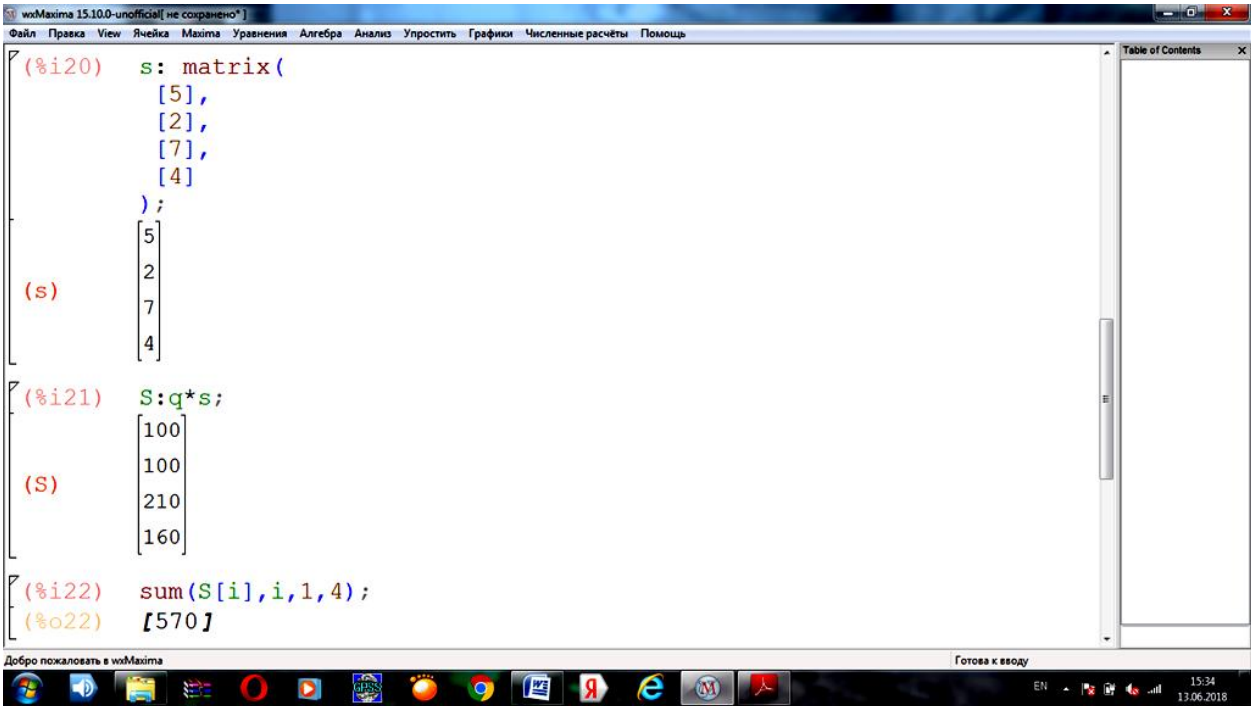


Рис.82

Решим эту задачу с помощью пакета Excel.

Введем исходные данные. Расход сырья можно найти с помощью функции **=СУМПРОИЗВ(массив1; массив2**). В роли первого массива выступает количество изделий, второго- расход сырья на каждый вид изделия (рис. 83-84).

