Показатели Марцинкевича и задача о скачке для β-аналитических функций

Д.Б. Кац

Одним из крайне востребованных в механике и физике ([2]) обобщений уравнений Коши–Римана (см., напр., [1]) является уравнение Бельтрами

$$\overline{\partial}\,\phi = \mu\,\partial\,\phi, \quad |\mu(z)| < 1,$$

Здесь, как обычно,

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

В случае

$$\mu(z) = \beta\frac{z}{\overline{z}}, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

правый обратный оператор для дифференциального оператора Бельтрами $\overline{\partial} - \mu\,\partial$ (аналог известного оператора T из [1]) был в явном виде найден казахским математиком А. Тунгатаровым (см. [3]). Решения соответствующего уравнения Бельтрами получили название
$\beta-$аналитических функций.

В наши дни исследования аналогов краевой задачи Римана и связанных с ними вопросов для таких функций получили дальнейшее развитие в виде работ Рикардо Абреу-Блайя, Хуан Бори-Рейес, Диксан Пенья-Пенья и Жан-Мария Вилье (см. [4], [5]).

Для аналитических (т.е. 0-аналитических) функций краевая задача Римана хорошо изучена в следующей постановке: Пусть Γ есть ориентированная кривая на комплексной плоскости, на которой заданы функции $G(t)$ и $g(t)$. Требуется найти все голоморфные в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\phi(z)$, имеющие на Γ непрерывные предельные значения $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ слева и справа соответственно, исчезающие в бесконечно удаленной точке и удовлетворяющие краевому условию

$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Классические результаты в этой области (напр., [6]) получены для случая хотя бы кусочно-гладкого контура. На неспрямляемых контурах задача Римана для аналитических функций была решена Б.А. Кацем ([8]). Рикардо Абреу-Блайя, Хуан Бори-Рейес, Диксан Пенья-Пенья и Жан-Мария Вилье использовали предложенные в этих работах методы для решения задачи Римана и задачи о скачке для β-аналитических функций на неспрямляемых кривых. Ими получены следующие условия разрешимости таких задач.

Пусть Γ – множество на комплексной плоскости, $0 < \nu \leq 1$. Класс $H_\nu(\Gamma)$ состоит из заданных на Γ функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гёльдера

$$h_\nu(f;\Gamma) := \sup\left\{\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^\nu} : t,t' \in \Gamma, t \neq t'\right\} < \infty.$$

Если множество Γ компактно, то его размерность Минковского ([9]), определяется равенством

$$\operatorname{dm}\Gamma := \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log N(\Gamma;\varepsilon)}{-\log\varepsilon},$$

где $N(\Gamma;\varepsilon)$ означает наименьшее число кругов радиуса ε, образующих покрытие Γ. Такая размерность плоского континуума всегда лежит в промежутке $[1;2]$; если Γ – спрямляемая кривая, то $\operatorname{dm}\Gamma = 1$, а для неспрямляемой кривой размерность Минковского может превосходить единицу.

В работе [?] доказано, что задача о скачке (частный случай задачи Римана с $G \equiv 1$) для $\beta-$аналитических функций на неспрямляемом контуре Γ разрешима, если $g \in H_\nu(\Gamma)$, причём

$$\nu > \frac{1}{2}\operatorname{dm}\Gamma. \tag{1}$$

Далее, в работе [5] разрешимость задачи Римана для $\beta-$аналитических функций на неспрямляемом контуре Γ установлена в предположении, что контур является d-суммируемым, а коэффициенты задачи G и g удовлетворяют условию Гельдера с показателем

$$\nu > d/2. \tag{2}$$

Понятие d-суммируемости введено Дж. Харрисон и А. Нортоном [10]; контур Γ называется d-суммируемым, если сходится интеграл

$$\int\limits_0 N(\Gamma;x)x^{d-1}dx.$$

Как показано в [10], d-суммируемость Γ влечет неравенство $\operatorname{dm}\Gamma \leq d$, а при $\operatorname{dm}\Gamma < d$ множество Γ является d-суммируемым.

Недавно автор (напр., [11], [12]) ввел новую метрическую характеристику неспрямляемых кривых – показатель Марцинкевича. Цель данного доклада - показать, что эта характеристика позволяет ослабить условия (1) и (2).

Список литературы

[1] Векуа И.Н., Обобщенные аналитические фукции, Москва, Наука, 1988.

[2] Монахов В.Н., Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосибирск, Наука, 1977.

[3] Тунгатаров А.Б., Свойства одного интегрального оператора в классах суммируемых функций, Известия АН Казахской ССР. Серия физико-математическая, 132, 5, 58-62, 1985.

[4] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. and Pena-Pena D., On the jump problem for $\beta-$analytic functions, Complex Variables and Elliptic Equations Vol. 51, Nos. 8–11, August–November 2006, 763–775

[5] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. and Vilaire J.-M., The Riemann boundary value problem for β-analytic functions over D-summable closed curves, International Journal of Pure and Applied Mathematics, V. 75, No. 4, 441-453, 2012

[6] Гахов Ф.Д., Краевые задачи, Москва, Наука, 1977. – 640 с.

[7] Мусхелишвили Н.И., Сингулярные интегральные уравнения, Москва, Наука, 1962.

[8] Кац Б.А., Задача Римана на замкнутой жордановой кривой. Известия ВУЗов. Математика. 1984, №3. С. 68-80

[9] Falconer K.J. *Fractal geometry*, (Wiley and Sons, Chichester, UK, 3rd edition, 2014).

[10] Harrison J., Norton A., The Gauss-Green theorem for fractal boundaries, Duke Mathematical Journal, 67(3) (1992), P. 575-588.

[11] Кац Д.Б., Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах. Известия ВУЗов. Математика, 2014, №3, С.68-71.

[12] Кац Д.Б. Локальные показатели Марцинкевича и их приложение // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2014. — Т. 156, кн. 4. — С. 31–38.