УДК 378: 372.851

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ИНЖЕНЕРНОЙ ПОДГОТОВКЕ: ПЕРКОЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ОБУЧЕНИЯ

Белашов В.Ю., КГЭУ и К(П)ФУ, д.ф.-м.н., профессор,
v_belashov@yahoo.com

Аннотация. *Предлагается перколяционный подход (модель), как перспективная технология в преподавании высшей математики и ее вычислительных аспектов при обучении будущих технических специалистов-инженеров на примере таких ее разделов, как математический анализ, линейная алгебра и численные методы. При этом реализуется принцип взаимного «просачивания» (перколяции) основных понятий и аппарата математики и предметных областей, соответствующих направлению подготовки будущих инженеров, что объективно содействует существенно лучшему пониманию как, собственно, математики, так и соответствующих специальных инженерных дисциплин и повышает мотивацию к изучению высшей математики.*

Ключевые слова: *высшая математика, численные методы, перспективная технология обучения, перколяционная модель, инженерное образование, мотивация*

При получении обучающимися инженерного образования в рамках широкого спектра существующих направлений подготовки важную, если не определяющую, роль играет такая фундаментальная дисциплина, как высшая математика и особенно те ее разделы, которые имеют вполне очевидные приложения к решению задач инженерной практики. Однако, почти повсеместно сложившаяся практика организации учебного процесса в отношении преподавания курса высшей математики и ее вычислительных аспектов (такие дисциплины или отдельные разделы дисциплин, что определяется учебными планами направлений подготовки, как вычислительная математика, численные методы и пр.), а именно: преподавание данных дисциплин *математиками* (кафедрами высшей математики, прикладной математики и пр.) объективно приводит к тому, что дисциплина практически всегда изучается, как *чистая математика* (*pure mathematics*), зачастую плохо соотносимая с реальными задачами инженерной практики, а последнее как раз является весьма необходимым в создании заинтересованности и мотивации обучающихся.

Абстрактная формальная логика «чистой» математики – замечательна, но интересна, в основном, самим математикам, мотивировать же на ее изучение будущих инженеров вряд ли способна. Преподавать математику, следовательно, надо всемерно заинтересовывая обучающихся конкретными примерами применения математического аппарата к решению практических задач, относящихся к их будущей специальности. А отсюда с необходимостью следует, что преподаватель, ведущий занятия по соответствующим математическим дисциплинам, должен сам быть в определенной (необходимой) степени компетентен в предметной области, к которой относится направление подготовки тех, кого он обучает.

С другой стороны, при изучении специальных дисциплин преподаватели, ведущие эти занятия, должны обладать необходимыми компетенциями в области математического аппарата, используемого ими в соответствующих выкладках, и должны апеллировать к соответствующим разделам математических дисциплин.

Предлагаемый принцип (или подход) – модель – преподавания высшей математики и ее вычислительных аспектов при обучении будущих технических специалистов-инженеров предполагает именно такой «перколяционный» подход, где *перколяция* трактуется нами в своем истинном смысле, как *взаимопроникновение* – как понятийное (на уровне понятийного аппарата), так и содержательное (на уровне предметного содержания) математических дисциплин в предметные (инженерные) для данного направления подготовки, и наоборот. Проиллюстрируем это на нескольких примерах для таких разделов математики, как математический анализ, линейная алгебра и численные методы.

Пример 1. Определение понятия производной и интеграла в математическом анализе. Стандартная методология, используемая преподавателями высшей математики, вне зависимости от направления подготовки обучающихся, здесь, как известно, следующая [1-3] (кратко, конспективно).

Пусть $y = f(x)$ – действительная функция действительного переменного x, определенная в некоторой окрестности точки x. Первая производная функции $f(x)$ по x в точке x есть предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = y'. \qquad (1)$$

Далее обычно следуют несколько слов, касающихся «физического» и геометрического смысла введенного понятия:

- в каждой точке x, в которой предел (1) существует, производная есть мера скорости изменения y относительно x;
- производная $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x.

