КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт вычислительной математики и
информационных технологий

Кафедра системного анализа и информационных технологий

Р.Х. Латыпов   Е.Л. Столов

Тесты по курсу "Алгебра и геометрия"
Комплексные числа, матрицы и определители

Казань – 2023

УДК 512.6
ББК 22.143

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИВМИИТ
Протокол № 5 от 26 января 2023 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры системного анализа и информационных
технологий КФУ Ш.Т. Ишмухаметов;
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и математической логики КФУ М.М.
Ямалеев

Латыпов Р.Х., Столов Е.Л.
Тесты по курсу "Алгебра и геометрия"
Комплексные числа, матрицы и определители /
Р.Х. Латыпов, Е.Л.Столов. – Казань: Казанский федеральный
университет, 2023. – 40 с.

Данная книга основана на опыте применения тестирования для проверки знаний по предмету «Алгебра и геометрия», изучаемому на первом курсе университетов и технических вузов. Тестирование ориентировано на текущий контроль и может проводиться в автоматическом режиме. Тесты можно внедрить в платформы, созданные для сопровождения учебного процесса. Задачи предназначены для проверки теоретических знаний.

В данной книге представлены тесты по двум разделам: «Комплексные числа» и «Матрицы и определители». В начале каждой темы помещены обозначения.

Предисловие

Объявленная правительством программа цифровизации должна затронуть и систему образования. Цель всей программы — автоматизация рутинных процедур с целью освободить человека для более плодотворной деятельности, в частности, предоставить время преподавателю для творческой работы. Данная книга основана на опыте применения тестирования для проверки знаний по предмету «Алгебра и геометрия», изучаемому на первом курсе университетов и технических вузов. Сразу же заметим, что тестирование не может заменить общение с преподавателем. Нам представляется, что экзамен должен принимать человек, а не машина. Тестирование не может определить лучшего в группе, однако оно отсеивает неподготовленных студентов. Прежде всего, тестирование ориентировано на текущий контроль и может проводиться в автоматическом режиме. Тесты можно легко внедрить в платформы, созданные для сопровождения учебного процесса. Только успешно прошедшего тест студента следует допускать к экзамену. Книга предназначена, прежде всего, для преподавателя. Авторы полагают, что она станет доступной для студентов, поэтому в ней отсутствуют ответы на большинство тестовых вопросов, за исключением вопросов, помеченных *, для которых в конце книги приведены подробные решения. Для преподавателя найти правильные ответы на тесты не составит труда. В то же время книга полезна и для студентов, поскольку может подготовить его к форме вопросов. Тесты построены так, что для правильного ответа не нужно делать сложных вычислений. Эти задачи предназначены для проверки теоретических знаний. Для правильного ответа часто нужно придумать контрпример к утверждению.

Многие существующие тесты требуют поиска единственного правильного ответа. В предлагаемом наборе используется более сложная схема. Количество правильных ответов варьируется от теста к тесту. Более того, правильный ответ может отсутствовать, поэтому во всех тестах присутствует ответ с номером 5. Он заменяет фразу «правильный ответ отсутствует».

Тесты разбиты на темы. В данной книге представлены тесты по двум разделам: «Комплексные числа» и «Матрицы и определители». В начале каждой темы помещены обозначения.

1 Комплексные числа

Обозначения

Малые латинские буквы обозначают числа из множеств R, C (вещественных и комплексных чисел соответственно). Комплексное число $z = a + ib$ где $a, b \in R$, а $i^2 = -1$. Это алгебраическая форма записи комплексного числа, $a = Re(z), b = Im(z)$ — вещественная и мнимая части числа, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа. Другое представление $z = r(\cos(t) + i\sin(t))$ — тригонометрическая форма. Здесь $r >= 0$ — модуль числа , $r = |z|$, а t — аргумент. На аргумент ограничений не накладывается. Сопряженное число задается формулой $\bar{z} = a - ib$. Комплексное число $z = a + i0$ и вещественное число a обозначаются одним и тем же символом a. На комплексной плоскости число $z = a + ib$ задаётся точкой с координатами (a, b) в прямоугольной системе координат и вектором, исходящим из начала координат в эту точку.

1.1 Тест

Известно, что $z \in R, z \neq 0$. Тогда:

1. $z = \bar{z}$;
2. $z = -\bar{z}$;
3. $z = |z|$;
4. $z^2 = |z|^2$;
5. .

1.2 Тест

Известно, что $z = \bar{z}$. Тогда:

1. $z = 0$;
2. $z = |z|$;
3. $z^2 = \bar{z}^2$;
4. $Re(z) = 0$;
5. .

