Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тульский государственный университет»

ISSN 2071-6176

ИЗВЕСТИЯ
ТУЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Естественные науки

Выпуск 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТулГУ
ТУЛА 2012

УДК 50 ISSN 2071-6176

Известия ТулГУ. **Естественные науки.** Вып. 2. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. — 310 с.

В выпуске опубликованы оригинальные статьи по актуальным проблемам математики, механики, информатики, физики, химии, биологии.

Материалы предназначены для научных работников, преподавателей вузов, студентов и аспирантов, специализирующихся в области естественных наук.

Подписной индекс 27845
по Объединенному каталогу «Пресса России»

«Известия ТулГУ» входят в перечень ведущих научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых должны быть опубликованы научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук

Известия Тульского государственного университета
Естественные науки. 2012. Вып. 2. С. 72–82
Математика

УДК 517.956

Интегральное представление решения одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода

А. М. Нигмедзянова

Аннотация. Строится фундаментальное решение для многомерного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода. Дается интегральное представление решения уравнения.

Ключевые слова: многомерное вырождающееся эллиптическое уравнение, фундаментальное решение.

1. Фундаментальное решение

Пусть E_p^+ — полупространство $x_p > 0$ p-мерного евклидова пространства точек $x = (x', x_p), x' = (x_1, x_2, ..., x_{p-1})$, D-конечная область в E_p^+, ограниченная открытой частью Γ_0 гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью Γ.

В E_p^+ рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$L_m[U] = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + x_p^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0, \tag{1}$$

где $m > 4$, $p \geqslant 3$.

Уравнение (1) при помощи введения новых переменных $\widetilde{x}_i,\ i = \overline{1,p}$ и новой функции V по формулам

$$\widetilde{x}_j = x_j, j = \overline{1, p-1}, \quad \widetilde{x}_p = x_p^{-1}, \qquad U = \widetilde{x}_p^{-1} V$$

приводится к вырождающемуся эллиптическому уравнению первого рода

$$\widetilde{x}_p^{m-4} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \widetilde{x}_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \widetilde{x}_p^2} = 0. \tag{2}$$

Известно [2], что одно из фундаментальных решений этого уравнения с особенностью в точке $\widetilde{x}_0$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
\widetilde{\mathcal{E}}(\widetilde{x},\widetilde{x}_0)=a\left(\widetilde{\rho}_1^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\left[\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\beta-\frac{p-2}{2}\right)}F\left(\beta,\frac{p-2}{2}+\beta,\frac{p}{2};\widetilde{\sigma}\right)+\right.\\
\left.+\widetilde{\sigma}^{-\frac{p-2}{2}}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}F\left(\beta,\beta-\frac{p-2}{2},2-\frac{p}{2};\widetilde{\sigma}\right)\right]=\\
=a\left(\widetilde{\rho}_1^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\left[\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\beta-\frac{p-2}{2}\right)}F\left(\beta,\frac{p-2}{2}+\beta,\frac{p}{2};\widetilde{\sigma}\right)+\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\times\right.\\
\left.\times\left(\frac{\beta\left(\beta-\frac{p-2}{2}\right)}{2-\frac{p}{2}}\widetilde{\sigma}^{2-\frac{p}{2}}+\frac{1}{2!}\frac{\beta(1+\beta)\left(\beta-\frac{p-2}{2}\right)\left(\beta-\frac{p-2}{2}+1\right)}{\left(2-\frac{p}{2}\right)\left(1-\frac{p}{2}\right)}\widetilde{\sigma}^{3-\frac{p}{2}}+\ldots\right)\right]+\\
+a\widetilde{\rho}^{2-p}\widetilde{\rho}_1^{-2\beta}\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)},
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где

$$
\widetilde{\sigma}=\frac{\widetilde{\rho}^2}{\widetilde{\rho}_1^2},\quad \beta=\frac{m-4}{2(m-2)},\quad \left.\begin{matrix}\widetilde{\rho}^2\\ \widetilde{\rho}_1^2\end{matrix}\right\}=\sum_{j=1}^{p-1}(\widetilde{x}_j-\widetilde{x}_{j_0})^2+\frac{4}{(m-2)^2}\left(\widetilde{x}_p^{\frac{m-2}{2}}\mp\widetilde{x}_{p_0}^{\frac{m-2}{2}}\right)^2. \tag{4}
$$

Так как $0\leqslant\widetilde{\sigma}\leqslant 1$, то гипергеометрические функции определены для всех $\widetilde{x}\in \mathrm{E}_p^+$ и, следовательно, фундаментальное решение (3) с особенностью в точке $\widetilde{x}_0$ имеет степенную особенность вида $\widetilde{\rho}^{2-p}$.