Все верно, красиво и строго. Однако при таком изложении у обучающегося часто складывается, на уровне ощущения, представление о понятии производной, как о некоторой абстракции, непонятно как применимой в реальной практике избранной им будущей специальности (lim, $\Delta x \to 0$, «мера скорости изменения функции», «угловой коэффициент касательной к графику»). Отсюда – потеря мотивации, формирование представления о математическом анализе, как об обязательной, но вряд ли нужной ему в последующем дисциплине.

Аналогично обстоит дело в математическом анализе и с понятием интеграла, который вводится через достаточно абстрактное понятие первообразной подынтегральной функции $f(x)$ (определенный интеграл – через предел суммы).

Справедливости ради следует отметить, что в классическом курсе высшей математики середины XX века В.И. Смирнова понятия производной и интеграла вводятся ассоциировано с рассмотрением примера из механики о движении материальной точки [4], что в некоторой степени проясняет приложенческие аспекты абстрактного математического аппарата. Мы, однако, полагаем, что здесь следует пойти дальше, ориентируясь на конкретное направление подготовки будущих инженеров. Проиллюстрируем это на примере возможного подхода к объяснению вышерассмотренных понятий при подготовке будущих специалистов электротехников и электроэнергетиков.

Итак, в соответствии с перколяционным подходом следует вначале привести конкретные примеры необходимости использования соответствующих понятий. Например: пусть в некоторой электротехнической системе (электрической цепи) производится непрерывное измерение заряда на обкладках конденсатора $q(t)$. (В системе электроснабжения промышленного предприятия это могут быть, например, конденсаторные батареи, служащие для компенсации реактивной мощности.) Произошла аварийная ситуация – электрический пробой конденсатора, и требуется установить причину. Очевидно, для этого необходимо определить ток в цепи (в момент пробоя), а он, в отсутствии прямых измерений может быть найден, исходя из его определения:

$$i = q'(t) = dq(t)/dt.$$

В обратном случае, когда в исследуемой электрической цепи производится непрерывное измерение тока (с помощью, например, амперметра или измерительного трансформатора тока) и для выяснения причины пробоя конденсатора (конденсаторной батареи) необходимо определить, какой же заряд был в момент пробоя на пластинах, следует вычислить:

$$q(t) = \int i(t)dt,$$

а затем, по найденной функции $q(t)$ определить величину заряда в момент пробоя. Такого типа практические примеры, которые должны предварять изучение собственно математических понятий, показывают значимость последних в предметной области избранного обучающимися направления подготовки и, следовательно, мотивируют их интерес к изучению абстрактных понятий, нужность которых в инженерной практике предварительно пояснена преподавателем, который вначале фактически дал ответ на извечный вопрос студентов: «зачем нам это нужно?».

Пример 2. Изучение теории обыкновенных дифференциальных уравнений в математическом анализе. Дифференциальное уравнение первого порядка обычно вводится абстрактно, вне какой бы то ни было связи с конкретными приложенческими задачами в следующем виде:

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

и далее формулируется задача Коши, суть которой состоит в определении решения уравнения (2) при начальном условии $y(x_0) = y_0$, где индекс 0 отвечает начальным значениям независимого переменного и функции. Далее следует теорема Коши о существовании и единственности решения. При таком, стандартном, подходе, не предполагающем обсуждение происхождения дифференциальных уравнений при описании конкретных задач, опять-таки размывается (никак не обозначается) область применения теории к конкретной предметной области и фактически провоцируется психологическое отторжение последующего изучения теории обучающимися ввиду отсутствия мотивации.

