Известия вузов. Математика
2013, №4, с. 61–73

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

С.Н. ТРОНИН, Р.Н. ТУКТАМЫШОВ

ОПЕРАДЫ ГИПЕРГРАФОВ

Аннотация. На множествах многомерных кубических матриц определяются два счетных семейства операд. В каждой операде одного из этих семейств определяется подоперада, элементы которой можно интерпретировать как некоторые гиперграфы. Показано, что эти подоперады являются Epi-операдами.

Ключевые слова: операда, вербальная категория, гиперграф.

УДК: 512.565

Введение

В данной работе продолжены исследования, начатые в [1] и [2]. Результаты, аналогичные полученным в [1] и [2] для графов, устанавливаются теперь для гиперграфов. Оказывается, что совокупности гиперграфов при некоторых условиях можно рассматривать как алгебраические объекты — операды. Выясняется также, что одна из операд гиперграфов обладает и более глубокой структурой, а именно, является Epi-операдой.

Содержание работы можно описать следующим образом. В разделе 1 напоминаются необходимые для понимания дальнейшего обозначения и сведения из теории операд. Обозначения и определения соответствуют работам первого автора [3]–[5]. В разделе 2 описываются два семейства операд на множестве объектов, которые можно назвать многомерными кубическими матрицами. Семейства "параметризованы" размером матриц: для каждого $n = 1, 2, \ldots$ определена операда, m-й компонентой которой являются n-мерные матрицы размера m (т. е. $\overbrace{m \times \cdots \times m}^{n}$-матрицы). В частности, для $n = 2$ — это всевозможные квадратные матрицы. Эти операды являются обобщениями операд квадратных матриц, введенных в [2]. Таким образом, определяются два счетных семейства операд, включающих как частные случаи операды, построенные в [2]. Квадратные матрицы при некоторых условиях можно интерпретировать как матрицы инцидентности графов. В нашей работе предлагается интерпретация некоторых многомерных кубических матриц как матриц инцидентности гиперграфов. В разделе 3 показывается, что при некоторых ограничениях на рассматриваемые гиперграфы операды гиперграфов, построенные в разделе 2, обладают структурой Epi-операд [3], [5]. Это также является обобщением результата, полученного ранее для графов [6].

Поступила 04.03.2012

Часть работы, проделанная первым автором, выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-00431а и гранта поддержки научных школ НШ-5383.2012.1.

Результаты данной работы анонсированы в [7]. В [8] сформулирован основной результат работы второго автора. В ней описываются многообразия алгебр над *Epi*-операдами гиперграфов из раздела 3. Частным случаем является результат, полученный в [6] для операды графов. Необходимо подчеркнуть, что во всех случаях, когда такие описания оказываются возможными, существенную роль играет структура *Epi*-операды. В частности, это оказалось так и в работе [9], где рассматривалась операда гиперграфов, отличающаяся от тех, которые изучаются в данной работе.

Разультаты из разделов 1 и 2 получены первым автором, теорема из раздела 3 доказана вторым автором.

1. Предварительные сведения

Напомним кратко основные определения из теории операд.

Операда — это семейство множеств $R = \{R(n) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$, снабженное семейством операций *операдной композиции*, определенных для всех возможных натуральных $m > 0$, $n_1, \dots, n_m$:

$$R(m) \times R(n_1) \times \cdots \times R(n_m) \longrightarrow R(n_1 + \cdots + n_m).$$

Если $\omega \in R(m)$, $\xi_i \in R(n_i)$, $1 \le i \le m$, то результат действия операдной композиции будет обозначаться через $\omega\xi_1 \dots \xi_m$.

Операдная композиция должна удовлетворять следующим условиям.

1) Ассоциативность. Для тех наборов элементов, для которых композиции существуют, имеет место равенство

$$(\omega\xi_1 \dots \xi_m)(\overline{\gamma}_1 \dots \overline{\gamma}_m) = \omega(\xi_1\overline{\gamma}_1) \dots (\xi_m\overline{\gamma}_m).$$

Здесь $\overline{\gamma}_i = \gamma_{i,1} \dots \gamma_{i,n_i}$.

2) Существование единицы. Существует элемент (*единица операды*) $\varepsilon \in R(1)$ такой, что для каждого $\omega \in R(m)$ должны выполняться соотношения $\omega\varepsilon \dots \varepsilon = \omega = \varepsilon\omega$.

Потребуется более общее понятие операды над вербальной категорией [3]. Сначала напомним, что такое вербальная категория.

Начнем со вспомогательных понятий. $FSet$ — категория с объектами $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ и морфизмами — всевозможными отображениями, переводящими 0 в 0 и только в него. Пусть P — подкатегория $FSet$ с теми же объектами, но с морфизмами — неубывающими отображениями. Неубывающее отображение $\alpha : [n] \to [m]$ можно отождествить с последовательностью $(n_1, \dots, n_m)$, где $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$.

Пусть $f : [k] \to [m]$ — морфизм из $FSet$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$ — неубывающее отображение. Определим морфизм $f^*\alpha$ категории $FSet$ из $[n_{f(1)} + \cdots + n_{f(k)}]$ в $[n_1 + \cdots + n_m] = [n]$, полагая его ограничение на каждый отрезок $[n_{f(1)} + \cdots + n_{f(j-1)} + 1, n_{f(1)} + \cdots + n_{f(j)}]$ равным однозначно определенной неубывающей биекции на отрезок

$$[n_1 + \cdots + n_{f(j)-1} + 1, n_1 + \cdots + n_{f(j)}].$$

Здесь предполагается, что если a, b — два натуральных числа, то отрезок $[a, b]$ — множество $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ при $a \le b$ и пустое множество при $a > b$.

Пусть $f_1 : [n_1] \to [m_1]$ и $f_2 : [n_2] \to [m_2]$ — морфизмы $FSet$. Определим морфизм $f = f_1 \sqcup f_2 : [n_1 + n_2] \to [m_1 + m_2]$, полагая $f(i) = f_1(i)$ при $1 \le i \le n_1$, и $f(n_1 + j) = m_2 + f_2(j)$ при $1 \le j \le n_2$.

Непустая подкатегория W категории $FSet$ с теми же объектами называется *вербальной* [3] при выполнении двух условий.

a) Если $f_1, \dots, f_n$ — морфизмы W, то и $f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_n$ — также морфизм W.

b) Если в приведенном выше определении морфизма $f^*\alpha$ морфизм f принадлежит вербальной категории W, то и $f^*\alpha$ также будет морфизмом W.

Основные примеры вербальных категорий таковы.

1. Сама категория $FSet$.
2. Категория WId, морфизмы которой — все тождественные отображения.
3. Категория Σ, морфизмы которой — все биективные отображения. Это минимальная по включению вербальная категория.
4. Категория Mon, морфизмы которой — все инъективные отображения. Это максимальная по включению вербальная категория.
5. Категория Epi, морфизмы которой — все сюръективные отображения. Это максимальная по включению вербальная категория.
6. Категория $P \cap Mon$ (морфизмы — все неубывающие инъективные отображения).

Категория P не содержится ни в какой вербальной категории, отличной от $FSet$. Можно построить не менее чем счетное семейство примеров вербальных категорий.

Пусть W — некоторая вербальная категория, и W — операда. Будем говорить, что R есть *операда над вербальной категорией* W или R есть W-*операда*, если для каждого морфизма $\sigma : [n] \to [m]$ из W определено отображение $R(n) \to R(m)$, действие которого обозначается так: $x \mapsto x\sigma$, причем выполняются условия $x(\sigma\tau) = (x\tau)\sigma$ и $x1_{[n]} = x$ для всех допустимых $x \in R(n)$ и морфизмов σ, τ из W. В дополнение к условиям 1) и 2) операдной композиции должны выполняться также еще два условия.