Если в уравнении (2) и в формулах (3), (4) перейти к переменной x, то имеем

$$
\begin{gathered}
\mathcal{E}(x,x_0)=a\left(\frac{m-2}{2}\right)^{\frac{4}{m-2}}(x_px_{p_0})\left(\rho_1^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\times\\
\times\left[\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\beta-\frac{p-2}{2}\right)}F\left(\beta,\frac{p-2}{2}+\beta,\frac{p}{2};\sigma\right)+\right.\\
\left.+\sigma^{-\frac{p-2}{2}}\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}F\left(\beta,\beta-\frac{p-2}{2},2-\frac{p}{2};\sigma\right)\right],
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где

$$
\sigma=\frac{\rho^2}{\rho_1^2},\quad \beta=\frac{m-4}{2(m-2)},\quad \left.\begin{matrix}\rho^2\\ \rho_1^2\end{matrix}\right\}=\sum_{j=1}^{p-1}(x_j-x_{j_0})^2+\frac{4}{(2-m)^2}\left(x_p^{\frac{2-m}{2}}\mp x_{p_0}^{\frac{2-m}{2}}\right)^2.
$$

С помощью ряда Гаусса, разложения функций $\left(1+\frac{(2-m)^2\rho^2}{16\,(x_p x_{p_0})^{\frac{2-m}{2}}}\right)^{-\beta}$ при малых значениях ρ в степенной ряд фундаментальное решение (5) запишем в виде

$$\mathcal{E}(x,x_0)=\widetilde{\mathcal{E}}(x,x_0)+\mathcal{E}^*(x,x_0), \tag{6}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{E}}(x,x_0)=a\,\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\,\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}}{4}\,(x_p x_{p_0})^{\frac{m}{4}}\left(\rho^2\right)^{-\frac{p-2}{2}},$$

$\mathcal{E}^*(x,x_0)$ — регулярная часть фундаментального решения $\mathcal{E}(x,x_0)$.

Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{E}(\xi,x)=O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-1}{2}}\right) \quad \text{при} \quad x_p\to 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}(\xi,x)}{\partial x_p}=O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-1}{2}-1}\right) \quad \text{при} \quad x_p\to 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}(\xi,x)}{\partial x_p}=O\left(\xi_p^{(m-2)\frac{p-1}{2}}\right) \quad \text{при} \quad \xi_p\to 0,$$

$$A_m[\mathcal{E}(\xi,x)]=O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-1}{2}-2}\right) \quad \text{при} \quad x_p\to 0,$$

$$\mathcal{E}(x,x_0)=O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\right) \quad \text{при} \quad r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}\to\infty,$$

$$A_m[\mathcal{E}(x,x_0)]=O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p}{2}+\beta\right)}\right) \quad \text{при} \quad r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}\to\infty,$$

где $\rho_0^2=\sum\limits_{j=1}^{p-1}x_j^2+\frac{4}{(2-m)^2}x_p^{2-m}$,

$$A_m[\mathcal{E}(x,x_0)]=x_p^{-m}\sum_{j=1}^{p-1}\cos(n,x_j)\,\frac{\partial\mathcal{E}(x,x_0)}{\partial x_j}+\cos(n,x_p)\,\frac{\partial\mathcal{E}(x,x_0)}{\partial x_p}$$

— конормальная производная.

2. Формулы Грина

Обозначим через $C_m(\overline{D})$ множество функций $f(x)$, непрерывных в $\overline{D}$ и удовлетворяющих условию $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_p}=O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-1}{2}-1}\right)$ при $x_p\to 0$. Через $C_m(\Gamma)$ обозначим множество функций $\varphi(\xi)$ класса $C(\Gamma)$, удовлетворяющих условию $\dfrac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi_p}=O\left(\xi_p^{(m-2)\frac{p-1}{2}-1}\right)$ при $\xi_p\to 0$.

