

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.Х. Гиниятова, Е.В. Рунг

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по направлению
информационные системы и технологии

Казань
2020

Оглавление

Введение	4
Комплексные числа и многочлены	5
1. Алгебраическая форма записи комплексного числа	5
2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа	7
3. Корни многочленов. Разложение многочлена на множители. Теорема Виета	13
4. Схема Горнера. Корни многочленов с целыми коэффициентами	17
Вычисление определителей порядка n	21
5. Перестановки. Определение определителя n -го порядка	21
6. Определители второго и третьего порядков. Свойства определителей	24
7. Теорема о разложении. Метод эффективного понижения порядка	29
Методы решения систем линейных алгебраических уравнений	33
8. Действия с матрицами	33
9. Обратная матрица. Матричные уравнения	37
10. Ранг матрицы	40
11. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений с определителем, отличным от нуля	43
12. Однородные системы линейных уравнений	47
13. Системы линейных уравнений общего вида	51
Аналитическая геометрия	56
14. Векторы. Скалярное произведение векторов	56
15. Векторное и смешанное произведение векторов	68
16. Плоскость	76
17. Прямая в пространстве	91
18. Различные задачи на прямую и плоскость	99

Линейный оператор в линейном пространстве	108
19. Линейное пространство. Определение линейной зависимости и линейной независимости систем векторов	108
20. Базисы. Размерность пространства	113
21. Преобразование базиса и координат. Линейное подпространство	117
22. Линейный оператор в линейном пространстве	121
23. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора	125
Евклидово пространство. Квадратичные формы	130
24. Определение скалярного произведения. Ортогональные и ортонормированные системы векторов	130
25. Метод Лагранжа	134
26. Приведение квадратичной формы к главным осям. Критерий Сильвестра	137
Ответы и указания к решению задач	140
Литература	201

Введение

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по курсу линейной алгебры и предназначено для студентов Института вычислительной математики и информационных технологий, обучающихся по направлениям "Информационные системы и технологии".

Следует отметить, что дисциплина линейная алгебра читается студентам в первых двух семестрах первого курса и состоит из лекций и практических занятий. Данное пособие содержит материал для проведения практических занятий в первом и втором семестрах. В разделе "Основные понятия и теоремы" приводятся без доказательства основные теоретические сведения, необходимые для решения задач. В разделе "Задачи для самостоятельного решения" приведен определенный минимум упражнений, достаточный для усвоения основных приемов решения задач по каждой теме.

Комплексные числа и многочлены

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 1. Число $i = \sqrt{-1}$ называют *мнимой единицей* и для его обозначения используют букву i , т.е. $i^2 = -1$.

Определение 2. Запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексных чисел. Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $a + bi$ и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, действительное число b называют *мнимой частью* комплексного числа $a + bi$ (обозначается $b = \operatorname{Im} z$).

Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме выполняются следующие операции:

1) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, то есть когда равны соответственно действительные и мнимые части комплексных чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Операции сравнения для комплексных чисел не определены. Поэтому понятий "больше" и "меньше" для комплексных чисел не существует. Записи $i < 1$, $2 + i > 0$ лишены всякого смысла.

2) Операции сложения и вычитания выполняются по формулам:

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \quad (1)$$

$$(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i. \quad (2)$$

3) Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, производится следующим образом:

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i. \quad (3)$$

4) Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$, то есть числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*. Число, сопряженное к z обозначается \bar{z} . Сумма $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$ — всегда действительное число, а произведение $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ — неотрицательное число.

5) Деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме выполняется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \quad (4)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\bar{z}_1 \cdot z_2$, если

a) $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$,

b) $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - 7i$,

c) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

2. Вычислить i^n , где n — натуральное число.

3. Представить z в алгебраической форме:

a) $z = \frac{41i^{18} + 63i^{37}}{50i^{16}} - \frac{6i + i^{20}}{i^8 - 7i}$, b) $z = \frac{13i^{16} + 12i}{6i + 8i^{10}} + \frac{(2i + 1)^2}{i + 2}$,

c) $z = \frac{5 + 12i}{8 - 6i} + \frac{(1 + 2i)^2}{2 + i}$, d) $z = \frac{2i^6 + i^{13}}{1 + i^5} + \frac{6i^9 - 6i^{44}}{5i^{100} - 2i^4}$.

4. Найти действительные значения x и y , при которых комплексные числа

a) $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5$ и $z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$ являются сопряженными.

b) $z_1 = x^2 - 7x + 9yi$ и $z_2 = y^2i + 20i - 12$ равны.

5. Найти действительные x и y из уравнений:

a) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$,

b) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$,

c) $x + y - ixy = i$.

6. Пусть $z = x + iy \neq 0$. Найти $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2}$.

7. Решить системы уравнений:

$$a) \begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8. \end{cases}$$

8. Вычислить:

$$a) i \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^{100},$$

$$b) i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}.$$

9. Выяснить при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

10. Найти комплексные числа, сопряженные своему квадрату.

11. Доказать, что:

1) комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\bar{z} = z$;

2) комплексное число z является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\bar{z} = -z$;

2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Основные понятия, формулы и теоремы

Каждому комплексному числу $a + bi$ может быть поставлена в соответствие точка $M(a, b)$ плоскости и, наоборот, каждой точке $M(a, b)$ — комплексное число $(a, b) = a + bi$ (см. рис.1). Установленное таким образом соответствие является взаимно-однозначным.

Это соответствие дает возможность рассматривать комплексные числа как точки координатной плоскости. Эта плоскость называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцис — *действительной осью* (на ней расположены точки, соответствующие точкам $(a, 0) = a$), а ось ординат — *мнимой осью* (на ней лежат точки, соответствующие мнимым числам $(0, b) = bi$).

Комплексному числу $(a, b) = a + bi$ соответствует вектор \overline{OM} .

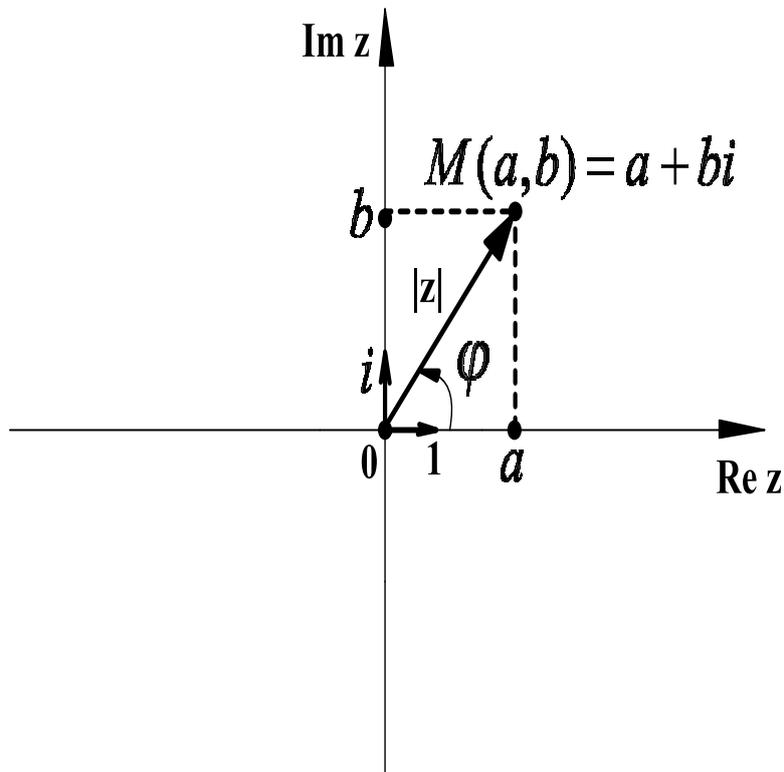


Рис. 1

Определение 3. *Модулем* комплексного числа $(a, b) = a + bi$ называется длина вектора, соответствующего этому числу.

Для модуля числа z используется обозначение $|z|$. Легко можно доказать, что

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

Определение 4. *Аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z , причем величина угла считается положительной, если отчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отчет производится по часовой стрелке.

Аргумент комплексного угла определяется неоднозначно. Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга на число, кратное 2π . Для обозначения всех аргументов комплексного числа $z = a + bi$ используется обозначение $\arg z$. Через φ обычно обозначают *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$,

то есть $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ¹. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + 0i$ не определен.

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно найти по формулам:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \quad (6)$$

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно так же найти из следующего уравнения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Уравнение (7) не равносильно системе (6), оно имеет больше решений, поэтому если учесть, что $-\pi < \varphi \leq \pi$, то из формулы (7) находим

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a) & \text{при } a \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(b/a) + \pi & \text{при } a < 0, b \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(b/a) - \pi & \text{при } a < 0, b < 0; \end{cases} \quad (8)$$

Определение 5. Каждое комплексное число $z = a + bi$, отличное от нуля, может быть записано в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (9)$$

где r – модуль числа, а φ – один (любой) из его аргументов. Форма записи комплексного числа в виде (9) называется *тригонометрической формой записи комплексных чисел*.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + ib$ к тригонометрической необходимо:

1. Найти модуль $r = |z|$ комплексного числа, используя формулу (5).
2. Найти один из аргументов φ комплексного числа z , воспользовавшись формулой (8). Значения $\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ основных табличных углов приведены на рисунке 13.

$\frac{b}{a}$	0	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm \sqrt{3}$	$a=0, b>0$	$a=0, b<0$
$\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$	0	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

Рис. 2

3. Записать число z в тригонометрической форме, используя равенство (9).

Тригонометрическая форма записи комплексного числа оказывается очень удобной при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня.

Над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, можно выполнять следующие операции:

1) Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ равны тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то есть когда модули чисел равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где k — некоторое целое число.

2) Умножение двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ выполняется по следующей формуле:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (10)$$

3) Деление двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ выполняется по следующей формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (11)$$

4) Возведение комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ в целую положительную степень n следует из формулы:

¹В качестве значения аргумента можно брать величину, принадлежащую промежутку $[0, 2\pi)$.

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)), \quad (12)$$

5) Число w называется *корнем степени n* из $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (обозначается $\sqrt[n]{z}$), если $w^n = z$.

Если $z \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа z . Все они получаются из формулы ²

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (13)$$

Задачи для самостоятельного решения

12. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

$$\begin{aligned} a) z = -1 + i, \quad b) z = \sqrt{3} - i, \quad c) z = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i, \quad d) z = 1 + \sqrt{3} \cdot i, \\ e) z = 16, \quad f) z = -1, \quad g) z = 4i, \quad h) z = -\sqrt{5} \cdot i, \\ i) z = \sqrt{3} + i, \quad j) z = -1 - i, \quad k) z = \sqrt{2} - \sqrt{6} \cdot i, \quad l) z = 8, \\ m) z = -16i, \quad n) z = -\sqrt{48} + 4i, \quad o) z = -32, \quad p) z = i. \end{aligned}$$

13. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$\begin{aligned} a) \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1, \\ b) |z - 1| \geq |z - i|, \\ c) \begin{cases} 1 \leq z \cdot \bar{z} \leq 4, \\ -\sqrt{3} \leq \operatorname{Im} z \leq 0; \end{cases} \\ d) |z| < 2, \operatorname{Re} z \geq 1, 0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}, \\ e) \sin |z| > 0, \\ f) (1 - i)\bar{z} = (1 + i)z, \\ g) |z + 1 + 2i| \leq 0, \\ h) \frac{\pi}{4}(8n + 1) < \arg(z + i) < \frac{\pi}{2}(4n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ i) \arg z = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ j) \lg |z + i| < 1, \end{aligned}$$

²Формулы (12), (13) возведения в степень и извлечения корня часто называют формулами Муавра, так как именно в работах английского математика Абрахама де Муавра (1667–1754) была впервые решена задача о выражении корней степени n из данного числа.

- k) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 25$,
 l) $|z + i| < 1$, $|z + 1| \geq 1$,
 m) $|z - 2 - i| \geq 1$, $1 \leq \operatorname{Re} z < 3$, $0 < \operatorname{Im} z \leq 3$,
 n) $|z + 1| = |z - i|$,
 o) $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$,
 p) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.

14. Найти все значения корней из комплексного числа:

- a) $\sqrt[3]{-4 + i\sqrt{48}}$, b) $\sqrt[4]{-64}$, c) $\sqrt[3]{1}$, d) $\sqrt[8]{1 + i}$.

15. Упростить число z и, если возможно, записать число z в алгебраической форме:

- a) $z = \frac{(i - \sqrt{3}) \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)}{1 - i}$,
 b) $z = (1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 c) $z = \frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1 - i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$,
 d) $z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{13}$,
 e) $z = (1 + i)^{20}$,
 f) $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}$,
 g) $z = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$,
 h) $z = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) (1 + \sqrt{3}i)^7}{i^5}$.

16. Возвести в натуральную степень n

- a) $\left(1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n$,
 b) $\left(1 + \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)^n$.

17. Пусть n – натуральное число. Доказать, что

- a) $(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$,
 b) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$,
 c) $\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n = \frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha}$.

3. Корни многочленов. Разложение многочлена на множители.

Теорема Виета

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение корня многочлена

Определение 6. *Многочленом степени n с комплексными коэффициентами* называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n, \quad (14)$$

где a_i – комплексные числа. Числа a_i называются *коэффициентами многочлена*, а a_0 называется *старшим коэффициентом многочлена*.

Определение 7. Пусть задан многочлен n -ой степени с комплексными коэффициентами a_i :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n.$$

Комплексное число α называется *корнем многочлена*, если

$$f(\alpha) = 0.$$

Определение 8. Пусть задан многочлен n -ой степени с комплексными коэффициентами a_i :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n.$$

Корень $x = \alpha$ многочлена $f(x)$ называется *корнем многочлена $f(x)$ кратности k* , если $(x - \alpha)^k$ – делитель $f(x)$, а $(x - \alpha)^{k+1}$ не является делителем $f(x)$. Таким образом, если $x = \alpha$ – корень многочлена $f(x)$ кратности k , то

$$f(x) = (x - \alpha)^k \cdot g(x),$$

где $g(x)$ – многочлен степени m , ($m \leq n - k$).

Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители

Теорема 1 (Основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз какова его кратность. Таким образом, любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами представим в виде*

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n), \quad (15)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)$ с учетом их кратности, a_0 – старший коэффициент многочлена.

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на действительные множители

Теорема 2. *Если комплексное число w является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то сопряженное число \bar{w} также является корнем этого многочлена.*

Следствие 1. *Если комплексное число $w = a + bi$ ($b \neq 0$) является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то этот многочлен делится нацело на квадратный трехчлен*

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

также имеющий действительные коэффициенты.

Теорема 3. *Любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.*

Теорема Виета

Теорема 4 (Виета). *Пусть $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$. Пусть также x_1, x_2, \dots, x_n – корни многочлена $f(x)$. Тогда коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n многочлена $f(x)$ и его корни x_1, x_2, \dots, x_n связаны*

19. Решить уравнения:

- a) $z^3 - 1 = i$, b) $z^4 - i = 1$,
c) $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$, d) $z^6 + 64 = 0$.

20. Построить многочлены наименьшей степени с комплексными коэффициентами по данным корням:

- a) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1 + i$;
b) тройной корень -1, простые 3 и 4;

21. Построить многочлены наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:

- a) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1 + i$;
b) тройной корень $2 - 3i$.

22. Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 13x^2 + 36$ на множители

- a) с вещественными коэффициентами;
b) с комплексными коэффициентами.

23. Разложить многочлен $f(x)$ на множители с комплексными коэффициентами:

- a) $f(x) = x^3 + 8$; b) $f(x) = x^2 + 4$;
c) $f(x) = x^2 - 6x + 10$; d) $f(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$.

24. Разложить многочлен $f(x)$ на множители с вещественными коэффициентами:

- a) $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2$;
b) $f(x) = x^4 + 8x^2 + 12$;
c) $f(x) = x^6 + 27$;
d) $f(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$.

25. Найти соотношение между коэффициентами кубического уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, при котором один корень равен сумме двух других.

26. Проверить, что один из корней уравнения

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$$

равен сумме двух других, и решить уравнение.

27. Определить λ так, чтобы один из корней уравнения

$$x^3 - 7x + \lambda = 0$$

равнялся удвоенному другому.

28. Определить a, b, c так, чтобы они были корнями уравнения

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

29. Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Определить λ .

4. Схема Горнера. Корни многочленов с целыми коэффициентами

Основные понятия, формулы и теоремы

Схема Горнера и ее применение

1. *Схема Горнера* используется при делении многочлена $f(x)$ на линейную функцию $x - x_0$.

Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = (x - x_0)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + r,$$

тогда коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ и остаток от деления r можно найти из следующей таблицы:

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	$b_1 = x_0b_0 + a_1$...	$b_{n-1} = x_0b_{n-2} + a_{n-1}$	$r = x_0b_{n-1} + a_n = f(x_0)$

2. При делении многочлена на линейную функцию остаток от деления r равен $f(x_0)$, поэтому *схема Горнера позволяет найти значение многочлена $f(x)$ в точке x_0 .*

3. Способ Горнера позволяет определить *показатель кратности корня*. Пусть заданы многочлен $f(x)$ n -ой степени и его корень $x = \alpha$, тогда для того, чтобы определить показатель k кратности корня $x = \alpha$ необходимо: разделить $f(x)$ на $(x - \alpha)$, если остаток от деления r равен 0, то

частное опять разделить на $(x - \alpha)$ и т.д., деление продолжать до тех пор, пока остаток от деления r равен 0. Таким образом, алгоритм заканчивается только тогда, когда $r \neq 0$. Показатель k кратности корня $x = \alpha$ равен числу полученных нулевых остатков.

4. Способ Горнера позволяет найти коэффициенты в разложении ряда Тейлора.

Определение 9. Пусть задан многочлен степени n $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$. Ряд Тейлора в точке x_0 для многочлена $f(x)$ имеет следующий вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (16)$$

Способ Горнера разложения многочлена $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$ состоит в следующем: делим $f(x)$ на $(x - x_0)$; частное снова делим на $(x - x_0)$; частное опять делим на $(x - x_0)$ и т.д., пока не получим в частном одно число. Остатки от этих делений и последнее частное являются коэффициентами в (16), то есть

$$f(x_0), f'(x_0), \frac{f''(x_0)}{2!}, \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}, \dots, \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	$b_1 = x_0b_0 + a_1$...	$b_{n-1} = x_0b_{n-2} + a_{n-1}$	$r_0 = f(x_0)$
x_0	$c_0 = b_0$	$c_1 = x_0c_0 + b_1$...	$r_1 = f^{(1)}(x_0)$	
x_0	$d_0 = c_0$	$d_1 = x_0d_0 + c_1$...		
...		
x_0	a_0	$r_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}$			
x_0	$r_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$				

Корни многочленов с целыми коэффициентами

Теорема 5. Если целое число α является корнем многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ с целыми коэффициентами a_i , то α является делителем младшего коэффициента a_n .

Следствие 2. Пусть дан многочлен $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ с целыми коэффициентами a_i и пусть α – целое число и корень многочлена $f(x)$, тогда выражения $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ и $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ являются целыми числами.

Теорема 6. Если рациональное число $\frac{P}{Q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ с целыми коэффициентами a_i , то P – делитель младшего коэффициента a_n , а Q – делитель старшего коэффициента a_0 .

Задачи для самостоятельного решения

30. Выполнить деление с остатком, найти частное от деления $q(x)$ и остаток $r(x)$:

a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;

b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$;

31. При каком условии многочлен $x^3 + px + q$ делится на многочлен вида $x^2 + mx - 1$.

32. При каком условии многочлен $x^4 + px^2 + q$ делится на многочлен вида $x^2 + mx + 1$.

33. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$ и выполнить деление с остатком на $(x - x_0)$:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$;

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $x_0 = -3$.

34. Чему равен показатель кратности корня:

a) 2 для многочлена $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;

b) -2 для многочлена $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

35. Найти рациональные корни многочленов:

a) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$; b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

c) $x^5 - 7x^2 - 12x^2 + 6x + 36$; d) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

e) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$; f) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$;

g) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$; h) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

36. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степе-

ням $(x - x_0)$:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1;$

b) $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1;$

c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x_0 = 2.$

37. Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

a) $\frac{x^3 - x + 1}{(x - 2)^5}; \quad b) \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x + 1)^5}.$

38. Найти значения многочлена $f(x)$ и его производных при $x = x_0$:

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \quad x_0 = 2;$

b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 1, \quad x_0 = 1.$

Вычисление определителей порядка n

5. Перестановки. Определение определителя n -го порядка

Основные понятия, формулы и теоремы

Перестановки

Пусть дано некоторое конечное множество Ω , состоящее из n натуральных чисел, то есть $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Эти числа можно упорядочить различными способами. Так, числа 1, 2, 3, 4 можно расположить также следующими способами: 3, 1, 2, 4 или 2, 4, 1, 3 и т.д.

Определение 10. Любое расположение чисел $1, 2, \dots, n$ в некотором определенном порядке называется *перестановкой* из n чисел.

Определение 11. *Транспозицией* называется такое преобразование перестановки, при котором меняются местами какие-либо два символа (не обязательно стоящие рядом), а все остальные символы остаются на своих местах.

Определение 12. Если в перестановке символ с высшим номером стоит раньше символа с низшим номером, то такое явление называется *инверсией*. Перестановка называется *четной*, если ее символы составляют четное число инверсий, и *нечетной* — в противоположном случае.