3) Если $\omega \in R(m)$, $\omega_i \in R(n_i)$, $f_i : [n_i] \to [m_i]$ — морфизмы категории W, $1 \le i \le m$, то имеет место равенство

$$\omega(\omega_1 f_1)\dots(\omega_m f_m) = (\omega\omega_1\dots\omega_m)(f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m).$$

4) Если $\omega \in R(k)$, $\omega_i \in R(n_i)$, $1 \le i \le m$, $f : [k] \to [m]$ является морфизмом W, $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, то имеет место тождество

$$(\omega f)\omega_1\dots\omega_m = (\omega\omega_{f(1)}\dots\omega_{f(k)})(f^*\alpha).$$

В следующем разделе будет необходима

Лемма. *Пусть* $f : [k] \to [l]$, $g : [m] \to [k]$ *— морфизмы категории* $FSet$, $\alpha = (n_1, \dots, n_l)$ *— морфизм категории* P. *Тогда выполняется тождество*

$$(fg)^*\alpha = (f^*\alpha)(g^*(\alpha f)).$$

Здесь $\alpha f = (n_{f(1)}, \dots, n_{f(k)})$. *В частности, если* $m = k = l$, f *и* g *— биекции,* $g = f^{-1}$, *то*

$$(f^*\alpha)^{-1} = (f^{-1})^*(\alpha f).$$

Доказательство производится непосредственной проверкой.

2. Операды многомерных кубических матриц

Пусть G — некоторое множество с выделенным элементом ε. Зафиксируем натуральное число $n \ge 1$. Начиная с этого места, будем полагать $[k] = \{1, \dots, k\}$. Это не приведет к каким-либо противоречиям. При $k > 0$ обозначим через $GM_n(k)$ множество отображений вида $A : [k]^n \to G$. При $k = 0$ положим $GM_n(0) = \{\vartheta\}$ — множество из одного элемента ϑ. Можно считать ϑ отображением одноэлементного множества из G в элемент ε.

Пусть $GM_n = \{GM(k) \mid k = 0, 1, \dots\}$. Введем на этом семействе структуру операды двумя способами. Определяются семейства отображений вида

$$GM_n(m) \times GM_n(k_1) \times \dots \times GM_n(k_m) \to GM_n(k_1 + \dots + k_m),$$

сопоставляющих последовательности $(A, B_1, \dots, B_m)$ элемент $AB_1 \dots B_m$. Здесь $A \in GM_n(m)$, $B_i \in GM_n(k_i)$, $1 \le i \le m$.

Разобьем множество $[k_1 + \dots + k_m]$ на m непересекающихся подмножеств $\mathbf{b}_i = [k_1 + \dots + k_{i-1} + 1, \dots, k_1 + \dots + k_{i-1} + k_i]$, $1 \le i \le m$. Если $j \in \mathbf{b}_i$, то $j = k_1 + \dots + k_{i-1} + \widetilde{j}$, где $\widetilde{j} \in [1, k_i]$. Соответствие $j \mapsto \widetilde{j}$ есть сохраняющая порядок биекция между $\mathbf{b}_i$ и $[1, k_i]$.

Первая операция композиции (будем называть ее *композицией* 1) определяется так:

$$AB_1 \dots B_m(j_1, \dots, j_n) = \begin{cases} B_i(\widetilde{j}_1, \dots, \widetilde{j}_n) & \text{при } k_i \neq 0 \text{ и } j_1, \dots, j_n \in \mathbf{b}_i; \\ A(i_1, \dots, i_n), & \text{если } j_1 \in \mathbf{b}_{i_1}, \dots, j_n \in \mathbf{b}_{i_n} \\ \quad \text{и среди } i_1, \dots, i_n \text{ есть хотя бы два различных.} \end{cases} \tag{1}$$

При этом естественно предполагать, что для всех m и для всех $A \in GM_n(m)$ имеет место равенство $A(i, \dots, i) = \varepsilon$ для всех i, $1 \le i \le m$. Определим отображение $E : [1] \to K$, полагая $E(1) = \varepsilon$.

Пусть теперь G — моноид с единицей ε и мультипликативно записываемой операцией умножения. Операция композиции, которую будем называть *композицией* 2, определяется так:

$$AB_1 \dots B_m(j_1, \dots, j_n) = \begin{cases} A(i, \dots, i)B_i(\widetilde{j}_1, \dots, \widetilde{j}_n) & \text{при } k_i \neq 0 \text{ и } j_1, \dots, j_n \in \mathbf{b}_i; \\ A(i_1, \dots, i_n), & \text{если } j_1 \in \mathbf{b}_{i_1}, \dots, \ j_n \in \mathbf{b}_{i_n} \\ \quad \text{и среди } i_1, \dots, i_n \text{ есть хотя бы два различных.} \end{cases} \tag{2}$$

Обозначения здесь те же самые, что и для композиции 1. Никаких условий на элементы GM_n в этом случае не налагается. Отображение E определяется так же, как и выше.

В дальнейшем (при доказательстве теоремы 1) условия $k_i \neq 0$ в композициях 1 и 2 будут подразумеваться, но для краткости не будут выписываться явно. Будем опускать дополнительные соответствующие проверки, которые не представляют трудностей, но занимают некоторое место.

Определим действие Σ_m на $GM_n(m)$ следующим образом:

$$A\sigma(j_1, \dots, j_m) = A(\sigma^{-1}(j_1), \dots, \sigma^{-1}(j_m)). \tag{3}$$

Здесь $A \in GM_n(m)$, $\sigma \in \Sigma_m$. Эквивалентное требование: $A\sigma(\sigma(j_1), \dots, \sigma(j_m)) = A(j_1, \dots, j_m)$. Легко убедиться, что $A(\sigma\tau) = (A\tau)\sigma$, если $\tau \in \Sigma_n$.

Теорема 1. 1) *Семейство GM_n с операцией композиции* 1 (1) *и действием симметрических групп* (3) *является Σ-операдой с единицей E.*

2) *Семейство GM_n с операцией композиции* 2 (2) *и действием симметрических групп* (3) *также является Σ-операдой с единицей E.*

Доказательство примерно одинаково для обеих композиций, поэтому достаточно привести подробное изложение лишь для случая композиции 1.

Проверим ассоциативность (1). Пусть $A \in GM_n(m)$, $B_i \in GM_n(k_i)$, $1 \le i \le m$, $\overline{B} = B_1 \dots B_m$, $C_{i,j} \in GM_n(l_{i,j})$, $1 \le j \le k_i$, $\overline{C}_i = C_{i,1} \dots C_{i,k_i}$.

Введем следующие обозначения. Положим $\mathbf{a}_i = [k_1 + \dots + k_{i-1} + 1, k_1 + \dots + k_{i-1} + k_i]$, $1 \le i \le m$, и пусть $k = k_1 + \dots + k_m$. Если $x \in \mathbf{a}_i$, то $x = \sum\limits_{s=1}^{i-1} k_s + \widetilde{x}$, где $\widetilde{x} \in [1, k_i]$. Ясно, что $[1, k] = \mathbf{a}_1 \cup \dots \cup \mathbf{a}_m$.