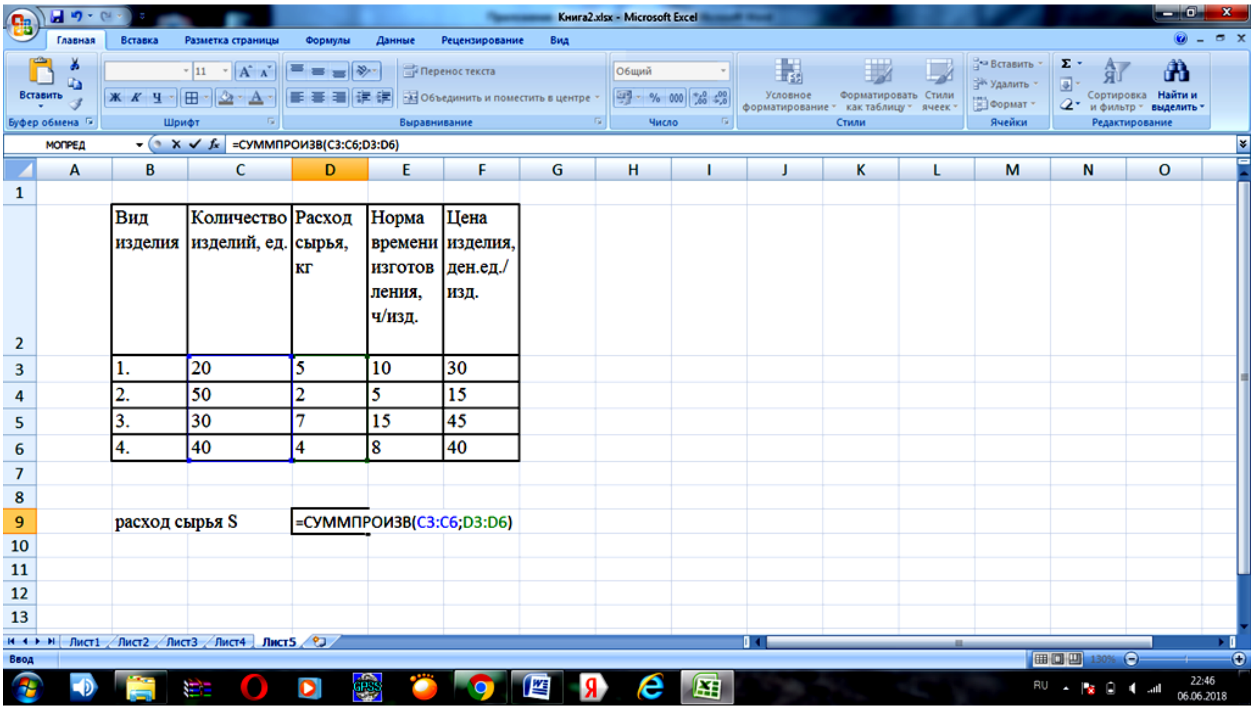


Рис.83

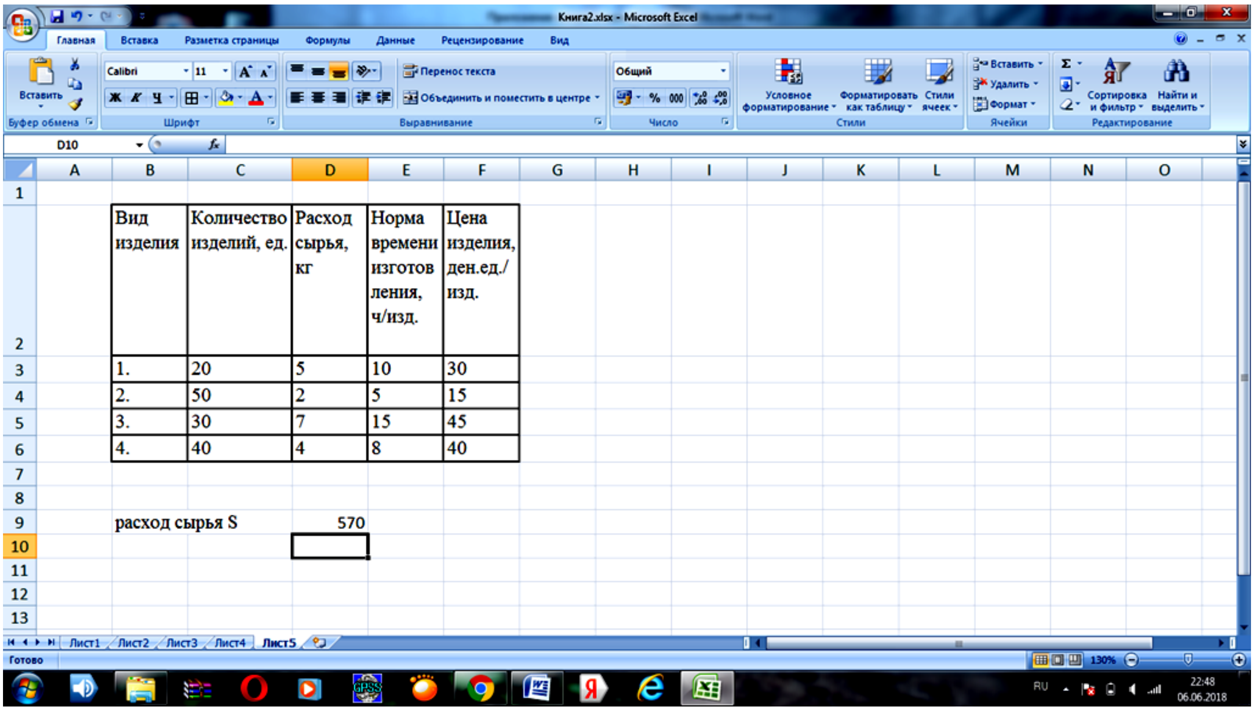


Рис.84

Аналогично находятся затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия (рис.85).

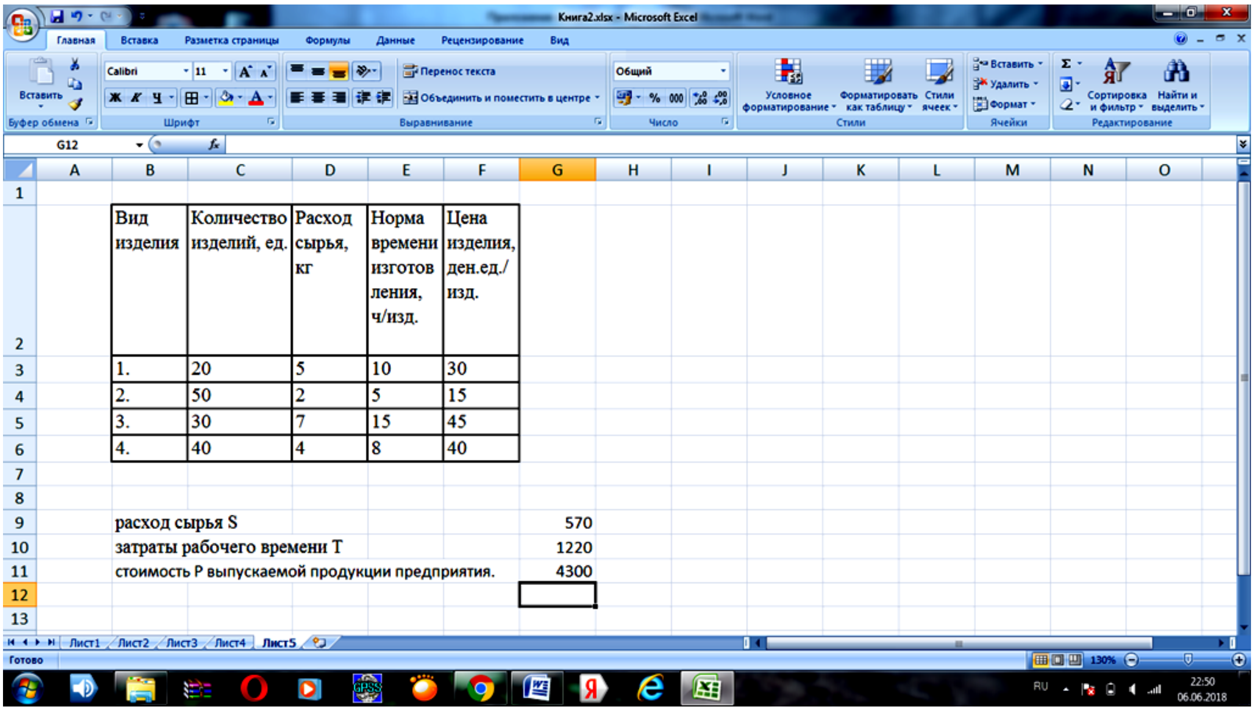


Рис.85

Задания для самостоятельной работы

5.1. Предприятие выпускает три вида продукции в количествах 60, 70, 90 единиц. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно 4, 2, 5 кг. Определить суммарный расход сырья и его изменение при изменении выпуска продукции соответственно на +10, – 5, +15 единиц.

5.2. Предприятие выпускает три вида продукции в количествах 30, 45, 80 единиц, реализуемых по ценам 100, 120, 60 усл. ден. ед. соответственно. Найти выручку предприятия от реализации продукции и ее изменение при изменении цен продукции соответственно на +10, – 10, – 5 усл. ден. ед.

5.3. Текстильная фабрика выпускает за смену 30 комплектов постельного белья, 150 полотенец, 100 ночных сорочек, 80 пижам. В следующем месяце планируется увеличить объемы производства на 30%. Найти выручку фабрики при цене 440 руб. за комплект постельного белье, 20 руб. за полотенце, 150 руб. за ночную сорочку, 390 руб. за пижаму.

5.4. Известны векторы окладов (в усл. ден. ед.) шести работников за январь и за февраль: $p_{янв} = (4850, 4500, 6250, 5200, 5550, 8350)$, $p_{фев} = (4950, 5000, 6300, 5400, 6100, 9000)$. В марте этим работникам предоставили отпуск, заплатив им по среднему заработку за январь и февраль. Найти вектор выданных сумм за март, с учетом, начисления в январе премии в размере 25% от оклада и удержания подоходного налога.

5.5. Предприятие выпускает ежесуточно пять вида изделий, основные производственно-экономические показатели, которые приведены в таблице:

Вид изделия	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	25	4	20	100
2	30	6	16	90
3	60	7	11	40
4	45	3	15	80
5	70	2	9	30

Требуется определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

После модернизации производства количество изделий всех видов увеличилось на 40%, норма времени изготовления для всех изделий уменьшилась на 20%, цена на все изделия уменьшилась на 10%. Найти ежесуточные показатели.

5.6. Производственно-экономические показатели Оренбургского Локомотиворемонтного Завода представлены в таблице:

Вид изделия	Расход сырья, кг/изд	Время изготовления,	Количество изделий	Цена изделия,

		ч/изд		руб.
Протяжки шпоночные	8	72	5	30000
Резец токарный, пластина из твердого сплава Т15К6	1	15	500	58
Развертка	2	42	2	2500
Головка торцевая	9	20	5	600

Найти расход сырья, затраты рабочего времени и стоимость выпускаемой продукции предприятия.

5.7. Производственно-экономические показатели Оренбургского Локомотиворемонтного Завода представлены в таблице:

Вид изделия	Расход сырья(кг)	Время изготовления	Количество изделий	Цена изделий (руб)
Плуг	50	120	6	90000
Борона	40	150	5	14000
Лущильник	60	420	7	50000
Каток	90	220	4	300000

Найти расход сырья, затраты рабочего времени и стоимость выпускаемой продукции предприятия.

5.8. Понятие ортогональности векторов используется в экономике. Например, одним из способов определения индекса цен и уровня инфляции является расчет стоимости «потребительской корзины», состоящей из 300 видов товаров и услуг, получаемых потребителями.