1.3 Тест

Известно, что $z^{-1} = \bar{z}$. Тогда:

1. $z = \pm 1$;
2. $|z| = 1$;
3. $-z = \bar{z}$;
4. $|z + z^{-1}| \leq 1.5$;
5. .

1.4 Тест

Дано, что $z^2 = \bar{z}$. Тогда:

1. $z = \pm 1$;
2. $z = 0$;
3. Если $z \neq 0$, то $z^{-1} = \bar{z}$;
4. Если $z \neq 0$, то $|z^2 + z| < 2$;
5. .

1.5 Тест

Дано, что $z = -|z|$. Тогда:

1. $Re(z) > 0$;
2. $Im(z) > 0$;
3. Если $z \neq 0$, то $z^{-1} = z$;
4. Если $z \neq 0$, то $z^{-2} = |z|^{-2}$;
5. .

1.6 Тест

Дано, что $z = z^{-1}$. Тогда:

1. $|z| = 1$;
2. $Im(z) = 0$;
3. $z^{-1} = \bar{z}$;
4. $z^{-1} = |z|^{-1}$;
5. .

1.7 Тест

Дано, что $z = 1 + i$. Тогда:

1. z^2 —мнимое число;
2. $z^{-1} = \bar{z}$;
3. $|z^2| < 2$;
4. Существует натуральное n, для которого $z^n \in R$;
5. .

1.8 Тест

Дано, что $Re(z) = 0$. Тогда:

1. $z^2 \in R$
2. Если $z \neq 0$, то $Re(z^2) > 0$;
3. Если $z \neq 0$, то $z^{-1} = \bar{z}$;
4. Если $z \neq 0$, то $Im(z^2) > 0$;
5. .

1.9 Тест

Дано, что $z = -1 + i$. Тогда:

1. z^2 —мнимое число;
2. $z^{-1} = \bar{z}/2$;
3. $|z^{-1}| = 1/\sqrt{2}$;
4. Существует натуральное n, для которого $z^n \in R$ и $z^n < 0$;
5. .

1.10 Тест

Дано, что $z = -1 - i$. Тогда:

1. $z^4 \in R$;
2. $z^{-1} = \bar{z}/\sqrt{2}$;
3. $z(1 + i) \in R$;
4. Существует натуральное n, для которого $Re(z^n) = 0$;
5. .

1.11 Тест

Дано, что $z = r(\cos(t) + i\sin(t)), r > 0$. Тогда:

1. z однозначно определяет r и t ;
2. r и t однозначно определяют z ;
3. $z^{-1} = r(\cos(-t) + i\sin(-t))$;
4. $z^{-1} = r^{-1}(\cos(-t) - i\sin(-t))$;
5. .

1.12 Тест

Дано, что $z = r(\cos(t)+i\sin(t)), r > 0, z^2 = u(\cos(w)+i\sin(w)), u > 0$. Тогда:

1. $u = 2r$;
2. $w = 2t$;
3. $w - 2t$ кратно 2π;
4. $2w - t$ кратно π;
5. .

1.13 Тест

Дано, что $z = r(\cos(t)+i\sin(t)), r < 0, z = u(\cos(w)+i\sin(w)), u > 0$. Тогда:

1. $z^2 = r^2(\cos(2t) + i\sin(2t))$;
2. $w + t$ кратно π;
3. $w - t$ кратно 2π;

4. $z^2 = ru(\cos(t+w) + i\sin(t+w))$;

5. .

1.14 Тест *

Дано, что $z = -|z|(\cos(t) - i\sin(t))$. Тогда:

1. Аргумент z равен t;

2. Аргумент z равен $-t$;

3. Аргумент z равен $t+\pi$;

4. Аргумент z равен $\pi - t$;

5. .

1.15 Тест

Дано, что $z = (-1 + i\sqrt{3})/2$. Тогда:

1. $z^{-1} = \bar{z}$;

2. $Re(z^2) > 0$;

3. $z^2 = \bar{z}$;

4. $Im(z^2) > 0$;

5. .

1.16 Тест

Дано, что $z = (1 + i\sqrt{3})/2$. Тогда:

1. $z^{-1} = \bar{z}$;

2. $Re(z^2) > 0$;

3. $z^2 = \bar{z}$;

4. $Im(z^2) > 0$;

5. .

1.17 Тест

Дано, что z_1, z_2 разные корни уравнения $z^3 = 1$. Тогда:

1. $z_1 + z_2$ также корень этого уравнения;

2. $-z_1 - z_2$ также корень этого уравнения;

3. $z_1 - z_2$ также корень этого уравнения;

4. $z_1 + \bar{z}_2$ также корень этого уравнения;

5. .