Пусть далее $l_i = l_{i,1} + \dots + l_{i,k_i}$ для всех i, $1 \le i \le m$, и $\mathbf{b}_i = [l_1 + \dots + l_{i-1} + 1, ..., l_1 + \dots + l_{i-1} + l_i]$. Если $y \in \mathbf{b}_i$, то $y = \sum\limits_{s=1}^{i-1} \sum\limits_{t=1}^{k_s} l_{s,t} + \hat{y}$, где $\hat{y} \in [1, l_i]$. Если $l = l_1 + \dots + l_m$, то $[1, l] = \mathbf{b}_1 \cup \dots \cup \mathbf{b}_m$.

Теперь пусть

$$\mathbf{c}_{i,j} = \Big[\sum_{s=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{k_s} l_{s,t} + \sum_{t=1}^{j-1} l_{i,t} + 1, \sum_{s=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{k_s} l_{s,t} + \sum_{t=1}^{j} l_{i,t}\Big],$$

где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k_i$. Очевидно, $\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_{i,1} \cup \dots \cup \mathbf{c}_{i,k_i}$. Если $z \in \mathbf{c}_{i,j}$, то

$$z = \sum_{s=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{k_s} l_{s,t} + \sum_{t=1}^{j-1} l_{i,t} + \widetilde{z},$$

где $\widetilde{z} \in [1, l_{i,j}]$.

Наконец, положим $\mathbf{d}_{i,j} = \Big[\sum\limits_{t=1}^{j-1} l_{i,t} + 1, \sum\limits_{t=1}^{j} l_{i,t}\Big]$. Тогда $[1, l_i] = \mathbf{d}_{i,1} \cup \dots \cup \mathbf{d}_{i,k_i}$, $\mathbf{d}_{i,j} \cong [1, l_{i,j}] \cong \mathbf{c}_{i,j}$, где под изоморфизмами подразумеваются однозначно определенные сохраняющие порядок биекции. Биекция $\mathbf{d}_{i,j} \cong [1, l_{i,j}]$ — это отображение $w \mapsto \widetilde{w}$, где $w = \sum\limits_{t=1}^{j-1} l_{i,t} + \widetilde{w}$, биекция $\mathbf{c}_{i,j} \cong [1, l_{i,j}]$ — это отображение $z \mapsto \widetilde{z}$. Отметим, что если $y \in \mathbf{c}_{i,j} \subseteq \mathbf{b}_i$, то определены $\widetilde{y} \in [1, l_{i,j}]$ и $\widehat{y} \in [1, l_i]$, причем фактически $\widehat{y} \in \mathbf{d}_{i,j}$, так что определено число $\widetilde{\widehat{y}} \in [1, l_{i,j}]$. Легко заметить, что $\widetilde{\widehat{y}} = \widetilde{y}$.

Если $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k_i$, то отображение $r(i,j) = \sum\limits_{s=1}^{i-1} k_s + j \in \mathbf{a}_i$ осуществляет биекцию между множествами $\{(i,1), \dots, (i,k_i)\}$ и $\mathbf{a}_i$. При этом, очевидно, $\widetilde{r(i,j)} = j$.

Будем вычислять значения $(A\overline{B})\overline{C}_1 \dots \overline{C}_m$ и $A(B_1\overline{C}_1) \dots (B_m\overline{C}_m)$ на произвольных аргументах вида $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где все α_i берутся из отрезка $\Big[1, \sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{k_s} l_{s,t}\Big] = [1, l]$.

По определению композиции 1 (1) будем иметь

$$(A\overline{B})\overline{C}_1 \dots \overline{C}_m(\overline{\alpha}) = \begin{cases} C_{i,j}(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n) & \text{при } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{c}_{i,j}; \\ A\overline{B}(r_1, \dots, r_n), & \text{если } \alpha_1 \in \mathbf{c}_{i_1,j_1},\ r_1 = r(i_1, j_1), \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad \alpha_n \in \mathbf{c}_{i_n,j_n},\ r_n = r(i_n, j_n) \\ \quad \text{и среди } r_1, \dots, r_n \text{ есть хотя бы два различных.} \end{cases}$$

Заметим, что $r_1, \dots, r_n \in [1, k]$. Следовательно, согласно (1) получим

$$AB_1 \dots B_m(r_1, \dots, r_n) = \begin{cases} B_s(\widetilde{r}_1, \dots, \widetilde{r}_n), & \text{если } r_1, \dots, r_n \in \mathbf{a}_s; \\ A(v_1, \dots, v_n), & \text{если } r_1 \in \mathbf{a}_{v_1}, \dots, r_n \in \mathbf{a}_{v_n}, \\ \quad \text{и среди } v_1, \dots, v_n \text{ есть хотя бы два различных.} \end{cases}$$

В конечном итоге

$$(A\overline{B})\overline{C}_1\dots\overline{C}_m(\overline{\alpha}) = \begin{cases} C_{i,j}(\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_n) \quad \text{при } \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{c}_{i,j}; \\ \quad \text{иначе, если } \alpha_1 \in \mathbf{c}_{i_1,j_1}, \ \ r_1 = r(i_1,j_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n \in \mathbf{c}_{i_n,j_n}, \ \ r_n = r(i_n,j_n) \quad \text{и среди } r_1,\dots,r_n \\ \quad \text{есть хотя бы два различных, то} \\ B_s(\widetilde{r}_1,\dots,\widetilde{r}_n), \quad \text{если } r_1,\dots,r_n \in \mathbf{a}_s; \\ A(v_1,\dots,v_n), \quad \text{если } r_1 \in \mathbf{a}_{v_1},\dots,r_n \in \mathbf{a}_{v_n} \\ \quad \text{и среди } v_1,\dots,v_n \text{ есть хотя бы два различных.} \end{cases} \tag{4}$$

Вычисляя аналогичным образом другую часть предполагаемого равенства, получим

$$A(B_1\overline{C}_1)\dots(B_m\overline{C}_m)(\overline{\alpha}) = \begin{cases} C_{i,j}(\widetilde{\widehat{\alpha}_1},\dots,\widetilde{\widehat{\alpha}_n}), \quad \text{если } \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{b}_i \text{ и } \widehat{\alpha}_1,\dots,\widehat{\alpha}_n \in \mathbf{d}_{i,j}, \\ B_i(u_1,\dots,u_n), \quad \text{если } \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{b}_i \text{ и } \widehat{\alpha}_1 \in \mathbf{d}_{i,u_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \widehat{\alpha}_n \in \mathbf{d}_{i,u_n} \quad \text{и среди } u_1,\dots,u_n \\ \text{есть по крайней мере два различных} \\ A(v_1,\dots,v_n), \quad \text{если } \alpha_1 \in \mathbf{b}_{v_1},\dots,\alpha_n \in \mathbf{b}_{v_n} \\ \quad \text{и среди чисел } v_1,\dots,v_n \\ \quad \text{есть по крайней мере два различных.} \end{cases} \tag{5}$$

Покажем, что (4) и (5) — это одно и то же отображение. Зафиксируем $\overline{\alpha} \in [1,l]$, и будем расматривать различные возможности.