Пусть q − вектор количества потребляемых товаров, c - вектор цен в текущем месяце, $c_{пр}$ − вектор цен в предыдущем месяце. Индекс цен вычисляется по формуле $p = \frac{(c,q)}{(c_{пр},q)} \cdot 100\%$.

Из этой формулы получим $(100c - pc_{пр}, q) = 0$. Таким образом, индекс цен можно определить как численный коэффициент p, который делает вектор потребляемых товаров q ортогональным вектору $(100c - pc_{пр})$. Индекс инфляции рассчитывается по формуле

$$i = p - 100 = \frac{(c,q)}{(c_{пр},q)} \cdot 100 - 100 \text{ или } i = \frac{(c - c_{пр},q)}{(c_{пр},q)} \cdot 100.$$

Пусть q = (4, 9, 1, 5) − вектор количества потребляемых товаров, c = (15,40,20,30) − вектор цен в текущем месяце. $c_{пр}$ = (14, 35, 18, 29) − в предыдущем месяце. Определить индекс инфляции.

5.9. По таблице, которая представляет собой фрагмент потребительской корзины, вычислить индекс цен и индекс инфляции для определенного месяца по отношению к предыдущему месяцу.

Вид товара	Количество	Цена единицы товара в текущем месяце	Цена единицы товара в предыдущем месяце
Хлеб	10	31	30,5
Молоко	5	49	48
Мыло	3	23	22,4

5.10. При нормальной (λ_1 = 1) интенсивности работы кондитерская фабрика производит в год G_1 = (28410, 14010, 11600) тонн печенья, пряников и кексов, а при интенсивности $0 \leq \lambda_1 \leq 4$ производит $\lambda_1 G_1$ кондитерских изделий. Сколько производит в год при интенсивности λ_1 = 2; 3; 0,5; 0,6? Вторая фабрика при λ_2 = 1 производит в год G_2 = (19200, 13600, 11200) таких же изделий. Сколько (и каких) кондитерских изделий производят обе фабрики при (λ_1, λ_2) = (1, 2); (2, 3)?

5.11. При нормальной (λ = 1) интенсивности работы завод потребляет ресурсов R = (25, 40) и выпускает продукции V = (120, 380), а при интенсивности $0 \leq \lambda \leq 4$ — в λ раз больше и ресурсов потребляет и продукции выпускает. Опишите пары (ресурсы, продукция) при λ = = 2; 3; 2,5. Найдите вектор потребляемых ресурсов, потребных для выпуска продукции (240, 760); (180, 570); найдите, сколько будет выпущено продукции, если ресурсов потреблено (30, 48); (75, 120).

5.12. В пространстве двух товаров с ценами (3, 5) укажите несколько наборов товаров стоимостью 15, 30, 45. Пусть цены изменились и стали (4, 4). Приведите примеры наборов товаров, которые подешевели, подорожали, остались той же стоимости.

6. Собственные векторы и собственное значение матрицы

Краткие теоретические сведения

Число λ называется ***собственным значением*** квадратной матрицы A порядка *n*, если можно подобрать такой ненулевой *n*-мерный вектор *x*, что $Ax = \lambda x$.
Запишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \dots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Перейдём к системе из *n* уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda \cdot x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda \cdot x_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda \cdot x_n, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений (6.2) в матричной форме примет вид:

$$\begin{pmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Она имеет ненулевые решения только в том случае, если её определитель равен нулю, т. е. если

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{6.4}$$

Представим равенство (6.4) в виде $|A - \lambda E| = 0$.

Множество всех собственных значений матрицы *A* совпадает с множеством всех решений уравнения $|A-\lambda E|=0$, которое называется ***характеристическим уравнением*** матрицы А.

Ненулевой вектор называется ***собственным вектором*** квадратной матрицы *A*, принадлежащим ее собственному значению λ, если $Ax=\lambda x$.

Множество всех собственных векторов матрицы А, принадлежащих ее собственному значению λ, совпадает с множеством всех ненулевых решений системы однородных уравнений $(A-\lambda E)x=0$. При нахождении собственных векторов $x^{(i)}(i=\overline{1,n})$ соответствующие им векторы-столбцы $X^{(i)}(i=\overline{1,n})$ определяют из системы (6.3) подстановкой в неё последовательно всех найденных собственных значений $\lambda_i(i=\overline{1,n})$.

Процесс взаимных закупок товаров является примером экономического процесса, приводящего к понятию собственного числа и собственного вектора матрицы. Предположим, что бюджеты n стран, которые обозначим через $x_1, x_2,\ldots,x_n$, расходуются на покупку товаров. Рассмотрим линейную модель обмена (модель международной торговли). Пусть a_{ij} –доля бюджета x_j,которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{n2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (6.5)$$

Тогда если весь бюджет расходуется только на закупки внутри страны и вне ее, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1. \qquad (6.6)$$

Матрица (6.5) со свойством (6.6), в силу которого сумма элементов ее любого столбца равна 1, называется **структурной матрицей торговли**. Для i-й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли выражается формулой

$$P_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n.$$

Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли формулируется естественным образом: для каждой страны ее бюджет должен быть не больше выручки от торговли, т.е.

$$P_i \ge x_i \text{ или } a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \ge x_i,\ i=1,2,\ldots n. \qquad (6.7)$$

Легко доказывается, что в условиях (6.7) с учетом (6.6) не может быть знака неравенства. Таким образом, условия (6.7) принимают вид равенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases}. \tag{6.8}$$

Введем вектор бюджетов $\bar{x}$, каждая компонента которого характеризует бюджет соответствующей страны. Тогда систему уравнений (6.8) можно записать в матричной форме

$$A\bar{x} = \bar{x}. \tag{6.9}$$

Это уравнение означает, что собственный вектор структурной матрицы А, отвечающий ее собственному значению λ=1, состоит из бюджетов стран бездефицитной международной торговли. Запишем уравнение (6.9) в следующем виде:

$$(A - E)\bar{x} = \bar{0}. \tag{6.10}$$

ПРИМЕР 6.1. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ (усл. ден. ед.)

РЕШЕНИЕ. Необходимо найти собственный вектор $\bar{x}$, отвечающий собственному значению λ=1 заданной структурной матрицей А, т.е. решить уравнение (6.10), которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой системы равен трем, то одна неизвестная является свободной переменной и остальные выражаются через нее. Решая систему методом Гаусса, находим компоненты собственного вектора $\bar{x}$: $x_1 = \frac{140}{121}x_4$, $x_2 = \frac{146}{121}x_4$, $x_3 = \frac{20}{11}x_4$.

Подставив найденные значения в заданную сумму бюджета, найдем x_4=1210, откуда получаем искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле (в усл. ден. ен.): $x_1 = 1400$, $x_2 = 1460$, $x_3 = 2200$, $x_4 = 1210$.

Решим эту задачу с помощью пакета MAXIMA.

Решим систему линейных уравнений, задав 4 уравнения и переменные **x,y,z,u** (рис.86).