1.18 Тест *

Дано, что z_1, z_2 разные корни уравнения $z^3 = -1$. Тогда:

1. $z_1 + z_2$ также корень этого уравнения;

2. $-z_1 - z_2$ также корень этого уравнения;

3. $z_1 - z_2$ также корень этого уравнения;

4. $z_1 + \bar{z}_2$ также корень этого уравнения;

5. .

1.19 Тест

Дано, что z есть корень уравнения $z^4 = 1$. Тогда:

1. $z = \pm 1$;

2. $|z| = 1$;

3. z^3 также корень этого уравнения;

4. Сумма двух разных корней не может быть корнем этого уравнения;

5. .

1.20 Тест

Дано, что z есть корень уравнения $z^4 = -1$. Тогда:

1. $z = \pm i$;

2. $|z| = 1$;

3. Заменив каждый корень сопяженным числом, получим то же самое множество чисел;

4. Сумма двух разных корней не может быть вещественным числом;

5. .

1.21 Тест

Дано, что z_1, z_2 есть разные корни уравнения $z^4 = -1$. Тогда:

1. $z_1 z_2$ корень того же уравнения;

2. $z_1 + z_2$ корень того же уравнения;

3. $Im(z_1)Im(z_2) \neq 0$;
4. $Re(z_1)Re((z_2) \neq 0$;
5. .

1.22 Тест

Дано уравнение $z^5 = 1$. Тогда:

1. Существуют пять разных корней этого уравнения;
2. Сумма всех корней равна 0;
3. Произведение всех корней равно -1;
4. Произведение всех корней равно 1;
5. .

1.23 Тест

Дано уравнение $z^5 = -1$. Тогда:

1. Произведение всех корней равно -1;
2. Сумма всех корней равна -1;
3. Сумма всех корней равна 1;
4. Произведение всех корней равно 1;
5. .

1.24 Тест

Пусть z удовлетворяет неравенству $|z - i| < 1$. Тогда:

1. $\bar{z}$ удовлетворяет этому неравенству;

2. z^{-1} удовлетворяет этому неравенству;

3. $-z$ удовлетворяет этому неравенству;

4. Существуют вещественные числа, удовлетворяющие этому неравенству ;

5. .

1.25 Тест

Пусть z удовлетворяет равенству $|z + 1| = 1$ Тогда:

1. $\bar{z}$ удовлетворяет этому равенству;

2. z^2 удовлетворяет этому равенству;

3. $-z$ удовлетворяет этому равенству;

4. Если $Im(z) = 0$, то $z = 0$.

5. .

1.26 Тест *

Пусть z_1, z_2 два числа, а угол между векторами, отвечающими этим точкам, равен $\pi/2$. Тогда:

1. $Re(z_1)Re(z_2) + Im(z_1)Im(z_2) = 0$;

2. $Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2) = 0$;

3. $Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2) = 0$;

4. $Re(z_1)Im(z_2) - Im(z_1)Re(z_2) = 0$;

5. .

1.27 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа,$|z_1| = |z_2|$, а угол между векторами, отвечающими этим точкам, равен π. Тогда:

1. $z_1 = z_2$;

2. $z_1 = -z_2$;;

3. $Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2) = 0$;

4. $Re(z_1)Im(z_2) - Im(z_1)Re(z_2) = 0$;

5. .

1.28 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа и $z_1/z_2 \in R$. Тогда:

1. $z_1, z_2 \in R$;

2. Разность аргументов чисел кратна π;

3. Разность аргументов чисел кратна 2π;

4. $\bar{z}_1 z_2 \in R$;

5. .

1.29 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа и $z_1 z_2 \in R$. Тогда:

1. $Re(z_1)Re(z_2) \leq 0$;

2. Сумма аргументов чисел кратна π;

3. Сумма аргументов чисел кратна 2π;

4. $\bar{z}_1/z_2 \in R$;

5. .

1.30 Тест

Пусть $z_1 = 1 + i$ и $z_1/z_2 \in R$. Тогда:

1. $\bar{z}_1 z_2 \in R$;

2. Разность аргументов чисел кратна π ;

3. Величина $t = 5\pi/4$ является допустимым значением для аргумента z_2;

4. $Im(z_1\bar{z}_2) = 0$;

5. .

1.31 Тест

Пусть $z_1 = 1 - i$ и $z_1 z_2 \in R$. Тогда:

1. $\bar{z}_1/z_2 \in R$;

2. Разность аргументов чисел кратна 2π ;

3. Величина $t = -3\pi/4$ является допустимым значением для аргумента z_2;

4. $Re(z_1\bar{z}_2) = 0$;

5. .