Число всех различных перестановок из n символов равно $n!$ При $n \geq 2$ число четных перестановок из n символов равно числу нечетных перестановок, то есть равно $\frac{n!}{2}$.

Определение определителя n -го порядка

Пусть дана квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Рассмотрим всевозможные произведения n элементов матрицы A , взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, то есть произведения вида

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

где индексы j_1, j_2, \dots, j_n составляют некоторую подстановку из чисел $1, 2, \dots, n$. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, то есть равно $n!$ Будем считать все эти произведения членами будущего определителя n -го порядка, соответствующего матрице (17).

Определение 13. *Определителем n -го порядка, соответствующим матрице (17), называется следующая сумма*

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \quad (18)$$

распространенная на всевозможные различные перестановки $j = (j_1, \dots, j_n)$. Число $t(j)$ равно числу инверсий в перестановке $j = (j_1, \dots, j_n)$. Произведение $(-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ называется *членом определителя*.

Задачи для самостоятельного решения

39. Определить число инверсий в перестановках:

- a) 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8,
- b) 2, 3, 5, 4, 1,
- c) 6, 3, 1, 2, 5, 4,

- d) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2,
 e) 1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5,
 f) 2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4.

40. Считая, что 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — исходное расположение, подобрать i и k так, чтобы

- a) перестановка 1, 2, 7, 4, i , 5, 6, k , 9 была четной,
 b) перестановка 1, i , 2, 5, k , 4, 8, 9, 7 была нечетной.

41. Определить число инверсий в перестановке и указать общий признак тех чисел n , для которых эта перестановка является четной, и тех, для которых она нечетна:

- a) 1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, 2, 4, 6, 8, ..., $2n$,
 b) 2, 4, 6, ..., $2n$, 1, 3, 5, ..., $2n - 1$,
 c) 1, 4, 7, ..., $3n - 2$, 2, 5, 8, ..., $3n - 1$, 3, 6, 9, ..., $3n$,
 d) 1, 5, ..., $4n - 3$, 2, 6, ..., $4n - 2$, 3, 7, ..., $4n - 1$, 4, 8, ..., $4n$,
 e) 1, 5, ..., $4n - 3$, 3, 7, ..., $4n - 1$, 2, 6, ..., $4n - 2$, 4, 8, ..., $4n$,
 f) $4n$, $4n - 4$, ..., 8, 4, $4n - 1$, $4n - 5$, ..., 7, 3, $4n - 2$, $4n - 6$, ..., 6, 2, $4n - 3$, $4n - 7$, ..., 5, 1.

42. В какой перестановке чисел 1, 2, 3, ..., n число инверсий наибольшее и чему оно равно?

43. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k -ом месте в перестановке чисел 1, 2, 3, ..., n ?

44. Сколько инверсий образует число n , стоящее на k -ом месте в перестановке чисел 1, 2, 3, ..., n ?

45. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

- a) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$, b) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$,
 c) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$, d) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$,
 e) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$, f) $a_{12}a_{23} \dots a_{n-1,n}a_{n1}$,
 g) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \dots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$, h) $a_{12}a_{23}a_{34} \dots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \leq k \leq n$.

46. Пользуясь определением, вычислить следующие определители:

$$a) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

47. Выбрать i и k так, чтобы произведение

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

48. Выбрать i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

49. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

50. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \quad \text{содержащие } x^4 \text{ и } x^3.$$

6. Определители второго и третьего порядков. Свойства определителей

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 14. Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется *определителем матрицы второго порядка (или определителем второго порядка)* и обозначается: $|A|$, $\det A$, ΔA , Δ .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (19)$$

Определение 15. *Определителем третьего порядка* называется выражение вида:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (20)$$

Отметим несколько правил для построения выражения (20).

1. *Правило треугольников.* Выделим в этом определителе *главную диагональ*, образованную числами a_{11}, a_{22}, a_{33} и диагональ, образованную числами a_{31}, a_{22}, a_{13} , которую будем называть *побочной*. Вычисляем произведение элементов, стоящих на главной диагонали и два произведения чисел, расположенных в вершинах двух равносторонних треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Складываем эти три произведения. Из полученной суммы вычитаем сумму произведений элементов, стоящих на побочной диагонали и двух произведений чисел, расположенных в вершинах двух равносторонних треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали. На рисунке 1 это правило изображено схематически.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Рис. 3

2. *Правило Саррюса.* Припишем к матрице справа первый и второй

столбцы и вычислим произведения элементов, стоящих на каждой из указанных шести прямых (смотри рисунок 2). Затем найдем сумму этих произведений, при этом произведения элементов на прямых, параллельных главной диагонали, возьмем со знаком плюс, а произведения элементов на прямых, параллельных побочной диагонали, – со знаком минус (согласно обозначениям на рисунке 2).

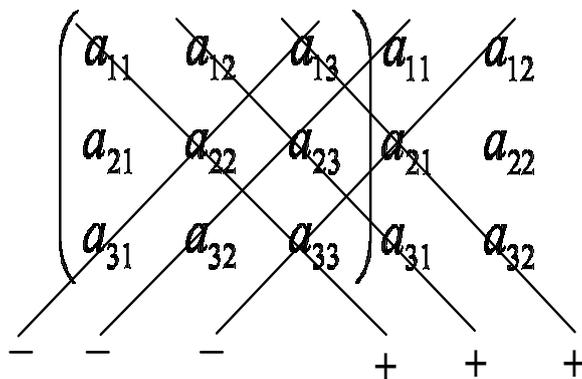


Рис. 4

Рассмотрим свойства определителей.

Свойство 1. При перемещении местами двух соседних строк (или столбцов) определителя его знак меняется на противоположный, а абсолютная величина не изменяется.

Свойство 2. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

Свойство 3. Умножение всех элементов некоторой строки (или столбца) определителя на число λ , равносильно умножению определителя на это число, то есть постоянный множитель можно выносить за знак определителя из любой строки или из любого столбца.

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Свойство 5. Если элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Свойство 6. Если к элементам некоторой строки (или столбца) определителя прибавить соответственно элементы другой строки (или столб-

ца), умноженные на действительное число λ , то величина определителя не изменится.

Свойство 7. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот.

Свойство 8. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых, например

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

51. Вычислить определители второго порядка:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} z & -y^2 \\ 1 & \bar{z} \end{vmatrix}$, где $z = x + iy$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg} \varphi \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x \\ \sin x & \sin 2x \end{vmatrix}$.

52. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} 2x + 1 & 3 \\ x + 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 \\ -y - 3 & x - 2 \end{vmatrix} = 25$,

c) $\begin{vmatrix} 2x - 1 & x + 1 \\ x + 2 & x - 1 \end{vmatrix} = -6$, d) $\begin{vmatrix} \sin 5x & \sin x \\ \cos x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$,

e) $\begin{vmatrix} z & |z| \\ -1 & z \end{vmatrix} = 0$, где $z = x + iy$.

53. Вычислить определители третьего порядка:

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}, \\
 e) & \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad g) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad h) \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

54. Решить уравнения и неравенства:

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad b) \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \\
 c) & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad d) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 5.
 \end{aligned}$$

55. Не вычисляя определителей проверить, что они делятся на

$(a-b), (b-c), (c-a)$:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$$

56. Вычислить, используя свойства определителей:

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y + b^{-y})^2 & (b^y - b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z + c^{-z})^2 & (c^z - c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}, \\
 c) & \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 1 \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 1 \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & 1 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}, \quad e) \begin{vmatrix} (a_1 + b_1)^2 & a_1^2 + b_1^2 & a_1 b_1 \\ (a_2 + b_2)^2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 b_2 \\ (a_3 + b_3)^2 & a_3^2 + b_3^2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

57. Не развертывая определителей, доказать следующие тождества:

$$a) \begin{vmatrix} a_1 - xb_1 & a_1 + xb_1 & c_1 \\ a_2 - xb_2 & a_2 + xb_2 & c_2 \\ a_3 - xb_3 & a_3 + xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$b) \begin{vmatrix} a_1 + xb_1 & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + xb_2 & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + xb_3 & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$c) \begin{vmatrix} a_1 + b_1i & a_1i + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2i & a_2i + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3i & a_3i + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$d) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. Теорема о разложении. Метод эффективного понижения порядка

Основные понятия, формулы и теоремы

Теорема о разложении

Определение 16. *Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n - 1)$ -го порядка, полученный из определителя n -го порядка вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.*

Определение 17. *Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определители n -го порядка удовлетворяют свойствам 1)–8), перечисленным в предыдущем параграфе. Кроме того, определители n -го порядка удовлетворяют следующим свойствам:

Теорема 7 (О разложении по строке или столбцу). *Сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю:*

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}. \quad (21)$$

Равенства (21) можно принять за правила вычисления определителей. Первое из них называется разложением Δ_n по элементам i -ой строки, а второе — разложением Δ_n по элементам j -го столбца.

В соответствии со свойством 9, вычисление определителя n -го порядка сводится к вычислению n определителей $(n - 1)$ -го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление $\Delta_n \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n - 1)$ -го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю.

Задачи для самостоятельного решения

58. Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

59. Разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

60. Вычислить определители четвертого порядка, пользуясь теоремой о разложении:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, c) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

61. Вычислить определители 4-го порядка методом эффективного понижения порядка:

$$\begin{array}{l}
a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \\
d) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad e) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \\
g) \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}, \quad h) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}, \\
i) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \quad j) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.
\end{array}$$

62. Вычислить определители 5-го порядка методом эффективного понижения порядка:

$$\begin{array}{l}
a) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\
c) \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},
\end{array}$$

$$e) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

8. Действия с матрицами

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 18. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей размера $m \times n$* .

Матрицу A размера $m \times n$, на пересечении i -ой строки и j -го столбца которой находится число a_{ij} , обозначают так

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m = n$ (число строк и число столбцов матрицы совпадают), то такая матрица называется *квадратной матрицей порядка n* .

Определение 19. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера элементы которой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Для любых матриц A, B, C одинакового размера выполняются равенства:

- 1) $A + B = B + A$ (коммутативность);
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

Определение 20. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A с элементами $b_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall i, j$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

- 1) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (ассоциативность);
- 2) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);
- 3) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

Определение 21. Линейной комбинацией матриц A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α, β — произвольные числа.

Определение 22. Произведением $A \cdot B$ матриц A и B (размеров $m \times n$ и $n \times p$ соответственно) называется матрица C размера $m \times p$, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Таким образом, каждый элемент c_{ij} , находящийся в i -й строке и j -м столбце матрицы C , равен сумме произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B . Произведение существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Свойства операции умножения матриц:

- 1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность);
- 2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);
- 3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность);
- 4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ — отсутствует коммутативность.

Определение 23. Матрицы A и B , для которых $A \cdot B = B \cdot A$ называются *перестановочными матрицами*.

Определение 24. *Единичной матрицей* размера $n \times n$ называется матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица в произведении с квадратной матрицей такой же размерности ее не изменяет, то есть для любой матрицы D размерности $n \times n$ справедливо равенство $D \cdot E = E \cdot D = D$.

Задачи для самостоятельного решения

63. Найти произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

64. Найти линейные комбинации матриц:

$$a) \quad 4A - 5B - \lambda E, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad A - \lambda E, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & -7 & -8 \end{pmatrix},$$

$$c) 4A - 7B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

65. Найти матрицу A^n :

$$a) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

66. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A :

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

67. Вычислить $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & 12 \end{pmatrix}^5$, используя равенство

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

68. Вычислить $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$, используя равенство

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Обратная матрица. Матричные уравнения

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 25. *Обратной матрицей* к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Если обратная матрица существует, то она единственная.

Определение 26. *Присоединенной матрицей* к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $\tilde{A} = (A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} .

Теорема 8. *Если квадратная матрица A — невырожденная (т.е. $|A| \neq 0$), то*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}. \quad (22)$$

Определение 27. *Элементарными преобразованиями* матрицы называются следующие операции:

- 1) перемена местами двух строк (столбцов);
- 2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B , полученная из A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной матрице A* (обозначается $B \sim A$).

Обратную матрицу можно искать двумя способами.

1. *Метод присоединенной матрицы* вычисления обратной матрицы состоит в применении формулы (22).

2. *Метод элементарных преобразований* вычисления обратной матрицы состоит в следующем. Приписывая справа к матрице A размера $n \times n$ единичную матрицу такого же размера, получим прямоугольную матрицу $B = (A|E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы B приводим ее к виду $B_1 = (E|A^{-1})$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом

$$A \cdot X = B \quad (23)$$

$$X \cdot A = B \quad (24)$$

$$A \cdot X \cdot C = B \quad (25)$$

В этих уравнениях A, B, C, X – матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения корректны (с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров).

Если в уравнениях (23), (24) матрица невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad (26)$$

$$X = B \cdot A^{-1}. \quad (27)$$

Если в уравнении (25) матрицы A и C невырождены, то его решение записывается так:

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

69. Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$\begin{aligned} a) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, & b) & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, & c) & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \\ d) & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & e) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, & f) & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

70. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix},$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad h) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

71. Решить матричные уравнения:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$c) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Вычислить миноры второго порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2 , отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geq 2$. И т.д.

.....

k) Вычислять (если они существуют) миноры k -го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор k -го порядка, причем искать его нужно только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

2. *Метод элементарных преобразований* нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками. Количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A .

Задачи для самостоятельного решения

72. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad h) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

73. Найти ранг методом элементарных преобразований:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$$

74. Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ :

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 11 (Крамера). Система линейных уравнений (28), определитель которой отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), обладает решением и притом только одним.

Методы решения систем линейных уравнений с определителем, отличным от нуля.

1. Правило Крамера.

Если $\Delta \neq 0$, то система (28) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

2. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Пусть дана система линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей

$$A \cdot X = B, \quad (30)$$

где $|A| \neq 0$. Система (30) имеет единственное решение, которое можно найти по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

3. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса). Рассмотрим метод решения систем линейных уравнений с произвольной матрицей, который называется *методом последовательного исключения неизвестных*.

Определение 33. Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называется *равносильными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема 12. При элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы, система переходит в равносильную систему.

Пусть дана система (28). На основании этой теоремы запишем расширенную матрицу системы \bar{A} . Элементарными преобразованиями над

строками матрицы, приведем ее к ступенчатому виду (все элементы ниже главной диагонали равны нулю). Эти действия называются *прямым ходом метода Гаусса*. После чего из системы, составленной на основе полученной матрицы, находим переменные с помощью последовательных подстановок (*обратный ход метода Гаусса*).

Задачи для самостоятельного решения

75. Найти значения параметров a, b при которых системы линейных уравнений нельзя решить по правилу Крамера:

$$a) \begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases} \quad b) \begin{cases} ax - by = f_1, \\ bx + ay = f_2. \end{cases}$$

76. Решить систему линейных уравнений с помощью правила Крамера:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10, \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -16, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

77. Решить систему уравнений матричным методом:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_2 + x_3 = 7, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

78. Решить систему методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7, \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7. \end{cases}$$

описывается формулой

$$X_{одн} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_{n-r} X_{n-r} = \sum_{k=1}^{n-r} c_k X_k, \quad (32)$$

где c_1, c_2, \dots, c_{n-r} – произвольные числа, а X_1, X_2, \dots, X_{n-r} – ФСР системы (31).

Иными словами: при любых значениях c_1, c_2, \dots, c_{n-r} формула (32) дает решение системы уравнений (31), и обратно, для любого решения X однородной системы уравнений (31) существуют числа c_1, c_2, \dots, c_{n-r} такие, что решение X представимо в виде (32).

Алгоритм построения фундаментальной системы решения:

1) Привести матрицу системы A с помощью элементарных преобразований привести к ступенчатому виду. Найти ранг матрицы системы $r = r(A)$.

2) Исследовать систему уравнений на количество решений. Если $r = n$, то по теореме Крамера система будет иметь только единственное решение. Если $r < n$, то система имеет множество решений и поэтому существует ФСР. Число векторов в ФСР равно $n - r$.

3) Разделить неизвестные на базисные и свободные. Число свободных неизвестных равно $n - r$.

4) Записать определитель единичной матрицы порядка, равного количеству $n - r$ свободных неизвестных. По каждой строке определителя найти соответствующие решения системы. Для этого в качестве значений свободных неизвестных взять элементы строки определителя и, решая эквивалентную подсистему, найти значения базисных неизвестных.

5) Из полученных $n - r$ решений системы, составить фундаментальную систему решений.

Задачи для самостоятельного решения

79. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений и найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{aligned}
a) & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 13x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 16x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases} \\
b) & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases} \\
c) & \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases} \\
d) & \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases} \\
e) & \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases} \\
f) & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases} \\
g) & \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

80. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы уравнений в зависимости от параметра λ

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 2\lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

81. Образуют ли строки каждой из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

- 1) Если $r(A) < r(\bar{A})$ (то есть ранг матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы системы), то система несовместна.
- 2) Если $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (где n – число неизвестных), то система совместна и имеет единственное решение, то есть определена.
- 3) Если $r(A) = r(\bar{A}) < n$, то система совместна и имеет более одного решения, то есть неопределена.

Определение 36. Однородную систему линейных уравнений $AX = 0$, получающуюся из неоднородной системы заменой в ней свободных членов нулями, называют *приведенной однородной системой* для системы $AX = b$.

Между решениями неоднородной и приведенной однородной систем существует тесная связь, которая описывается следующей теоремой:

Теорема 17. *Общее решение неоднородной системы $AX = b$ можно представить формулой*

$$X = X_{\text{одн}} + X_{\text{част}}, \quad (34)$$

где $X_{\text{одн}}$ – общее решение приведенной однородной системы $AX = 0$, а $X_{\text{част}}$ – какое-либо частное решение неоднородной системы $AX = b$.

Формула (34) позволяет находить общее решение неоднородной системы при известном ее частном решении, решая приведенную однородную систему.

Алгоритм метода исследования совместности систем линейных уравнений.

1) Привести к ступенчатому виду расширенную матрицу системы \bar{A} с помощью метода элементарных преобразований. Если в процессе решения получаются нулевые строки, то вычеркнуть их. Найти $r(A)$ и $r(\bar{A})$.

2) Исследовать систему на совместность, используя теорему Кронекера-Капелли. Если $r(A) \neq r(\bar{A})$, то по теореме Кронекера-Капелли система несовместна. Если $r(A) = r(\bar{A}) = n$, то система совместна и имеет един-

ственное решение, которое можно найти, применяя обратный ход метода Гаусса. Если $r(A) = r(\bar{A}) < n$, то система имеет более одного решения.

3) Если система имеет более одного решения, то определить базисный минор. Неизвестные, соответствующие столбцам базисного минора называются *базисными неизвестными*, а остальные неизвестные – *свободными*. Число свободных неизвестных равно $n - r$.

4) Записать равносильную систему уравнений, перенося свободные неизвестные в правую часть системы.

5) Решить полученную равносильную систему относительно базисных неизвестных, применяя обратный ход метода Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

82. Исследовать совместность методом Гаусса и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

83. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ :

$$a) \begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 = 6, \\ \lambda x_1 + 8x_2 = 12, \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \lambda x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$$

84. Зная частное решение системы $X_{\text{част}}$, найти общее решение неоднородной системы уравнений:

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \end{cases} X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \end{cases} X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$c) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \end{cases} X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$d) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3, \end{cases} X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналитическая геометрия

14. Векторы. Скалярное произведение векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Основные операции над векторами

Определение 37. Величины, которые полностью определяются заданием своих числовых значений, называются *скалярными величинами* (например, масса, длина, площадь, объем). Величины, для задания которых необходимо знать еще и направление, называются *векторными величинами* (например, сила, скорость, ускорение). Вектором \overrightarrow{AB} называется направленный отрезок: A – начальная точка, B – конечная точка (смотри рисунок 5).

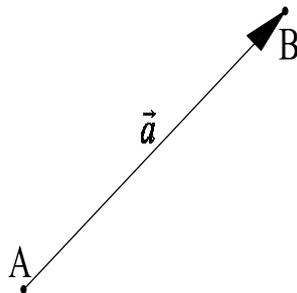


Рис. 5

Также будем обозначать векторы маленькими латинскими буквами со стрелкой: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Определение 38. Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BA} называются *противоположными*.

Определение 39. Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то такой вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$.

Определение 40. Два вектора называются *равными*, если они имеют общее направление и одинаковые длины.

Существует два правила геометрического сложения векторов.

1. При нахождении суммы векторов $\vec{a} + \vec{b}$ по *правилу треугольника* от конечной точки вектора \vec{a} откладывают вектор \vec{b} . Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ направлен от начальной точки вектора \vec{a} к конечной точке вектора \vec{b} (смотри рисунок 6).

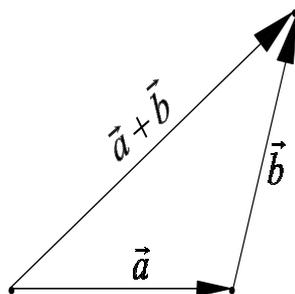


Рис. 6. Сложение векторов по правилу треугольников

2. При нахождении суммы векторов $\vec{a} + \vec{b}$ по *правилу параллелограмма* нужно отложить векторы \vec{a} и \vec{b} от одной точки и построить на векторах \vec{a} и \vec{b} параллелограмм. Тогда вектор-диагональ параллелограмма, выходящий из общей начальной точки векторов \vec{a} и \vec{b} есть вектор суммы $\vec{a} + \vec{b}$ (смотри рисунок 7).