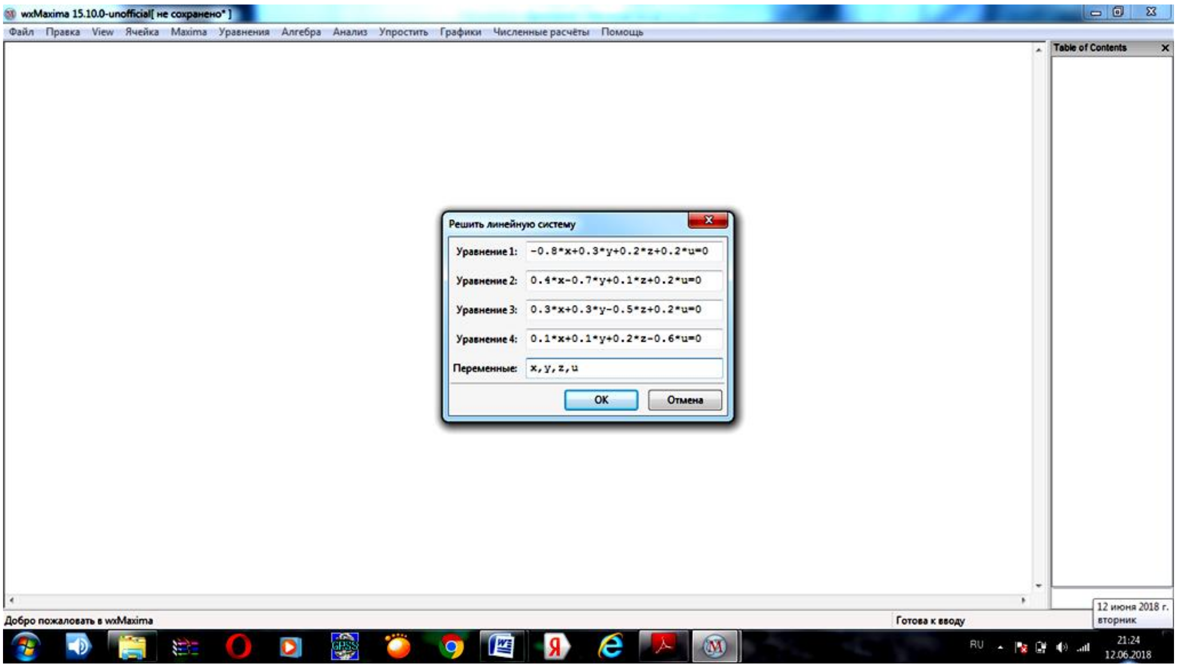


Рис.86

Получили следующий результат, представленный на рисунке 87. Здесь свободная переменная **u** заменена переменной **%r1**, и остальные переменные выражаются через нее.

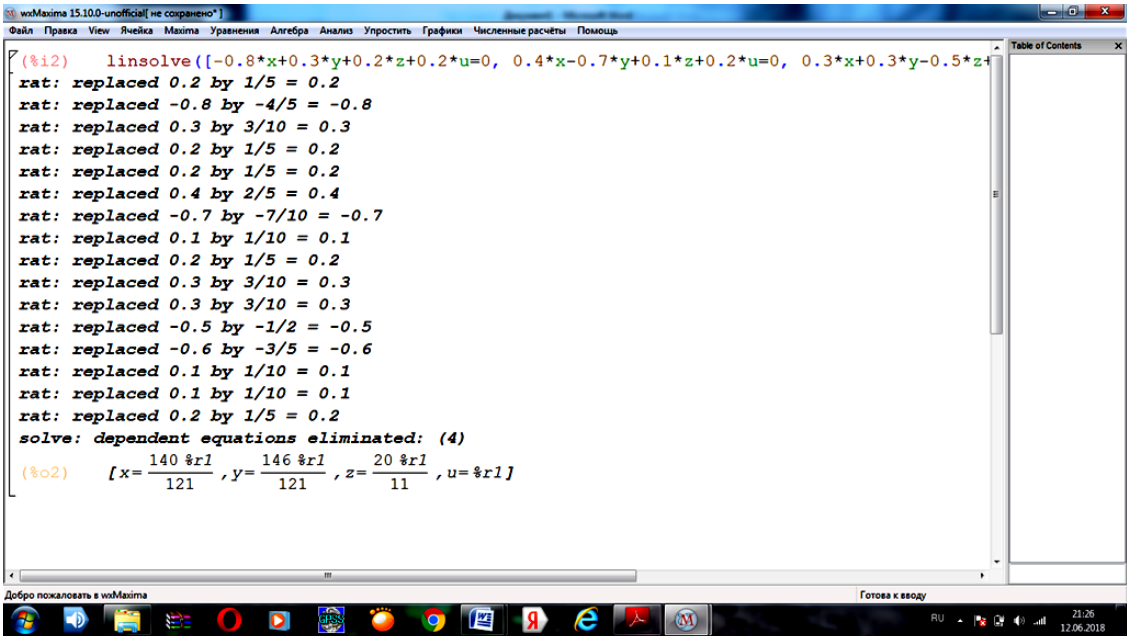


Рис.87

Подставив найденные значения в заданную сумму бюджета, получаем уравнение, при решении которого получился ответ **%r1=1210** (рис. 88).

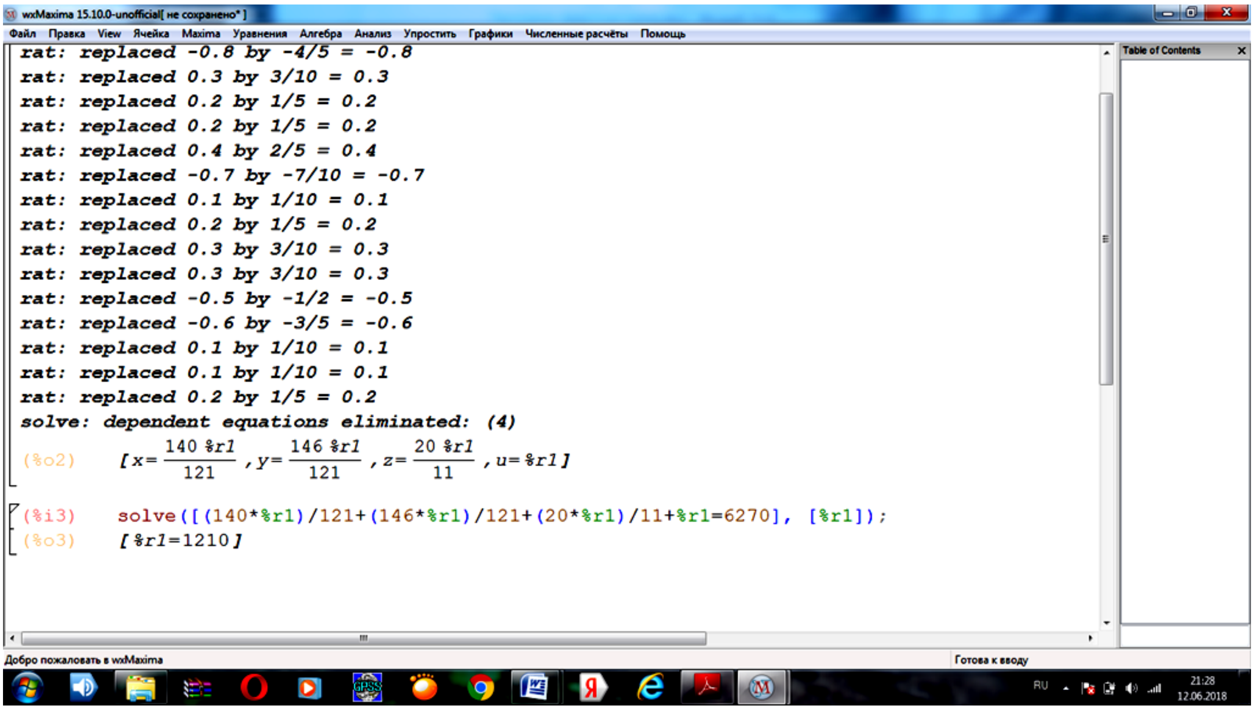


Рис.88

Найдем значение переменой **x** при значении переменной **%r1=1210.** Для этого запишем команду **x=(140*%r1)/121, %r1=1210.** Аналогично найдем значения и других переменных (рис.89).