1.32 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа, лежащих на одном луче, выходящем из начала координат. Тогда:

1. $Re(z_1)Re(z_2) \geq 0$;
2. $z_1/z_2 \in R$;
3. $Im(z_1)Im(z_2) \geq 0$;
4. Равенство $\bar{z}_1/z_2$ невозможно;
5. .

1.33 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа, лежащих на одной прямой, проходящей через начало координат. Тогда:

1. Если $Re(z_1) = Re(z_2) \neq 0$, то $z_1 = z_2$;
2. Если $Im(z_1) = Im(z_2)$, то $z_1 = z_2$;
3. Если $Im(z_1) = -Im(z_2)$, то $z_1 z_2 \in R$;
4. Если $z_1 z_2 \in R$, то $Im(z_1) = -Im(z_2)$;
5. .

2 Матрицы и определители

Обозначения

Матрицы обозначаются большими латинскими буквами. Для множеств вещественных и комплексных чисел резервируются символы R, C. Символ $A_{m,n}$ обозначает матрицу из m строк и n столбцов.

Если эти параметры не указаны в явной форме, то они подразумеваются по умолчанию. В квадратной матрице числа строк и столбцов совпадают, и это общее число называют порядком матрицы. Символом $A[i,j]$ обозначаем элемент матрицы стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j; $A[i,*]$ — строку с номером i ,$A[*,j]$ — столбец с номером j. Символ $A(i,j)$ обозначает матрицу, полученную из исходной вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j. В диагональной матрице все ненулевые элементы могут находиться только на главной диагонали; ее обозначение $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Единичная матрица это квадратная матрица вида $I = diag(1, 1, \ldots, 1)$. Матрица, все элементы которой равны 0, называется нулевой и обозначается символом θ. A^T — транспонированная к A матрица. $\bar{A}$ — комплексная матрица, все элементы которой заменены сопряженными числами. A^{-1} обратная к A матрица, $|A|$ или $det(A)$ — определитель матрицы. Если $|A| \neq 0$, то матрица называется невырожденной. Матрица A верхнетреугольная , если $A[i,j] = 0$, $i > j$.

2.1 Тест

Даны две матрицы A, B. Тогда:

1. Если существуют произведения AB, BA , то обе матрицы квадратные;

2. Если существуют произведения AB, BA , и $AB = BA$, то обе матрицы квадратные;

3. Если A квадратная матрица и AB существует, то и BA существует;

4. Произведение двух квадратных матриц одного порядка существует всегда;

5. .

2.2 Тест

Даны две матрицы A, B. Тогда:

1. Если существуют произведения AB , то и произведение $A^T B^T$ существует;

2. Если существуют произведения $AB, A^T B^T$, то обе матрицы квадратные;

3. Если существуют произведения $AB, A^T B^T$, то $(A+B)^2$ существует;

4. Если существует $(A+B)^2$, то обе матрицы квадратные;

5. .

2.3 Тест

Известно, что $AB = \theta$. Тогда:

1. $A = \theta$ или $B = \theta$;

2. Обе матрицы нулевые;

3. Хотя бы одна матрица содержит нулевую строку или нулевой столбец;

4. Хотя бы одна матрица содержит нулевой элемент;

5. .

2.4 Тест

Даны две матрицы A, B. Тогда:

1. Если $(A+B)^2 = A^2 + B^2$, то $AB + BA = \theta$;

2. Если $AB + BA = \theta$, , то это квадратные матрицы;

3. Если матрицы квадратные, одного порядка и $AB = \theta$, то и $BA = \theta$;

4. Если $AB = BA = \theta$, хотя бы одна из матриц нулевая ;

5. .

2.5 Тест *

Дана $A_{2,2}$ матрица. Известно, что $A^2 = \theta$. Тогда:

1. $A = \theta$;

2. $A = A^T$;

3. A содержит нулевую строку или нулевой столбец;

4. A содержит нулевой элемент;

5. .

2.6 Тест

Для матрицы A определены две операции: $O_1(A)$ — к первой строке прибавляется вторая, а остальные строки не меняются; $O_2(A)$ — из последнего столбца вычитается предпоследний , а остальные не меняются. Тогда:

1. Равенство $O_1(O_2(A)) = O_2(O_1(A))$ выполнено всегда;

2. Это равенство справедливо всегда только для нулевой матрицы;

3. Это равенство справедливо всегда только для единичной матрицы;

4. Это равенство справедливо всегда только для диагональной матрицы;

5. .

2.7 Тест *

Для матрицы A определены две операции: $O_1(A)$ — к последней строке прибавляется все остальные, а другие строки не меняются; $O_2(A)$ — к последнему столбцу прибавляются все остальные, а другие столбцы не меняются. Тогда: :

1. Равенство $O_1(O_2(A)) = O_2(O_1(A))$ выполнено всегда;
2. Это равенство справедливо всегда только для нулевой матрицы;
3. Это равенство справедливо всегда только для единичной матрицы;
4. Это равенство справедливо всегда только для диагональной матрицы;
5. .