Пусть функции $U,V\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})\cap C_m(\overline{D})$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что имеет место тождество

$$VL_m[U]+\left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j}+x_p^m\frac{\partial V}{\partial x_p}\frac{\partial U}{\partial x_p}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(V\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)+x_p^m\frac{\partial}{\partial x_p}\left(V\frac{\partial U}{\partial x_p}\right). \qquad (7)$$

Умножая обе части тождества (7) на x_p^{-m} , интегрируя по области D и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\int\limits_D VL_m[U]x_p^{-m}dx+\int\limits_D\left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j}+x_p^m\frac{\partial V}{\partial x_p}\frac{\partial U}{\partial x_p}\right)x_p^{-m}dx=\int\limits_\Gamma VA_m[U]d\Gamma, \qquad (8)$$

где $A_m[U]=x_p^{-m}\sum\limits_{j=1}^{p-1}\cos(n,x_j)\frac{\partial U}{\partial x_j}+\cos(n,x_p)\frac{\partial U}{\partial x_p}$ — конормальная производная, n - внешняя нормаль к Γ.

Формула (8) называется первой формулой Грина для оператора L_m.

Меняя местами U и V в формуле (8), имеем

$$\int\limits_D UL_m[V]x_p^{-m}dx+\int\limits_D\left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_j}+x_p^m\frac{\partial U}{\partial x_p}\frac{\partial V}{\partial x_p}\right)x_p^{-m}dx=\int\limits_\Gamma UA_m[V]d\Gamma.$$

Вычитая это равенство из (8), получаем

$$\int\limits_D [VL_m[U]-UL_m[V]]x_p^{-m}dx=\int\limits_\Gamma [VA_m[U]-UA_m[V]]\,d\Gamma. \qquad (9)$$

Формула (9) называется второй формулой Грина для оператора L_m.

3. Интегральное представление

Найдем теперь интегральное представление решения уравнения (1) в области D .

Пусть $U(x)\in C_m(\overline{D})\cap C^1(\overline{D})$ решение уравнения (1) в области D .

Зададим в области D произвольную точку x_0. Вырежем эту точку шаром $Q_{x_0\varepsilon}$. Радиус ε возьмем столь малым, чтобы шар $Q_{x_0\varepsilon}$ целиком находился внутри области D. В области $D_\varepsilon=D\setminus\overline{Q}_{x_0\varepsilon}$ фундаментальное решение $\mathcal{E}(x,x_0)$ уравнения (1) (т.е. (6)) принадлежит классу $C_m(\overline{D}_\varepsilon)\bigcap C^1(\overline{D}_\varepsilon)$.

Применяя к функциям $U(x)$ и $\mathcal{E}(x,x_0)$ в области D_ε вторую формулу Грина для оператора L_m, получаем

$$\int\limits_{D_\varepsilon}[\mathcal{E}(x,x_0)L_m[U(x)]-U(x)L_m[\mathcal{E}(x,x_0)]]x_p^{-m}dx=$$
$$=\int\limits_{\Gamma}[\mathcal{E}(x,x_0)A_m[U(x)]-U(x)A_m[\mathcal{E}(x,x_0)]]d\Gamma+$$
$$+\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}[-\mathcal{E}(x,x_0)A_m[U(x)]+U(x)A_m[\mathcal{E}(x,x_0)]]dS_{x_0\varepsilon}.$$

Учитывая, что $L_m[\mathcal{E}(x,x_0)]=0$ и $L_m[U(x)]=0$ в D_ε, имеем

$$\int\limits_{\Gamma}[\mathcal{E}(x,x_0)A_m[U(x)]-U(x)A_m[\mathcal{E}(x,x_0)]]d\Gamma=$$
$$=\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}[\mathcal{E}(x,x_0)A_m[U(x)]-U(x)A_m[\mathcal{E}(x,x_0)]]dS_{x_0\varepsilon}=J_\varepsilon+I'_\varepsilon+I''_\varepsilon, \tag{10}$$

где A_m — внешняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$,

$$J_\varepsilon=\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}[\mathcal{E}^*(x,x_0)A_m[U(x)]-U(x)A_m[\mathcal{E}^*(x,x_0)]]dS_{x_0\varepsilon},$$

$$I'_\varepsilon=\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}\widetilde{\mathcal{E}}(x,x_0)A_m[U(x)]dS_{x_0\varepsilon},\quad I''_\varepsilon=-\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}U(x)A_m[\widetilde{\mathcal{E}}(x,x_0)]dS_{x_0\varepsilon}.$$

Вычислим пределы при $\varepsilon\to 0$ этих трех интегралов. Нетрудно проверить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}I'_\varepsilon=0. \tag{11}$$

