§5. КРАМЕРОВСКИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе будем рассматривать системы линейных уравнений, у которых количество неизвестных равно числу уравнений. В самом общем виде эта система может быть записана так:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned}
$$

.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов уравнений называется ***матрицей системы***. Будем предполагать, что

$$|A| \neq 0.$$

В этом случае систему уравнений называют ***крамеровской***.

.

Набор чисел $\underline{\underline{b_1, b_2, \ldots, b_n}}$ называют ***<u>столбцом правой части</u>*** (или просто ***<u>правой частью</u>***) системы

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \underline{\underline{b_1}},\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \underline{\underline{b_2}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= \underline{\underline{b_n}}.
\end{aligned}
$$

Если правая часть системы нулевая, т. е.

$$\underline{b_i = 0} \quad \text{для всех} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то система называется ***<u>однородной</u>***.

.

Однородная система уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

всегда имеет решение. Например, можно положить

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = 0.$$

Такое решение называют *тривиальным*.

.

Теорема. Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение.

.

<u>Доказательство.</u> Предположим противное. Тогда для некоторого набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, среди которых <u>по крайней мере одно не равно нулю</u>, справедливы равенства

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0,
\end{aligned}$$

т. е. столбцы матрицы A линейно зависимы, но по условию т–мы

$$|A| \neq 0.$$

Значит предположение о наличии нетривиального решения у однородной крамеровской системы неверно. $\square$

.

Теорема. При любой правой части крамеровская система не может иметь двух различных решений.

Доказательство. Предположим противное и пусть

$$x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1;$$

и

$$x_1^2,\ x_2^2,\ \ldots,\ x_n^2$$

представляют собой два различных решения системы, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \ldots + a_{nn}x_n^1 = b_n \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = b_n. \end{cases}$$

.

Положим

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \ \ldots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

и вычтем почленно одноименные уравнения систем

$$\begin{cases} \underline{a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 = b_1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{\underline{a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \ldots + a_{nn}x_n^1 = b_n}} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \underline{a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 = b_1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{\underline{a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = b_n.}} \end{cases}$$

.

В результате получим, что числа

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \ \ldots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

дают решение однородной системы

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{gathered}$$

Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение. Поэтому

$$x_1 = x_2 = \ \ldots \ = x_n = 0,$$

т. е. предположение о наличии двух различных решений неверно. $\square$

.

<u>Теорема.</u> Крамеровская система уравнений при любой правой части имеет решение.

.

<u>Доказательство.</u> **Построим решение системы**

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}
$$

опираясь на формулу

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

.

Будем разыскивать решение системы

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \underline{\underline{b_1}}, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \underline{\underline{b_2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \underline{\underline{b_n}}
\end{gathered}
$$

в виде

$$x_i = c_{i1}\underline{\underline{b_1}} + c_{i2}\underline{\underline{b_2}} + \cdots + c_{in}\underline{\underline{b_n}}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где коэффициенты c_{ij}, i, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, подлежат определению.

Подставим выражения

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \underline{c_{11}}b_1 + \underline{c_{12}}b_2 + \cdots + \underline{c_{1n}}b_n,\\
x_2 &= \underline{\underline{c_{21}}}b_1 + \underline{\underline{c_{22}}}b_2 + \cdots + \underline{\underline{c_{2n}}}b_n,\\
&\dots\\
x_n &= \underline{\underline{\underline{c_{n1}}}}b_1 + \underline{\underline{\underline{c_{n2}}}}b_2 + \cdots + \underline{\underline{\underline{c_{nn}}}}b_n
\end{aligned}
$$

в первое уравнение системы:

$$\underline{a_{11}}x_1 + \underline{\underline{a_{12}}}x_2 + \ldots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}}}}x_n = b_1.$$

Соберем слева коэффициенты при b_1, b_2, $\ldots$, b_n. Получим

$$
\begin{aligned}
&b_1(\underline{a_{11}c_{11}} + \underline{\underline{a_{12}c_{21}}} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{n1}}}})+\\
&\qquad + b_2(\underline{a_{11}c_{12}} + \underline{\underline{a_{12}c_{22}}} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{n2}}}}) + \cdots\\
&\qquad\qquad \cdots + b_n(\underline{a_{11}c_{1n}} + \underline{\underline{a_{12}c_{2n}}} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{nn}}}}) = b_1.
\end{aligned}
$$

Продолжим этот процесс и подставим выражения

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \dots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

во все уравнения системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Соберем слева коэффициенты при одинаковых b_i. Получим

$$b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \dots + a_{in}c_{n1}) + \cdots$$
$$\cdots + b_i(a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \dots + a_{in}c_{ni}) + \cdots$$
$$\cdots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \dots + a_{in}c_{nn}) = b_i,$$

где $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$.

.

Если выбрать c_{ik} так, чтобы выполнялись условия

$$a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots + a_{in}c_{nk} = \delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

то равенства

$$b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \cdots + a_{in}c_{n1}) +$$
$$\cdots + b_i(\underline{\underline{a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \cdots + a_{in}c_{ni}}}) + \cdots$$
$$\cdots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \cdots + a_{in}c_{nn}) = b_i,$$

где $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, **будут выполнены.**

Сравнивая соотношения

$$\underline{a_{i1}}c_{1k} + \underline{\underline{a_{i2}}}c_{2k} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{in}}}}c_{nk} = \delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

с формулой

$$\underline{a_{i1}}A_{k1} + \underline{\underline{a_{i2}}}A_{k2} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{in}}}}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

нетрудно заметить, что если положить

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

то требуемые условия будут выполнены.

.

Подставим выражения

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

в

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \cdots + c_{in}b_n, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Получим следующие формулы для решения системы:

$$x_i = \frac{(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n)}{|A|}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

.

Используя разложение определителя по столбцу, соотношения

$$x_i = \frac{(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n)}{|A|}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

можно переписать в более компактном виде:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Здесь $\Delta = |A|$, Δ_i — определитель, который получается, если заменить i-тый столбец определителя $|A|$ правой частью системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.$$

$\square$

.

Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

называют ***формулами Крамера***.

.

<u>Пример.</u> **Решим систему уравнений**

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -4,$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -1,$$

$$2x_2 - x_3 - 3x_4 = -3.$$

Эта система крамеровская, действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

.

Теперь для системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

вычислим определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 4.$$

.

Для той же системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

вычислим определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

.

Далее для системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

вычислим определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -8.$$

.

И наконец для системы

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\
x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4, \\
2x_1 + x_3 - x_4 &= -1, \\
2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3
\end{aligned}
$$

вычислим определитель

$$
\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.
$$

.

По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2,$$

$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1.$$

.

На практике формулы Крамера используются очень редко. Чаще всего для решения систем линейных алгебраических уравнений применяются различные варианты метода Гаусса.