2.8 Тест

Определитель матрицы порядка n задается как сумма:

1. n слагаемых;
2. n^2 слагаемых;
3. $2n$ слагаемых;
4. n^n слагаемых;
5. .

2.9 Тест

При умножении матрицы порядка n на число a ее определитель:

1. Не меняется;

2. Умножается на a ;

3. Умножается на a^2;

4. Умножается на a^K, $K = n(n-1)/2$;

5. .

2.10 Тест

При умножении матрицы A порядка $n > 1$ на число $c \in C$ ее определитель не изменился. Тогда:

1. $c = 1$;

2. $|c| = 1$;

3. $det(A) = 0$;

4. $c^n = 1$;

5. .

2.11 Тест

При умножении невырожденной матрицы A порядка $n > 1$ на число $c \in C$ ее определитель не изменился. Тогда:

1. $c = \pm 1$;

2. $|c| = 1$;

3. $c^K = 1$, $K = n!$;

4. $c^n = 1$;

5. .

2.12 Тест

Пусть матрица A порядка n умножается на число c. Тогда справедливы соотношения:

1. $|cA| = c|A|$;

2. $|cA| = |c||A|$;

3. $|cA| = |c|^n|A|$;

4. $|cA| = c^n|A^T|$;

5. .

2.13 Тест

Имеются две квадратные матрицы A, B одного порядка. Тогда справедливы соотношения:

1. $|AB| = |B||A|$;

2. $|\bar{A}\bar{B}| = \overline{|A||B|}$;

3. $\overline{|AB|} = |\bar{A}||\bar{B}|$;

4. $|A\bar{B}| = |\bar{A}||B|$;

5. .

2.14 Тест

При транспонировании квадратной матрицы порядка n определитель:

1. Меняет знак;

2. Не меняется;

3. Умножается на $(-1)^n$;
4. Умножается на $(-1)^K$, $K = n(n-1)/2$;
5. .

2.15 Тест

Имеются две квадратные матрицы A, B одного порядка $n > 1$. Тогда справедливы соотношения:

1. $|AB^T| = |B||A^T|$;
2. Если $|A| = |B|$, то $A = B$;
3. Равенство $|A+B| = |A|+|B|$ возможно для ненулевых матриц;
4. Если $|A + I| = |I|$, то $A = \theta$;
5. .

2.16 Тест

Имеются две вещественные квадратные матрицы A, B одного порядка $n > 1$. Тогда справедливы соотношения:

1. $|AA^T| \geq 0$;
2. Если матрицы не вырождены, то $|A + B| \neq 0$;
3. Если $|A| \neq 0$, то $|A + I| \neq 0$;
4. $|(A + B)^2| = |A|^2 + |B|^2 + 2|AB|$;
5. .

2.17 Тест

Пусть матрица B порядка n получается из матрицы A путем записи строк в обратном порядке. Тогда:

1. $|B| = |A|$;
2. $|B| = -|A|$, если n нечетное;
3. $|B| = (-1)^K |A|$, $K = n(n-1)/2$;
4. $|B| = (-1)^K |A|$, $K = n(n+1)/2$;
5. .

2.18 Тест

Пусть матрица B порядка n получается из матрицы A путем записи столбцов в обратном порядке. Тогда:

1. $|B| = |det(A)|$;
2. $|B| = -|A|$, если n четное;
3. $|B| = (-1)^K |A|$, $K = n(n-1)/2$;
4. $|B| = 0$, если $|A| = 0$;
5. .

2.19 Тест

Пусть в матрице A порядка n первая строка $A[1,*]$ состоит из единиц. Положим $b_k = (-1)^k |A(1,k)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;
2. $-|A| = \sum_k b_k$;

3. $|A| = \sum_k b_k(-1)^k$;

4. $-|A| = n \sum_k b_k$;

5. .

2.20 Тест

Пусть в матрице A порядка n последний столбец $A[*, n]$ состоит из единиц. Положим $b_k = (-1)^k |A(k, n)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;

2. $|A| = \sum_k b_k$, если n четное;

3. $|A| = \sum_k b_k$, если n нечетное;

4. $-|A| = n \sum_k b_k$;

5. .

2.21 Тест

Пусть в матрице A порядка n $A[1, *]$, $A[2, *]$ состоят из единиц. Положим $b_k = (-1)^k |A(k, n)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;

2. $|A| = \sum_k b_k$, если n четное;

3. $|A| = \sum_k b_k(-1)^k$;

4. $-|A| = n \sum_k b_k$;

5. .