Вычислим предел третьего интеграла

$$I''_\varepsilon=-\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}U(x)A_m[\widetilde{\mathcal{E}}(x,x_0)]dS_{x_0\varepsilon}=$$
$$=-a\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}U(x)A_m[x_p^{\frac{m}{4}}\rho^{-(p-2)}]dS_{x_0\varepsilon}=$$
$$=\mathcal{J}'_\varepsilon+\mathcal{J}''_\varepsilon,$$

где

$$\mathcal{J}'_\varepsilon = -a\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\int\limits_{S_{x0\varepsilon}} U(x)\rho^{-(p-2)}A_m[x_p^{\frac{m}{4}}]dS_{x0\varepsilon},$$

$$\mathcal{J}''_\varepsilon = -a\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\int\limits_{S_{x0\varepsilon}} U(x)x_p^{\frac{m}{4}}A_m[\rho^{-(p-2)}]dS_{x0\varepsilon}.$$

Ясно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{J}'_{1\varepsilon} = 0. \qquad (12)$$

Вычислим предел интеграла

$$\mathcal{J}''_\varepsilon = -a\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\int\limits_{S_{x0\varepsilon}} U(x)x_p^{\frac{m}{4}}A_m[\rho^{-(p-2)}]dS_{x0\varepsilon} =$$

$$= a(p-2)\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\beta\right)}\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\int\limits_{S_{x0\varepsilon}} U(x)x_p^{\frac{m}{4}}\rho^{-(p-1)}A_m[\rho]dS_{x0\varepsilon} =$$

$$= a(p-2)\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\times$$

$$\times\int\limits_{S_{x0\varepsilon}} U(x)x_p^{\frac{m}{4}}\rho^{-(p-1)}\left[x_p^{-m}\sum_{j=1}^{p-1}\cos(n,x_j)\frac{\partial\rho}{\partial x_j}+\cos(n,x_p)\frac{\partial\rho}{\partial x_p}\right]dS_{x0\varepsilon}.$$

Так как поверхность $S_{x0\varepsilon}$ определяется уравнением

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i_0})^2} = \varepsilon,$$

то

$$\cos(n,x_i) = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_{i_0}}{r}, \quad i = \overline{1,p},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_{j0})}{\rho}, \quad j = \overline{1,p-1}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial x_p} = \frac{2}{2-m}\frac{\left(x_p^{1-\frac{m}{2}} - x_{p0}^{1-\frac{m}{2}}\right)}{\rho}x_p^{-\frac{m}{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{J}''_\varepsilon = a(p-2)\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)\varepsilon}\,\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} U(x)\times$$
$$\times\ \frac{x_p^{-\frac{3m}{4}}}{\rho^p}\left[\sum_{j=1}^{p-1}(x_j-x_{j0})^2+\frac{2\ x_p^{\frac{m}{2}}}{2-m}\left(x_p^{\frac{2-m}{2}}-x_{p0}^{\frac{2-m}{2}}\right)(x_p-x_{p0})\right]dS_{x_0\varepsilon}.$$

В последнем равенстве, пользуясь формулой Лагранжа $f(x)-f(x_0)=$ $=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$, где $0<\theta<1$, получаем

$$\mathcal{J}''_\varepsilon = a(p-2)\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)\varepsilon}\,\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} U(x)\times$$
$$\times\ x_p^{-\frac{3m}{4}}\frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j-x_{j0})^2+(x_p)^{\frac{m}{2}}(x_{p0}+\theta(x_p-x_{p0}))^{-\frac{m}{2}}\,(x_p-x_{p0})^2\right]}{\left[\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j-x_{j0})^2+(x_{p0}+\theta(x_p-x_{p0}))^{-m}\,(x_p-x_{p0})^2\right]^{\frac{p}{2}}}dS_{x_0\varepsilon}.$$

Переходя в этом интеграле к обобщенной сферической системе координат [5] и учитывая то, что элемент поверхности сферы представляется в виде $dS_{x_0\varepsilon}=\varepsilon^{p-1}\sin\varphi_2\ldots\sin^{p-2}\varphi_{p-1}\ d\varphi_1\ldots d\varphi_{p-1}$, получаем

$$\mathcal{J}''_\varepsilon = a(p-2)\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)\varepsilon}\ \frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p0}^{\frac{m}{4}}}{4}\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}\ d\varphi_{p-2}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\pi}U(x_{1_0}+\varepsilon\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{p-1},\ldots,x_{p0}+\varepsilon\cos\varphi_{p-1})\ (x_{p0}+\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{-\frac{3m}{4}}\times$$
$$\times\ \frac{\varepsilon^2\sin^2\varphi_{p-1}+(x_{p0}+\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{\frac{m}{2}}(x_{p0}+\theta\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{-\frac{m}{2}}\varepsilon^2\cos^2\varphi_{p-1}}{\left(\varepsilon^2\sin^2\varphi_{p-1}+(x_{p0}+\theta\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{-m}\varepsilon^2\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}}\times$$
$$\times\,\varepsilon^{p-1}\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}.$$