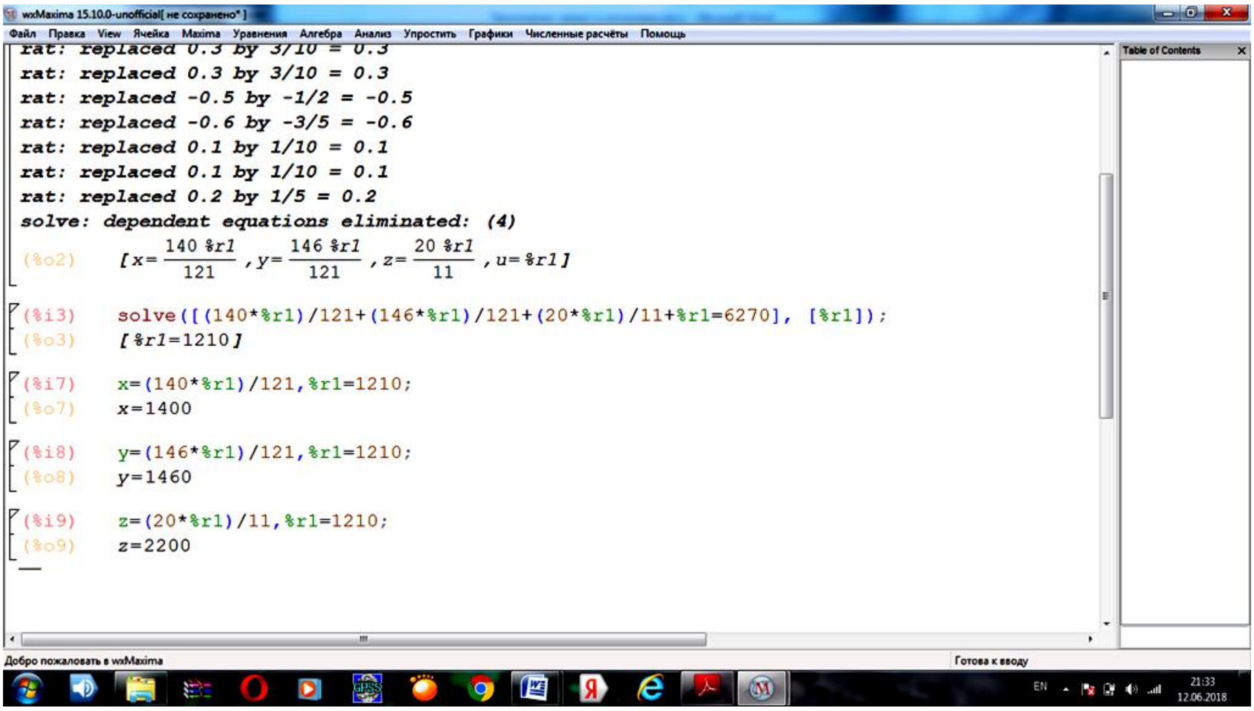


Рис.89

Задания для самостоятельной работы

6.1. Найти соотношение бюджетов стран S_1, …, S_n для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли A.

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}7\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix};\ \text{б) } A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}8\\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1\end{pmatrix};\ \text{в) } A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}.$$

6.2. Найти равновесный вектор бюджетов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли A, если известно, что суммарный бюджет этих стран равен 1200 у.е.

$$A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix}.$$

6.3. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1000 усл. ед.

Задания для контрольной работы

Задание 1. Предприятие выпускает три вида изделий с использованием четырех типов сырья. Нормы затрат сырья на каждое изделие определены матрицей затрат A, себестоимость единицы сырья отражена в матрице C, стоимость доставки единицы сырья каждого типа отражена в матрице D. Найти общие затраты на сырье и его транспортировку при плане выпуска продукции, указанном в матрице B.

1) $A=\begin{pmatrix}3&1&9&2\\5&3&2&3\\6&4&0&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}24\\10\\13\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}7&8&1&4\end{pmatrix},\\ D=\begin{pmatrix}6&6&2&5\end{pmatrix}.\end{matrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}4&3&8&1\\3&1&0&5\\7&5&3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}25\\11\\16\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}5&5&8&9\end{pmatrix},\\ D=\begin{pmatrix}4&2&2&1\end{pmatrix}.\end{matrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}3&10&7&2\\2&3&3&4\\8&5&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}20\\16\\17\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}7&5&4&7\end{pmatrix},\\ D=\begin{pmatrix}2&7&6&3\end{pmatrix}.\end{matrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}3&2&1&1\\4&3&7&2\\5&7&4&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}33\\24\\19\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}8&6&2&4\end{pmatrix},\\ D=\begin{pmatrix}2&1&5&7\end{pmatrix}.\end{matrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}5&2&2&2\\4&4&1&5\\2&0&5&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}26\\7\\13\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}8&9&3&4\end{pmatrix},\\ D=\begin{pmatrix}5&2&7&1\end{pmatrix}.\end{matrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}2&2&4&3\\5&3&2&7\\8&5&1&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}35\\34\\5\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}1&1&3&5\end{pmatrix},\\ D=\begin{pmatrix}9&2&4&4\end{pmatrix}.\end{matrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}9&2&0&5\\4&1&4&5\\3&5&3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}11\\12\\13\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}5&7&6&3\end{pmatrix},\\ D=\begin{pmatrix}7&4&3&6\end{pmatrix}.\end{matrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}4&1&3&2\\1&4&3&6\\6&5&9&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}22\\20\\8\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}C=\begin{pmatrix}2&8&8&3\end{pmatrix},\\ D=\begin{pmatrix}5&7&3&9\end{pmatrix}.\end{matrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}3&2&7&5\\9&7&5&4\\8&6&4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18\\26\\14\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&5&1&3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7&8&5&3\end{pmatrix}$.

10) $A=\begin{pmatrix}1&2&8&4\\5&3&2&7\\7&4&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}20\\15\\17\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&4&7&5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}8&7&5&3\end{pmatrix}$.

11) $A=\begin{pmatrix}3&2&9&7\\4&4&1&3\\6&5&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}35\\10\\45\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&12&4&5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4&1&3&6\end{pmatrix}$.

12) $A=\begin{pmatrix}2&3&7&3\\0&3&5&3\\7&6&4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}13\\14\\15\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7&8&6&4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&3&1&5\end{pmatrix}$.

13) $A=\begin{pmatrix}2&1&10&2\\4&3&2&4\\9&5&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}16\\18\\15\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&9&5&4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&6&9&1\end{pmatrix}$.

14) $A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&4&2&7\\0&5&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}15\\20\\25\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&6&7&3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5&2&1&9\end{pmatrix}$.

15) $A=\begin{pmatrix}0&9&7&5\\4&3&2&1\\8&5&4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}23\\25\\27\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8&9&6&4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6&3&7&4\end{pmatrix}$.

16) $A=\begin{pmatrix}5&3&6&1\\3&2&5&3\\0&7&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}11\\14\\17\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&4&1&4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6&5&3&2\end{pmatrix}$.

17) $A=\begin{pmatrix}3&5&8&2\\2&2&5&5\\6&2&1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}12\\15\\18\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&4&3&14\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7&8&6&1\end{pmatrix}$.

18) $A=\begin{pmatrix}5&7&8&2\\0&3&6&8\\5&6&2&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}20\\17\\14\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&6&2&4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7&8&5&2\end{pmatrix}$.

19) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 23 \\ 25 \\ 29 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

20) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 27 \\ 30 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

21) $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \\ 29 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

22) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 & 1 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

23) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 9 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

24) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

25) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

26) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ 30 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

27) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

28) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \\ 17 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

29) $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 7 & 9\\ 6 & 5 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}11\\ 10\\ 18\end{pmatrix}$, $C=(2 \quad 6 \quad 4 \quad 3)$, $D=(5 \quad 3 \quad 2 \quad 8)$.

30) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 8\\ 4 & 6 & 4 & 3\\ 8 & 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}24\\ 12\\ 17\end{pmatrix}$, $C=(7 \quad 4 \quad 5 \quad 4)$, $D=(9 \quad 5 \quad 3 \quad 1)$.

Задание 2. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Расходы каждого типа сырья по видам продукции и запасы сырья на предприятии даны в таблице. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

1)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	6	2	640
II	3	2	3	530
III	2	1	4	510

2)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	8	4	1	580
II	4	3	5	630
III	1	2	3	350

3)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	4	7	765
II	6	2	3	480

III	2	1	2	255

4)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	5	1	3	445
II	2	2	3	360
III	3	4	2	400

5)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	5	3	265
II	3	2	4	240
III	2	7	4	385

6)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	3	1	340
II	1	5	2	540
III	6	3	4	630

7)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	4	3	270
II	8	2	3	450
III	2	1	5	180

8)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	3	8	770
II	4	2	1	185
III	1	0	3	270

9)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	6	1	5	610
II	2	4	3	550
III	3	5	1	605

10)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	5	2	1	575
II	7	2	2	850
III	3	6	4	740

11)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	6	720
II	1	7	1	530
III	9	3	2	540

12)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	1	3	575
II	2	4	9	1105
III	0	5	2	340

13)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	6	3	665
II	5	2	3	445
III	2	1	2	220

14)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	3	5	595
II	6	2	1	640
III	1	0	3	110

15)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	1	8	975
II	0	2	3	340

III	3	4	2	645

16)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	5	1	500
II	1	6	2	410
III	3	7	4	765

17)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	9	825
II	1	3	0	315
III	4	5	2	825

18)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	7	2	4	580
II	1	5	6	775
III	6	3	2	555

19)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	5	9	3	610

II	1	0	2	120
III	3	4	8	620

20)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	4	8	590
II	3	2	1	305
III	6	0	3	270

21)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	1	7	840
II	2	8	3	610
III	9	5	2	1010

22)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	9	1	815
II	4	3	6	490
III	5	2	3	405

23)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	

I	5	8	3	925
II	1	8	2	625
III	3	4	7	715

24)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	5	4	445
II	6	2	3	325
III	2	7	4	595

25)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	8	1060
II	1	3	9	1110
III	4	3	6	1020

26)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	6	2	5	1005
II	1	7	1	815
III	4	3	8	1225

27)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.	Запас сырья, вес.ед.

	1	2	3	
I	5	6	3	665
II	1	0	2	90
III	3	4	5	505

28)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	5	1	495
II	8	3	4	620
III	1	2	5	365

29)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	4	505
II	1	3	5	555
III	6	3	2	490

30)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	9	1	3	890
II	2	5	3	410
III	9	0	4	920

Задание 3. Дан межотраслевой баланс трехотраслевой модели хозяйства. Найти:

1) технологическую матрицу;

2) матрицу коэффициентов полных затрат;

3) валовой выпуск X' на новый ассортимент конечной продукции $У'$.

Дать экономический анализ полученных матриц.

1)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$У'$
№ отрасли производства	1	40	180	80	100	400	150
	2	80	240	120	160	600	130
	3	120	120	80	80	400	100

2)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$У'$
№ отрасли производства	1	18	40	17	105	180	50
	2	72	60	17	51	200	80
	3	36	20	34	80	170	100

3)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$У'$
№ отрасли производства	1	20	24	42	114	200	80
	2	60	48	56	86	240	100
	3	0	96	28	16	140	50

4)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$У'$
№ отрасли производства	1	40	20	60	80	200	150
	2	20	40	60	80	200	100
	3	20	0	90	190	300	200

5)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$У'$
№ отрасли производства	1	90	24	135	51	300	90
	2	30	48	45	117	240	80
	3	60	72	90	228	450	200

6)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	32	40	32	56	160	120
	2	16	20	64	100	200	150
	3	64	60	96	100	320	80

7)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	60	50	70	120	300	160
	2	0	100	35	115	250	100
	3	30	75	35	210	350	200

8)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	40	50	30	80	200	120
	2	60	150	90	200	500	100
	3	20	50	90	140	300	150

9)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	120	50	30	200	400	150
	2	40	25	30	155	250	120
	3	80	75	60	85	300	70

10)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	18	24	20	118	180	60
	2	54	72	60	54	240	100
	3	36	48	20	96	200	130

11)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	60	40	20	30	150	100
	2	30	80	60	230	400	100
	3	0	40	40	120	200	140

12)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	30	0	16	54	100	150
	2	40	48	32	120	240	200
	3	10	24	48	78	160	90

13)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	30	40	90	140	300	100
	2	0	20	30	150	200	160
	3	60	40	30	170	300	150

14)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	16	36	60	48	160	90
	2	48	24	20	28	120	40
	3	32	12	80	76	200	100

15)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	120	15	25	140	300	150
	2	30	60	0	60	150	100
	3	60	30	75	85	250	200

16)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	36	0	20	64	120	80
	2	48	54	40	38	180	50
	3	12	36	10	42	100	100

17)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	30	75	30	165	300	140
	2	60	25	60	105	250	120
	3	30	100	90	80	300	100

18)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	200	30	40	230	500	300
	2	50	120	0	130	300	250
	3	100	60	120	120	400	400

19)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	10	25	0	65	100	40
	2	10	50	35	155	250	180
	3	60	25	70	195	350	150

20)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	60	45	20	175	300	100
	2	0	90	40	320	450	200
	3	30	45	80	45	200	100

21)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	45	40	30	35	150	60
	2	30	40	30	300	400	150
	3	15	80	90	115	300	100

22)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	50	120	60	20	250	50
	2	100	40	90	170	400	150
	3	50	80	30	140	300	100

23)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	75	0	30	145	250	150
	2	100	160	60	80	400	160
	3	25	80	90	105	300	120

24)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	40	60	60	40	200	50
	2	20	90	30	160	300	100
	3	20	120	120	40	300	80

25)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	32	52	40	36	160	70
	2	16	78	20	146	260	100
	3	0	104	80	16	200	30

26)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	30	25	90	155	300	120
	2	45	50	120	35	250	60
	3	30	75	30	165	300	100

27)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	y'
№ отрасли производства	1	68	64	20	188	340	150
	2	102	16	10	32	160	50
	3	34	48	0	18	100	30

28)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$У'$
№ отрасли производства	1	0	20	100	280	400	200
	2	80	60	50	10	200	70
	3	120	20	100	10	250	50

29)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$У'$
№ отрасли производства	1	31	72	0	207	310	250
	2	62	96	60	22	240	90
	3	93	24	40	43	200	30

30)	№ отрасли потребления	1	2	3	Конечный продукт	Валовый продукт	$У'$
№ отрасли производства	1	30	20	60	40	150	100
	2	30	0	30	140	200	150
	3	0	40	45	65	150	80

Задание 4. Производственная сфера народного хозяйства состоит из трёх отраслей и характеризуется структурной матрицей A. Рассчитать равновесные цены по отраслям при заданном векторе норм добавленной стоимости v. Как изменятся цены на продукцию, если норму добавленной стоимости по i-ой отрасли увеличить на p%?