Полагаем, что правильным в контексте рассматриваемой нами проблемы был бы следующий подход. Пусть имеется следующая простая механическая модель: тело массой m, прикрепленное к вертикальной стенке пружиной и движущееся под действием пружины по горизонтальной плоскости без трения – простой гармонический осциллятор [5] (рис. 1). Чтобы исследовать движение осциллятора, необходимо иметь уравнение, решая которое мы,

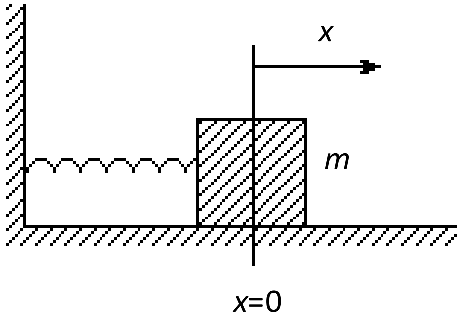

Рис. 1. Простой гармонический осциллятор

собственно, и будем получать основные характеристики движения – координату и скорость в любой момент времени. Это – уравнение движения, записываемое в виде второго закона Ньютона, где ускорение есть d^2x/dt^2, а сила, действующая со стороны пружины на тело при малых отклонениях от положения равновесия, определяется законом Гука: $F = -kx$. В результате, уравнение, описывающее движение тела массы m, будет иметь вид:

$$d^2x/dt^2 = -(k/m)\,x, \tag{3}$$

т.е. представлять собой дифференциальное уравнение второго порядка. Учет силы трения или силы сопротивления среды, зависящей от скорости движения, приведет к включению в уравнение (3) члена, пропорционального скорости:

$$d^2x/dt^2 = -\omega_0^2\,x - \gamma dx/dt, \tag{4}$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебаний осциллятора, γ – эмпирический коэффициент, описывающий форму и структуру поверхности движущегося тела.

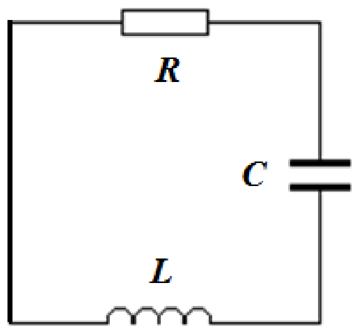

Рис. 2. Колебательный контур

Отметим далее, что формально аналогичным уравнением описываются колебания заряда q на пластинах конденсатора и тока i в цепях, содержащих индуктивность L и емкость C, например, в RLC-контуре (рис. 2) [5]:

$$d^2q/dt^2 = -\omega_0^2 q - \gamma dq/dt, \tag{5}$$

где $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ – собственная частота колебаний осциллятора, $\gamma = R/C$, R – сопротивление.

Уравнения (3)-(5) легко могут быть представлены в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, на примере (5):

$$\begin{cases} dq/dt = i, \\ di/dt = -\omega_0^2 q - \gamma i. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, чтобы исследовать колебания тока и заряда в цепи, равно как и механические колебания, необходимо уметь решать дифференциальные уравнения первого порядка и их системы вида (6). Последние же будут иметь вполне определенные решения, только если в дополнение к ним задать значения заряда и тока (в механических системах – координаты и скорости) в некоторый начальный момент времени: q_0, i_0 (x_0, v_0 в механических системах), что будет называться постановкой зачади Коши для соответствующего уравнения с начальными условиями. Далее уже можно переходить к общей записи уравнения в виде (2) и рассматривать соответствующие абстрактные математические положения.

Такой подход дает мотивацию и пробуждает интерес к изучению теории дифференциальных уравнений, поскольку обучающиеся получают наглядное представление о том, «зачем им это нужно» в контексте приобретаемой инженерной специальности.

Пример 3. Изучение методов линейной алгебры и численных методов, связанных с решением систем линейных алгебраических уравнений. При традиционном подходе предлагаемый преподавателем материал практически всегда оторван от использования соответствующих методов в реальных задачах инженерной практики. Вводный материал, пробуждающий интерес и мотивацию к изучению теоретических вопросов, предлагается согласно концепции перколяционного подхода, давать обучающимся (электротехнические и электроэнергетические специальности), например, в следующем виде.