Пусть сначала $\alpha_1 \in \mathbf{c}_{i_1,j_1},\dots,\alpha_n \in \mathbf{c}_{i_n,j_n}$, $r_1 = r(i_1,j_1) \in \mathbf{a}_{v_1},\dots,r_n = r(i_n,j_n) \in \mathbf{a}_{v_n}$. Во всех случаях, когда идет перечисление нескольких однотипных индексов, будет предполагаться (здесь и далее), что по крайней мере два из них различны. Из сделанного только что предположения согласно (4) следует $(A\overline{B})\overline{C}_1\dots\overline{C}_m(\overline{\alpha}) = A(v_1,\dots,v_m)$. Рассмотрим произвольное число u, $1 \le u \le n$. Из того, что по определению $r_u = \sum\limits_{s=1}^{i_u-1} k_s + j_u \in \mathbf{a}_{i_u}$, а по условию $r_u \in \mathbf{a}_{v_u}$, следует $i_u = v_u$. Но тогда $\alpha_u \in \mathbf{c}_{i_u,j_u} = \mathbf{c}_{v_u,j_u} \subseteq \mathbf{b}_{v_u}$. Согласно (5) это значит, что $A(B_1\overline{C}_1)\dots(B_m\overline{C}_m)(\overline{\alpha}) = A(v_1,\dots,v_m)$.

Обратно, пусть $\alpha_1 \in \mathbf{b}_{v_1},\dots,\alpha_n \in \mathbf{b}_{v_n}$, т.е. согласно (5) $A(B_1\overline{C}_1)\dots(B_m\overline{C}_m)(\overline{\alpha}) = A(v_1,\dots,v_m)$. Поскольку отрезок $[1,l]$ покрывается непересекающимися отрезками $\mathbf{c}_{i,j}$, то для произвольного u имеется включение $\alpha_u \in \mathbf{c}_{i_u,j_u}$. Так как $\mathbf{c}_{i_u,j_u} \subseteq \mathbf{b}_{i_u}$ и $\alpha_u \in \mathbf{b}_{v_u}$, то $i_u = v_u$. Из $\alpha_u \in \mathbf{c}_{v_u,j_u}$ следует $r_u = r(v_u,j_u) \in \mathbf{a}_{v_u}$. Согласно (4) отсюда получаем

$$(A\overline{B})\overline{C}_1\dots\overline{C}_m(\overline{\alpha}) = A(v_1,\dots,v_m).$$

Рассмотрим случай, когда для $1 \le u \le n$ выполняются включения $\alpha_u \in \mathbf{c}_{i_u,j_u}$, и если $r_u = r(i_u,j_u)$, то существует s такой, что $r_1,\dots,r_n \in \mathbf{a}_s$. Согласно (4) $(A\overline{B})\overline{C}_1\dots\overline{C}(\overline{\alpha}) = B_s(\widetilde{r}_1,\dots,\widetilde{r}_n)$. Отметим сначала, что из сделанных предположений следует $\widetilde{r}_u = j_u$, а из $r_1,\dots,r_n \in \mathbf{a}_s$ имеем $i_1 = \dots = i_n = s$, т.е. $\alpha_u \in \mathbf{c}_{s,j_u} \subseteq \mathbf{b}_s$. Далее, $\widehat{\alpha}_u = \sum\limits_{t=1}^{j_u-1} l_{s,j_u} + \widetilde{\alpha}_u \in \mathbf{d}_{s,j_u}$. Отсюда согласно (5) $A(B_1\overline{C}_1)\dots(B_m\overline{C}_m)(\overline{\alpha}) = B_s(j_1,\dots,j_n) = B_s(\widetilde{r}_1,\dots,\widetilde{r}_n)$.

Обратно, пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{b}_i$, $\widehat{\alpha}_1 \in \mathbf{d}_{i,u_1},\dots,\widehat{\alpha}_n \in \mathbf{d}_{i,u_n}$, т.е. это случай, когда $A(B_1\overline{C}_1)\dots(B_m\overline{C}_m)(\overline{\alpha}) = B_i(u_1,\dots,u_n)$. Из $\widehat{\alpha}_q \in \mathbf{d}_{i,u_q}$ следует $\alpha_q \in \mathbf{c}_{i,u_q}$ $(1 \le q \le n)$.

Отсюда, если $r_q = r(i, u_q)$, то $\widetilde{r}_q = u_q$. В результате по (4) получаем

$$(A\overline{B})\overline{C}_1 \dots \overline{C}_m(\overline{\alpha}) = B_i(u_1, \dots, u_m).$$

Рассмотрим последний оставшийся случай. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{c}_{i,j}$ и $(A\overline{B})\overline{C}_1 \dots \overline{C}_m(\overline{\alpha}) = C_{i,j}(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n)$. Очевидно, для произвольного u, $1 \le u \le n$, имеется включение $\alpha_u \in \mathbf{c}_{i,j} \subseteq \mathbf{b}_i$. Из $\alpha_u \in \mathbf{c}_{i,j}$ также следует $\widehat{\alpha}_u \in \mathbf{d}_{i,j}$. Уже было отмечено, что $\widetilde{\widehat{\alpha}}_u = \widetilde{\alpha}_u$. Следовательно, из (5) получим $A(B_1\overline{C}_1) \dots (B_m\overline{C}_m)(\overline{\alpha}) = C_{i,j}(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n)$.

Обратно, пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{b}_i$ и $\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n \in \mathbf{d}_{i,j}$, что означает $A(B_1\overline{C}_1) \dots (B_m\overline{C}_m)(\overline{\alpha}) = C_{i,j}(\widetilde{\widehat{\alpha}}_1, \dots, \widetilde{\widehat{\alpha}}_n) = C_{i,j}(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n)$. Отсюда легко следует $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{c}_{i,j}$, и, таким образом, $(A\overline{B})\overline{C}_1 \dots \overline{C}_m(\overline{\alpha}) = C_{i,j}(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n)$.

Свойства, связанные с единицей E, проверяются легко, и эту проверку опустим. Проверим свойства Σ-операды, связанные с действием подстановок.

Проверка свойства $A(B\sigma_1) \dots (B\sigma_m) = (AB_1 \dots B_m)(\sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \sigma_m)$ не связана с какими-либо сложностями. Сосредоточимся на тождестве $(A\sigma)B_1 \dots B_m = (AB_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)})(\sigma^*\beta)$, где $A \in GM_n(m)$, $B_i \in GM_n(k_i)$, $1 \le i \le m$, $\sigma \in \Sigma_n$, $\beta = (k_1, \dots, k_m)$.

Пусть $k = k_1 + \dots + k_m$, $[1, k] = \mathbf{b}_1 \cup \dots \cup \mathbf{b}_m$, где $\mathbf{b}_i = [k_1 + \dots + k_{i-1} + 1, k_1 + \dots + k_i]$. Пусть также $\mathbf{b}'_i = [k_{\sigma(1)} + \dots + k_{\sigma(i-1)} + 1, k_{\sigma(1)} + \dots + k_{\sigma(i)}]$ для всех i, так что $[1, k] = \mathbf{b}'_1 \cup \dots \cup \mathbf{b}'_m$. Напомним, что $\sigma^*\beta$ есть биекция $[1, k] \to [1, k]$, которая биективно и с сохранением порядка отображает каждый $\mathbf{b}'_i$ на $\mathbf{b}_{\sigma(i)}$. Положим $\tau = (\sigma^*\beta)^{-1}$. По лемме $(\sigma^*\beta)^{-1} = (\sigma^{-1})^*(\beta\sigma)$, где $\beta\sigma = (k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(m)})$. Отображение τ биективно отображает $[1, k]$ на $[1, k]$, причем для каждого i биективно и с сохранением порядка отображает $\mathbf{b}_i$ на $\mathbf{b}'_{\sigma^{-1}(i)}$. Таким образом, $\alpha \in \mathbf{b}_{\sigma(i)}$ равносильно тому, что $\tau(\alpha) \in \mathbf{b}'_i$.