1) $A=\begin{pmatrix}0,21 & 0,24 & 0,15\\ 0,1 & 0,33 & 0,07\\ 0,11 & 0,17 & 0,12\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 10\end{pmatrix},\ \begin{matrix}i=1,\\ p=5.\end{matrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}0,18 & 0,34 & 0,08\\ 0,15 & 0,32 & 0,23\\ 0 & 0,22 & 0,48\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 3\end{pmatrix},\ \begin{matrix}i=2,\\ p=10.\end{matrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}0,01 & 0,19 & 0\\ 0,28 & 0,45 & 0,16\\ 0,08 & 0,17 & 0,15\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}10\\ 9\\ 8\end{pmatrix},\ \begin{matrix}i=3,\\ p=15.\end{matrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,35 & 0,13\\ 0,09 & 0,22 & 0,14\\ 0 & 0,11 & 0,19\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}8\\ 7\\ 9\end{pmatrix},\ \begin{matrix}i=1,\\ p=20.\end{matrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,18 & 0,12\\ 0,18 & 0,12 & 0,2\\ 0 & 0,09 & 0,41\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 6\end{pmatrix},\ \begin{matrix}i=2,\\ p=5.\end{matrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,18 & 0\\ 0,2 & 0,3 & 0,27\\ 0,17 & 0,19 & 0,4\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}6\\ 12\\ 18\end{pmatrix},\ \begin{matrix}i=3,\\ p=10.\end{matrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,07 & 0\\ 0,31 & 0,4 & 0,13\\ 0,1 & 0,17 & 0,3\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}5\\ 10\\ 5\end{pmatrix},\ \begin{matrix}i=1,\\ p=15.\end{matrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,16 & 0\\ 0,18 & 0,1 & 0,25\\ 0 & 0,12 & 0,23\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 7\end{pmatrix},\ \begin{matrix}i=2,\\ p=20.\end{matrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}0{,}12 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}37 & 0{,}13 & 0{,}04\\ 0{,}05 & 0{,}19 & 0{,}14\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}7\\10\\3\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=3,\\ p=5.\end{matrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}0{,}34 & 0{,}24 & 0{,}1\\ 0{,}19 & 0{,}14 & 0{,}27\\ 0 & 0{,}08 & 0{,}2\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}7\\5\\2\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=1,\\ p=10.\end{matrix}$

11) $A=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}13 & 0\\ 0{,}16 & 0{,}18 & 0{,}15\\ 0{,}12 & 0{,}14 & 0{,}4\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}8\\10\\7\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=2,\\ p=15.\end{matrix}$

12) $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}18 & 0{,}11\\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}17\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}9\\15\\8\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=3,\\ p=20.\end{matrix}$

13) $A=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}21 & 0{,}02\\ 0{,}16 & 0{,}16 & 0{,}24\\ 0 & 0{,}08 & 0{,}22\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}5\\9\\7\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=1,\\ p=5.\end{matrix}$

14) $A=\begin{pmatrix}0{,}16 & 0{,}14 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}13 & 0{,}17\\ 0{,}07 & 0{,}22 & 0{,}1\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}4\\9\\8\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=2,\\ p=10.\end{matrix}$

15) $A=\begin{pmatrix}0{,}27 & 0{,}25 & 0{,}05\\ 0{,}14 & 0{,}05 & 0{,}31\\ 0{,}13 & 0{,}19 & 0{,}38\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=3,\\ p=15.\end{matrix}$

16) $A=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}38 & 0{,}09 & 0{,}13\\ 0{,}08 & 0{,}15 & 0{,}17\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}5\\9\\4\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=1,\\ p=20.\end{matrix}$

17) $A=\begin{pmatrix}0{,}22 & 0{,}2 & 0{,}08\\ 0{,}04 & 0{,}15 & 0{,}41\\ 0 & 0{,}07 & 0{,}1\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=2,\\ p=5.\end{matrix}$

18) $A=\begin{pmatrix}0{,}13 & 0{,}17 & 0\\ 0{,}24 & 0{,}14 & 0{,}22\\ 0{,}1 & 0{,}21 & 0{,}15\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=3,\\ p=10.\end{matrix}$

19) $A=\begin{pmatrix}0{,}24 & 0{,}08 & 0\\ 0{,}29 & 0{,}23 & 0{,}1\\ 0{,}01 & 0{,}14 & 0{,}22\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=1,\\ p=15.\end{matrix}$

20) $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}12 & 0\\ 0{,}21 & 0{,}3 & 0{,}22\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}19\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}5\\8\\6\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=2,\\ p=20.\end{matrix}$

21) $A=\begin{pmatrix}0{,}17 & 0{,}17 & 0{,}13\\ 0{,}12 & 0{,}23 & 0{,}25\\ 0 & 0{,}14 & 0{,}06\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}7\\6\\2\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=3,\\ p=5.\end{matrix}$

22) $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}09 & 0{,}2\\ 0{,}38 & 0{,}15 & 0{,}12\\ 0 & 0{,}13 & 0{,}27\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}8\\5\\3\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=1,\\ p=10.\end{matrix}$

23) $A=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}18 & 0\\ 0{,}32 & 0{,}23 & 0{,}15\\ 0{,}06 & 0{,}16 & 0{,}18\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}2\\10\\9\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=2,\\ p=15.\end{matrix}$

24) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}11 & 0\\ 0{,}29 & 0{,}12 & 0{,}09\\ 0{,}07 & 0{,}35 & 0{,}3\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}7\\5\\7\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=3,\\ p=20.\end{matrix}$

25) $A=\begin{pmatrix}0{,}46 & 0{,}24 & 0\\ 0{,}26 & 0{,}2 & 0{,}23\\ 0{,}05 & 0{,}16 & 0{,}4\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=1,\\ p=5.\end{matrix}$

26) $A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}26 & 0{,}09\\ 0{,}13 & 0{,}3 & 0{,}14\\ 0 & 0{,}19 & 0{,}1\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}8\\3\\9\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=2,\\ p=10.\end{matrix}$

27) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}03\\ 0{,}23 & 0{,}31 & 0{,}21\\ 0{,}1 & 0{,}11 & 0\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=3,\\ p=15.\end{matrix}$

28) $A=\begin{pmatrix}0{,}34 & 0{,}15 & 0{,}11\\ 0{,}36 & 0{,}02 & 0{,}12\\ 0{,}15 & 0{,}17 & 0{,}18\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}7\\2\\8\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=1,\\ p=20.\end{matrix}$

29) $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}35 & 0{,}06\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}11 & 0{,}18 & 0{,}12\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}10\\15\\12\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=2,\\ p=5.\end{matrix}$

30) $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}22 & 0{,}12\\ 0{,}07 & 0{,}4 & 0{,}29\\ 0 & 0{,}17 & 0{,}13\end{pmatrix}$; $v=\begin{pmatrix}6\\7\\7\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}i=3,\\ p=10.\end{matrix}$

Задание 5. В таблице приведены среднемесячные объемы продуктовой продовольственной корзины:

№	Вид товара	Количество (кг)
1	Мука (хлеб, макароны)	10,5
2	Картофель	8,4
3	Капуста	4
4	Яблоки	2,5
5	Сахар	1
6	Мясо (говядина)	2,5
7	Рыба	1,5
8	Молоко	24,2
9	Яйца	17
10	Масло растительное	0,9
11	Чай	0,35

Вычислить индекс цен и индекс инфляции для определенного периода по отношению к предыдущему периоду.