Известно, что одним из эффективных методов расчета электрических цепей постоянного тока[1] является метод правил Кирхгофа (или, например,

[1] Для цепей переменного тока используется аналогичный подход для действующих значений тока и напряжения на основе представления соответствующих комплексов в виде векторов на комплексной плоскости.

основанный на нем метод контурных токов). При составлении уравнений для узлов и контуров цепи в соответствии с этими правилами мы получаем систему N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными, где N определяется топологией рассматриваемой электрической цепи, более конкретно, количеством ее ветвей. В инженерной практике такие задачи могут, например, возникать при выяснении причин аварийных ситуаций в питающей сети городского электротранспорта (известно, что в России электротранспорт – трамваи, троллейбусы – питаются от сети постоянного тока), когда требуется определить критические токи в отдельных ветвях цепи (здесь ветви – линии питания от перекрестка к перекрестку). Понятно, что в городах с развитой системой электротранспорта количество ветвей в системе (N) будет определяться сотнями, а то и тысячами может потребоваться решать систему тысяч алгебраических уравнений с тысячами неизвестных. Чтобы эффективно решать подобные задачи, специалистам-инженерам необходимо хорошо владеть как методами линейной алгебры, так и методами быстрого (численного) решения подобных задач, что предполагает хорошее знание ими и свободное владение соответствующим аппаратом математики.

Понятно, что такая «преамбула» к соответствующим лекциям и/или практическим занятиям математических курсов будет представлять собой мотивационную установку к изучению материала.

Пример 4. Изучение задач интерполяции в курсах численных методов и вычислительной математики. Здесь, в соответствии с предлагаемым подходом, можно дать, например, следующий вводный материал, способный мотивировать обучаемого к изучению предмета.

Пусть в некоторой системе электроснабжения в некоторой точке схемы каждый час измеряется ток (или напряжение), т.е. измерения проводятся в 0 часов, 1, 2, 3, …, 23 часа (см. рис. 3). И пусть, например, в 2 час 20 мин произошла авария в системе электроснабжения, связанная с отключением системы в результате, как предполагается, появления в цепи аномально высоких токов. Чтобы установить причину аварии, необходимо иметь представление

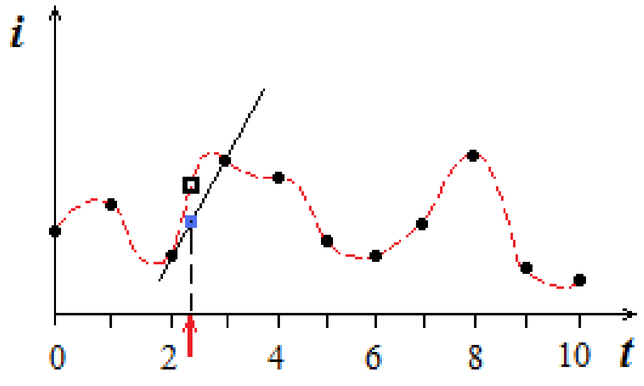

Рис. 3. К вопросу об интерполяции: точки – измеренные значения; прямая линия – линейная аппроксимация; закрашенный квадрат – значение тока, полученное путем линейной аппроксимации; не закрашенный квадрат – значение тока, полученное с использованием интерполяции

о величине этого тока. А как это сделать, если измерения проводились в 2 и 3 часа, а внутри этого временного интервала информации о величине тока нет? Один из примитивных вариантов – считая зависимость тока от времени на участке 2 час – 3 час линейной, выбрать соответствующее значение, отвечающее моменту времени 2 час 20 мин. Однако, поскольку ток в цепи меняется отнюдь не по линейному закону, погрешность при таком подходе может оказаться весьма значительной, что повлияет на правильность выводов относительно причин случившегося. Наиболее адекватным способом получения промежуточных значений токов в моменты времени, не совпадающие с моментами измерений, является построение по измеренным значениям интерполяционного многочлена, который будет являться аналитическим (приближенным) представлением поведения функции $i(t)$, а затем выбор для данного момента времени 02:20 соответствующего ему значения тока $i\,(t = 02:20)$. После такого введения, дающего мотивационную установку к изучению теоретического материала, уже можно вводить в рассмотрение интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, рассматривать сплайн-интерполяцию [6] и т.д.

