

Ф.Г. АВХАДИЕВ

## ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

**Аннотация.** Рассматривается функционал Сен-Венана  $P$  для жесткости кручения в произвольной плоской или пространственной области. Основным результатом статьи — точная оценка  $P \leq (4/n)t$ , где  $n$  — размерность пространства,  $t$  — гармоническое среднее от моментов инерции области относительно координатных плоскостей. Экстремальными областями являются эллипсоиды специального вида. Тем самым, получено обобщение изопериметрического неравенства, доказанного Е. Николаи для жесткости кручения односвязных плоских областей.

**Ключевые слова:** изопериметрическое неравенство, жесткость кручения, моменты инерции.

УДК: 517.54

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Timoshenko S.R. *History of the strength of materials* (McGraw-Hill, London, 1954).
- [2] Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. *Кручение упругих тел* (ГИФМЛ, М., 1963).
- [3] Полюа Г., Сеге Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике* (ГИФМЛ, М., 1962).
- [4] Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications* (Pitman Adv. Publ. Program, Boston–London–Melbourne, 1980).
- [5] Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи* (Казанский фонд “Математика”, Казань, 1996).
- [6] Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана*, Матем. сб. **189** (12), 3–12 (1998).
- [7] Vañuelos M., Berg Van Den M., Carrol T. *Torsional rigidity and expected lifetime of Brownian motion*, J. London Math. Soc. **66** (2), 499–512 (2002).
- [8] Avkhadiev F.G., Kayumov I.R. *Comparizon theorems of isoperimetric type for moments of compact sets*, Collectanea Math. **55** (3), 553–563 (2004).
- [9] Авхадиев Ф.Г. *Новые изопериметрические неравенства для моментов областей и жесткости кручения*, Изв. вузов. Матем., № 7, 3–11 (2004).
- [10] Hadwiger H. *Konkave eikörperfunktionale und höhere Trägheitsmomente*, Comment. Math. Helv. **30** (2), 285–296 (1956).
- [11] Knothe H. *Contributions to the theory of convex bodies*, Michigan Math. J. **4** (1), 39–52 (1957).
- [12] Avkhadiev F.G., Salahudinov R.G. *Isoperimetric inequalities for conformal moments of plane domains*, J. Inequal. Appl. **7** (4), 593–601 (2002).
- [13] Avkhadiev F.G. *A simple proof of the Gauss–Winckler inequality*. Amer. Math. Monthly **112** (5), 459–461 (2005).
- [14] Keady G. *On a Brunn–Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev*, JIPAM **8**, iss. 2, art. 33 (2007), 10 p.

---

Поступила 06.02.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 11-01-00762-а.

- [15] Henrot A., Philippin G.A., Safoui A. *Some isoperimetric inequalities with application to the Stekloff problem*, J. Convex Analysis **15** (3), 581–592 (2008).

Ф.Г. Авхадиев

профессор, заведующий кафедрой теории функций и приближений,  
Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: favhadiev@ksu.ru

*F.G. Avkhadiev*

### **Isoperimetric inequality for torsional rigidity in multidimensional domains**

*Abstract.* We consider the Saint Venant functional  $P$  for the torsional rigidity in arbitrary plane and space domains. Our main result is the following sharp estimate:  $P \leq (4/n)m$ , where  $n$  is the dimension of domains and  $m$  is the harmonic mean of inertial moments of a domain with respect to coordinate planes. Extremal domains are some ellipsoids. Hence, we obtain a generalization of the isoperimetric inequality, proved by E. Nicolay for the torsional rigidity of simply connected planar domains.

*Keywords:* isoperimetric inequality, torsional rigidity, inertial moments.

*F.G. Avkhadiev*

*Professor, Head of the Chair of Function Theory and Applications,  
Kazan (Volga Region) Federal University,  
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: favhadiev@ksu.ru