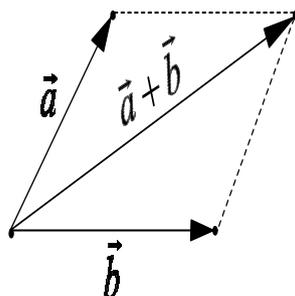


Рис. 7. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Определение 41. Произведением вектора \vec{a} на число λ называется *новый вектор* $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора \vec{a} , если $\lambda > 0$ и противоположно ему при $\lambda < 0$. На рисунке 8 изображены векторы \vec{a} , $-2 \cdot \vec{a}$, $3 \cdot \vec{a}$, $\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$.

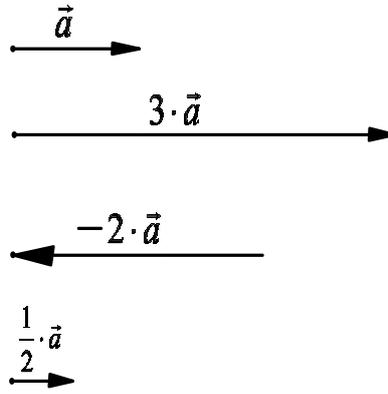


Рис. 8

Проекция точки и вектора на ось

Определение 42. *Осью* называется прямая, на которой выделено одно из ее направлений (на рисунке 9 оно обозначается стрелкой). Каждую ось можно задать *направляющим вектором*, то есть любым вектором, лежащим на ней и имеющим то же направление.

Определение 43. Пусть задана ось l и некоторая точка M (рисунок 9). Плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно оси l , пересечет ее в некоторой точке M_1 , которая называется *проекцией точки M на ось l* . Если $M \in l$, то $M_1 = M$. Если $M \notin l$, то M_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось l .

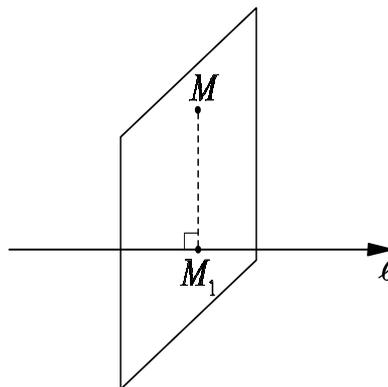


Рис. 9. Проекция точки на ось

Определение 44. *Проекцией $pr_{\vec{l}}$ вектора \vec{AB} на ось вектора \vec{l}* называется длина отрезка A_1B_1 , взятая со знаком плюс, если векторы

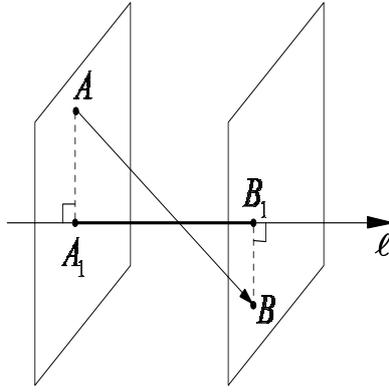


Рис. 10. Проекция вектора на ось другого вектора

$\overrightarrow{A_1B_1}$ и \vec{l} одинаково направлены, и со знаком минус, если направления векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и \vec{l} противоположны. Здесь A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось вектора \vec{l} (смотри рисунок 10).

Свойства проекций

- 1) Если два вектора равны, то равны и их проекции (см. рис. 11):

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow pr_{\vec{l}} \vec{a} = pr_{\vec{l}} \vec{b}. \quad (35)$$

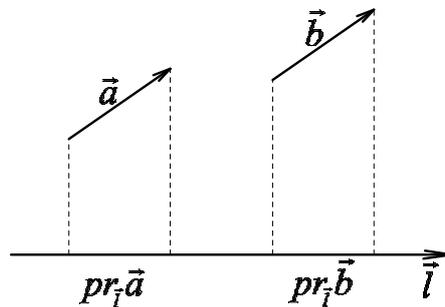


Рис. 11. Проекции двух равных векторов

- 2) Пусть φ – угол между вектором \vec{a} и осью \vec{l} (см. рис. 12). Тогда

$$pr_{\vec{l}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi. \quad (36)$$

- 3) Пусть α – произвольное действительное число. Тогда

$$pr_{\vec{l}} (\alpha \vec{a}) = \alpha pr_{\vec{l}} \vec{a}. \quad (37)$$

- 4) Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов, то есть

$$pr_{\vec{l}} (\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{l}} \vec{a} + pr_{\vec{l}} \vec{b}. \quad (38)$$

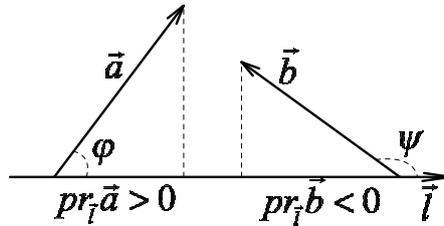


Рис. 12. Угол между вектором и осью

Прямоугольная система координат

Определение 45. Три взаимно перпендикулярные прямые Ox , Oy , Oz образуют *прямоугольную систему координат в пространстве* (смотри рисунок 13). Точка O называется *началом координат*. Первая прямая Ox называется *осью абсцисс*, вторая прямая Oy – *осью ординат*, третья прямая Oz – *осью аппликат*. Плоскости XOY , YOZ , ZOY называются *координатными плоскостями*.

Определение 46. Отложим на осях Ox , Oy , Oz в положительном направлении векторы единичной длины \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} соответственно. Эти векторы называются *основными векторами или ортами системы координат*.

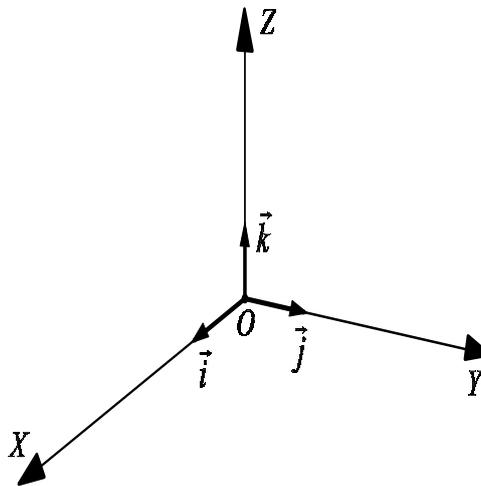


Рис. 13. Прямоугольная система координат

Прямоугольные координаты точки

Определение 47. Опустим перпендикуляр из точки M на координатную плоскость XOY , получим точку M_{xy} . Затем из точки M_{xy} про-

ведем прямые, параллельные осям, получим точки M_x и M_y . Точка M_z – это точка пересечения прямой Oz и плоскости, проходящей через точку M параллельно координатной плоскости XOY (смотри рисунок 14). Упорядоченная тройка чисел (x, y, z) задает *прямоугольные координаты точки M* . Координата x называется *абсциссой точки M* , y – *ординатой*, z – *апplikатой*.

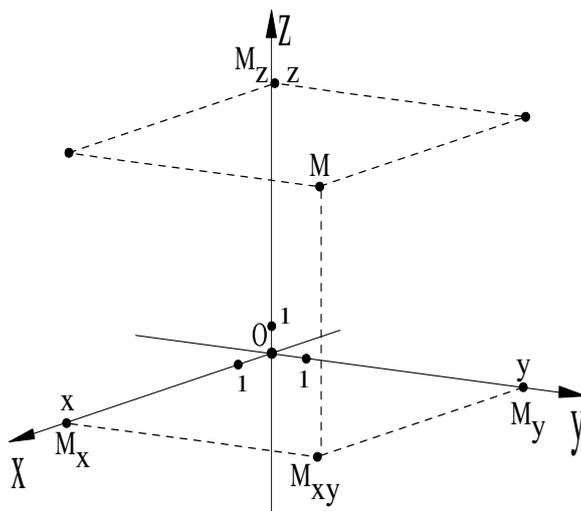


Рис. 14. Координаты точки

Прямоугольные координаты вектора

Определение 48. Прямоугольными координатами вектора \vec{m} называются проекции вектора \vec{m} на оси координат.

Например, найдем координаты вектора \vec{m} , изображенного на рисунке 15. Для этого через точку O' проводим оси $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ соответственно равнонаправленные с осями координат OX , OY , OZ . Через точку M проводим плоскости MP , MQ , MR , параллельные координатным плоскостям. Плоскости MP , MQ , MR пересекут оси $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ соответственно в точках P , Q , R . Первая координата вектора \vec{m} есть длина отрезка $O'P$, взятая со знаком минус; вторая координата вектора \vec{m} есть длина вектора $O'Q$, взятая со знаком минус; третья координата вектора

\vec{m} есть длина вектора $O'R$, взятая со знаком плюс. При масштабе рисунка 15, получаем $\vec{m} = (x; y; z) = (-4; -3; 2)$.

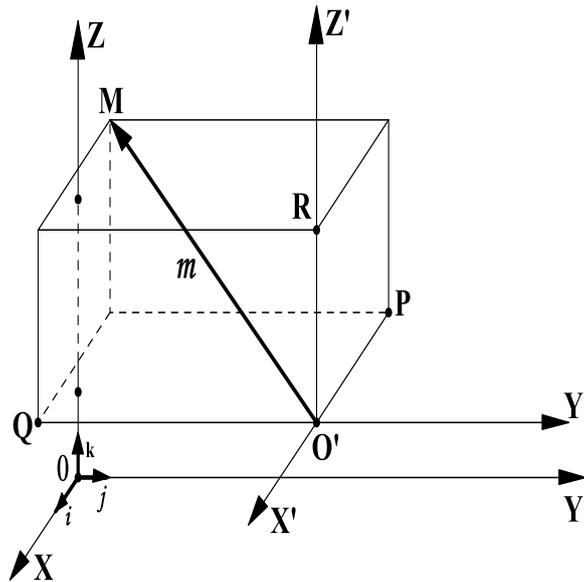


Рис. 15. Проекция вектора на оси координат

Отметим, что основные векторы имеют следующие координаты: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Выражения вектора через координаты

Каждый вектор \vec{m} равен сумме произведений трех основных векторов на соответствующие координаты вектора \vec{m} :

$$\vec{m} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (39)$$

Например, при обозначениях рисунка 15 имеем $\vec{m} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Выражения вектора через координаты его начала и конца

Определение 49. Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты вектора \overrightarrow{AB} вычисляются по следующей формуле

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (40)$$

Модуль вектора и расстояние между двумя точками

Определение 50. Модулем или длиной вектора $|\vec{a}|$ называется длина отрезка, изображающего вектор. Если вектор \vec{a} задан прямоугольными координатами $\vec{a} = (x, y, z)$, тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (41)$$

Расстояние ρ между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равно

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (42)$$

Направляющие косинусы вектора

Определение 51. Направление вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ определяется углами α, β, γ , образованными вектором \vec{a} с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz соответственно (смотри рисунок 16). Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами вектора \vec{a}* и определяются по следующим формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \quad (43)$$

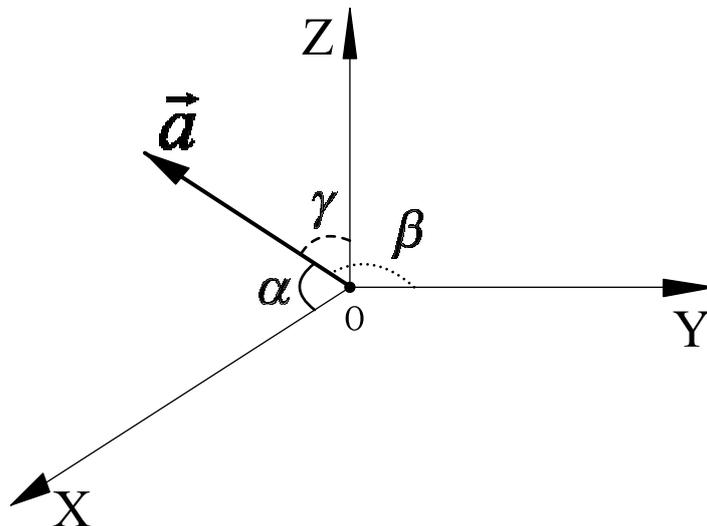


Рис. 16. Направляющие косинусы вектора \vec{a}

Направляющие косинусы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (44)$$

Таким образом, координаты вектора \vec{a} можно задать следующим образом

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (45)$$

Признак коллинеарности векторов

Определение 52. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *коллинеарны* тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (46)$$

Таким образом, если вектор \vec{a} – не нулевой, то любой вектор \vec{b} , *коллинеарный* с ним, можно представить в виде

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}. \quad (47)$$

где число $\lambda = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, причем λ положительно, если вектор \vec{b} одинаково направлен с вектором \vec{a} и отрицательно – в противоположном случае.

Координаты середины отрезка

Даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – середина отрезка M_1M_2 , тогда координаты точки M_0 можно вычислить по формулам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (48)$$

Определение и свойства скалярного произведения

Определение 53. *Скалярным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b}* называется произведение их модулей на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначается (\vec{a}, \vec{b}) . Согласно определению

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a, b}). \quad (49)$$

Основные свойства скалярного произведения:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}); \quad (50)$$

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}); \quad (51)$$

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}); \quad (52)$$

Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Зная координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольной системе координат, для вычисления скалярного произведения векторов \vec{a} и \vec{b} можно воспользоваться следующей формулой:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (53)$$

Равенство (53) называется *формулой, выражающей скалярное произведение через координаты сомножителей*.

Признак перпендикулярности векторов

Определение 54. Два ненулевых вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярны, тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \quad (54)$$

Геометрические свойства скалярного произведения

1. Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} можно вычислить по формуле

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (55)$$

2. При вычислении проекции вектора \vec{m} на ось, задаваемую вектором \vec{n} можно воспользоваться формулой:

$$pr_{\vec{n}} \vec{m} = \frac{(\vec{m}, \vec{n})}{|\vec{n}|} = \frac{(\vec{m}, \vec{n})}{\sqrt{(\vec{n}, \vec{n})}}. \quad (56)$$

3. Длину вектора \vec{a} можно вычислить также по следующей формуле

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \quad \text{или} \quad |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}. \quad (57)$$

Задачи для самостоятельного решения

85. а) Единичный вектор \vec{a} образует равные тупые углы с основными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Найти координаты вектора \vec{a} .

б) Единичный вектор \vec{a} образует с вектором \vec{i} угол 30° , а с ортами \vec{j} и \vec{k} – равные острые углы. Вычислить сумму координат вектора \vec{a} .

86. Составить таблицу скалярного умножения орт системы координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

87. а) Найти координаты вектора \vec{x} , параллельного вектору $(6; -8; -7, 5)$, если известно, что $|\vec{x}| = 50$ и вектор \vec{x} образует с осью Oz острый угол.

б) Даны два вектора $\vec{a} = (1, -2, 4)$ и $\vec{b} = (3, 1, -5)$. Найти вектор \vec{x} , зная, что он перпендикулярен оси Oy и удовлетворяет условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = -3$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 8$.

в) Даны три вектора $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (4, 3, -5)$, $\vec{c} = (7, -2, -6)$. Найти вектор \vec{x} , удовлетворяющий условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = 8$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 0$, $(\vec{x}, \vec{c}) = 10$.

г) Найти координаты вектора \vec{x} , параллельного вектору $\vec{a} = (1, 2, -3)$, если известно, что $(\vec{x}, \vec{a}) = 28$.

88. а) Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$ на ось вектора \vec{c} .

б) Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{b} + \vec{c}$ на ось вектора $\vec{a} - \vec{c}$.

89. а) Пусть \vec{a} и \vec{b} – единичные векторы и $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Найти скалярное произведение векторов $(3\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.

б) Пусть $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$. Найти скалярное произведение векторов $(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.

90. Вычислить скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , заданных сво-

ими координатами, и углы между ними:

a) $\vec{a} = (3, -4, 0)$, $\vec{b} = (5, 12, 0)$, b) $\vec{a} = (2, -3, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, -1)$.

91. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, зная, что \vec{m} и \vec{n} – взаимно перпендикулярные орты.

92. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $(\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{4}$.

93. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{a} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где \vec{p} и \vec{q} – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

94. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

95. Зная векторы, образующие треугольник: $\vec{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\vec{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$ и $\vec{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$, где \vec{a} и \vec{b} – взаимно перпендикулярные орты, определить углы этого треугольника.

96. Зная разложение вектора $\vec{Q} = 6\vec{m} - 2\vec{n} + 3\vec{p}$ по трем перпендикулярным ортам, вычислить длину вектора \vec{Q} и углы, которые он образует с каждым из ортов \vec{m} , \vec{n} и \vec{p} .

97. Обозначив через \vec{a} и \vec{b} стороны ромба, выходящие из общей вершины, доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

98. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $(\widehat{a, b}) = \frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся перпендикулярными.

99. Какой угол образуют единичные векторы \vec{s} и \vec{t} , если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно перпендикулярны.

100. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\vec{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{CA} = -7\vec{a} + 2\vec{b}$. Вычислить длину медианы \vec{AM} и высоты \vec{AD} треугольника ABC .

15. Векторное и смешанное произведение векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Правые и левые системы векторов

Определение 55. Упорядоченная тройка некопланарных векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется *правой системой*, если наблюдателю, находящемуся в конечной точке вектора \vec{c} , поворот вектора \vec{a} , совмещающий его с вектором \vec{b} совершается против часовой стрелки (рисунок 17). Если же упомянутый поворот совершается по часовой стрелке, то система векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется *левой тройкой* (рисунок 18).

Например, основные векторы прямоугольной системы координат \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} образуют правую тройку. Система же \vec{j} , \vec{i} , \vec{k} (векторы те же, но порядок их другой) – левая.

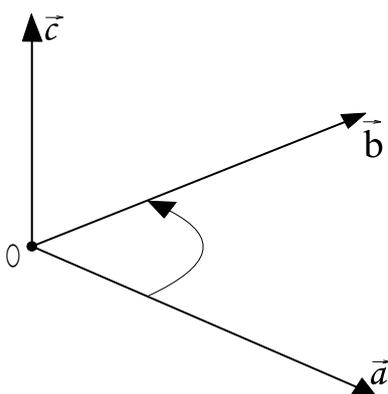


Рис. 17. Правая система векторов

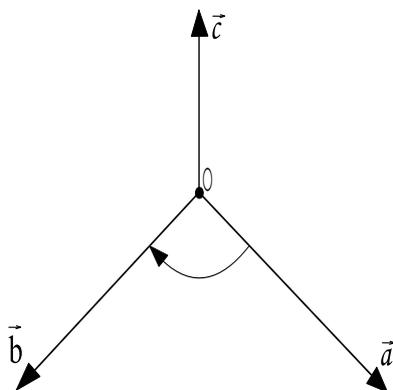


Рис. 18. Левая система векторов

Определение 56. Если имеем две системы трех векторов и каждая из них правая или левая, то говорят, что эти системы имеют *одинаковую ориентацию*. Если же одна система правая, а другая левая, то говорят, что системы имеют *противоположную ориентацию*.

При однократной перестановке двух векторов система меняет ориентацию. Система сохраняет ориентацию при круговой перестановке векторов, показанной на рисунке 19 для правой системы векторов и на рисунке 20 для левой.

Рис. 19. Круговая ориентация правой системы векторов

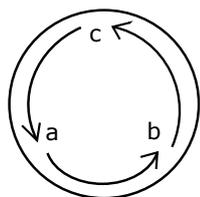


Рис. 20. Круговая ориентация левой системы векторов

Например, из правой системы векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ круговой перестановкой получаем правую систему $\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}$, а из последней – правую систему $\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}$. Правую систему векторов нельзя совместить ни с какой левой.

Определение и основные свойства векторного произведения векторов

Определение 57. Векторным произведением $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторов \vec{a} и \vec{b} называется третий вектор \vec{c} , который строится следующим образом:

1) модуль вектора \vec{c} численно равен площади параллелограмма (рисунок 21), построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , то есть

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{a, b}). \quad (58)$$

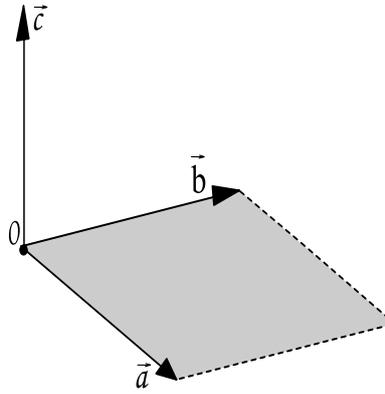


Рис. 21. Параллелограмм, построенный на векторах \vec{a} и \vec{b}

2) направление вектора \vec{c} перпендикулярно к плоскости упомянутого параллелограмма.

3) направление вектора \vec{c} выбирается (из двух возможных) так, чтобы векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} составляли правую систему.