2.22 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > A[1,1] = 1$, а все остальные элементы в первой строке нулевые. Тогда:

1. $|A| \neq= 0$;
2. Если заменить элемент $A[n,1]$ на $A[n,1]+1$, то определитель не изменится;
3. Если заменить элемент $A[n,1]$ на $A[n,1]+1$, то определитель увеличится на 1;
4. Если заменить элемент $A[1,1]$ на $A[1,1]+1$, то определитель увеличится вдвое;
5. .

2.23 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ $A[n,n] = 2$, а все остальные элементы в последнем столбце нулевые. Тогда:

1. $|A| \neq= 0$;
2. Если заменить элемент $A[n,1]$ на $A[n,1]+1$, то определитель не изменится;
3. Если заменить элемент $A[n,1]$ на $A[n,1]+1$, то определитель увеличится на 1;
4. Если заменить элемент $A[n,n]$ на $A[n,n]+1$, то определитель увеличится вдвое;
5. .

2.24 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ строка $A[1, *]$ состоит из двоек. Положим $b_k = (-1)^k |A(1, k)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;
2. $|A| = -2 \sum_k b_k$;
3. $-|A| = 2^n \sum_k b_k$;
4. $|A| = (-1)^n 2 \sum_k b_k$;
5. .

2.25 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ строка $A[n, *]$ состоит из двоек. Положим $b_k = (-1)^k |A(n, k)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;
2. $|A| = -2 \sum_k b_k$;
3. $-|A| = 2^n \sum_k b_k$;
4. $|A| = (-1)^{n+1} 2 \sum_k b_k$;
5. .

2.26 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ после циклической перестановки строк (первая строка стала последней) определитель не изменился. Тогда:

1. $|A| = 0$;
2. n — четное число;

3. n —нечетное число;

4. $n(n-1)/2$ — четное число;

5. .

2.27 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ $A[i,j] = 1$, $j > 1$,а остальные элементы i-ой строки нулевые. Положим $b_k = (-1)^k |A(i,k)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;

2. $|A| = (-1)^i \sum_k b_k$;

3. Если заменить элемент $A[i,j]$ на $A[i,j+|A|$ то определитель увеличится (уменьшится) на $|A|^2$;

4. Если заменить элемент $A[i,j]$ на $A[i,j+1$ то определитель увеличится (уменьшится) на $|A|$;

5. .

2.28 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ только n элементов отличны от 0. Тогда:

1. Равенство $|A| = 0$ возможно;

2. Неравенство $|A| \neq 0$ возможно;

3. Если к первой строке прибавить все остальные строки и строка станет ненулевой, то $|A| \neq 0$;

4. Если к первой строке прибавить все остальные строки и получившаяся строка не содержит нулей, то $|A| \neq 0$;

5. .

2.29 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ только n элементов отличны от 0, и $|A| \neq 0$. Тогда:

1. Все ненулевые элементы стоят на главной либо побочной диагоналях;
2. Переставляя строки и столбцы, можно поместить все ненулевые элементы на главную диагональ;
3. Переставляя только строки, можно поместить все ненулевые элементы на главную диагональ
4. Если все ненулевые элементы положительны и расположены на побочной диагонали, то $|A| < 0$;
5. .

2.30 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ только $n + 1$ элемент отличен от 0, и $|A| \neq 0$. Тогда:

1. Все элементы на главной либо побочной диагонаях ненулевые;
2. Переставляя строки и столбцы, можно поместить любые n ненулевых элементов на главную диагональ;
3. Переставляя только строки, можно поместить любые n ненулевых элементов на главную диагональ;
4. Всегда существует ненулевой элемент, меняя который нельзя изменить определитель;
5. .

2.31 Тест

Известно, что в матрице A порядка $n > 1$ только $n+2$ элемента отличны от 0, и все они равны 1. Тогда:

1. Если главная диагональ матрицы заполнена единицами, то $|A| \neq 0$;
2. Пусть главная диагональ матрицы заполнена единицами. Прибавим к последней строке все остальные. Если новая строка содержит две двойки, то $|A| = 0$;
3. Прибавим к последней строке все остальные. Если новая строка содержит тройку, то $|A| = 0$;
4. Прибавим к последней строке все остальные. Если новая строка содержит три двойки, то $|A| = 0$;
5. .

2.32 Тест *

Известно, что в матрице A порядка $n > 1$ только $n+2$ элемента отличны от 0, и все они равны 1. Тогда для определителя возможны значения:

1. 0;
2. ± 1;
3. ± 2;
4. ± 3;
5. .