Сократив на ε^{p+1} и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\mathcal{J}'' = a(p-2)\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\;\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p_0}^{\frac{m}{4}}}{4}U(x_0)\;x_{p_0}^{-\frac{3m}{4}}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} d\varphi_1\ldots\int_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}\;d\varphi_{p-2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^{-m}\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}},$$

где $\mathcal{J}'' = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{J}''_{\varepsilon}$.

Учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}\quad d\varphi_{p-2} = \frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}$, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'' = a(p-2)\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}}{4}\;U(x_0)\times\\ \times\frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^{-m}\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{p/2}}.\end{aligned}\tag{13}$$

Преобразуем последний интеграл в (13):

$$I = \int_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^{-m}\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^{-m}\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}} = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\sin^{p}\varphi_{p-1}\left(1+x_{p_0}^{-m}\operatorname{ctg}^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}} =$$

$$= -2\int_0^{\pi/2}\frac{d(\operatorname{ctg}\varphi_{p-1})}{\left(1+\left(x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{ctg}\varphi_{p-1}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}}} = -2\;x_{p_0}^{\frac{m}{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{d(x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{ctg}\varphi_{p-1})}{\left(1+\left(x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{ctg}\varphi_{p-1}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}}},$$

отсюда после замены

$$\begin{aligned}&x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{ctg}\varphi_{p-1} = t,\\ &\varphi_{p-1} = 0,\quad t=\infty,\\ &\varphi_{p-1} = \frac{\pi}{2},\quad t = 0\end{aligned}$$

получаем

$$I = -2x_{p_0}^{\frac{m}{2}}\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{p}{2}}} = 2x_{p_0}^{\frac{m}{2}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

С помощью известной формулы

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{(p+qx^\nu)^{n+1}} = \frac{1}{\nu p^{n+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma(n+1)}, \quad 0<\frac{\mu}{\nu}<n+1,$$

имеем

$$I = x_{p_0}^{\frac{m}{2}} \; \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Подставляя полученное выражение в (13), получаем

$$\mathcal{J}'' = \; a(p-2)\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}}{4}\; U(x_0)\frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}x_{p_0}^{\frac{m}{2}} \; \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} =$$

$$= a(p-2)\frac{(2-m)^{\frac{m}{m-2}}}{4}\; \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}\; U(x_0)\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Если положить

$$a = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}+\beta\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}\;\Gamma(2\beta)\;(2-m)^{\frac{m}{m-2}}}, \tag{14}$$

то получим

$$\mathcal{J}'' = \; U(x_0). \tag{15}$$

Значит, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (10), с учетом (11), (12), (14), (15), получим

$$\int_\Gamma [\mathcal{E}(x,x_0)A_m[U(x)] - U(x)A_m[\mathcal{E}(x,x_0)]]d\Gamma = U(x_0).$$

Таким образом, для всякой функции $U(x)$, удовлетворяющей условиям:

a). $U(x) \in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})\cap C_m(\overline{D})$,
b). $L_m(U(x)) = 0, \quad x\in D$

и для любой точки $x_0 \in D$ справедливо интегральное представление

$$U(x_0) = \int_\Gamma [\mathcal{E}(x,x_0)A_m[U(x)] - U(x)A_m[\mathcal{E}(x,x_0)]]d\Gamma. \tag{16}$$

При этом фундаментальное решение уравнения (1) представляется в виде

$$\mathcal{E}(x,x_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{p}{2}}}\,(x_p x_{p_0})^{\frac{m}{4}}\;(\rho^2)^{-\frac{p-2}{2}} + \mathcal{E}^*(x,x_0).$$

4. Свойства решений уравнения

Из интегрального представления (16) вытекают следующие свойства решения уравнения (1):

1^0. Существует решение $U(x)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_p} = O\left(x_p^{(m-2)\frac{p-1}{2}-1}\right) \quad \text{при} \quad x_p \to 0.$$

2^0. Существует решение $U(x)$ уравнения (1) в области $D_e = \mathrm{E}_p^+ \backslash \overline{D}$, удовлетворяющее условию

$$U(x) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m-4}{2(m-2)}\right)}\right) \text{при} \;\; r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2} \to \infty,$$

где $\rho_0^2 = \sum\limits_{j=1}^{p-1} x_j^2 + \frac{4}{(2-m)^2} x_p^{2-m}$.