Основные свойства векторного произведения векторов:

$$[\vec{a}, \vec{a}] = 0; \quad (59)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]; \quad (60)$$

$$[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}], \quad \text{где } \lambda - \text{ это число}; \quad (61)$$

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]; \quad (62)$$

Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Если векторы \vec{a} и \vec{b} заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (63)$$

Нужно разложить этот определитель по первой строке. Тогда коэффициенты при \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} равны соответственно первой, второй и третьей координатам вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Геометрические свойства векторного произведения

1. Для вычисления *площади параллелограмма*, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} (смотри рисунок 21) применяется формула

$$S_{\square} = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|. \quad (64)$$

2. Для вычисления *площади треугольника*, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} (смотри рисунок 22) применяется формула

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|. \quad (65)$$

3. *Высота H_{\square} параллелограмма и высота H_{Δ} треугольника, проведенная к вектору \vec{a}* , определяются по формуле

$$H_{\square} = H_{\Delta} = \frac{\left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|}{\sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}}. \quad (66)$$

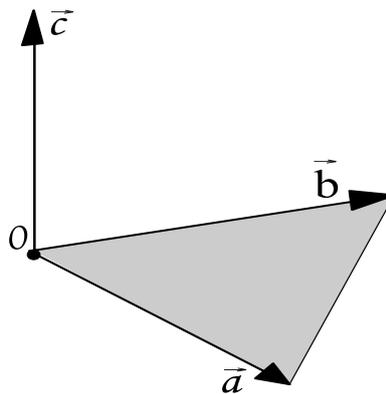


Рис. 22. Треугольник, построенный на векторах \vec{a} и \vec{b}

Определение и основные свойства смешанного произведения

Определение 58. *Смешанным произведением векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ на вектор \vec{c} , то есть*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}). \quad (67)$$

Основные свойства смешанного произведения векторов:

1. Имеют место равенства:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]). \quad (68)$$

2. При круговой перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется, при перестановке двух сомножителей – меняет знак на обратный:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}). \quad (69)$$

3. Свойство распределительности:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}). \quad (70)$$

4. Свойство сочетательности:

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \quad (71)$$

5. Смешанное произведение, имеющее хотя бы два равных сомножителя, равно нулю, например

$$(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0. \quad (72)$$

Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

Если заданы координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ в прямоугольной системе координат, то смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} вычисляется по формуле:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (73)$$

Определение и условие компланарности векторов

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ лежат в одной плоскости, то есть *компланарны*, тогда и только тогда, когда их смешанное

произведение равно нулю, то есть

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (74)$$

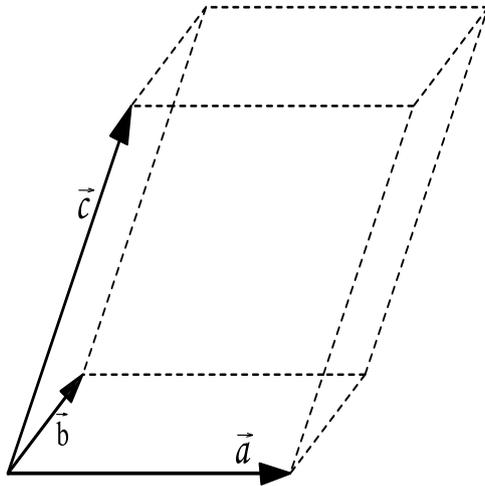


Рис. 23. Параллелепипед, построенный на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

Геометрические свойства смешанного произведения

1. *Объем параллелепипеда*, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 23), определяется по формуле:

$$V_{\text{Парал}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (75)$$

где знак плюс выбирается, если определитель третьего порядка равен положительному значению, и знак минус – в противоположном случае.

2. *Объем пирамиды*, построенной на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 24), определяется по формуле:

$$V_{\text{Пирам}} = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (76)$$

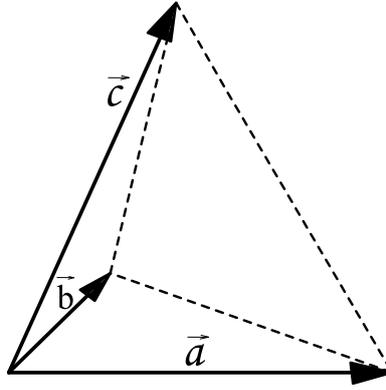


Рис. 24. Пирамида, построенная на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

где знак плюс выбирается, если определитель третьего порядка равен положительному значению, и знак минус – в противоположном случае.

3. Пусть дан параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 23). Высоту параллелепипеда, которая проведена к нижнему основанию, образованному векторами \vec{a} и \vec{b} , можно найти по формуле:

$$H_{\text{парал}} = \frac{V_{\text{парал}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}. \quad (77)$$

4. Пусть дана пирамида, построенная на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 24). Высоту пирамиды, которая проведена к основанию, образованному векторами \vec{a} и \vec{b} , можно найти по формуле:

$$H_{\text{пирам}} = \frac{3 \cdot V_{\text{пирам}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}. \quad (78)$$

Задачи для самостоятельного решения

Задачи на векторное произведение

101. Составить таблицу векторного умножения орт системы координат \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

102. Найти векторное произведение векторов $[\vec{a}, \vec{b}]$:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, b) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$.

103. Упростить выражение:

a) $[3\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} + 5\vec{b}]$, b) $[2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} + 4\vec{b}]$, c) $[4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}]$.

104. а) Дан треугольник с вершинами $A(4, -14, 8)$, $B(2, -18, 12)$, $C(12, -8, 12)$. Найти площадь треугольника и длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB .

б) Даны векторы $\vec{a} = (-4, -8, 8)$, $\vec{b} = (4, 3, 2)$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

105. а) Пусть $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{a, b}) = 60^\circ$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$.

б) Пусть $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\widehat{a, b}) = 150^\circ$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$.

106. а) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$, где \vec{a} и \vec{b} — единичные взаимно перпендикулярные орты, образующие правую тройку.

б) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$ и $(\widehat{m, n}) = \frac{\pi}{6}$

в) Зная две стороны треугольника $\vec{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ и $\vec{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, вычислить длину его высоты \vec{CD} при условии, что \vec{p} , \vec{q} — перпендикулярные друг другу орты.

107. Дан вектор $\vec{Q} = [3\vec{m} + 4\vec{n} + 5\vec{p}, \vec{m} + 6\vec{n} + 4\vec{p}]$, где \vec{m} , \vec{n} , \vec{p} — взаимно перпендикулярные орты, образующие левую тройку. Вычислить его длину.

108. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n} + \vec{p}$, где \vec{m} , \vec{n} , \vec{p} — взаимно перпендикулярные орты.

Задачи на смешанное произведение

109. а) Найти объем тетраэдра с вершинами $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-4, -3, 7)$.

б) Вычислить объем параллелепипеда с вершинами $A(4, 3, 0)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(3, 4, 1)$, $D(5, 6, 2)$ и длину высоты, опущенной из вершины D .

110. Проверить, компланарны ли следующие вектора:

a) $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{r} = 7\vec{a} + 14\vec{b} - 13\vec{c}$, где \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – взаимно перпендикулярные орты.

b) $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, 9, -11)$,

c) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{r} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$, где \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – взаимно перпендикулярные орты.

d) $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, -1, -2)$.

111. Проверить, что точки A , B , C , D лежат в одной плоскости:

a) $A(5, -1, -1)$, $B(4, 2, 2)$, $C(5, 3, 1)$, $D(8, 0, -5)$,

b) $A(3, -4, 1)$, $B(2, -3, 7)$, $C(1, -4, 3)$, $D(4, -3, 5)$.

112. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

113. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах:

a) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$ и $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, где \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} – взаимно перпендикулярные орты,

b) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ и $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, где $|\vec{m}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $\widehat{m, n} = 135$.

114. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на трех векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q} - 5\vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 4\vec{r}$ и $\vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на \vec{a} и \vec{b} . Кроме того, известно, что \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} – взаимно перпендикулярные орты.

16. Плоскость

Основные понятия, формулы и теоремы

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Определение 59. Пусть \vec{n} – некоторый ненулевой вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка. *Плоскостью* P называется множество точек M таких, что век-

торы $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{n} перпендикулярны:

$$P = \{M \mid \overrightarrow{M_0M} \text{ перпендикулярен } \vec{n}\}. \quad (79)$$

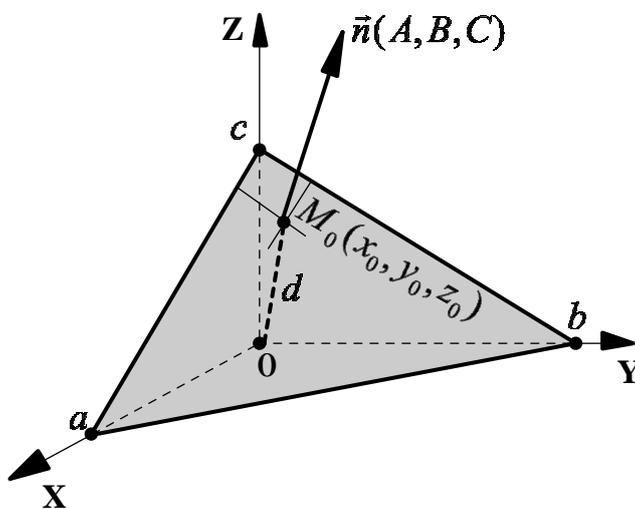


Рис. 25

Определение 60. Плоскость (рисунок 25), проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярная к вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, задается следующим уравнением:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \quad (80)$$

Равенство (80) называется *уравнением плоскости, проходящим через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.*

Общее уравнение плоскости

Определение 61. Плоскость в декартовой системе координат $OXYZ$ может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (81)$$

которое называется *общим уравнением плоскости.*

Коэффициенты (A, B, C) задают *нормальный вектор плоскости \vec{n}* , то есть вектор, перпендикулярный этой плоскости (смотри рисунок 25).

Коэффициент D связан с расстоянием d от плоскости до начала координат формулой

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (82)$$

При любом $\lambda \neq 0$ уравнение

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + \lambda D = 0 \quad (83)$$

определяет ту же плоскость, то есть общее уравнение плоскости не единственно.

Частные случаи расположения плоскостей относительно прямоугольной системы координат

1. Уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (84)$$

в котором свободный член $D = 0$ задает плоскость, проходящую через начало координат (рисунок 26).

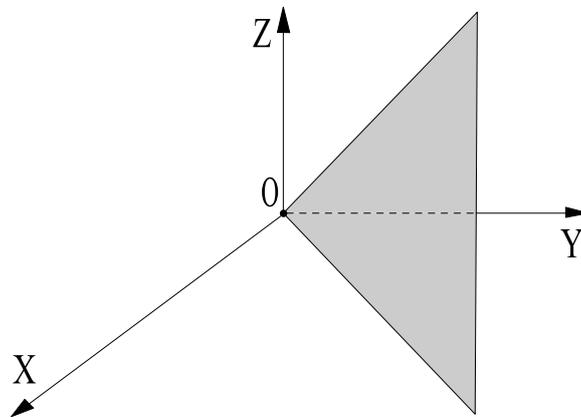


Рис. 26. Плоскость проходит через начало координат

2. Рассмотрим случай, в котором один из коэффициентов при текущих координатах A , B или C равен нулю, но $D \neq 0$. Возможны три варианта:

2.1. Уравнение

$$Ax + By + D = 0, \quad (85)$$

в котором $C = 0$, задает плоскость, параллельную оси OZ (рисунок 27).

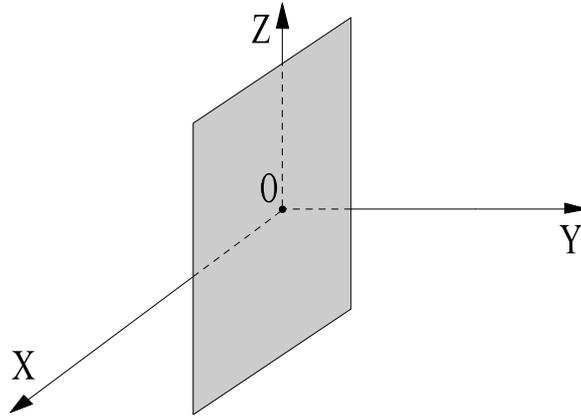


Рис. 27. Плоскость проходит параллельно оси OZ

2.2. Уравнение

$$Ax + Cz + D = 0, \quad (86)$$

в котором $B = 0$, задает плоскость, параллельную оси OY .

2.3. Уравнение

$$By + Cz + D = 0, \quad (87)$$

в котором $A = 0$, задает плоскость, параллельную оси OX .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из уравнений (85)–(87) можно сделать вывод, что если в общем уравнении плоскости нет буквы z и $D \neq 0$, то плоскость параллельна оси OZ и т.п.

3. Один из коэффициентов при текущих координатах A , B или C равен нулю и $D = 0$. В этом случае имеем:

3.1. Если $C = D = 0$, то уравнение

$$Ax + By = 0 \quad (88)$$

задает плоскость, которая проходит (содержит) ось OZ (рисунок 28).

3.2. В случае, когда $B = D = 0$ уравнение

$$Ax + Cz = 0 \quad (89)$$

определяет плоскость, содержащую ось OY .

3.3. Пусть $A = D = 0$, тогда

$$By + Cz = 0 \quad (90)$$

представляет плоскость, проходящую через ось OX .

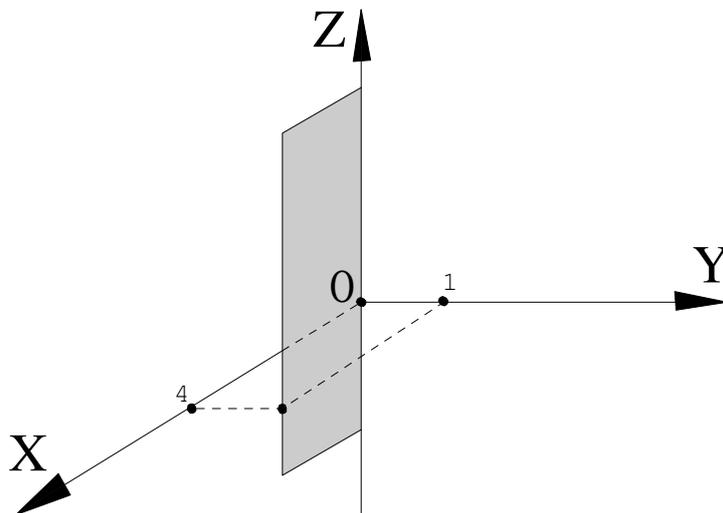


Рис. 28. Плоскость проходит через ось OZ

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из уравнений (88)–(90) следует, что если коэффициент A , B или C при какой-нибудь переменной равен нулю и $D = 0$, то плоскость проходит через соответствующую координатную ось.

4. Два коэффициента при текущих координатах A , B или C равны нулю, при этом $D \neq 0$. Возможны три случая:

4.1. Если $A = B = 0$, то уравнение

$$Cz + D = 0 \quad (91)$$

задает плоскость, параллельную координатной плоскости XOY (рисунок 29).

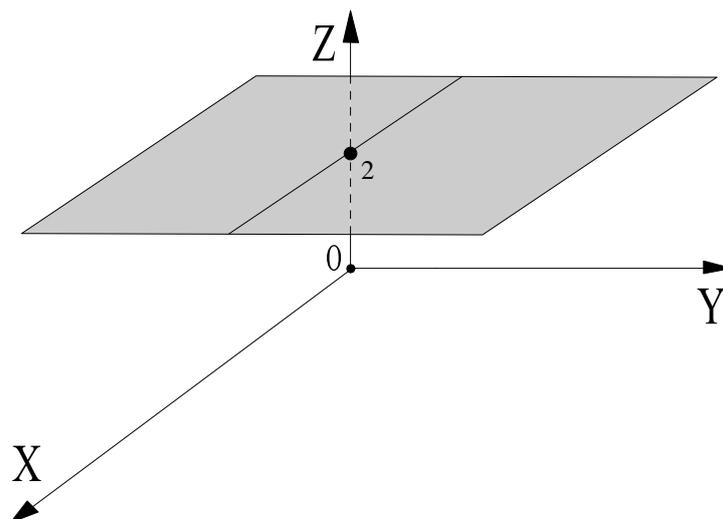


Рис. 29. Плоскость проходит параллельно координатной плоскости XOY

4.2. Аналогично, если $A = C = 0$, то уравнение

$$By + D = 0 \quad (92)$$

определяет плоскость, параллельную координатной плоскости XOZ .

4.3. И, наконец, если $B = C = 0$, то уравнение

$$Ax + D = 0 \quad (93)$$

представляет плоскость, параллельную координатной плоскости ZOY .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из уравнений (91)–(93) заключаем, что если коэффициенты A , B или C при двух переменных равны нулю и $D \neq 0$, то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости.

5. Два коэффициента при текущих координатах A , B или C равны нулю и $D = 0$, тогда имеем:

5.1. Если $B = C = D = 0$, то уравнение (81) принимает вид $x = 0$ и определяет координатную плоскость ZOY (рисунок 30).

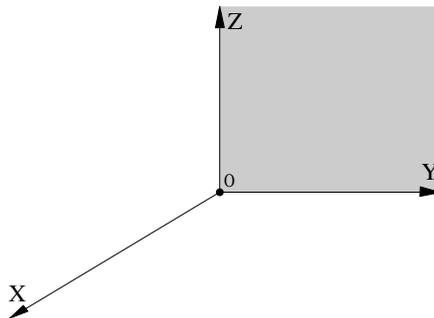


Рис. 30. Координатная плоскость ZOY

5.2. В случае $A = C = D = 0$, то из (81) получаем уравнение $y = 0$, которое определяет координатную плоскость XOZ (рисунок 31).

5.3. Аналогично, если $A = B = D = 0$, то получаем уравнение $z = 0$, представляющее координатную плоскость XOY (рисунок 32).

Уравнение плоскости в отрезках

Определение 62. Если известны абцисса a , ордината b и аппликата c точек пересечения плоскости с координатными осями OX , OY и OZ

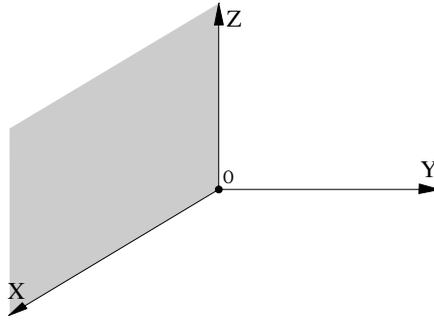


Рис. 31. Координатная плоскость XOZ

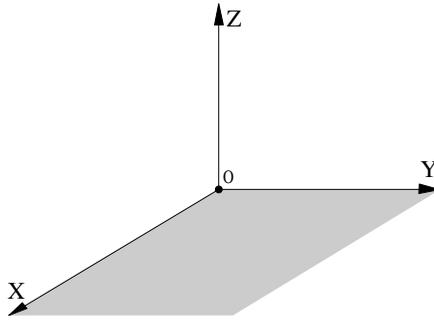


Рис. 32. Координатная плоскость XOY

соответственно (рисунок 33), то можно составить *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (94)$$

Например, на рисунке 33 представлена плоскость, которая отсекает на осях координат отрезки $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$.

Из общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ можно получить уравнение плоскости в отрезках. Для этого надо перенести коэффициент D в правую часть и разделить обе части полученного уравнения на $-D$.

Нормальное уравнение плоскости

Определение 63. Уравнение плоскости

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0, \quad (95)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы нормали плоскости, p – расстояние от начала координат до плоскости (то есть длина отрезка $|OM|$ на рисунке 34), называется *нормальным уравнением плоскости*.

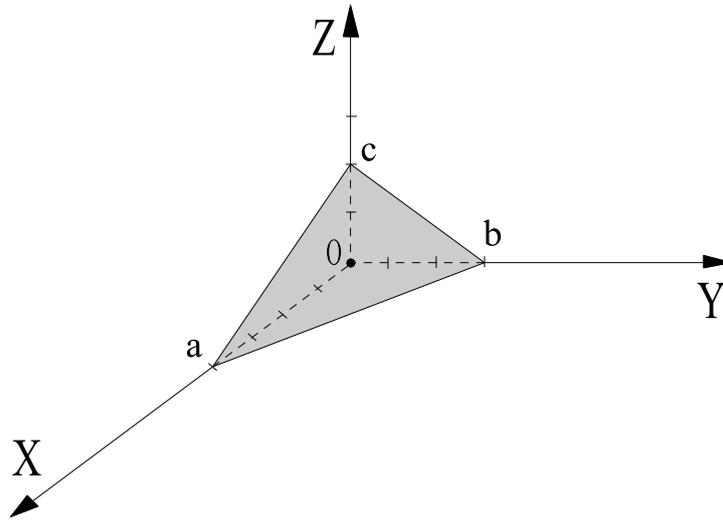


Рис. 33. Уравнение плоскости в отрезках

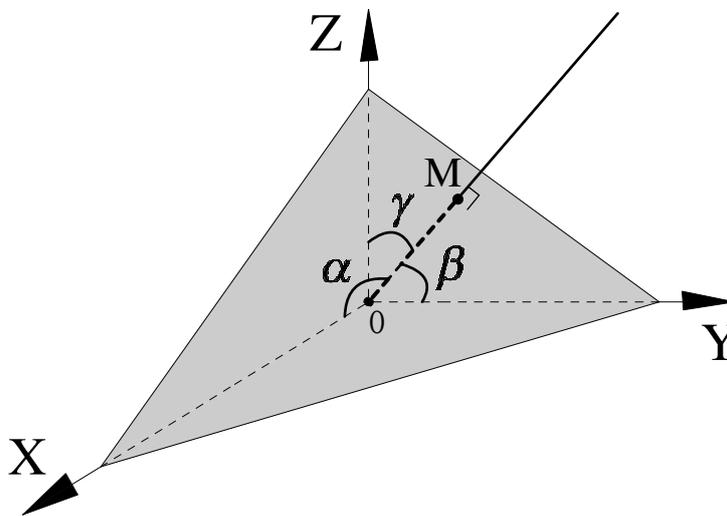


Рис. 34. Нормальное уравнение плоскости

Из общего уравнения плоскости (81) можно получить нормальное уравнение плоскости, умножив обе части уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ на *нормирующий множитель* $t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, знак которого противоположен знаку D .

