УДК 517.54

ОБОБЩЕННЫЕ РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ И УНИФОРМИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ТОРОВ[1]

С. Р. Насыров (Казань, РФ)
snasyrov@kpfu.ru

1. Поверхности рода нуль. В [1] нами был предложен приближенный метод нахождения полинома, униформизирующего заданную риманову поверхность S_1 над сферой Римана. Суть его состоит в том, что рассматривается гладкое однопараметрическое семейство $S(t)$, $1 \le t \le 1$, n-листных компактных римановых поверхностей рода нуль, которые имеют над бесконечно удаленной точкой точку ветвления порядка $(n-1)$ такое, что: 1) для поверхности $S(0)$ известен униформизирующий ее полином P_0; 2) $S(1) = S_1$; 3) кратности точек ветвления, расположенных над конечной частью плоскости, равны заданным натуральным числам m_j, $1 \le j \le N$, где N и m_j не зависят от t (следовательно они определяются однозначно по поверхности S_1). Такое семейство может быть построено чисто топологическими методами.

Из условия 3) следует, что полиномы $P_t(z) = P(z,t)$, униформизирующие $S(t)$, имеют вид

$$P_t(z) = n\int_0^z \prod_{l=1}^{N-1} (\xi - a_l(t))^{m_l}\, d\xi + P(0,t), \tag{1}$$

где $a_l(t)$ — их критические точки. В силу 1), мы можем определить критические точки полинома P_0; таким образом, можно считать, что значения

$$a_l(0) = a_l^0 \tag{2}$$

нам известны.

Отметим, что хотя $a_l(t)$, $0 < t \le 1$, неизвестны, в силу того, что поверхности $S(t)$ заданы, мы знаем проекции их точек ветвления на плоскость, т. е. зависимости $A_l(t) = P_t(a_j(t))$. В [1] выведена система дифференциальных уравнений для определения $a_l(t)$ по заданным $A_l(t)$. Без ограничения общности можно считать, что одна проекция одной из точек ветвления неподвижна, скажем, $A_{N-1}(t) = 0$ и $a_{N-1}(t) = 0$; этого легко добиться сдвигами. Таким образом, в (5) имеем $P(0,t) = 0$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00351).

Теорема 1 [1]. *Функции $a_l(t)$, $0 \le t \le 1$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{n\dot{a}_l}{a_l} = \frac{H_l^{(m_l)}(a_l)}{m_l!}\dot{A}_l + \sum_{k=1,k\neq l}^{N-2} \frac{G_{kl}^{(m_k-1)}(a_k)}{(m_k-1)!}\dot{A}_k, \quad 1 \le l \le N-2, \tag{3}$$

где

$$H_l(x) = \frac{1}{x\prod_{j=1,j\neq l}^{N-1}(x-a_j)^{m_j}}, \quad G_{kl}(x) = \frac{H_k(x)}{x-a_l}.$$

Как обычно, точка сверху означает дифференцирование по параметру t.

Из теоремы 1 следует, что для определения зависимостей $a_l(t)$ достаточно решить задачу Коши для системы (3) с начальными условиями (2). Значения $a_l(1)$ дадут критические точки полинома вида (1), униформизирующего S_1.

2. Поверхности рода один. Случай простых точек ветвления. Аналогичная задача может быть поставлена для римановых поверхностей рода один (комплексных торов). Как и в случае поверхностей рода нуль, будем рассматривать семейство n-листных римановых поверхностей $S(t)$ над сферой, имеющих точку ветвления максимального порядка $(n-1)$ над бесконечно удаленной точкой. Это семейство униформизируется эллиптическими функциями $f(z,t)$. Можно считать, что прообраз точки ветвления максимального порядка совпадает с началом координат и одна из точек ветвления располагается над началом координат; ее прообраз ниже обозначен через a_0.