Пусть $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [1, k]$. Тогда

$$(A\sigma)B_1 \dots B_m(\overline{\alpha}) = \begin{cases} B_i(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n) \quad \text{при } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{b}_i; \\ A(\sigma^{-1}(j_1), \dots, \sigma^{-1}(j_n)), \quad \text{если } \alpha_1 \in \mathbf{b}_{j_1}, \dots, \alpha_n \in \mathbf{b}_{j_n} \\ \quad \text{и среди } j_1, \dots, j_n \text{ есть хотя бы два различных.} \end{cases} \tag{6}$$

Заметим теперь, что

$$(AB_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)})(\sigma^*\beta)(\overline{\alpha}) = AB_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)}(\tau(\alpha_1), \dots, \tau(\alpha_n)).$$

Согласно (1) этот элемент можно описать следующим образом:

$$\begin{cases} B_{\sigma(s)}(\widetilde{\tau(\alpha_1)}, \dots, \widetilde{\tau(\alpha_n)}) \quad \text{при } \tau(\alpha_1), \dots, \tau(\alpha_n) \in \mathbf{b}'_s, \\ \quad \text{что равносильно } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{b}_{\sigma(s)}; \\ A(t_1, \dots, t_n), \qquad \text{если } \tau(\alpha_1) \in \mathbf{b}'_{t_1}, \dots, \tau(\alpha_n) \in \mathbf{b}'_{t_n} \\ \ (\text{что равносильно } \alpha_1 \in \mathbf{b}_{\sigma(t_1)}, \dots, \alpha_n \in \mathbf{b}_{\sigma(t_n)}) \\ \quad \text{и среди } t_1, \dots, t_n \text{ есть хотя бы два различных.} \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что (6) и (7) определяют одно и то же отображение. Прежде всего, заметим, что если $\alpha \in \mathbf{b}_{\sigma(s)}$, то $\alpha = \sum\limits_{p=1}^{\sigma(s)-1} k_p + \widetilde{\alpha}$, и по определению τ получаем $\tau(\alpha) = \sum\limits_{q=1}^{\sigma(s-1)} k_{\sigma(q)} + \widetilde{\alpha}$, а это означает $\widetilde{\tau(\alpha)} = \widetilde{\alpha}$.

Зафиксируем теперь $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [1, k_1 + \dots + k_m]$. Допустим, что $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in \mathbf{b}_i$. Значит, $(A\sigma)B_1 \dots B_m(\overline{\alpha}) = B_i(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n)$, но теперь $\tau(\alpha_1), \dots, \tau(\alpha_i) \in \mathbf{b}'_{\sigma^{-1}(i)}$. Согласно (7) получаем

$$(AB_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)})(\sigma^*\beta)(\overline{\alpha}) = B_{\sigma(\sigma^{-1}(i))}(\widetilde{\tau(\alpha_1)}, \dots, \widetilde{\tau(\alpha_n)}),$$

и это значение равно $B_i(\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$.

Обратно, если $\tau(\alpha_1), \ldots, \tau(\alpha_i) \in \mathbf{b}'_s$, то $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \mathbf{b}_{\sigma(s)}$. Значит,

$$(A\sigma)B_1 \ldots B_m(\overline{\alpha}) = B_{\sigma(s)}(\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_n) = (AB_{\sigma(1)} \ldots B_{\sigma(m)})(\sigma^*\beta)(\overline{\alpha}).$$

Наконец, условие $\alpha_1 \in \mathbf{b}_{j_1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{b}_{j_n}$ равносильно $\tau(\alpha_1) \in \mathbf{b}_{s^{-1}(j_1)}, \ldots, \tau(\alpha_n) \in \mathbf{b}_{\sigma^{-1}(j_n)}$. Отсюда следует, что и в этом случае

$$(A\sigma)B_1 \ldots B_m(\overline{\alpha}) = (AB_{\sigma(1)} \ldots B_{\sigma(m)})(\sigma^*\beta)(\overline{\alpha}).$$

Случай композиции 2 рассматривается практически точно так же. □

Пример 1. Рассмотрим случай $n = 1$. Легко увидеть, чтобы была определена композиция 1, компоненты операды GM_1 должны быть одноэлементными. Поэтому рассмотрим случай композиции 2. Отображение $A : [m] \to G$ можно интерпретировать как упорядоченную последовательность $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = A(i)$. Если $B_i \in GM_1(k_i)$ записать как $(b_{i,1}, \ldots, b_{i,k_i})$, то легко убедиться, что операция (2) выглядит так:

$$AB_1 \ldots B_m = (a_1 b_{1,1}, \ldots, a_1 b_{1,k_1}, \ldots, a_m b_{m,1}, \ldots, a_m b_{m,k_m}).$$

Таким образом, GM_1 с композицией 2 — это хорошо известная операда, которая строится по произвольной полугруппе с единицей.

Заметим, что если $k_i = 0$, то в $AB_1 \ldots B_m$ отсутствует подстрока вида $a_i b_{i,1}, \ldots, a_i b_{i,k_i}$.

Пример 2. Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда $GM_2(k)$ есть множество всех квадратных $k \times k$-матриц с элементами из G. В случае композиции 1 предполагается, что рассматриваются только матрицы, на главной диагонали которых расположен элемент ε. Явный вид композиции 1 таков. Пусть $A \in GM_2(n)$, $B_1 \in GM_2(k_1), \ldots, B_m \in GM_2(k_m)$. Тогда

$$AB_1 \ldots B_m = \begin{pmatrix} B_1 & \overline{a}_{1,2} & \ldots & \overline{a}_{1,m} \\ \overline{a}_{2,1} & B_2 & \ldots & \overline{a}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m,1} & \overline{a}_{m,2} & \ldots & B_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь $AB_1 \ldots B_m$ — блочная $k \times k$-матрица, (i,j)-й блок которой есть матрица размером $k_i \times k_j$. Диагональные блоки — квадратные матрицы B_i, $1 \leq i \leq m$. Если $i \neq j$, и $a_{i,j}$ — (i,j)-й элемент матрицы A, то $\overline{a}_{i,j}$ обозначает матрицу размером $k_i \times k_j$, целиком заполненную одним и тем же элементом $a_{i,j}$.

Кроме того, если $\sigma \in \Sigma_m$ и $A \in M(n)$, то правое действие Σ_n на $GM_2(m)$ определяется так: $A\sigma$ есть матрица, (i,j)-й элемент которой равен $a_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$.

В случае композиции 2 G есть мультипликативно записываемая полугруппа с нейтральным элементом ε. Квадратные матрицы из GM_2 могут быть любыми. Явный вид композиции 2 имеет вид

$$AB_1 \ldots B_m = \begin{pmatrix} a_{1,1}B_1 & \overline{a}_{1,2} & \ldots & \overline{a}_{1,m} \\ \overline{a}_{2,1} & a_{2,2}B_2 & \ldots & \overline{a}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m,1} & \overline{a}_{m,2} & \ldots & a_{m,m}B_m \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Заметим, что если $k_i = 0$, то в (8) и (9) отсутствует i-я (блочная) строка и i-й (блочный) столбец.