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние ρ от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (смотри рисунок 35) равно

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (96)$$

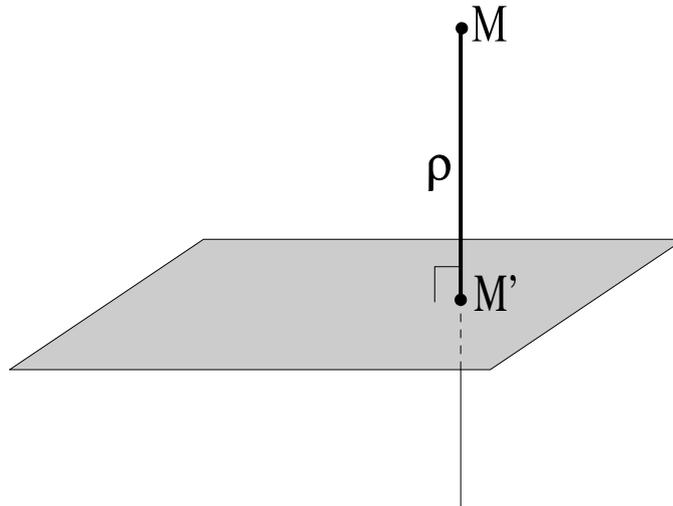


Рис. 35. Расстояние от точки M до плоскости

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Пусть уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ задает плоскость π_1 , а уравнение $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяет плоскость π_2 . Рассмотрим следующие случаи расположения двух плоскостей в пространстве:

1. Две плоскости π_1 и π_2 *параллельны*, если их нормали $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ параллельны (рисунок 36), то есть выполняется равенство:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \quad (97)$$

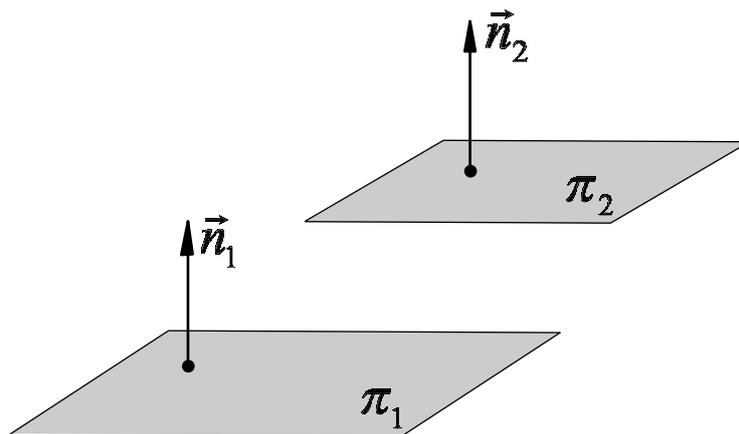


Рис. 36. Параллельные плоскости

2. Две плоскости π_1 и π_2 *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормали $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

(рисунок 37), то есть

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (98)$$

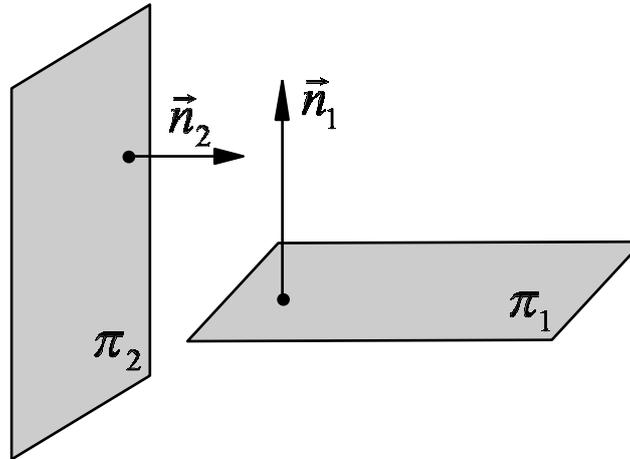


Рис. 37. Перпендикулярные плоскости

3. Две плоскости π_1 и π_2 *совпадают*, если выполняется равенство

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (99)$$

Угол между двумя плоскостями

Угол φ между плоскостями π_1 и π_2 равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ (рисунок 38), поэтому

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (100)$$

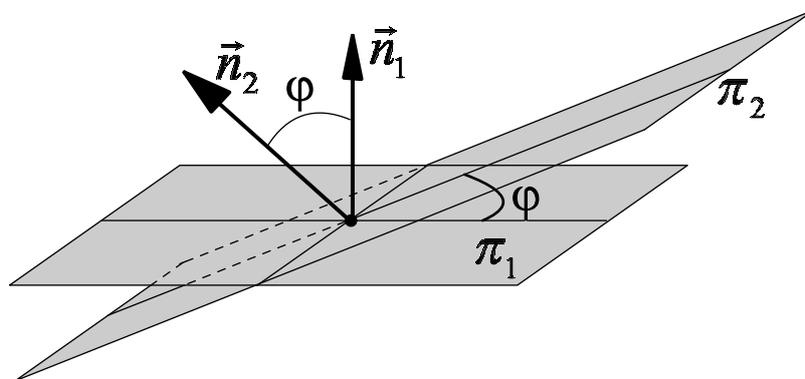


Рис. 38. Угол между плоскостями

Взаимное расположение трех плоскостей в пространстве

Взаимное расположение трех плоскостей определяется свойствами системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3. \end{cases} \quad (101)$$

Возможны следующие варианты:

1) Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$, то плоскости имеют единственную общую точку (смотри, например, рисунок 39). Ее можно найти, решив систему методом Крамера или методом Гаусса.

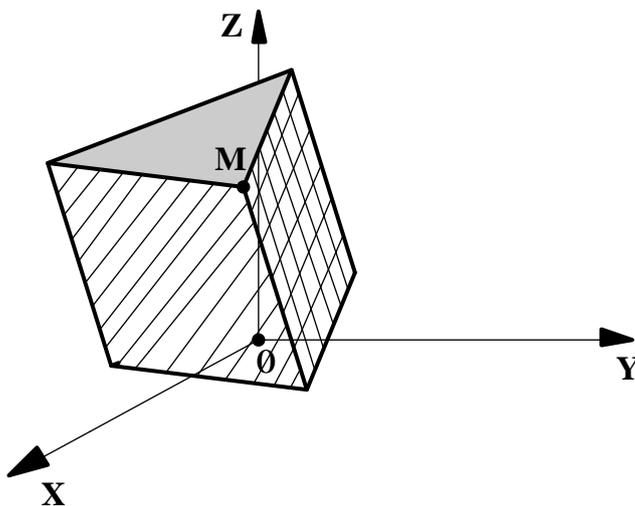


Рис. 39. Три плоскости имеют одну общую точку M

2) Если $\text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \neq \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}$, то общих точек у трех плоскостей нет. На рисунке 40 показаны три плоскости, которые не имеют общих точек.

3) Если $\text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix} = 2$, то

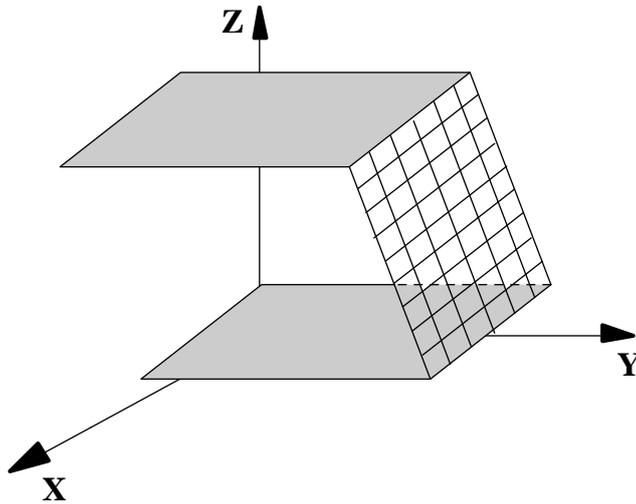


Рис. 40. У трех плоскостей нет общих точек
плоскости пересекаются по общей прямой. Если среди таких плоскостей
нет совпадающих, их расположение иллюстрирует рисунок 41.

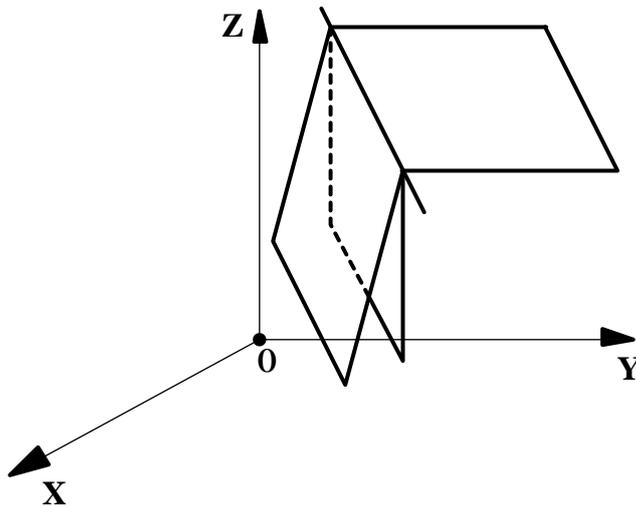


Рис. 41. Три плоскости пересекаются по прямой

4) Если $\text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix} = 1$, то
все три плоскости совпадают.

Пучок и связка плоскостей

Определение 64. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0, \quad (102)$$

где λ – переменный параметр, представляет *пучок плоскостей* (смотри, например, пучок из трех плоскостей на рисунке 41), проходящих через линию пересечения двух основных плоскостей:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Определение 65. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (103)$$

представляет, при переменных параметрах λ и μ , *связку плоскостей* (смотри, например, связку из трех плоскостей на рисунке 39), то есть совокупность всех плоскостей, проходящих через точку пересечения трех основных плоскостей:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Связка плоскостей, проходящих через точку $(x_1; y_1; z_1)$ может быть также представлена уравнением:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \quad (104)$$

где A, B, C могут принимать любые значения.

Задачи для самостоятельного решения

115. Проходит ли плоскость $4x - y + 3z + 1 = 0$ через одну из следующих точек:

$$A(-1; 6; 3), \quad B(2; 0; 5), \quad C(3; -2; -5), \quad D(0; 4; 1), \quad E(2; 7; 0), \quad F(0; 1; 0)?$$

116. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

$$a) \quad 3x - 5z + 1 = 0; \quad d) \quad 2x + 3y - 7z = 0;$$

$$b) \quad 9y - 2 = 0; \quad e) \quad 8y - 3z = 0.$$

$$c) \quad x + y - 5 = 0;$$

117. Написать уравнение плоскости:

a) параллельной плоскости (xz) и проходящей через точку $(2; -5; 3)$;

б) проходящей через ось z и через точку $(-3; 1; 2)$;

с) параллельной оси x и проходящей через две точки $(4; 0; -2)$ и $(5; 1; 7)$.

118. Даны две точки $A(1; 3; -2)$ и $B(7; -4; 4)$. Через точку B провести плоскость, перпендикулярную к отрезку AB .

119. Вычислить отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, следующими плоскостями:

а) $2x - 3y - z + 12 = 0$; д) $x - 4z + 6 = 0$;

б) $5x + y - 3z - 15 = 0$; е) $5x - 2y + z = 0$;

с) $x - y + z - 1 = 0$; ф) $x - 7 = 0$.

120. Через точку $P(7; -5; 1)$ провести плоскость, которая отсекала бы на осях координат положительные и равные между собою отрезки.

121. Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей:

а) $2x - 9y + 6z - 22 = 0$; б) $10x + 2y - 11z + 60 = 0$; с) $6x - 6y - 7z + 33 = 0$.

122. Вычислить расстояние плоскости $15x - 10y + 6z - 190 = 0$ от начала координат.

123. Найти расстояние

а) точки $(3; 1; -1)$ от плоскости $22x + 4y - 20z - 45 = 0$,

б) точки $(4; 3; -2)$ от плоскости $3x - y + 5z + 1 = 0$,

с) точки $(2; 0; -\frac{1}{2})$ от плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

124. Вычислить углы между плоскостями:

а) $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ и $x - 4y - z + 9 = 0$;

б) $3x - y + 2z + 15 = 0$ и $5x + 9y - 3z - 1 = 0$;

с) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ и $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

125. Найти угол между плоскостью $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ и плоскостью Oyz .

126. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $(-2; 7; 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$;

б) проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум

ПЛОСКОСТЯМ:

$$2x - y + 5z + 3 = 0 \text{ и } x + 3y - z - 7 = 0;$$

с) проходящей через точки $L(0; 0; 1)$ и $N(3; 0; 0)$ и образующей угол в 60° с плоскостью Oxy .

127. Найти точку пересечения следующих трех плоскостей:

a) $5x + 8y - z - 7 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$, $2x - 3y + 2z - 9 = 0$;

b) $x - 4y - 2z + 3 = 0$, $3x + y + z - 5 = 0$, $-3x + 12y + 6z - 7 = 0$.

128. Через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 5y - z + 2 = 0$ провести плоскость:

a) проходящую через начало координат;

b) проходящую через точку $(1; 1; 1)$;

c) параллельную оси Oy ;

d) перпендикулярную к плоскости $2x - y + 5z - 3 = 0$.

129. В пучке, определяемом плоскостями $3x + y - 2z - 6 = 0$ и $x - 2y + 5z - 1 = 0$, найти плоскости, перпендикулярные к этим основным плоскостям.

130. В пучке, определяемом плоскостями $2x + y - 3z + 2 = 0$ и $5x + 5y - 4z + 3 = 0$, найти две перпендикулярные друг другу плоскости, из которых одна проходит через точку $L(4; -3; 1)$.

131. В связке, определяемой плоскостями $x + y - z + 2 = 0$, $4x - 3y + z - 1 = 0$ и $2x + y - 5 = 0$, найти плоскость:

a) проходящую через ось абсцисс;

b) параллельную плоскости Oxz ;

c) проходящую через начало координат и через данную точку $P(1; 3; 2)$.

17. Прямая в пространстве

Основные понятия, формулы и теоремы

Каноническое уравнение прямой

Определение 66. Любой вектор \vec{s} , коллинеарный прямой L , называется *направляющим вектором прямой L* .

Например, на рисунке 42 векторы \vec{s} , \vec{s}_1 , \vec{s}_2 являются направляющими векторами прямой l .

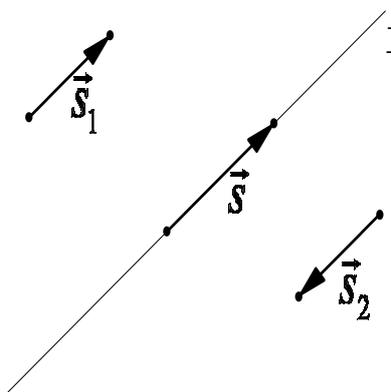


Рис. 42. Направляющий вектор прямой

Определение 67. *Каноническим уравнением прямой* называется запись уравнения прямой в следующем виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (105)$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка прямой, $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Определение 68. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (смотри рисунок 43) имеет следующий вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (106)$$

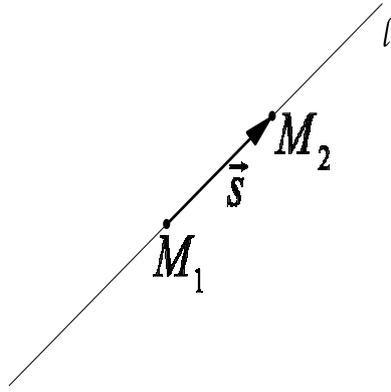


Рис. 43. Уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно данной плоскости

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет вид (смотри рис. 44)

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \quad (107)$$

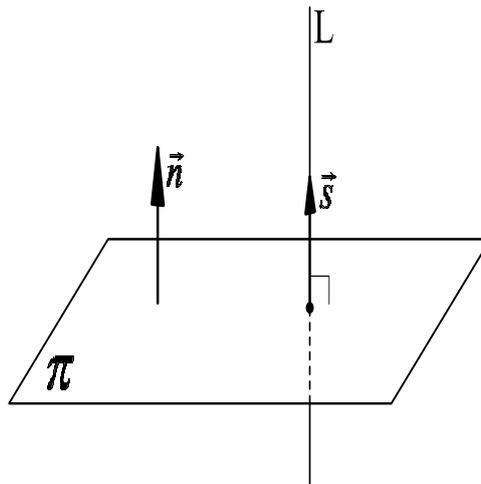


Рис. 44. Перпендикулярность прямой и плоскости

Параметрическое уравнение прямой

Определение 69. *Параметрическим уравнением прямой* называется запись уравнения прямой в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t, \\ y = y_0 + n \cdot t, \\ z = z_0 + p \cdot t, \end{cases} \quad t - \text{произвольное действительное число.} \quad (108)$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка прямой, $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой. Придавая параметру t различные значения, получим координаты точек прямой.

Из параметрического уравнения прямой (108) можно получить каноническое уравнение прямой (105). Для этого надо выразить в каждом уравнении параметр t и приравнять полученные выражения.

Из канонического уравнения прямой (105) можно получить параметрическое уравнение прямой (108). Для этого надо приравнять каноническое уравнения прямой параметру t

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \quad (109)$$

и выразить из равенств $\frac{x - x_0}{m} = t$, $\frac{y - y_0}{n} = t$, $\frac{z - z_0}{p} = t$ переменные x , y , z соответственно.

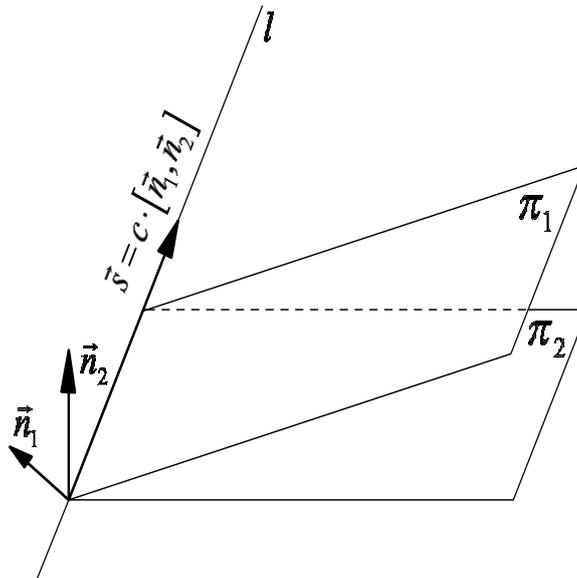


Рис. 45. Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (π_1) и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (π_2)

(смотри рисунок 45):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (110)$$

Равенства (110) называются *общими уравнениями прямой*.

Для перехода от общих уравнений прямой к каноническим или параметрическим уравнениям необходимо:

1. Найти координаты какой-нибудь точки на прямой. Для этого нужно положить в (110) одну из переменных равной нулю (например, $z = 0$) и найти из системы значения двух других переменных.

2. Направляющий вектор прямой \vec{s} найти из равенства

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad (111)$$

где $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы плоскостей π_1 и π_2 соответственно.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть даны плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая L

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t, \\ y = y_0 + n \cdot t, \\ z = z_0 + p \cdot t. \end{cases} \quad (112)$$

Подставив в уравнение плоскости π вместо переменных x, y, z их значения из параметрического уравнения прямой L (112), получим уравнение относительно параметра t . Возможны следующие ситуации:

1. Если уравнение относительно t не имеет решений, то прямая параллельна плоскости. В этом случае имеем

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \\ Am + Bn + Cp + D = 0. \end{cases} \quad (113)$$

Таким образом, (113) – условие параллельности прямой и плоскости.

2. Если уравнение относительно t примет вид верного равенства, например, $0 = 0$, то прямая лежит в плоскости. В этом случае выполняются следующие соотношения

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bn + Cp + D = 0. \end{cases} \quad (114)$$

Система равенств (114) задает условие, при котором прямая лежит в плоскости.

3. Если уравнение относительно t имеет единственное решение t_0 , то подставим это значение параметра в уравнения прямой и найдем точку пересечения прямой и плоскости. При этом плоскость π и прямая L перпендикулярны, если нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s} = (m, n, p)$ коллинеарны (рисунок 44), то есть выполняется условие:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (115)$$

Таким образом, условие (115) определяет условие перпендикулярности прямой и плоскости.