Сначала опишем случай, когда остальные точки ветвления, за исключением описанной выше, — простые. Полученные результаты анонсированы в [2]. Функции $f(z,t)$ можно представить в виде

$$f(z,t) = c(t)\int_{a_0(t)}^{z} \frac{\prod\limits_{l=0}^{n}\sigma(\xi - a_l(t))}{\sigma^{n+1}(\xi)}\, d\xi, \tag{4}$$

где точки $a_0(t)$ попарно различны и $\sum_{k=0}^{n} a_k(t) = 0$. Здесь $\sigma(z)$ — σ-функция Вейерштрасса с периодами ω_1 и ω_2, которые зависят от параметра t. Применяя линейное преобразование в плоскости z, мы можем добиться, чтобы один из периодов, скажем, ω_1 не зависел от параметра t. Для простоты будем считать, что $\omega_1 \equiv 1$.

При выводе системы дифференциальных уравнений для определения параметров в (4) нам потребуется выражение для частной производной функции $\ln\sigma(z) = \ln\sigma(z;\omega_1,\omega_2)$ по периоду ω_2. Для полноты картины приведем также выражение для производной по ω_1, причем для произвольных периодов ω_1 и ω_2. При этом, для простоты обозначений, как это принято в теории эллиптических функций, мы не будем указывать явно их зависимость от периодов ω_1 и ω_2.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$\frac{\partial \ln\sigma(z)}{\partial\omega_1} = -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\,\omega_2[\mathfrak{P}(z) - (\zeta(z))^2] + \eta_2(z\zeta(z)-1) + \omega_2\frac{g_2}{24}\,z^2\right],$$

$$\frac{\partial \ln\sigma(z)}{\partial\omega_2} = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\,\omega_1[\mathfrak{P}(z) - (\zeta(z))^2] + \eta_1(z\zeta(z)-1) - \omega_1\frac{g_2}{24}\,z^2\right].$$

Здесь $\mathfrak{P}(z)$ и $\zeta(z)$ — $\mathfrak{P}$- и ζ-функции Вейерштрасса, $\eta_k = 2\zeta(\omega_k)/2$, $k = 1,\ 2$, $g_2 = 60\sum{}' \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^4}$ — инвариант Вейерштрасса.

Теорема 3 [2]. *Критические точки $a_l(t)$, сомножитель $c(t)$ в (4) и период $\omega_2(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\dot a_l = \sum_{k\neq l}\frac{\dot A_k}{D_k}\left[\zeta(a_k-a_l) - \zeta(a_k) + \eta_1 a_l\right] -$$

$$-\frac{\dot A_l}{D_l}\left(\sum_{s\neq l}\zeta(a_l-a_s) - \eta_1 a_l - n\zeta(a_l)\right),\quad 0\le l\le n,$$

$$\dot c/c = -\sum_{j=0}^{n}\Big[\zeta(a_j)\dot a_j + \dot\omega_2\frac{\partial\ln\sigma(a_j)}{\partial\omega_2}\Big] + n\sum_{k=1}^{n}\frac{\dot A_k}{D_k}\,[\mathfrak{P}(a_k)+\eta_1], \tag{5}$$

$$\dot\omega_2(t) = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\frac{\dot A_j}{D_j}\,,\quad \text{где}\quad D_k = c\,\frac{\prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}\sigma(a_k-a_j)}{\sigma^{n+1}(a_k)}\,.$$

Рассмотрены численные примеры, показывающие, что путем решения задачи Коши для системы (5), описанной в теореме 3, можно быстро и с очень хорошей точностью определять параметры функций, униформизирующих заданные комплексные торы над сферой Римана с простыми точками ветвления.

3. Поверхности рода один. Случай кратных точек ветвления. Теперь рассмотрим случай точек ветвления произвольной кратности. Вместо (4) имеем следующее представление для униформизирующих функций:

$$f(z,t) = c(t)\int_{\alpha_0(t)}^{z} \frac{\prod\limits_{j=0}^{N} \sigma(\xi - \alpha_j(t))^{m_j}}{\sigma^{n+1}(\xi)}\, d\xi, \tag{6}$$

где $\sum_{j=0}^{N} m_j = n+1$.