Представленные выше примеры иллюстрируют плодотворность предлагаемого нами подхода к изучению абстрактного, с точки зрения обучающихся по вполне конкретным инженерным специальностям, математического материала в плане мотивации их интереса к изучаемым вопросам, важность которых в инженерной практике обоснована преподавателем.

В заключение, сформулируем основные положения.

Преподавать высшую математику и ее вычислительных аспекты при обучении будущих технических специалистов-инженеров следует, постоянно иллюстрируя необходимость изучения соответствующих разделов конкретными примерами применения математического аппарата к решению практических задач, относящихся к их будущей специальности. Естественно, реализация такого подхода возможна лишь в случае, когда преподаватель, ведущий занятия по соответствующим математическим дисциплинам, сам является в необходимой степени компетентным в предметной области, к которой относится направление подготовки тех, кого он обучает. Поскольку довольно трудно ожидать этого от специалистов в области «чистой» математики, работающих на «математических» кафедрах (высшей математики, вычислительной математики и пр.), наилучший с нашей точки зрения вариант – это ведение соответствующих математических дисциплин преподавателями профильных кафедр, обладающими необходимыми компетенциями в области математики и ее приложений в инженерной практике.

С другой стороны, при изучении специальных дисциплин преподаватели, ведущие эти занятия, должны соответствующим образом профессионально освещать в своих выкладках математические аспекты предметного специального материала и апеллировать к соответствующим разделам математических дисциплин. Это, естественно, требует хорошей математической подготовки преподавательского состава специальных кафедр.

Предлагаемый нами подход, основанный на использовании перколяционной модели в обучении высшей математики и ее вычислительных разделов, во многом отвечающий на извечный (высказываемый явно или неявно) вопрос обучаемых «зачем нам, будущим специалистам-инженерам, это нужно?», позволяет повысить их мотивацию и пробудить интерес к изучению математики.

С философской точки зрения нашу концепцию перколяционного подхода в преподавании следует трактовать, как реализацию принципа дополнительности: в обучении будущих специалистов-инженеров не может быть математики вообще, в отрыве от специальных дисциплин соответствующего направления подготовки, как не может быть и отдельных специальных инженерных дисциплин в отрыве от математики.

Источники

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. 831 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1981, т. 1.– 687 с.; 1981, т. 2.– 584 с.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Учебник. 6-е изд. – М.: Физматлит, 2001. 591 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1. – М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. 472 с.
5. Белашов В.Ю. Математические методы моделирования физических процессов. – Казань: КГЭУ, 2004. 128 с.
6. Белашов В.Ю., Чернова Н.М. Эффективные алгоритмы и программы вычислительной математики. – Магадан: СВКНИИ ДВО РАН, 1977. 160 с.

BELASHOV V.YU.

HIGER MATHEMATICS IN ENGINEERING EDUCATION: PERCOLATION MODEL OF TEACHING

Annotation. A percolation approach (the model), as perspective technology in teaching of higher mathematics and its computing aspects at education process of the future technical experts-engineers on the examples of its such sections, as the mathematical analysis, linear algebra and numerical methods is offered. Thus the principle of mutual "infiltration" (percolation) of the basic concepts and the mathematical technique, and of the subject areas corresponding to a profile of education of the future engineers is realized, that objectively promotes to the best understanding the mathematics, and corresponding special engineering disciplines and raises motivation to studying higher mathematics.

Keywords: higher mathematics, numerical methods, perspective technology of education, percolation model, engineering education, motivation