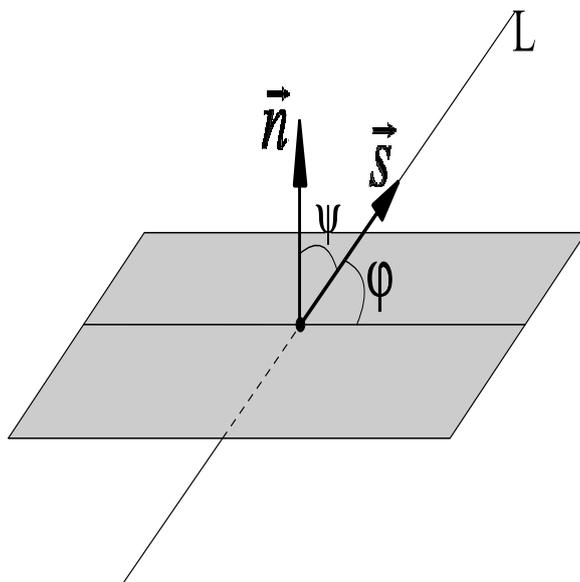


Рис. 46. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой L , заданной каноническим уравнением

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ (рисунок 46) находится по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (116)$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть даны две прямые $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ (L_1) и $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ (L_2).

Возможны следующие случаи расположения двух прямых L_1 и L_2 в пространстве:

1. Прямые L_1 и L_2 *параллельны* тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ коллинеарны, то есть выполняется условие

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (117)$$

2. Прямые L_1 и L_2 *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ перпендикулярны, то есть выполняется условие

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (118)$$

3. Прямые L_1 и L_2 *лежат в одной плоскости* тогда и только тогда, когда

$$(\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (119)$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – произвольные точки на прямых L_1 и L_2 соответственно.

Прямые пересекаются, если выполняется равенство (119), но при этом условие параллельности прямых (117) не выполняется.

Определение 70. Будем говорить, что прямые L_1 и L_2 *скрещиваются*, если они не имеют общих точек и не являются параллельными.

4. Прямые L_1 и L_2 *скрещиваются* тогда и только тогда, когда

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (120)$$

Угол между двумя прямыми

Угол φ между прямыми $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ (L_1) и $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ (L_2) равен углу между направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ этих прямых. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (121)$$

Задачи для самостоятельного решения

132. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

для того, чтобы прямая

- была параллельна оси Ox ;
- пересекла ось Oy ;
- совпала с осью Oz ;
- была параллельна плоскости OYZ ;
- лежала в плоскости OXZ ;
- проходила через начало координат?

133. Написать уравнения ребер тетраэдра, вершины которого даны своими координатами: $A(0; 0; 2)$, $B(4; 0; 5)$, $C(5; 3; 0)$, $D(-1; 4; -2)$.

134. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

135. Через точку $(2; -5; 3)$ провести прямую

a) параллельную оси Oz ;

b) параллельную прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+3}{9}$;

c) параллельную прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

136. Проверить пересекаются ли следующие прямые:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$;

b) $\begin{cases} 4x + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

137. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2; 3; 1)$ на прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

138. Определить угол между двумя прямыми:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

139. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

a) прямой $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$;

b) прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и плоскости $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

c) прямой $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и плоскости $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

d) прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 5 = 0$.

140. При каком значении коэффициента A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ будет параллельна прямой

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}?$$

141. При каких значениях коэффициентов A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?

142. Найти проекцию точки $A(4; -3; 1)$ на плоскость, заданную уравнением $x + 2y - z - 3 = 0$.

- 143.** Проверить, лежит ли прямая в плоскости:
- a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ на плоскости $4x + 3y - z + 2 = 0$;
- b) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3}$ на плоскости $5x - 8y - 2z - 1 = 0$;
- c) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$ и плоскости $3x - 2y - z + 15 = 0$.

18. Различные задачи на прямую и плоскость

Основные понятия, формулы и теоремы

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, лежащие в одной плоскости π (рисунок 47).

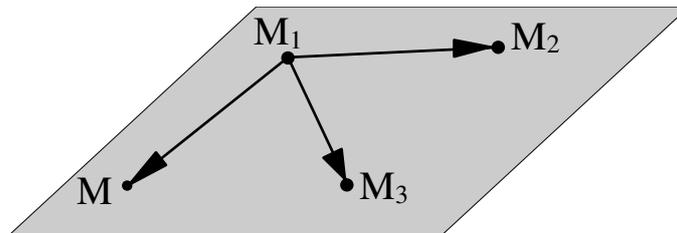


Рис. 47. Плоскость, проходящая через три точки

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости π .

Из условия компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$, получаем уравнение плоскости π . Таким образом, уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (122)$$

задает плоскость, проходящую через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку

Пусть дана прямая L и произвольная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащая прямой L (см. рис. 48).

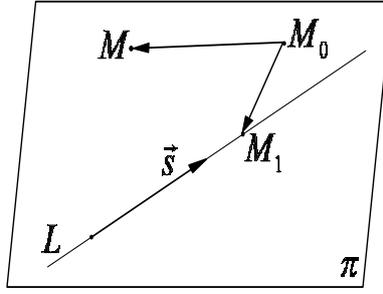


Рис. 48. Плоскость, проходящая через точку и прямую

Пусть $\bar{s} = (m; n; p)$ – направляющий вектор прямой L и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка прямой L . Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, \bar{s} должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов (74), получим, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямую L имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \quad (123)$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно к данной плоскости

Пусть дана прямая L и плоскость π (см. рис. 49).

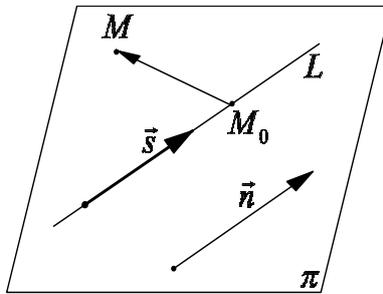


Рис. 49. Плоскость, проходящая через прямую перпендикулярно другой плоскости

Пусть $\bar{s} = (m; n; p)$ – направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка прямой L . Пусть также $\bar{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости π . Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, \bar{n} , \bar{s} должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через прямую L перпен-

дикулярно к плоскости π имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A & B & C \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \quad (124)$$

Уравнение плоскости, проходящей через две данные пересекающиеся прямые

Пусть даны две прямые L_1 и L_2 (см. рис. 50).

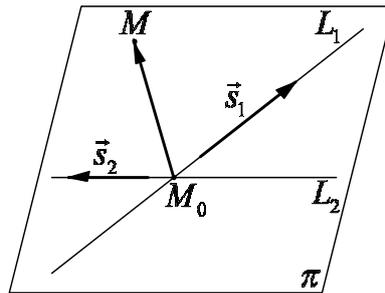


Рис. 50. Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые

Пусть $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 , а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка пересечения прямых L_1 и L_2 . Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, \bar{s}_1 , \bar{s}_2 должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые L_1 и L_2 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (125)$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум данным прямым

Пусть даны две прямые L_1 и L_2 (см. рис. 51).

Пусть $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 , а $P(x_0, y_0, z_0)$ – данная точка. Тогда векторы \overrightarrow{PM} , \bar{s}_1 , \bar{s}_2 должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компла-

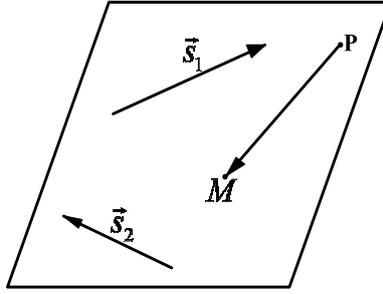


Рис. 51. Плоскость, проходящая через точку параллельно двум прямым
направлениями векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через
точку $P(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум прямым L_1 и L_2 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (126)$$

**Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую параллельно
другой данной прямой**

Пусть даны две прямые L_1 и L_2 (см. рис. 52).

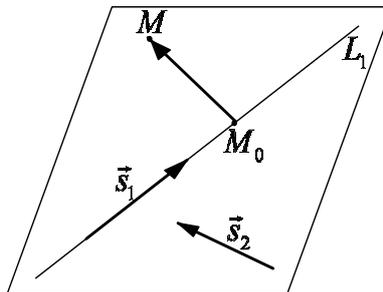


Рис. 52. Плоскость, проходящая через прямую параллельно другой прямой

Пусть L_1 – прямая, лежащая в плоскости. Пусть также $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 , а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка прямой L_1 . Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, \bar{s}_1 , \bar{s}_2 должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через

прямую L_1 и параллельной прямой L_2 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (127)$$

Расстояние от точки до прямой

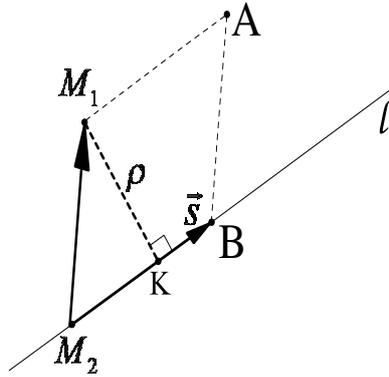


Рис. 53. Расстояние от точки до прямой

Расстояние ρ от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой l , заданной каноническим уравнением $\frac{x - x_2}{m} = \frac{y - y_2}{n} = \frac{z - z_2}{p}$ (рисунок 53) вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{S_{M_1M_2AB}}{|\vec{s}|} = \frac{|[\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{s}]|}{|\vec{s}|} \quad (128)$$

или в координатной форме

$$\rho = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & z_1 - z_2 \\ m & p \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

здесь $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой l , $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – произвольная точка прямой l , $S_{M_1M_2AB}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_2M_1}$ и \vec{s} .

Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Определение 71. *Кратчайшим расстоянием между прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*

Например, на рисунке 54 кратчайшим расстоянием между прямыми является длина отрезка M_1H .

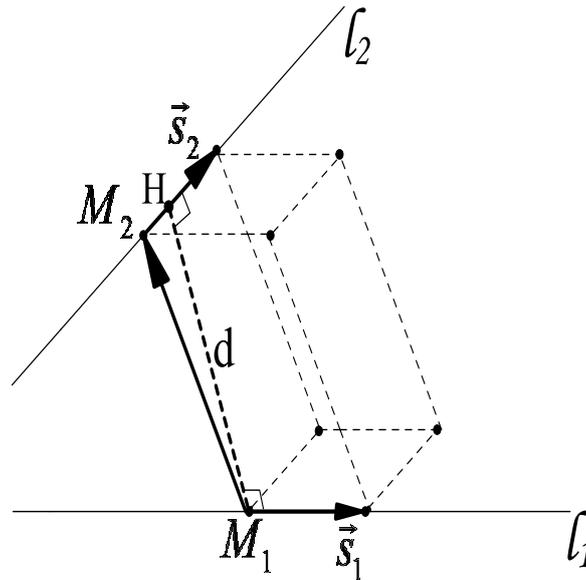


Рис. 54. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Кратчайшее расстояние d между прямыми L_1 и L_2 , которые не пересекаются и заданы соответственно каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

определяется формулой

$$d = \frac{V}{S} = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|[\vec{s}_1, \vec{s}_2]|}, \quad (129)$$

где \vec{s}_1, \vec{s}_2 – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно, V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$, а S – площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{s}_1 и \vec{s}_2 .

Используя формулы для вычисления смешанного и векторного произведения, равенство (129) можно записать в координатной форме в следу-

ющем виде

$$d = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2}}, \quad (130)$$

где знак плюс берется в случае, когда определитель третьего порядка положителен и знак минус – в противном случае.

Задачи для самостоятельного решения

144. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(-2, 4, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(2, 0, -1)$.

145. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $(3; 1; -2)$ и через прямую

$$\frac{x - 4}{5} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z}{1}.$$

146. Через прямую $\frac{x - 2}{5} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

147. Проверить, что прямые

$$\frac{x - 3}{5} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x - 8}{3} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 6}{-2}$$

пересекаются, и написать уравнение плоскости, через них проходящей.

148. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(4; -3; 1)$ и параллельной прямым:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x + 1}{5} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 4}{2}.$$

149. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 4}{1} = \frac{z - 2}{-3}$ и параллельной прямой

$$\frac{x + 5}{4} = \frac{y - 2}{7} = \frac{z - 1}{2}.$$

150. Найти расстояние точки $P(7; 9; 7)$ от прямой

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

151. Найти точку, симметричную с точкой $P(4; 3; 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

152. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

153. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми:

$$\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

154. Вычислить расстояние между прямыми:

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

155. Даны вершины треугольника $A(4; 1; -2)$, $B(2; 0; 0)$, $C(-2; 3; -5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

156. Заданы вершины $A(1, 2, 3)$, $B(3, 0, 2)$, $C(7, 4, 6)$ треугольника $\triangle ABC$. Требуется:

- составить уравнение прямой BC ;
- найти высоту h треугольника, опущенную на сторону BC ;
- вычислить расстояние d между прямой BC и осью абсцисс;
- найти величину угла φ между прямой BC и осью абсцисс;
- найти величину угла ψ между осью абсцисс и плоскостью треугольника $\triangle ABC$.

157. Заданы вершины треугольной пирамиды $A(1, 3, -1)$, $B(2, 1, -2)$, $C(3, -2, 4)$ треугольной пирамиды $OABC$. Требуется:

- найти угол φ между ребром OA и плоскостью грани ABC ;
- составить каноническое уравнение прямой OM , где M – точка пересечения медиан треугольника ABC ;

- c) найти проекцию H точки O на плоскость грани ABC ;
- d) составить каноническое уравнение прямой $O'M$, симметричной прямой OM относительно плоскости грани ABC ;
- e) найти угол ψ между прямыми OM и AB ;
- f) найти расстояние d между прямыми OM и AB ;
- g) найти проекцию C' точки C на прямую OA ;
- h) составить уравнение прямой, содержащей ортогональную проекцию высоты ON грани OBC на плоскость грани ABC .

Линейный оператор в линейном пространстве

19. Линейное пространство. Определение линейной зависимости и линейной независимости систем векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение линейного пространства

Определение 72. Множество V называется *вещественным линейным пространством*, если выполнены три условия:

1) определена операция сложения элементов V , то есть для любых $x, y \in V$ ставится в соответствие элемент $z \in V$, называемый *суммой элементов x, y* и обозначаемый $z = x + y$;

2) определена операция умножения на число, то есть для любого элемента $x \in V$ и любого вещественного числа λ ставится в соответствие элемент $z \in V$, называемый *произведением элемента x на вещественное число* и обозначаемый $z = \lambda x$;

3) заданные линейные операции подчиняются следующим *аксиомам линейного пространства*:

1⁰ $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2⁰ $(x + y) + z = x + (y + z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3⁰ существует элемент $0 \in V$ такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента $x \in V$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства V ;

4⁰ для любого элемента $x \in V$ существует элемент x' такой, что $x + x' = 0$; элемент x' называют *противоположным* элементу x ;

5⁰ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6⁰ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7⁰ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8⁰ $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Элементы линейного пространства называются *векторами*.

Если в определении линейного пространства взять комплексные числа α, β , то множество \mathbf{V} называется *комплексным линейным пространством*.

Основные линейные пространства

1. Вещественное пространство \mathbf{R}^n — множество всех вектор-столбцов с вещественными координатами вида

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

где $n \geq 1$ — фиксированное целое число. Линейные операции на пространстве \mathbf{R}^n вводятся следующим образом. По определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \mathbf{R}^n$ положим

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Для любых $x, y \in \mathbf{R}^n$ по определению

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

2. Множество всех вещественных матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц \mathbf{M}^{mn} является вещественным линейным пространством.

3. Множество \mathbf{P}_n всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n , где $n \geq 0$, есть фиксированное целое число, является вещественным линейным пространством.

Определение линейной зависимости и линейной независимости систем векторов

Определение 73. Система векторов $\{a_i\}_{i=1}^m = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $m \geq 1$ линейного пространства \mathbf{V} называется *линейно зависимой*, если существуют числа x_1, x_2, \dots, x_m , среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = 0. \quad (131)$$

Система векторов $\{a_i\}_{i=1}^m = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $m \geq 1$ называется *линейно независимой*, если равенство (131) имеет место только тогда, когда $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Определение 74. Будем говорить, что вектор $a \in \mathbf{V}$ *линейно выражается* через векторы b_1, b_2, \dots, b_p , $p > 1$ (является *линейной комбинацией* этих векторов), если существуют числа x_1, x_2, \dots, x_p такие, что

$$a = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_p b_p. \quad (132)$$

Задачи для самостоятельного решения

158. Пусть \mathbf{G} — множество всех вектор-столбцов линейного пространства \mathbf{R}^n с положительными элементами, то есть

$$\mathbf{G} = \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Проверить, является ли линейным пространством множество \mathbf{G} , если операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются следующим образом

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \dots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$.

159. Образует ли множество векторов из \mathbf{R}^n линейное пространство, если операция суммы векторов определяется следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n,$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве \mathbf{R}^n . Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

160. Образует ли множество векторов из \mathbf{R}^n линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} |\alpha|x_1 \\ |\alpha|x_2 \\ \dots \\ |\alpha|x_n \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

а операция суммы векторов задается так же, как в пространстве \mathbf{R}^n . Если данное множество не является линейным пространством, то указать какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

161. Система векторов $\{a_1, a_2\}$ является линейно независимой, используя определение, выяснить вопрос о линейной независимости следующей системы векторов:

- a) $\{a_1 + 3a_2, -2a_1 - 6a_2\}$,
- b) $\{a_1 + 2a_2, -a_1 + 3a_2\}$,
- c) $\{2a_1 + 6a_2, -3a_1 + 9a_2\}$,
- d) $\{a_1 + a_2, a_1 - a_2\}$.

162. Используя определение, доказать, что для любых векторов x, y, z и чисел α, β, γ векторы $\alpha x - \beta y, \gamma y - \alpha z, \beta z - \gamma x$ линейно зависимы.

163. Используя определение, исследовать на линейную зависимость в пространстве \mathbf{R}^3 следующие системы векторов

$$a) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$d) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$e) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

164. Используя определение, проверить, будут ли следующие системы многочленов линейно независимыми в линейном пространстве \mathbf{P}_2 :

$$a) \quad p^1(x) = 1, p^2(x) = x - 1, p^3(x) = (x + 3)^2,$$

$$b) \quad p^1(x) = x^2 + 4x, p^2(x) = 2x^2 - x + 4, p^3(x) = 4x^2 - 4x + 1,$$

$$c) \quad p^1(x) = 4x^2 - 3x - 1, p^2(x) = 4x - 3, p^3(x) = 4x^2 + 9x - 10,$$

$$d) \quad p^1(x) = 4x^2 - 3x + 2, p^2(x) = -3x^2 + 2x + 3, p^3(x) = 7x^2 - 5x - 1,$$

$$e) \quad p^1(x) = 3x - 4, p^2(x) = 3x^2 - 2x - 3, p^3(x) = x^2 + 3x + 3.$$

20. Базисы. Размерность пространства

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 75. Система векторов $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ называется *базисом линейного пространства V* , если выполняются два условия:

- 1) система векторов e является линейно независимой;
- 2) любой вектор $x \in V$ представим в виде линейной комбинации

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n. \quad (133)$$

Вектор-столбец $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется *координатами вектора x* в

базисе e .

Определение 76. Число векторов в базисе V называется *размерностью линейного пространства V* и обозначается через $\dim V$.

Определение 77. Линейное пространство V называется *конечномерным*, если число векторов в базисе конечное число, иначе V – *бесконечномерное пространство*.

Естественные базисы основных линейных пространств

1. Система вектор-столбцов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

называется естественным базисом пространства \mathbf{R}^n . Размерность пространства \mathbf{R}^n равна n .

2. Система прямоугольных матриц размерности $m \times n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется естественным базисом пространства \mathbf{M}^{mn} . Таким образом, размерность пространства \mathbf{M}^{mn} равна mn .

3. Система многочленов

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3, \dots, e_{n+1} = x^n$$

называется естественным базисом пространства \mathbf{P}_n . Размерность пространства \mathbf{P}_n равна $n + 1$.

Задачи для самостоятельного решения

165. Используя определение, проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве \mathbf{R}^3 .

$$a) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$d) \quad e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

166. Используя определение, проверить, является ли система многочленов p_1, p_2, p_3 базисом в линейном пространстве \mathbf{P}_2 .

- a) $p_1 = 1 - 3x - 2x^2, p_2 = 2 - 4x + x^2, p_3 = 2 + 3x + 2x^2,$
 b) $p_1 = -2 + 2x + 3x^2, p_2 = x - 2x^2, p_3 = -2 + x + 5x^2,$
 c) $p_1 = -4 + 2x - x^2, p_2 = 4 + x + 4x^2, p_3 = -3 - 3x - 2x^2,$
 d) $p_1 = -1 + 2x + x^2, p_2 = -2 - x + x^2, p_3 = -7 + 4x + 5x^2.$

167. Используя определение, проверить, является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве \mathbf{M}^{22} .

- a) $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$
 b) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$
 c) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$
 d) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$

168. Проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве \mathbf{R}^3 , и найти координаты вектора x в этом базисе.