1)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39,99	35,99	19,99	89,99	37,99	529	415	72,9	37,99	110,99	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	38,99	27,49	29,99	91,99	37,49	528	413	78,9	45,99	114,99	834

2)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	36,49	30,9	20,49	100	35	530	1699	79	52,5	105	854
Цена товара в предыдущем периоде за кг	36	14,99	7,9	71,9	29	489	1599	70	56	115	836

3)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	30	29,9	30	51	32	400	200	49,9	40,5	70	950
Цена товара в предыдущем периоде за кг	24,9	20	24,49	80	27	389	270	48,9	49	100	899

4)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	40	36	20	90	38	529	415	73	38	111	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	39,5	27	30	92	37,49	524	410	79	46	115	799

5)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39	35	33	95	40	342	291	55	61	83	779
Цена товара в предыдущем периоде за кг	38,5	33,9	33,5	117,1	37,6	330	285,6	53,5	55	82,5	792,5

6)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	37	31,9	19,99	139,99	38	499	1299	79	96	129	1150
Цена товара в предыдущем периоде за кг	36,9	40	25	135	36	489	1190	78	85	124	1345

7)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	35,99	30	19,9	100	35	529	1699	79	52,9	105,99	854
Цена товара в предыдущем периоде за кг	35	13	10,5	72	34	489	1449	69	62	115	832

8)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	22,9	44	39,9	89	36	399	240	55	67	124,8	990
Цена товара в предыдущем периоде за кг	21,22	23,87	23,87	45,09	33,16	310	159,15	45	45,1	79,58	1061

9)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39,99	35,99	19,99	89,99	37,99	529	415	72,9	37,99	110,99	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	34,49	39,99	39,99	84,99	28,9	430	412	78,9	52,49	118,99	829

10)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	36,9	31,9	19,9	139,9	38	499	1299	79	96	129	1149
Цена товара в предыдущем периоде за кг	42	27	49,9	95	28	569	1045	77,9	85	119	1395

11)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	40	98	29,9	197	75	648	1793	83,9	96	126	1430
Цена товара в предыдущем периоде за кг	35	68	38	195,9	74,5	690	1629	83,5	94,99	115	1305

12)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	40	34,9	35	99,99	45	400	300	50	50	70	700
Цена товара в предыдущем периоде за кг	35	30	17	102	40	368	600	49,5	48,9	78	698

13)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	45	29	30	99,9	45	339	219	40	45	105	1000
Цена товара в предыдущем периоде за кг	49,9	29,9	19,9	50	40	360	180	43	49,9	100	990

14)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	40	36	20	90	38	529	415	73	38	111	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	35	40	40	85	29	429	400	79	53	119	839

15)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39	35	33	95	40	342	291	55	61	83	779
Цена товара в предыдущем периоде за кг	36	31,8	29	82	35,6	332	287,8	57,8	56,3	82,5	769,7

16)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	37	32	20	140	38	499	1299	79	96	129	1150
Цена товара в предыдущем периоде за кг	39	25	13	90	27	569	1045	76	85	119	1345

17)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39,9	98	28,9	197	75	648	1793	83	96	126,5	1430
Цена товара в предыдущем периоде за кг	39	39	24	138	74,5	690	1629	77	95,5	123	1305

18)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	45	38,9	24,9	90	40	399	250	40	50	90	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	25,9	20	14,9	99	35	350	160	35	40,5	60	590

19)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39,99	35,99	19,99	89,99	37,99	529	415	72,9	37,99	110,99	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	34,49	14,9	12,9	71,99	33,49	411	410	72,3	43,49	111,99	749

20)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	37	32	19,9	139	38	499	1299	79	96	128,9	1150
Цена товара в предыдущем периоде за кг	34,9	19,99	10	80	40	579	1029	76	87	119	1495

21)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	40	98	29	197	75	648	1793	83	96	126	1430
Цена товара в предыдущем периоде за кг	39	39	16	138	67	690	1400	97	91	127	1305

22)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	49,9	20	21,9	60	40	400	350	58,5	63	111,9	599
Цена товара в предыдущем периоде за кг	45	34,5	35	75	43	310	260	55	60	105	499

23)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	45	25	12	89,9	39	319	330	50	70	80	580
Цена товара в предыдущем периоде за кг	37,9	19,9	22	80	38,9	340	300	48,9	51	105	599

24)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	40	36	20	90	38	528	415	73	38	111	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	34,9	15	13	72	33	412	390	72,1	43	111,9	750

25)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39	35	33	95	40	342	291	55	61	83	779
Цена товара в предыдущем периоде за кг	40,2	30,8	28,6	73,2	47,1	337	270,9	52,4	56,4	84,6	829,6

26)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	35,9	30	20	100	35	529	1699	79	52	105	854
Цена товара в предыдущем периоде за кг	35,5	40	28	103	37	539	1689	77	51,5	104	849

27)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39,9	35,9	19,9	90	38	534	415	73	38	111	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	28,9	24,9	24,9	76	41	448	389	68	43	112	749

28)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	40	98	28,9	196,9	75	648	1793	83	96	126	1430
Цена товара в предыдущем периоде за кг	39	64	13	72,9	57	790	1219	92	109,5	112	1355

29)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	39,99	35,99	19,99	89,99	37,99	529	415	72,9	37,99	110,99	849
Цена товара в предыдущем периоде за кг	29,49	27,9	24,9	69,99	42,99	447	388	68,1	42,99	111,99	744

30)

Вид товара	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Цена товара в текущем периоде за кг	36,9	30	19,,9	100	35	539	1699	79	52	105	854
Цена товара в предыдущем периоде за кг	35,9	28	25	116	28	449	1499	68	42	108	834

Задание 6. Найти равновесный вектор бюджетов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли *A*, если известно, что суммарный бюджет этих стран равен *S* усл. ден. ед.

1) $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$, $S=10900$;
2) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4\end{pmatrix}$, $S=9300$;
3) $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6\end{pmatrix}$, $S=11000$;

4) $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix}$, $S=27900$;
5) $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix}$, $S=17600$;
6) $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}6\end{pmatrix}$, $S=5950$;

7) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}6\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$, $S=11625$;
8) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}$, $S=15750$;
9) $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}$, $S=19500$;

10) $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}7\end{pmatrix}$, $S=9000$;
11) $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}6\end{pmatrix}$, $S=22200$;
12) $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix}$, $S=17600$;

13) $A=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4\end{pmatrix}$, $S=44100$;
14) $A=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}6\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}$, $S=30300$;
15) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1\end{pmatrix}$, $S=11800$;

16) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\end{pmatrix}$, $S=21000$;
17) $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$, $S=11000$;
18) $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$, $S=8800$;

19) $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1\end{pmatrix}$, $S=26200$;
20) $A=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}6\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix}$, $S=24300$;
21) $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\end{pmatrix}$, $S=16500$;

22) $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}6\end{pmatrix}$, $S=9900$;
23) $A=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}6\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}$, $S=26700$;
24) $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix}$, $S=8690$;

25) $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 15840$;

26) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$, $S = 13200$;

27) $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$, $S = 13530$;

28) $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 11340$;

29) $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$, $S = 22225$;

30) $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$, $S = 30250$.

Литература

1. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2016 – 909 с. – Серия : Бакалавр. Углубленный курс.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: Учебно-справочное пособие / под общ. ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2014. – 724 с.
3. Красс, М.С. Математика для экономистов [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2010. – 464 с.
4. Солодовников, А.С. Математика в экономике [Текст]: учеб. / А.С. Солодовников [и др.]. – Ч. 1. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2013. – 384 с.
5. Абзалилов Д.Ф., Малакаев М.С., Широкова Е.А. Практические задания по высшей математике с применением программы Maxima для студентов, обучающихся по специальности “социология”. - Учебно-методическое пособие, Казань: КФУ, 2012. – 80 с.