2.33 Тест

Известно, что в матрице A порядка $n > 1$ только $n + 2$ элемента отличны от 0, и все они равны ± 1. Тогда для определителя возможны значения:

1. 0;
2. ± 1;
3. ± 2;
4. ± 3;
5. .

2.34 Тест

Даны две квадратные матрицы A, B одного порядка, причем $AB = I$. Тогда:

1. Это единичные матрицы;
2. Если одна из них единичная матрица, то и вторая тоже;
3. $|A| = |B| = 1$;
4. $|A||B| = 1$;
5. .

2.35 Тест

Даны две квадратные матрицы A, B одного порядка, причем $AB = I$. Тогда:

1. $BA = I$;
2. $B^{-1}A^{-1} = I$;

3. $B^T A^T = I$;

4. $B^{T^{-1}} A^{-1^T} = I$;

5. .

2.36 Тест

Даны две квадратные матрицы A, B одного порядка, причем $AB = I$. Тогда:

1. $BA = AB$;

2. $|A| \neq 0$;

3. $|B| = 1/|A|$;

4. $A^2 B^2 = I$;

5. .

2.37 Тест

Известно, что квадратная матрица A удовлетворяет уравнению $AA^T = I$. Тогда:

1. $A = A^T$;

2. $|A| = \pm 1$;

3. $A^2 = I$;

4. $AA^T A = A$;

5. .

2.38 Тест *

Известно, что квадратная матрица второго порядка удовлетворяет уравнению $A = A^{-1}$. Тогда:

1. $A = I$;

2. A — диагональная матрица;

3. $A = A^T$;

4. $|A| = \pm 1$;

5. .

2.39 Тест

Известно, что квадратная матрица второго порядка удовлетворяет уравнению $A = A^{-1}$. Тогда:

1. Если $|A| = 1$, то это диагональная матрица;

2. Если $|A| = -1$, то это диагональная матрица;

3. $A = A^T$;

4. Матрица содержит нулевые элементы;

5. .

2.40 Тест

Известно, что квадратная матрица порядка $n > 1$ удовлетворяет уравнению $A^2 = A$. Тогда:

1. $A = \theta$;

2. Если $|A| = 0$, то $A = \theta$;

3. Если $|A| \neq 0$, то $A = I$;

4. A — диагональная матрица;

5. .

2.41 Тест

Известно, что квадратная матрица A второго порядка удовлетворяет уравнению $A^3 = A$. Тогда:

1. Если $|A| = 1$, то $A = A^{-1}$;

2. Если $|A| = 0$, то $A = \theta$;

3. Если $|A| = -1$, то $A = A^T$;

4. Матрица содержит нулевые элементы;

5. .

2.42 Тест

Дана квадратная матрица A порядка $n > 1$. Пусть $B = A^{-1}$. Известно, что столбец $B[*, 1]$ состотит из единиц. Тогда :

1. Все элементы строки $A[1, *]$ равны между собой;

2. Если элементы строки $A[1, *]$ равны между собой, то $A[1, 1] = 1/n$;

3. $\sum_k A[i, k] = 0$, если $i > 1$;

4. Строка $A[i, *]$, $i > 1$ не может состоять из одинаковых элементов;

5. .

2.43 Тест

Дана квадратная матрица A порядка $n > 1$. Пусть $B = A^{-1}$. Известно, что строка $A[1,*]$ состотит из единиц. Тогда :

1. Все элементы столбца $B[*,1]$ равны между собой;
2. $\sum_k B[k, 1 = 1$;
3. $\sum_k B[k, 2] = 0$;
4. Столбец $B[*,i]$, $i > 1$ не может состоять из одинаковых элементов;
5. .

2.44 Тест

Пусть A, B — две верхнетреугольные матрицы одного порядка. Тогда:

1. AB — также верхнетреугольная матрица ;
2. Если $|A| \neq 0$, то A^{-1} — тоже верхнетреугольная матрица;
3. Если $|A| \neq 0$, то $(A^T)^{-1}$ — тоже верхнетреугольная матрица
4. $A + B$ — тоже верхнетреугольная матрица;
5. .

2.45 Тест

Пусть A, B — две верхнетреугольные матрицы одного порядка $n > 1$. Тогда:

1. $|A + B| = |A| + |B|$;
2. $|A + I| = |A| + 1$;

3. Ситуация $|A| = 0$, $|B| = 0$, $|A + B| \neq 0$ невозможна;

4. Ситуация $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, $|A + B| = 0$ невозможна;

5. .

2.46 Тест

Пусть A, B — две верхнетреугольные матрицы одного порядка $n > 1$. Тогда:

1. $|A + B| = |A| + |B|$;

2. $|A + I| = |A| + 1$;

3. Ситуация $|A| = 0$, $|B| = 0$, $|A + B| \neq 0$ невозможна;

4. Ситуация $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, $|A + B| = 0$ невозможна;

5. .