По известному координатному вектору y_e найти вектор y :

- a) $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$
 b) $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},$
 c) $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

169. Проверить, является ли система многочленов p_1, p_2, p_3 базисом в линейном пространстве \mathbf{P}_2 и найти координаты многочлена $h(x)$ в этом базисе. По известному координатному вектору g_p найти многочлен g .

$$a) \quad p_1 = 4 + 4x + 2x^2, p_2 = -3 - 2x^2, p_3 = -1 - x + x^2, g_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$h(x) = 5 - 4x + 4x^2;$$

$$b) \quad p_1 = -3 + 2x^2, p_2 = 2 + x + 2x^2, p_3 = 4 + 4x - 2x^2, g_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$h(x) = 5 + x;$$

$$c) \quad p_1 = 2 + 4x - 2x^2, p_2 = -1 + 2x + x^2, p_3 = -2 - 2x - x^2,$$

$$g_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, h(x) = 2 + 4x^2.$$

170. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства \mathbf{V} , заданного следующим образом:

a) пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_4$ таких, что $p(1) + p(-1) = 0$,

b) пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_2$ таких, что $p(1) = 0$,

c) пространство многочленов $p(x) \in \mathbf{P}_4$ таких, что $p(2) = 0$.

171. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства \mathbf{V} , заданного следующим образом:

a) пространство симметричных матриц размерности 3×3 ,

b) пространство матриц (a_{ij}) размерности 2×3 , элементы которых удовлетворяю условиям $a_{11} = 0$, $a_{22} = a_{33}$,

c) пространство симметричных матриц размерности 3×3 , диагональные элементы которых равны нулю.

21. Преобразование базиса и координат. Линейное подпространство

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть V – линейное пространство размерности n .

Определение 78. Матрицей перехода от базиса $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ к базису $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ называется квадратная матрица $T_{e \rightarrow u} = (t_{ij})$ размера $n \times n$, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Таким образом, базисы e и u связаны матричным равенством

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot T_{e \rightarrow u}. \quad (134)$$

Равенство (134) можно переписать в следующем виде:

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot T_{u \rightarrow e}. \quad (135)$$

Сравнивая равенства (134) и (135) получаем, что две матрицы перехода $T_{e \rightarrow u}$ и $T_{u \rightarrow e}$ являются обратными к друг другу, то есть

$$T_{u \rightarrow e} = T_{e \rightarrow u}^{-1}, \quad T_{e \rightarrow u} = T_{u \rightarrow e}^{-1}. \quad (136)$$

При таких обозначениях координаты x_e вектора x в базисе e связаны с координатами x_u того же вектора в базисе u равенствами

$$x_e = T_{e \rightarrow u} \cdot x_u \quad (137)$$

или

$$x_u = T_{e \rightarrow u}^{-1} \cdot x_e \quad (138)$$

либо

$$x_u = T_{u \rightarrow e} \cdot x_e. \quad (139)$$

Определение 79. Линейным подпространством линейного пространства V называется непустое множество L векторов из V , обладающее следующими свойствами:

- 1) сумма $x + y$ двух любых векторов из \mathbf{L} снова принадлежит \mathbf{L} ;
- 2) произведение $\alpha \cdot x$ любого вектора x из \mathbf{L} на любое число α снова принадлежит \mathbf{L} .

Любое линейное подпространство является линейным пространством.

Определение 80. *Размерностью* линейного подпространства \mathbf{L} называется число векторов в базисе. Размерность линейного подпространства \mathbf{L} обозначается через $\dim L$.

Определение 81. Рассмотрим систему векторов a_1, a_2, \dots, a_k из векторного пространства \mathbf{V} . Множество всевозможных линейных комбинаций векторов a_1, a_2, \dots, a_k называется *линейным подпространством, натянутым на систему векторов a_1, a_2, \dots, a_k* или *линейной оболочкой* и обозначается $\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Таким образом

$$\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \{x \in \mathbf{V} \mid x = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k\}$$

Линейная оболочка является линейным подпространством.

Определение 82. *Базисом системы векторов* в линейном пространстве называется базис линейной оболочки этой системы векторов. *Рангом системы векторов* называется число векторов в базисе линейной оболочки.

Теорема 1. *Ранг системы векторов a_1, a_2, \dots, a_k линейного пространства \mathbf{V} равен рангу матрицы A , составленной по столбцам из координат векторов a_1, a_2, \dots, a_k в каком-либо базисе линейного пространства \mathbf{V} .*

Задачи для самостоятельного решения

172. Найти матрицу перехода от базиса $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ в линейном пространстве \mathbf{R}^3 . По известным координатам векторов x, y в одном базисе найти их координаты в другом базисе:

$$a) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, y_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, x_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

173. Найти координаты вектора x в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если он задан в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$a) \quad \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ u_2 = 2e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \quad x_e = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ u_2 = (3/2)e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \quad x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ u_2 = (4/3)e_1 - e_2, \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \quad x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

174. Является ли линейным подпространством линейного простран-

ства \mathbf{R}^n каждая из следующих совокупностей векторов:

- a) Множество всех векторов, у которых первая координата $x_1 = a$, где a – некоторое фиксированное вещественное число,
- b) Множество всех векторов, у которых сумма первой и второй координаты неотрицательна, то есть $x_1 + x_2 \geq 0$,
- c) Множество всех векторов, у которых все координаты являются рациональными числами,
- d) Множество всех векторов с нулевыми первыми двумя координатами: $x_1 = x_2 = 0$.

175. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbf{P}_n, n \geq 1$, следующие множества многочленов степени не выше n :

- a) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n , для которых $f(b) = c$, где b, c – фиксированные, вещественные числа,
- b) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n , для которых $\int_0^1 f(t) dt = 0$,
- c) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n , для которых числа 2 и 3 являются корнями,
- d) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n , для которых $f'(0) = 1$.

176. Найти ранг и базис системы векторов $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$

$$a) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$
$$a^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^6 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$a^5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^6 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

22. Линейный оператор в линейном пространстве

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 83. *Оператором*, действующим в линейном пространстве \mathbf{V} , называется правило φ , по которому каждому элементу x из \mathbf{V} ставится в соответствие некоторый элемент y из \mathbf{V} . Элемент y называется *образом* элемента x , а элемент x — *прообразом* элемента y . Тот факт, что элемент y соответствует элементу x при действии оператора φ , записывается так:

$$y = \varphi(x). \quad (140)$$

Определение 84. Оператор φ , действующий в линейном пространстве \mathbf{V} , называется *линейным*, если для любых двух элементов x_1 и x_2 из \mathbf{V} и любого числа α выполняются равенства:

$$1) \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2); \quad 2) \varphi(\alpha x_1) = \alpha \varphi(x_1). \quad (141)$$

Определение 85. Пусть $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис пространства \mathbf{V} . Тогда векторы

$$\varphi(e_1) = v_1, \varphi(e_2) = v_2, \dots, \varphi(e_n) = v_n$$

Матрица A_e оператора φ в базисе $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и матрица A_u того же оператора в базисе $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ связаны соотношением

$$A_u = T_{e \rightarrow u}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e \rightarrow u} = T_{u \rightarrow e} \cdot A_e \cdot T_{u \rightarrow e}^{-1}, \quad (145)$$

где $T_{e \rightarrow u}$ – матрица перехода от базиса e к базису u : $u = e \cdot T_{e \rightarrow u}$.

Равенство (145) может быть переписано в следующем виде:

$$A_e = T_{e \rightarrow u} \cdot A_u \cdot T_{e \rightarrow u}^{-1} = T_{u \rightarrow e}^{-1} \cdot A_u \cdot T_{u \rightarrow e}. \quad (146)$$

Задачи для самостоятельного решения

177. Выяснить, какие из следующих операторов, действующих в линейном пространстве \mathbf{R}^3 являются линейными, и в случае линейности найти их матрицы в естественном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Для любого вектора } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3:$$

$$a) \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 6 - 5x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} x_3^4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

$$b) \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 0 \\ x_2^4 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

$$c) \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2^4 + 3x_3 \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

178. Для следующих линейных операторов, действующих в линейном пространстве \mathbf{P}_2 , найти матрицы в естественном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$. Вычислить определитель оператора.

Для любого многочлена $f \in \mathbf{P}_2$:

$$a) \varphi(f) = -3f''(x) + 3f'(x), \quad b) \varphi(f) = f(x+2) + f(0)x + f'(x),$$

$$c) \varphi(f) = f(-2) + f(2)x + f(3)x^2, \quad d) \varphi(f) = f(x) + f(2)x + f'(x).$$

179. Линейный оператор φ в базисе $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$ имеет матрицу A_f . Найти матрицу A_g линейного оператора φ в базисе $g = \{g_1, g_2, g_3\}$:

$$a) A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} g_1(x) &= 1 + 2x, \\ g_2(x) &= -1 + 2x + x^2, \\ g_3(x) &= -1 + x + x^2, \end{aligned}$$

$$b) A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} g_1(x) &= -3 + x + 2x^2, \\ g_2(x) &= -2 + x + x^2, \\ g_3(x) &= -2 + x^2, \end{aligned}$$

$$c) A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} g_1(x) &= -1 + 2x - 2x^2, \\ g_2(x) &= -1 + x, \\ g_3(x) &= 2 - 2x + x^2. \end{aligned}$$

180. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e . Найти матрицу A_u линейного оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если известно разложение векторов базиса u в линейные комбинации по базису e :

$$a) A_e = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} u_1 &= 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ u_2 &= 3e_1 + 4e_2 + e_3, \\ u_3 &= e_1 + 2e_2 + 2e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) A_e &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, & u_1 &= e_1 - e_2 + e_3, \\
& & u_2 &= -e_1 + e_2 - 2e_3, \\
& & u_3 &= -e_1 + 2e_2 + e_3, \\
c) A_e &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & u_1 &= e_1 + 2e_2 - 3e_3, \\
& & u_2 &= e_2 - e_3, \\
& & u_3 &= -e_1 - e_2 + 3e_3.
\end{aligned}$$

181. Линейный оператор φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_e . Найти матрицу A_u оператора φ в базисе $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, если известно разложение векторов базиса e в линейные комбинации по базису u :

$$\begin{aligned}
a) A_e &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, & e_1 &= u_1 - 2u_2 - u_3, \\
& & e_2 &= -u_1 + 3u_2 + 2u_3, \\
& & e_3 &= -2u_2 - u_3, \\
b) A_e &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & e_1 &= u_1 - 2u_2 + u_3, \\
& & e_2 &= 2u_1 - 3u_2 + u_3, \\
& & e_3 &= -u_1 + 2u_2, \\
c) A_e &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & e_1 &= u_1 - 2u_2 + 2u_3, \\
& & e_2 &= -u_1 + 3u_2 - 3u_3, \\
& & e_3 &= -u_2 + 2u_3.
\end{aligned}$$

23. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть V – комплексное линейное пространство. Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ – линейный оператор.

Определение 87. Ненулевой элемент x из V называется *собственным вектором* линейного оператора φ , если существует число λ такое, что $\varphi(x) = \lambda x$. Число λ при этом называется *собственным значением* оператора φ . Говорят также, что собственный вектор x отвечает (или соответствует) собственному значению λ .

Определение 88. Пусть A – матрица оператора φ в некотором базисе e . Многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом* оператора φ . Корни многочлена $f(\lambda)$ называются *характеристическими корнями матрицы A* .

Определение 89. *Алгебраической кратностью* собственного числа λ называется кратность корня λ характеристического многочлена $f(\lambda)$.

Определение 90. Пусть λ – собственное значение линейного оператора φ . Тогда, по определению, ненулевой вектор U будет собственным, если $\varphi(U) = \lambda U$ или, что равносильно, $(\varphi - \lambda I)U = 0$. Отсюда получаем, что подпространство $\ker(\varphi - \lambda I)$ состоит из всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ , и нулевого вектора. Это подпространство называется *собственным*. Его размерность называется *геометрической кратностью* собственного значения λ .

Алгоритм отыскания собственных векторов и собственных значений линейного оператора φ .

Пусть A – матрица линейного оператора φ , E – единичная матрица. Тогда для того, чтобы найти собственные значения и собственные векторы, нужно выполнить следующие действия:

1. Найти собственные значения оператора, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (147)$$

Обозначим их $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, k \leq n$.

2. Для каждого собственного значения λ_p найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = 0. \quad (148)$$

Правило для решения характеристических уравнений в одном частном случае.

Пусть дана матрица A размера 3×3 , то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае характеристическое уравнение (147) имеет вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \quad (149)$$

где I_1, I_2, I_3 – числа, которые вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33}; \\ I_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \\ I_3 &= |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Линейный оператор φ , действующий в линейном пространстве V , тогда и только тогда задается в базе e_1, e_2, \dots, e_n диагональной матрицей, если все векторы этой базы являются собственными векторами линейного оператора φ .*

На основании теоремы 1 можно составить *алгоритм приведения матрицы к диагональному виду*. Для того, чтобы привести данную квадратную матрицу A размерности n к диагональному виду необходимо:

1. Найти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ собственные числа матрицы A .
2. Для каждого собственного значения λ_i найти соответствующий ему собственный вектор. Если в результате вычисления мы получим систему из n линейно независимых собственных векторов U_1, U_2, \dots, U_n , то

матрицу A можно привести к следующему диагональному виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (150)$$

3. Записать собственные векторы как столбцы новой матрицы T . Полученная матрица T является базисом, в котором матрица A имеет диагональный вид (150).

Задачи для самостоятельного решения

182. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, действующих в вещественном линейном пространстве, и заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

183. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, действующих в комплексном линейном пространстве, и заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 1 - 2i & -1 \\ -1 + i & 1 - i \end{pmatrix}.$$

184. Найти собственные значения, их алгебраическую и геометрическую кратности и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

185. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов

можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису.

Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

$$\begin{aligned} a) & \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & b) & \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, & c) & \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \\ d) & \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, & e) & \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Евклидово пространство. Квадратичные формы

24. Определение скалярного произведения. Ортогональные и ортонормированные системы векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть E_n – линейное пространство размерности n .

Определение 91. *Скалярным произведением* элементов x и y из E_n называется правило, ставящее в соответствие вещественное число (будем обозначать это число (x, y)), причем указанное правило удовлетворяет для любых x, y, z из E_n и любого вещественного числа α следующим требованиям (они называются *аксиомами скалярного произведения*).

1⁰. $(x, y) = (y, x)$ (перестановочность или коммутативность сомножителей).

2⁰. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (распределительное свойство).

3⁰. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

4⁰. $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$, если $x = 0$.

Определение 92. Вещественное линейное пространство E_n называется *евклидовым пространством*, если в нем введено скалярное произведение векторов.

Определение 93. *Нормой* элемента $x \in E_n$ (обозначение $\|x\|$) называется вещественное число, определяемое по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (151)$$

Определение 94. Вектор x называется *нормированным*, если его норма $\|x\| = 1$.

Определение 95. Углом между ненулевыми векторами $x, y \in E_n$ называется число φ , удовлетворяющее условиям

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (152)$$

Определение 96. Элементы x и y из \mathbf{E}_n называются *ортгоналъными* (обозначение: $x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$x \perp y, \text{ тогда и только тогда, когда } (x, y) = 0. \quad (153)$$

Определение 97. Базис $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbf{E}_n$ называется *ортгоналъным*, если элементы базиса попарно ортгоналъны, то есть

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \quad (154)$$

Определение 98. Ортгоналъный базис $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbf{E}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (155)$$

Пусть координаты элементов x, y из евклидова пространства \mathbf{E}_n заданы в ортонормированном базисе, тогда скалярное произведение и норму можно вычислить по формулам

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (156)$$

Процедура ортгонализации Грама-Шмидта

Ортонормированный базис в евклидовом пространстве \mathbf{E}_n можно построить на основе произвольного базиса с помощью процедуры ортгонализации. Опишем эту процедуру.

Пусть даны k линейно независимых элементов x_1, x_2, \dots, x_k евклидова пространства \mathbf{E}_n . Построим попарно ортгоналъные элементы e_1, e_2, \dots, e_k , представляющие собой линейные комбинации элементов x_1, x_2, \dots, x_k следующим образом.

Положим

$$e_1 = x_1, \quad e_2 = x_2 - a_{12}e_1, \quad \text{где} \quad a_{12} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}. \quad (157)$$

Такой выбор коэффициента a_{12} обеспечивает ортогональность e_1 и e_2 : $(e_1, e_2) = 0$. Далее, положим

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2 = x_3 - \sum_{i=1}^2 a_{i3}e_i, \quad (158)$$

где $a_{13} = \frac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$, $a_{23} = \frac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$. Такой выбор коэффициентов a_{13} и a_{23} обеспечивает ортогональность e_3 к элементам e_1 и e_2 . И так далее.

На m -м шаге $m \leq k$ полагаем

$$e_m = x_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{im}e_i, \quad \text{где } a_{im} = \frac{(x_m, e_i)}{(e_i, e_i)}. \quad (159)$$

Такой выбор коэффициентов a_{im} обеспечивает ортогональность e_m к элементам e_1, e_2, \dots, e_{m-1} . В результате k шагов описанная процедура дает ортогональную систему векторов e_1, e_2, \dots, e_k .

Нормирование системы векторов

Чтобы сделать ортогональную систему векторов e_1, e_2, \dots, e_k ортонормированной, нужно каждый элемент e_i умножить на число $\frac{1}{\|e_i\|}$. Полученные в результате элементы $g_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, g_k = \frac{e_k}{\|e_k\|}$ образуют ортонормированную систему векторов.

Задачи для самостоятельного решения

186. Может ли скалярное произведение в пространстве \mathbf{R}^2 задаваться формулой:

- a) $x_1y_1 + 2x_2y_2$,
- b) $3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$,
- c) $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

187. Может ли функция $F(X, Y)$ быть принята за скалярное произведение в пространстве \mathbf{M}^{22} :

- a) $F(X, Y) = \text{tr}(X \cdot Y)$,
- b) $F(X, Y) = \text{tr}(X) \cdot \text{tr}(Y)$,
- c) $F(X, Y) = \det(X \cdot Y)$,

где $\text{tr}(X) = \sum_{k=1}^2 x_{kk}$ – сумма элементов матрицы X , стоящих на главной диагонали, $\det(X)$ – определитель матрицы X .

188. Может ли скалярное произведение в пространстве \mathbf{P}_2 задаваться формулой:

$$a) \quad (f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt \quad \text{для} \quad \forall f, g \in \mathbf{P}_2,$$

$$b) \quad (f, g) = f(1)g(1) + f'(1)g'(1) + f''(1)g''(1) \quad \text{для} \quad \forall f, g \in \mathbf{P}_2,$$

$$c) \quad (f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) \quad \text{для} \quad \forall f, g \in \mathbf{P}_2.$$

189. Используя (156), вычислить скалярное произведение векторов a и b , их нормы и угол φ между ними в евклидовом пространстве \mathbf{R}^4 :

$$a) \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b) \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad a = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

190. Используя (156), найти скалярное произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$, их нормы и угол между ними в евклидовом пространстве \mathbf{P}_3 :

$$a) \quad f(x) = -1 + x + 2x^2 - x^3, \quad g(x) = -2 - 3x - x^2 - 3x^3,$$

$$b) \quad f(x) = 2x - x^2 + 2x^3, \quad g(x) = -1 + x + x^2 + x^3,$$

$$c) \quad f(x) = 1 - x + 3x^3, \quad g(x) = 1 + 2x - x^2 + 4x^3.$$

191. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:

$$a) \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$b) x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

192. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов пространства \mathbf{R}^4 :

$$a) x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b) x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

193. Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов пространства \mathbf{R}^n :

$$a) x_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad n = 3,$$

$$b) x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad n = 4.$$

25. Метод Лагранжа

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 99. *Квадратичной формой* называется функция числовых переменных x_1, x_2, \dots, x_n следующего вида:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad (160)$$

где a_{ij} – вещественные числа (*коэффициенты квадратичной формы*), удовлетворяющие условию

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (161)$$

Матрица $A = (a_{ij})$ с размером $n \times n$ называется *матрицей квадратичной формы*. Из равенства (161) следует, что матрица квадратичной формы A является симметрической.

Квадратичную форму (160) можно записать в матричном виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X,$$

где X – столбец переменных x_1, x_2, \dots, x_n , X^T – строка, полученная транспонированием столбца X , A – матрица квадратичная формы.

Любую квадратичную форму

$$f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

невырожденным линейным преобразованием $X = Q \cdot Y$ можно привести к виду

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^n c_i (y_i)^2. \quad (162)$$

Определение 100. Выражение (162) называется *каноническим видом квадратичной формы*, а числа c_i ($i = 1, \dots, n$) – ее *каноническими коэффициентами*. Матрица квадратичной формы \tilde{f} , имеющей канонический вид, является диагональной матрицей с элементами c_i на главной диагонали. Если в квадратичной форме (162) все канонические коэффициенты $c_i = \pm 1$ ($i = 1, \dots, n$), то ее также называют *нормальным видом квадратичной формы*.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа):

Для приведения квадратичной формы n переменных

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n) + \dots + a_{nn}x_n^2$$

к каноническому виду нужно выполнить следующие действия:

1. Выбрать такую переменную (*ведущую*), которая входит в квадратичную форму во второй и первой степенях одновременно, и перейти к пункту 2.

Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти к пункту 4.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то никаких преобразований делать не надо, так как она уже имеет канонический вид.

2. Выделить полный квадрат по ведущей переменной.

3. Сделать замену переменных: линейную форму, содержащую ведущую переменную, принять на одну из новых переменных, а все старые переменные, за исключением ведущей, принять за соответствующие новые. Продолжить преобразования, переходя к пункту 1.

4. Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. Продолжить преобразования, переходя к пункту 1.