3^0. Принцип максимума, вытекающий из интегрального представления (16), сформулируем в виде теоремы:

Теорема. *Если $U(x) \in C^2(D) \cap C_m(\overline{D})$ — решение уравнения* (1), *то функция $U(x)$ достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значения на границе* Γ, *если она тождественно не равна нулю.*

Доказательство. Пусть функция $U(x) \in C^2(D) \cap C_m(\overline{D})$ удовлетворяет уравнению (1) и достигает своего наибольшего положительного значения U_0 в некоторой внутренней точке $M_0(x_0)$ области D , т.е. существует δ — окрестность $Q_{x_0\ \delta}$ точки x_0 (шар), где $U(x) < U(x_0) = U_0$, при $x \neq = x_0$ и $U(x) > 0$.

Полагая в формуле (16) $\Gamma = \partial Q_{x_0\ \delta} = S_{x_0\ \delta}$, получаем

$$U(x_0) = \int\limits_{S_{x_0\delta}} \mathcal{E}(x, x_0) A_m[U(x)] dS_{x_0\delta} - \int\limits_{S_{x_0\delta}} U(x) A_m[\mathcal{E}(x, x_0)] dS_{x_0\delta} = I_{1\delta} + I_{2\delta}. \tag{17}$$

На $S_{x_0\delta}$ $\mathcal{E}(x, x_0) > 0$, $U(x) > 0$, $A_m[U(x)] < 0$ и $A_m[\mathcal{E}(x, x_0)] < 0$. Поэтому $I_{1\delta} < 0$ и $I_{2\delta} > 0$.

В силу вышесказанного при $\delta \to 0$ $I_{1\delta}$, возрастая, стремится к нулю, а $I_{2\delta}$, возрастая, стремится к U_0. Отсюда следует, что

$$I_{1\delta} < 0 \text{ и } I_{2\delta} < U_0. \tag{18}$$

Заменяя в правой части формулы (17) во втором интеграле $U(x)$ на U_0 и учитывая оценки (18), имеем $U_0 < I_{2\delta} < U_0$, т.е. $U_0 \neq U_0$.

Полученное противоречие доказывает справедливость первого утверждения теоремы. Второе утверждение доказывается переходом от U к $-U$. При этом наименьшее отрицательное значение переходит в наибольшее положительное значение.

Следствие. *Если функция* $U(x) \in C^2(D) \cap C_m(\overline{D})$ *— решение уравнения* (1), *то* $|U(x)| \leqslant \max\limits_{x_0 \in \Gamma} |U(x_0)|$, $x \in D$. *В частности, если* $U(x)|_\Gamma = 0$, *то* $U(x) \equiv 0$ *в* $\overline{D}$.

Список литературы

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Изд. 6-ое. СПб., М., Краснодар: Лань, 2003. 832 с.
2. *Нигмедзянова А.М.* О фундаментальном решении одного вырождающегося эллиптического уравнения // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. Второй Всероссийской науч. конф. Ч.3. Самара: СамГТУ, 2005. С.180–182.
3. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.
4. *Смирнов М.М.* Курс высшей математики. Т.3, Ч.2. М., 1957.
5. *Тиман А.Ф., Трофимов В.Н.* Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1966. 207 с.

Нигмедзянова Айгуль Махмутовна (aigmani@rambler.ru), к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Integrated representation of the solution of one multidimensional degenerating elliptic equation of the second king

A. M. Nigmedzianova

Abstract. The fundamental solution for the multidimensional degenerating elliptic equation of the second king is under construction. Integrated representation of the solution of the equation is given.

Keywords: multidimensional degenerating elliptic equation, fundamental solution.

Nigmedzianova Aigul (aigmani@rambler.ru), candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, department of higher mathematics and mathematical modelling, Lobachevsky Institute of mathematic and mechanic, Kazan (Volga Region) Federal University.

Поступила 03.06.2012