2.47 Тест

Пусть A верхнетреугольная невырожденная матрица порядка $n > 1$, в которой только $n + 1$ ненулевой элемент. Тогда:

1. A^{-1} содержит только $n + 1$ ненулевой элемент;

2. $|A + A^{-1}| \neq 0$;

3. $|A^2 + A^{-2}| \neq 0$;

4. $|A^3 + A^{-2}| \neq 0$;

5. .

2.48 Тест

Пусть A верхнетреугольная матрица порядка $n > 1$, в которой все ненулевые элементы равны ± 1 . Тогда:

1. $|A| \neq 0$;
2. $|A + A^{-1}| \neq 0$;
3. $|A^2 + A^{-2}| \neq 0$;
4. $|A^3 + A^{-2}| \neq 0$;
5. .

3 Ответы

Тест 1.14

Решение. Приведем заданное число к стандартной тригонометрической форме: сначала внесем минус в скобки, получим $z = |z|(-\cos(t) + i\sin(t))$, а затем применим формулы приведения: $-\cos(t) = \cos(\pi - t), \sin(t) = \sin(\pi - t)$. Получаем исходное число в стандартной тригонометрической форме $z = |z|(\cos(\pi - t) + i\sin(\pi - t))$.

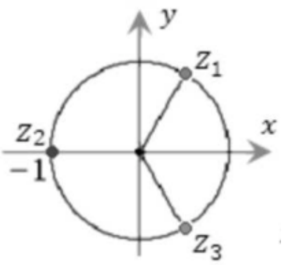
Правильный ответ: 4.

Тест 1.18

Решение. Корни исходного уравнения располагаются на окружности радиуса 1 в вершинах правильного треугольника:

Таким образом, сумма трех различных корней равна нулю: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Поэтому любой из кубических корней из -1 можно выразить через пару оставшихся: $z_3 = -z_1 - z_2$. . Отрицательные ответы на другие возможности вытекают из приведенного рисунка.

Правильный ответ: 2.



Тест 1.26

Решение. Пусть t – аргумент первого числа в тригонометрической форме, а $\pi/2+t$ – аргумент второго числа. Тогда, применяя формулы приведения, представим первое число как $z_1 = r_1(\cos(t) + i\sin(t))$, а второе - как $z_2 = r_2(-\sin(t) + i\cos(t))$. Для проверки подставляем в приведенные в пунктах 1-4 выражения действительные и мнимые части этих чисел.

Правильный ответ: 1.

Тест 2.5

Решение. Нулевая матрица удовлетворяет условию задачи. Попробуем найти ненулевые решения.

Пусть $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ искомая ненулевая матрица. Возводим в квадрат, получаем нулевую матрицу $\begin{bmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{bmatrix}$, тогда b и c не могут одновременно равняться нулю. Отсюда, $a = -d$.

Если $b = 0, c \neq 0$, то получаем, например, матрицы вида $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Если $b \neq 0, c \neq 0$, то $a \neq 0, d \neq 0$ и получаем, например, матрицы вида $\begin{bmatrix} a & a^2/c \\ -c & -a \end{bmatrix}$. Последняя матрица не удовлетворяет ни одному из пунктов.

Правильный ответ: 5.

Тест 2.7

Любую линейную комбинацию строк матрицы A можно получить умножением ее на подходящую матрицу L слева, а линейную комбинацию столбцов — умножением на подходящую матрицу R справа. Умножение матриц аасоцитивно: $(LA)R = L(AR)$.

Правильный ответ: 1.

Тест 2.32

Решение.

Если $n = 2$, то определитель равен 0, то есть пункт 1 возможен.

Пусть $n > 2$. Если имеются нулевые столбцы, то определитель равен 0 (пункт 1). В противном случае существует столбец с единственной 1. Вычеркивая строку и столбец с этой единицей получаем определитель меньшего порядка и с меньшим числом единиц. Повторяем процедуру и таким образом дело сводится к определитею второго порядка, в котором 1,2,3 или 4 единицы.

Правильные ответ: 1 и 2.

Тест 2.38

Решение. Из условия задачи получаем $A^2 = I$ или, переходя к определителям, $|A|^2 = 1$. Отсюда следует истинность пункта 4.

Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ удовлетворяет условию задачи, но не удовлетворяет пунктам 1,2 и 3.

Правильный ответ: 4.

Учебное издание

Латыпов Рустам Хафизович, **Столов** Евгений Львович

Тесты по курсу "Алгебра и геометрия"
Комплексные числа, матрицы и определители

Учебное пособие