Построим теперь две важные подоперады GM_n (соответствующие случаям композиций 1 и 2). Обозначим через $HG_n(m)$ множество тех $A \in GM_n(m)$, которые обладают свойством

$$\{i_1, \ldots, i_n\} = \{j_1, \ldots, j_n\} \text{ влечет } A(i_1, \ldots, i_n) = A(j_1, \ldots, j_n) \tag{10}$$

для любых $j_1, \dots, j_n$ и $i_1, \dots, i_n$ из $\{1, \dots, m\}$. Отметим, что частным случаем (10) является следующее условие: для каждых $\sigma \in \Sigma_m$ и $A \in HG_n(m)$ имеется равенство

$$A(i_1, \dots, i_n) = A(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)) \text{ для всех } i_1, \dots, i_n \in [1, m].$$

Теорема 2. *Семейство $HG_n = \{HG_n(k) \mid k = 0, 1, \dots\}$ есть Σ-подоперада Σ-операды GM_n. В случае, когда рассматривается композиция 1, необходимо предполагать, что в $HG_n(k)$ входят только отображения со свойством $A(i, \dots, i) = \varepsilon$ для всех i и k.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $A \in HG_n(m)$, $B_1 \in HG_n(k_1)$, $\dots$, $B_m \in HG_n(k_m)$, то $AB_1 \dots B_m \in HG_n(k_1 + \dots + k_m)$. Как и в предыдущей теореме, достаточно разобрать случай композиции 1.

Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Тогда включения $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{b}_i$ равносильны включениям $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbf{b}_i$. При этом $\{\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n\} = \{\widetilde{\beta}_1, \dots, \widetilde{\beta}_n\}$. Если $\alpha_1 \in \mathbf{b}_{j_1}, \dots, \alpha_n \in \mathbf{b}_{j_n}$ и $\beta_1 \in \mathbf{b}_{t_1}, \dots, \beta_n \in \mathbf{b}_{t_n}$, то $\{j_1, \dots, j_n\} = \{t_1, \dots, t_n\}$. Из этого (согласно (1)) следует

$$AB_1 \dots B_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = AB_1 \dots B_m(\beta_1, \dots, \beta_n). \qquad \square$$

3. Структура *Epi*-операды

В этом разделе рассматривается случай, когда $G = \{0, 1\}$, и полугрупповой операцией является *сложение*, причем $1 + 1 = 1$.

Пусть $f : [k] \to [m]$ — сюръекция, т. е. морфизм вербальной категории *Epi*. Пусть $A \in HG_n(k)$. Определим Af следующим образом:

$$Af(i_1, \dots, i_n) = \sum A(j_1, \dots, j_n),$$

где $i_1, \dots, i_n \in [m]$, а сумма берется по всем $j_1, \dots, j_n \in [k]$ таким, что $f(j_1) = i_1, \dots, f(j_n) = i_n$. Легко проверяется, что $Af \in HG_n(m)$. Очевидно, если f является биекцией, то Af получается тем же самым, что и в (3).

Опишем, как элементы HG_n интерпретируются на языке гиперграфов (например, [10], гл. XI). Понадобится только само определение гиперграфа как совокупности множества вершин и множества ребер, где каждому ребру сопоставлено некоторое множество инцидентных ему вершин. Отображению $A : [k]^n \to G = \{0, 1\}$ из $HG_n(k)$ можно сопоставить гиперграф с множеством вершин $\{1, \dots, k\}$, причем $\{i_1, \dots, i_s\}$ есть множество всех вершин, инцидентных некоторому ребру этого гиперграфа, тогда и только тогда, когда $A(j_1, \dots, j_n) = 1$ для всех упорядоченных последовательностей $(j_1, \dots, j_n)$, для которых $\{j_1, \dots, j_n\} = \{i_1, \dots, i_s\}$. В ряде случаев удобно будет считать, что множество вершин, инцидентных данному ребру, — это именно множество $\{j_1, \dots, j_n\}$, причем некоторые элементы этого множества могут встречаться в записи несколько раз. Таким образом, операда HG_n является операдой всех возможных гиперграфов с конечным числом вершин, в которых каждому ребру инцидентны не более n вершин. В рассматриваемом нами случае $G = \{0, 1\}$ ребро полностью определяется множеством инцидентных ему вершин. Отображение A можно рассматривать как гиперграфовый аналог матрицы инцидентности графа. В случае $n = 2$ получаются графы, и это именно матрица инцидентности. Отметим, что при $n = 2$ рассматриваются (как и в [6]) графы без кратных ребер, но допускающие петли. В дальнейшем не будут различаться гиперграфы и их матрицы инцидентности, а для ребра e некоторого гиперграфа через $\operatorname{supp}(e)$ будет обозначаться множество всех инцидентных этому ребру вершин. Это множество будет также называться *носителем* ребра e. Иногда будем также отождествлять ребро с его носителем. Если $A \in HG_n(m)$, то через $E(A)$ будет обозначаться множество ребер гиперграфа A, т. е. семейств $\{j_1, \ldots, j_n\} \subseteq [1, m]$, где элементы не обязательно различны, и при любом способе упорядочения элементов $j_1, \ldots, j_n$ выполняется равенство $A(j_1, \ldots, j_n) = 1$.

Опишем подробнее строение гиперграфа $C = AB_1 \ldots B_m$ в терминах вершин и ребер гиперграфов $A \in HG_n(m)$, $B_1 \in HG_n(k_1)$, $\ldots$, $B_m \in HG_n(k_m)$. Вершины гиперграфа C — множество $\{1, 2, \ldots, k_1 + \cdots + k_m\}$. Ребра, определяемые через свои носители, описываются так.

Напомним, что $C(u_1, \ldots, u_n) = A(i, \ldots, i) + B_i(v_1, \ldots, v_n)$ при $u_1, \ldots, u_n \in [k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1, k_1 + \cdots + k_{i-1} + k_i]$, и $u_j = k_1 + \cdots + k_{i-1} + v_j$, $1 \leq v_j \leq k_i$.

Утверждение, что вершина $\{i\}$ является ребром A, равносильно тому, что $A(i, \ldots, i) = 1$. Так как предположили, что $1 + 1 = 1$, то в этом случае $C(u_1, \ldots, u_n) = 1$ для любых $u_1, \ldots, u_n$, удовлетворяющих сформулированному выше условию. Это означает, что любое непустое подмножество из $[k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1, k_1 + \cdots + k_{i-1} + k_i]$, состоящее из не более чем n элементов, будет ребром C.

Допустим, что $\{i\}$ не является ребром A, т. е. $A(i, \ldots, i) = 0$. Отсюда $C(u_1, \ldots, u_n) = A(i, \ldots, i) + B_i(v_1, \ldots, v_n) = 1$ тогда и только тогда, если $B_i(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Это означает, что каждому ребру гиперграфа B_i с носителем $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq [1, k_i]$ (причем $v_1, \ldots, v_n$ не обязательно различны), которое обозначим через e, соответствует ребро C с носителем $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq [k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1, k_1 + \cdots + k_{i-1} + k_i]$, где $u_j = k_1 + \cdots k_{i-1} + v_j$ для всех j. Это ребро будет обозначаться через $\breve{e}$.

Третья возможность, которую необходимо рассмотреть, это случай, когда e — ребро A, $\mathrm{supp}(e) = \{i_1, \ldots, i_n\}$ с возможными повторениями, но это множество не является одноэлементным. По формуле (2) получим $C(j_1, \ldots, j_n) = A(i_1, \ldots, i_n)$ для любых $j_1 \in \mathbf{b}_{i_1}$, $\ldots$, $j_n \in \mathbf{b}_{i_n}$. Следовательно, для каждого такого набора определено ребро C с носителем $\{j_1, \ldots, j_n\}$. Оно будет обозначаться в дальнейшем через $e_{j_1 \ldots j_n}$. Отметим, что при различных способах упорядочения элементов $j_1, \ldots, j_n$ будет получаться одно и то же ребро гиперграфа C.