Как и в случае поверхностей рода нуль [1], можно вывести систему дифференциальных уравнений для этого случая, осуществляя предельный в системе (5) для параметров с простыми точками ветвления. Для этого рассмотрим вместо (6) представление (4) и осуществим в нем предельный переход при

$$a_0, \ldots, a_{m_1-1} \to \alpha_0;\; a_{m_1}, \ldots, a_{m_1+m_2-1} \to \alpha_1; \ldots$$

$$\ldots; a_{n-m_N+1}, \ldots, a_n \to \alpha_N.$$

Точно такой же предельный переход делаем в правых частях системы (5), считая, что $A_0 = \ldots = A_{m_1-1}$, $A_{m_1} = \ldots = A_{m_1+m_2-1}, \ldots$ $\ldots, A_{n-m_N+1} = \ldots = A_n$. В силу теоремы 3 параметры в представлении (4) удовлетворяют (5). Заметим, что специфика системы (5) такова, что в ее правые части входят выражения, которые можно выразить через обобщенные разделенные разности вида

$$\Delta_k(\varphi;\sigma;x_1,\ldots,x_{k+1}) := \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi(x_j)}{\prod_{s\neq j}\sigma(x_j - x_s)}$$

и их частные производные; здесь $x_1, \ldots, x_{k+1}$ совпадают с наборами тех точек a_k, которые неограниченно сближаются при описанном выше предельном переходе, в качестве φ выступают вполне определенные функции, определяемые системой (5). В связи с этим, представляет интерес изучить вопрос о пределах обобщенных разделенных разностей

$$\Delta_k(\varphi;g;x_1,\ldots,x_{k+1}) := \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi(x_j)}{\prod_{s\neq j} g(x_j - x_s)},$$

при $x_1,\ x_2,\ldots,x_{k+1}\to x$, где функция g достаточно произвольна. Отметим, что в случае $g(x)=x$ обобщенные разделенные разности $\Delta_k(\varphi;g;x_1,\ldots,x_{k+1})$ совпадают с обычными и для C^k-гладких функций φ предел их при $x_1,\ x_2,\ldots,x_{k+1}\to x$ равен $\varphi^k(x)/k!$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi(\tau)$ — некоторая функция, определенная и k раз непрерывно дифференцируемая в окрестности точки x. Пусть $g(\tau)$ — нечетная k раз непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля функция, причем $g(\tau)\sim\tau$, $\tau\to 0$. Тогда обобщенные разделенные разности $\Delta_k(\varphi;g;x_1,\ldots,x_{k+1})$ при $x_1,\ldots,x_{k+1}\to x$, стремятся к*

$$\frac{1}{k!}\,\varphi^{(k,g)}(x),\quad \text{где}\quad \varphi^{(k,g)}(x):=\frac{d^k}{d\tau^k}\left(\frac{\tau^{k+1}\varphi(x+\tau)}{g(\tau)^{k+1}}\right)\bigg|_{\tau=0}.$$

Если функции φ и g, к тому же, $(k+1)$ раз непрерывно дифференцируемы в окрестностях точки x и точки 0 соответственно, то предел частной производной $\partial\Delta_k(\varphi;g;x_1,\ldots,x_{k+1})/\partial x_1$ при $x_1,\ldots,x_{k+1}\to x$ равен

$$\frac{1}{(k+1)!}\,\varphi^{(k+1,g)}(x)+\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left(\frac{\tau^k(g'(\tau)-1)\varphi(x+\tau)}{g(\tau)^{k+2}}\right)\bigg|_{\tau=0}.$$

Значения производных при $\tau=0$ понимаются как пределы этих производных при $\tau\to 0$.

Теорема 4 позволяет в достаточно компактном виде записать правые части искомой системы дифференциальных уравнений для определения параметров в (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Насыров С. Р.* Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность // Матем. заметки. 2012. Т. 91(4). С. 597–607.

2. *Насыров С. Р.* Однопараметрические семейства многолистных функций и римановых поверхностей // Совр. методы теории функций и смежные проблемы. Матер. межд. конф. Воронежская зимняя матем. школа (27 января – 2 февраля 2015 г.). Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2015. С. 83–85.