В случае, когда носитель e все-таки состоит из одного элемента, формальное применение описанного только что способа построения ребра C приводит к тому же результату, который уже был описан выше.

Теорему 2 из [6] обобщает

Теорема 3. *Семейство $HG_n = \{HG_n(m) \mid m \geq 0\}$ является подоперадой Σ-операды GM_n и превращается описанным выше образом в Epi-операду.*

Доказательство. Проверим определение Epi-операды [3], которое напоминается ниже по ходу доказательства. Пусть $A \in HG(m)$, $B_i \in HG(k_i)$, $1 \leq i \leq r$. Рассмотрим сюръективное отображение $f : [m] \to [r]$. Первый этап проверки определения Epi-операды заключается в проверке равенства
$$(Af)B_1 \ldots B_r = (AB_{f(1)} \ldots B_{f(m)})(f^*\alpha),$$
где $\alpha = (k_1, \ldots, k_r)$. Покажем, что между ребрами $C' = (Af)B_1 \ldots B_r$ и ребрами $C'' = (AB_{f(1)} \ldots B_{f(m)})(f^*\alpha)$ можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что носители соответствующих ребер совпадают.

Вершины гиперграфов C' и C'' — это множество $\{1, 2, \ldots, k_1 + \cdots + k_r\}$. Ребра, как уже было описано выше, можно разбить на три не обязательно непересекающиеся семейства. Установим взаимно-однозначные соответствия между ребрами каждого из этих семейств для C' и C''. В случае C' эти три семейства устроены следующим образом.

(1a). Если $\{i\}$ есть ребро Af, то любое подмножество отрезка $[k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1, k_1 + \cdots + k_{i-1} + k_i]$, состоящее из не более чем n элементов, является ребром C'. То, что $\{i\}$ есть ребро Af, означает, что найдется ребро A с носителем $\{s_1,\dots,s_n\}$ таким, что $f(s_1)=\dots=f(s_n)=i$. Напомним, что допускаются повторения.

(1b). Допустим, что $\{i\}$ не есть ребро Af. Следовательно, никакое непустое подмножество прообраза $f^{-1}(i)$ не является ребром A. Тогда для любого $e\in E(B_i)$ существует единственное ребро $\breve{e}\in E(C')$ такое, что если $\mathrm{supp}(e)=\{j_1,\dots,j_l\}\subseteq\{1,\dots,k_i\}$, то $\mathrm{supp}(\breve{e})=\{k_1+\dots+k_{i-1}+j_1,\dots,k_1+\dots+k_{i-1}+j_l\}$.

(1c). Пусть $e\in E(A)$ и $\mathrm{supp}(e)=\{i_1,\dots i_n\}$ (с возможными повторениями). Тогда $\mathrm{supp}(ef)=\{f(i_1),\dots,f(i_n)\}$. Для любого набора вершин $j_1\in\mathbf{b}_{f(i_1)}$, ..., $j_n\in\mathbf{b}_{f(i_n)}$ определено ребро C' с носителем $\{j_1,\dots,j_n\}$, обозначаемое через $e_{j_1\dots j_n}$.
При описании ребер C'' будет использоваться информация о гиперграфе $C'''=AB_{f(1)}\dots B_{f(m)}$ с множеством вершин $\{1,\dots,k_{f(1)}+\dots+k_{f(m)}\}$. Напомним, что $f^*\alpha$ отображает $\{1,\dots,k_{f(1)}+{}$ ${}+\dots+k_{f(m)}\}$ в $\{1,\dots,k_1+\dots+k_r\}$ по правилу $k_{f(1)}+\dots+k_{f(s-1)}+j\mapsto k_1+\dots+k_{f(s)-1}+j$, $1\le s\le m$, $1\le j\le k_{f(s)}$. Из сюръективности f следует сюръективность $f^*\alpha$.

(2a). Случай, когда $\{i\}$ есть ребро Af. Следовательно, имеется ребро w гиперграфа A с носителем $\{s_1,\dots,s_n\}$ (допускаются повторения), причем $f(s_1)=\dots=f(s_n)=i$. Тогда определены всевозможные ребра $w_{v_1\dots v_n}$ гиперграфа C''', где $v_1\in[k_{f(1)}+\dots+k_{f(s_1-1)}+1,k_{f(1)}+\dots+k_{f(s_1-1)}+k_{f(s_1)}],\dots,v_n\in[k_{f(1)}+\dots+k_{f(s_n-1)}+1,\,k_{f(1)}+\dots+k_{f(s_n-1)}+k_{f(s_n)}]$ с носителями $\{v_1,\dots,v_n\}$. Пусть $v_p=k_{f(1)}+\dots+k_{f(s_p-1)}+u_p$, $1\le u_p\le k_{f(s_p)}$ для всех p. В гиперграфе $C''=C'''(f^*\alpha)$ определены ребра $w_{v_1\dots v_n}(f^*\alpha)$ с носителями $\{f^*\alpha(v_1),\dots,f^*\alpha(v_n)\}$. С учетом определения $f^*\alpha$ и того, что $f(s_p)=i$ для всех p, эти носители равны $\{k_1+\dots+k_{i-1}+f(v_1),\dots,k_1+\dots+k_{i-1}+f(v_n)\}$, причем $f(v_p)\in[1,k_i]$ для всех p. Поскольку отображение f сюръективно, то отсюда вытекает, что описанное таким образом множество носителей ребер гиперграфа C'' совпадает с множеством носителей тех ребер C', которые были описаны в п. (1a).

(2b). Пусть $\{i\}$ не является ребром Af. Следовательно, для каждого s, $1\le s\le m$, такого, что $f(s)=i$, множество $\{s\}$ не является ребром A. Отсюда вытекает, что для каждого ребра w гиперграфа B_i с носителем $\{j_1,\dots,j_l\}$ определено ребро $\breve{w}$ гиперграфа C''' с носителем $\{k_{f(1)}+\dots+k_{f(s-1)}+j_1,\dots,k_{f(1)}+\dots+k_{f(s-1)}+j_l\}$. Тогда ребро $\breve{w}(f^*\alpha)$ будет иметь носитель $\mathrm{supp}(\breve{w}(f^*\alpha))=\{k_1+\dots+k_{i-1}+j_1,\dots,k_1+\dots+k_{i-1}+j_l\}$. Теперь очевидно, множества носителей, описываемые в пп. (1b) и (2b), совпадают. Отметим, что ребра $\breve{e}$ и $\breve{w}$ принадлежат разным гиперграфам.

(2c). Пусть дано произвольное ребро w гиперграфа A с носителем $\{i_1,\dots,i_n\}$. Для любых $v_p=k_{f(1)}+\dots+k_{f(i_p-1)}+j_p$, $1\le p\le n$, $1\le j_p\le k_{f(i_p)}$, определено ребро $w_{v_1\dots v_p}$ гиперграфа C''' с носителем $\{v_1,\dots,v_n\}$. Тогда ребро $w_{v_1\dots v_p}(f^*\alpha)$ гиперграфа C'' будет иметь носителем множество $\{k_1+\dots+k_{f(i_1)-1}+j_1,\dots,k_1+\dots+k_{f(i_n)-1}+j_n\}$. Ясно, что множество носителей ребер C'', описываемых в данном пункте, совпадает с множеством носителей ребер C', описанном в (1c).

Проверим вторую часть определения *Epi*-операды, равенство

$$A(B_1f_1)\dots(B_mf_m)=(AB_1\dots B_m)(f_1\sqcup\dots\sqcup f_m),$$

где $A\in HG(m)$, $B_i\in HG(k_i)$ для всех i, $1\le i\le m$, и все отображения $f_i:[k_i]\to[l_i]$ являются сюръективными. Пусть $C'=A(B_1f_1)\dots(B_mf_m)$, $C''=(AB_1\dots B_m)(f_1\sqcup\dots\sqcup f_m)$. Вершины гиперграфов C' и C'' — это множество $[l_1+\dots+l_m]=\{1,2,\dots,l_1+\dots+l_m\}$. Опишем, как устроены ребра C'. Возможны три случая.

(3a). Если $\{i\}$ — ребро A, то все подмножества отрезка $[l_1+\dots+l_{i-1}+1,l_1+\dots+l_i]$ из не более чем n элементов являются ребрами C'.

(3b). Пусть $A(i,\dots,i)=0$. Тогда по ребру w гиперграфа B_if_i строится ребро $\breve{w}$ гиперграфа C'. Но каждое ребро B_if_i имеет вид ef_i для некоторого ребра e гиперграфа B_i. Пусть $\mathrm{supp}(e)=\{j_1,\dots,j_r\}$. Тогда $\mathrm{supp}(ef_i)=\{f_i(j_1),\dots,f_i(j_r)\}$. Следовательно, $\mathrm{supp}(\breve{w})=\{k_1+\dots+k_{i-1}+f_i(j_1),\dots,k_1+\dots+k_{i-1}+f_i(j_r)\}$.

(3c). Если $e=\{i_1,\dots,i_n\}$ — ребро A, то для всех $\alpha_q\in[1,l_{i_q}]$, где $1\le q\le n$, множество $\{l_1+\dots+l_{i_1-1}+\alpha_1,\dots,l_1+\dots+l_{i_n-1}+\alpha_n\}$ является носителем ребра $e_{\alpha_1\dots\alpha_n}$.

Перейдем к описанию ребер C''. Положим $C'''=AB_1\dots B_m$. Это гиперграф с множеством вершин $\{1,\dots,k_1+\dots+k_m\}$. Заметим, что $f=f_1\sqcup\dots\sqcup f_m$ отображает $\{1,\dots,k_1+\dots+k_m\}$ в $\{1,\dots,l_1+\dots+l_m\}$, и это отображение сюръективно ввиду сюръективности всех f_i.

(4a). Пусть $\{i\}$ — ребро A. Тогда любое непустое подмножество из не более чем n элементов $\{k_1+\dots+k_{i-1}+1,\dots,k_1+\dots+k_i\}$ является ребром C'''. Сюръективное отображение f, действуя на эти подмножества, отображает их во всевозможные подмножества из не более чем n элементов множества $\{l_1+\dots+l_{i-1}+1,\dots,l_1+\dots+l_i\}$. Отсюда следует, что множества носителей ребер C' и C'', описанных в (3a) и (4a), совпадают.

(4b). Пусть $A(i,\dots,i)=0$. Тогда для любого ребра $e=\{j_1,\dots,j_r\}$ гиперграфа B_i определено ребро $\breve{e}$ гиперграфа C''' с носителем $\{k_1+\dots+k_{i-1}+j_1,\dots,k_1+\dots+k_{i-1}+j_r\}$. Отсюда и из определения f следует, что носителем ребра $\breve{e}f$ будет множество $\{l_1+\dots+k_{i-1}+f_i(j_1),\dots,k_1+\dots+k_{i-1}+f_i(j_r)\}$. Сравнивая это с (3b), убеждаемся, что и в этом случае имеется взаимно-однозначное соответствие между ребрами C' и C'', причем носители соответствующих ребер совпадают.

(4c). Пусть $e=\{i_1,\dots,i_n\}$ — ребро A. Тогда для всех $\beta_1,\dots,\beta_n$, где $\beta_j\in[1,k_{i_j}]$ для всех j, определено ребро $e_{\beta_1\dots\beta_n}$ гиперграфа C''' с носителем $\{k_1+\dots+k_{i_1-1}+\beta_1,\dots,k_1+\dots k_{i_p-1}+\beta_p\}$. Соответствующее ребро $e_{\beta_1\dots\beta_n}f$ гиперграфа C'' будет иметь носитель $\{l_1+\dots+l_{i_1-1}+f_{i_1}(\beta_1),\dots,l_1+\dots l_{i_p-1}+f_{i_n}(\beta_p)\}$. Ввиду сюръективности всех отображений $f_1,\dots,f_n$ теперь видно, что имеется совпадение между множеством носителей ребер гиперграфа C', описанном в п. (3c), и множеством носителей ребер C'', описанном в (4c). $\square$

Заметим, что из доказательства теоремы 3 следует, что операды HG_n не являются $FSet$-операдами: без условия сюръективности доказательство не проходит, и это условие является неустранимым.

Литература

[1] Тронин С.Н. *Операды конечных графов и гиперграфов* , Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 5. Актуальные проблемы математики и механики (Изд-во «Унипресс», Казань, 2000), с. 207–208.

[2] Тронин С.Н., Семенова А.В. *Операды конечных помеченных графов,* Изв. вузов. Матем., №4, 50–60 (2004).

[3] Тронин С.Н. *Абстрактные клоны и операды*, Сиб. матем. журн. **43** (4), 924–936 (2002).

[4] Тронин С.Н. *Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами*, Сиб. матем. журн. **47** (3), 670–694 (2006).

[5] Тронин С.Н. *Мультикатегории и многообразия многосортных алгебр*, Сиб. матем. журн. **49** (5), 1184–1201 (2008).

[6] Семенова А.В. *Алгебры над операдой конечных помеченных графов*, Изв. вузов. Матем., №6, 65–73 (2006).

[7] Тронин С.Н., Туктамышов Р.Н. *О некоторых операдах гиперграфов*, Алгебра и матем. логика. Материалы международн. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. проф. В.В. Морозова, и молодежн. школы-конф. «Соврем. пробл. алгебры и матем. логики». Казань, 25–30 сентября 2011 г. (Изд-во КФУ, Казань, 2011), с. 173–175.

[8] Туктамышов Р.Н. *Об алгебрах над операдами гиперграфов*, Алгебра и матем. логика. Материалы международн. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. проф. В.В.Морозова, и молодежн. школы-конф. «Соврем. пробл. алгебры и матем. логики»; Казань, 25–30 сентября 2011 г. (Изд-во КФУ, Казань, 2011), с. 175–176.

[9] Туктамышов Р.Н. *Об одной операде гиперграфов*, Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Материалы Десятой молодежн. научн. школы-конф. «Лобачевские чтения-2011»; Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г. (Изд-во Казанск. матем. о-ва, Казань, 2011), Т. 44, с. 278–288.

[10] Емеличев В.А., Мельников О.В., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов* (Наука, ГИФМЛ, М., 1990).

С.Н. Тронин

профессор, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Serge.Tronin@ksu.ru

Р.Н. Туктамышов

аспирант, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` rishat88@gmail.com

S.N. Tronin and R.N. Tuktamyshov

Operads of hypergraphs

Abstract. We construct two countable collections of operads of many-dimensional cubic matrices. In every operad from one of these collections we select a suboperad such that its elements can be interpreted as some hypergraphs. We prove that all these suboperads are *Epi*-operads.

Keywords: operad, verbal category, hypergraph.

S.N. Tronin

Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Serge.Tronin@ksu.ru

R.N. Tuktamyshov

Postgraduate, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` rishat88@gmail.com