Задачи для самостоятельного решения

194. Найти канонический вид и матрицу линейного преобразования, которое приведет квадратичную форму к этому виду:

a) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2x_3,$

b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$

c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$

d) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3,$

e) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3,$

f) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3,$

g) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$

h) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3,$

i) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$

26. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Критерий Сильвестра

Основные понятия, формулы и теоремы

Приведение квадратичной формы к главным осям

Определение 101. Квадратная матрица Q называется *ортогональной*, если выполняется равенство

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Определение 102. Линейное преобразование переменных $X = QY$, называется *ортогональным*, если его матрица Q ортогональная.

Теорема 1. Для любой квадратичной формы f

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (163)$$

существует ортогональное преобразование $X = QY$, приводящее ее к каноническому виду:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \quad (164)$$

При этом λ_i ($i = 1, \dots, n$) – собственные значения матрицы квадратичной формы A , а столбцы матрицы Q – ортонормированная система собственных векторов матрицы A (норма каждого из них равна 1).

Пусть дана квадратичная форма (163) с матрицей $A = (a_{ij})$. Тогда алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям состоит в следующем:

1. Найти собственные значения матрицы A , решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Обозначим их $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

2. Для каждого собственного значения λ_p , $1 \leq p \leq n$ найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = 0.$$

Найденные решения будут собственными векторами, соответствующие собственному значению λ_p .

3. Используя процедуру ортогонализации, ортогонализировать и нормировать систему из собственных векторов матрицы A (если это необходимо).

4. Составить ортогональную матрицу Q , столбцами которой являются ортонормированные векторы матрицы A .

5. Записать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

6. Записать ортогональное преобразование переменных $X = QY$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Критерий Сильвестра

Определение 103. Квадратичная форма f называется *положительно определенной*, если ее нормальный вид следующий

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Определение 104. Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$.

Теорема 2. (*критерий Сильвестра*). Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны, то есть

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

195. Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования:

a) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3,$

b) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$

c) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

196. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$

b) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3,$

c) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3,$

d) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3,$

e) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$

f) $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3.$

197. Найти все значения параметра λ , при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

a) $x_1^2 + 4x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$

b) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$

c) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3,$

d) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$

e) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3,$

f) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$

ОТВЕТЫ

1. **a)** $3 + i$; $-4 + 19i$; $-7 + 5i$; $-\frac{16}{29} + \frac{11}{29}i$; $-16 - 11i$, **b)** $3 - 2i$; $37 - 9i$; $1 + 12i$; $-\frac{33}{50} + \frac{19}{50}i$; $-33 - 19i$, **с)** $2\sqrt{2}$; 5 ; $-2\sqrt{3}i$; $-\frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5}i$; $-1 + 2\sqrt{6}i$.

2. *Решение.* Имеем $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$. Очевидно, что все возможные значения i^n были вычислены и дальше они будут циклично повторяться. Поэтому i^n следует вычислять по формуле:

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 4k, \\ -i, & \text{если } n = 4k - 1, \\ -1, & \text{если } n = 4k - 2, \\ i, & \text{если } n = 4k - 3, \end{cases} \quad (165)$$

где k – произвольное натуральное число.

3. **a)** i , **b)** $-\frac{18}{25} + \frac{23}{50}i$, **с)** $-\frac{18}{25} + \frac{173}{50}i$, **d)** $-\frac{5}{2} + \frac{7}{2}i$,

4. **a)** $x = -2$, $y = -2$ или $x = -2$, $y = 2$, **b)** $(3; 4)$, $(3; 5)$, $(4; 4)$, $(4; 5)$.

5. **a)** $x = -\frac{4}{11}$, $y = \frac{5}{11}$, **b)** $x = 1$, $y = 2$, **с)** $x = 1$, $y = -1$ или $x = -1$, $y = 1$.

6. $\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$.

7. **a)** $x = i + 1$, $y = i$, **b)** $x = 2 + i$, $y = 2 - i$.

8. **a)** -1 , **b)** 1 .

9. *Решение.* Пусть $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Вычислим произведение этих чисел, получим:

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_2 y_1 + x_1 y_2)i. \quad (166)$$

Комплексное число (166) является мнимым, если его действительная часть равна нулю, то есть если

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0$$

или

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{y_2}{x_1}.$$

Пусть теперь $\frac{x_2}{y_1} = \frac{y_2}{x_1} = \lambda$, где λ – вещественное число. Тогда

$$\begin{cases} x_2 = \lambda y_1, \\ y_2 = \lambda x_1. \end{cases}$$

Поэтому $z_2 = \lambda(y_1 + ix_1)$. Таким образом, произведение двух комплексных чисел является мнимым, если сомножители имеют вид: $x_1 + iy_1$ и $\lambda(y_1 + ix_1)$, где λ – произвольное вещественное число.

10. а) Решение. Пусть $z = a + bi$, тогда $\bar{z} = a - bi$. По условию задачи должно быть выполнено следующее равенство: $\bar{z} = z^2$ или

$$a - bi = (a + bi)^2. \quad (167)$$

Упростим правую часть уравнения (167), получим

$$a - bi = a^2 - b^2 + 2abi. \quad (168)$$

Из (168) и равенства двух комплексных чисел, следует система уравнений:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a, \\ b(2a + 1) = 0. \end{cases} \quad (169)$$

Система (169) равносильна совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} b = 0, \\ a^2 - a = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0, \\ a(a - 1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0, \\ a = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b = 0, \\ a = 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a = -1/2, \\ b^2 = 3/4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2, \\ b = \sqrt{3}/2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = -1/2, \\ b = -\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Таким образом, комплексные числа 0 ; 1 ; $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ сопряжены своим квадратам.

12. а) $\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4}))$, **б)** $2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}))$,
с) $2(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4}))$, **д)** $2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))$, **е)** $16(\cos(0) + i \sin(0))$,
ф) $\cos(\pi) + i \sin(\pi)$, **г)** $4(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}))$, **h)** $\sqrt{5}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}))$,

- i)** $2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$, **j)** $\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4}))$,
k) $2\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i \sin(\frac{-\pi}{3}))$, **l)** $8(\cos(0) + i \sin(0))$, **m)** $16(\cos(\frac{-\pi}{2}) + i \sin(\frac{-\pi}{2}))$,
n) $8(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6}))$, **o)** $32(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$, **p)** $\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})$.

13. **a)** полуплоскость, лежащая ниже прямой $x + y = 1$ (см. рисунок 56), **b)** полуплоскость, лежащая выше прямой $y = x$ (см. рисунок 57), **c)** множество показано на рисунке 58, **d)** множество показано на рисунке 59, **e)** данное неравенство равносильно неравенствам $2\pi k < |z| < \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Искомое множество представляет собой бесконечную систему концентрированных колец с центром в точке $z = 0$. Сама точка $z = 0$ не принадлежит этому множеству (см. рисунок 60), **f)** прямая, которая задается уравнением $y = -x$, **g)** точка $z = -1 - 2i$, **h)** угол (без границы) с вершиной в точке $z = -i$, стороны которого проходят через точки $z = 1$ и $z = 0$, **i)** действительная отрицательная полуось $y = 0, x < 0$, **j)** круг радиуса $R = 10$ с центром в точке $z = -i$ без границы и без центра, **k)** окружность радиуса $R = 3$ с центром в точке $z = 0$, **l)** множество показано на рисунке 61, **m)** множество показано на рисунке 62, **n)** прямая, которая задается уравнением $y = -x$, **o)** уравнение окружности с центром в точке $(-3; 0)$, радиус которой равен $R = 3$, **p)** парабола, симметричная относительно оси OX , с вершиной в точке $-\frac{1}{2}$, которая задается уравнением $y^2 = 2x + 1$ (см. рисунок 55).

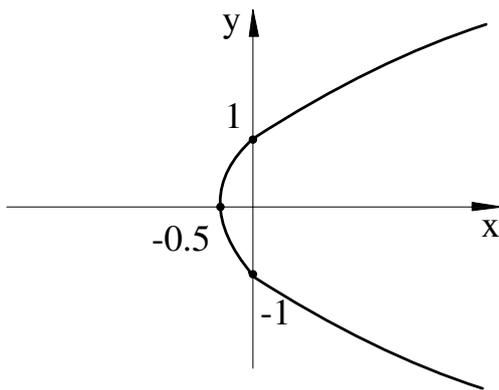


Рис. 55

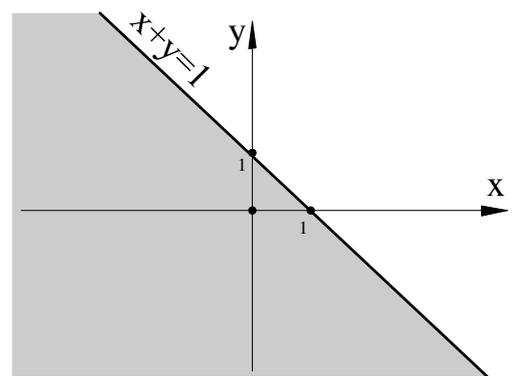


Рис. 56

- 14.** **a)** $2(\cos(\frac{2\pi}{9}) + i \sin(\frac{2\pi}{9}))$; $2(\cos(\frac{8\pi}{9}) + i \sin(\frac{8\pi}{9}))$; $2(\cos(\frac{14\pi}{9}) +$

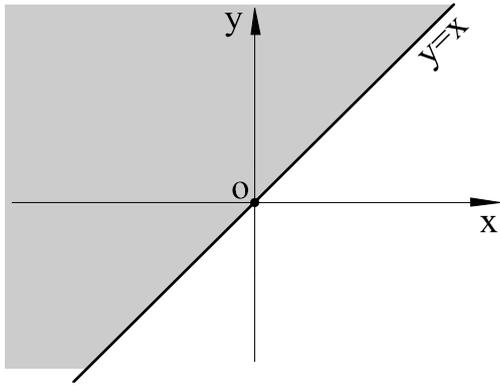


Рис. 57

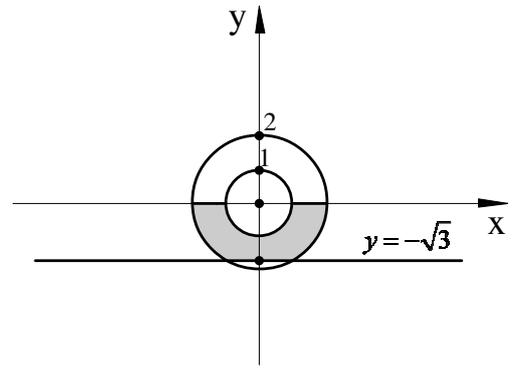


Рис. 58

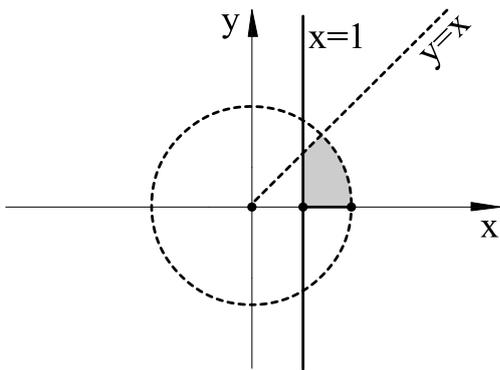


Рис. 59

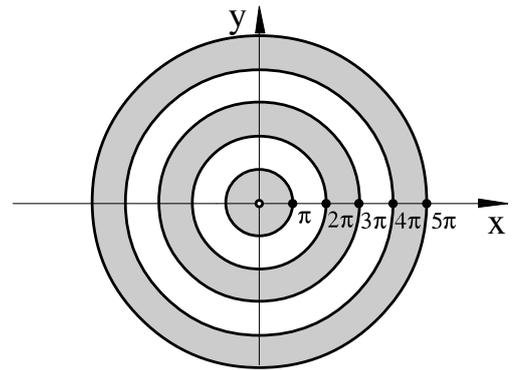


Рис. 60

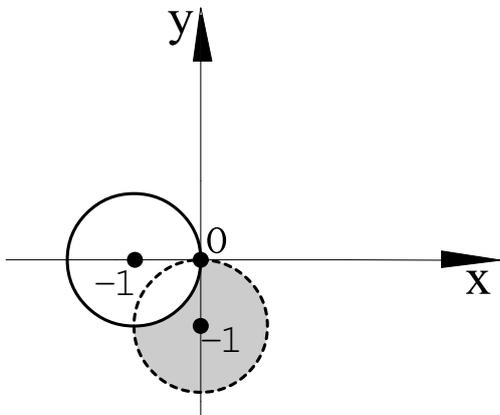


Рис. 61

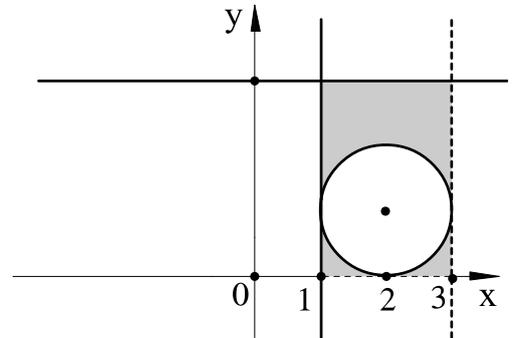


Рис. 62

$i \sin(\frac{14\pi}{9})$), **b)** $\pm 2 \pm 2i$, **c)** $1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, **d)** $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{\pi}{32}) + i \sin(\frac{\pi}{32}))$;
 $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{9\pi}{32}) + i \sin(\frac{9\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{17\pi}{32}) + i \sin(\frac{17\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{25\pi}{32}) + i \sin(\frac{25\pi}{32}))$;
 $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{33\pi}{32}) + i \sin(\frac{33\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{41\pi}{32}) + i \sin(\frac{41\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{49\pi}{32}) + i \sin(\frac{49\pi}{32}))$;
 $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{57\pi}{32}) + i \sin(\frac{57\pi}{32}))$.

15. а) Решение. Представим комплексные числа $z_1 = i - \sqrt{3}$, $z_2 = \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$, $z_3 = 1 - i$ в тригонометрической форме, получим:

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right),$$

$$z_2 = \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right),$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Используем равенства (10)–(11) и имеем

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \pi + i \sin \pi \right).$$

Итак, число z в алгебраической форме имеет вид: $z = -\sqrt{2}$.

b) $2\sqrt{2}(\cos(\varphi + \frac{7\pi}{12}) + i \sin(\varphi + \frac{7\pi}{12}))$, **с)** $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(2\varphi - \frac{\pi}{12}) + i \sin(2\varphi - \frac{\pi}{12}))$,

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, **e)** -2^{10} , **f)** $2^9(1 - i\sqrt{3})$, **g)** -64 , **h)** $-128i$.

16. а) $\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$, **б)** $2^n \cos^n \frac{\pi}{5} \left(\cos \frac{n\pi}{5} + i \sin \frac{n\pi}{5} \right)$.

18. а) $2 + i$, $1 - 3i$, **б)** $2 \pm 2i$, **с)** $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, **д)** $1 - 2i$, $3i$, **е)** $1 - i$; $\frac{4-2i}{5}$, **ф)** $5 - 2i$, $2i$.

19.

а) $\sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$; $\sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$; $\sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$;

б) $\sqrt[8]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \right)$; $\sqrt[8]{2} \left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{16}\right) \right)$; $\sqrt[8]{2} \left(\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{16}\right) \right)$;

$\sqrt[8]{2} \left(\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{25\pi}{16}\right) \right)$;

с) $\sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \right)$; $\sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) \right)$; $\sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{13\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{15}\right) \right)$;

$\sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{19\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{15}\right) \right)$; $\sqrt[5]{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right)$;

д) $\sqrt{3} + i$; $2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $-2i$; $\sqrt{3} - i$.

20. а) $(x - 1)^2(x - 2)(x - 3)(x - 1 - i)$; **б)** $(x + 1)^3(x - 3)(x - 4)$.

21. а) $(x - 1)^2(x - 2)(x - 3)(x^2 - 2x + 2)$; **б)** $(x^2 - 4x + 13)^3$.

22. а) $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$; **б)** $(x - 2i)(x + 2i)(x - 3i)(x + 3i)$.

23. а) $(x + 2)(x - 1 - \sqrt{3}i)(x - 1 + \sqrt{3}i)$; **б)** $(x - 2i)(x + 2i)$;

с) $(x - 3 - i)(x - 3 + i)$; **д)** $(x - 1)(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$.

24. а) $x^2(4x^2 - 12x + 13)$; **б)** $(x^2 + 2)(x^2 + 6)$;

с) $(x^2 + 3)(x^2 + 3x + 3)(x^2 - 3x + 3)$; **д)** $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

25. $8r = 4pq - p^3$.

26. $x_1 = 1/6, x_2 = 1/2, x_3 = -1/3$.
27. $\lambda = \pm 6$.
28. 1) $b = c = 0, \forall a$; 2) $a = -1; b = -1; c = 1$.
29. $\lambda = -3$.
30. а) $q(x) = 2x^2 + 3x + 11, r(x) = 25x - 5$;
 б) $q(x) = (3x - 7)/9, r(x) = (-26x - 2)/9$.
31. $p = -q^2 - 1(m = q)$.
32. 1) $q = p - 1(m = 0)$; 2) $q = 1(m = \pm\sqrt{2 - p})$.
33. а) $f(x) = (x - 4)(x^3 + x^2 + 10x + 30) + 136; f(x_0) = 136$;
 б) $f(x) = (x - 1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5; f(x_0) = 5$;
 в) $f(x) = (x + 3)(2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109) - 327; f(x_0) = -327$.
34. а) $k = 3$; б) $k = 4$.
35. а) 2; б) -3; в) -2; 3; д) 1; -2; 3; е) 1/2; -2/3; 3/4; ф) -1; -2; -3; 4;
 г) 1/2; х) $x_1 = 3, x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = -1$.
36. а) $f(x) = (x + 1)^4 - 2(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 1$;
 б) $f(x) = (x - 1)^5 + 5(x - 1)^4 + 10(x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 1$;
 в) $f(x) = (x - 2)^4 - 18(x - 2) + 38$.
37. а) $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{6}{(x-2)^3} + \frac{11}{(x-2)^4} + \frac{7}{(x-2)^5}$;
 б) $\frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^5}$.
38. а) $f(2) = 18, f'(2) = 48, f''(2) = 124, f^{(3)}(2) = 216, f^{(4)}(2) = 240, f^{(5)}(2) = 120$; б) $f(1) = 6, f'(1) = 8, f''(1) = 2, f^{(3)}(1) = 6, f^{(4)}(1) = 24$.
39. а) *Решение.* Для того, чтобы определить общее число инверсий, сосчитаем количество инверсий, которое образует каждый символ перестановки:
 символ 2 образует 0 инверсий;
 символ 3 стоит раньше символа 2 и, следовательно, образует 1 инверсию;
 символ 4 образует 0 инверсий;
 символ 5 стоит раньше символа 4 и образует 1 инверсию;
 символ 6 — 4 инверсии (так как стоит раньше символов 3, 2, 5, 4);

символ 7 имеет 0 инверсий;

символ 8 образует 0 инверсий;

символ 9 имеет 7 инверсий, так как стоит раньше символов 6,3,2,5,4,7,8.

По результатам вычислений составляем следующую таблицу:

Символ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Общее кол-во инверсий
Кол-во инверсий	0	0	1	0	1	4	0	0	7	13

Итак, исходная перестановка имеет 13 инверсий. **b)** 5, **c)** 8, **d)** 18, **e)** 10, **f)** 18.

40. a) $i = 8, k = 3$, **b)** $i = 3, k = 6$.

41. a) Решение. Чтобы определить общее количество инверсий, составим таблицу

Символ	1	3	5	7	...	$2n-3$	$2n-1$
Кол-во инверсий	0	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$

Таким образом, исходная перестановка имеет $I = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ инверсий. **b)** $\frac{n(n+1)}{2}$, **c)** $\frac{3n(n-1)}{2}$, **d)** $3n(n-1)$, **e)** $n(3n-2)$, **f)** $n(5n+1)$.

42. В перестановке $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$. Число инверсий в ней $\frac{n(n-1)}{2}$.

43. $k-1$.

44. $n-k$.

45. a) Решение. Из вторых индексов данного произведения составляем перестановку $\sigma = \{3, 2, 1, 6, 5, 4\}$. Перестановка σ является четной, так как имеет 6 инверсий. Из формулы (18) следует что, произведение $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$ входит в определитель шестого порядка со знаком плюс.

b) Решение. Множество, составленное из вторых индексов исходного произведения $\{7, 1, 4, 6, 4, 2, 3\}$, не является перестановкой из семи символов, поэтому произведение $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$ не является членом определителя. **c)** входит со знаком минус, **d)** входит со знаком плюс, **e)** не является

членом определителя, **f**) входит со знаком $(-1)^{n-1}$, **g**) входит со знаком $(-1)^n$, **h**) не является членом определителя.

46. а) Решение. В первой строке данного определителя лишь один элемент ненулевой — это элемент a_{11} , следуя определению определителя из второй строки мы можем выбрать только элемент a_{22} , из третьей строки — a_{33} и так далее. Таким образом, определитель равен произведению

$$\Delta = (-1)^{t(j)} a_{11} a_{22} \dots a_{nn}. \quad (170)$$

Перестановка $\{1, 2, \dots, n\}$ является четной, поэтому окончательно получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}. \quad (171)$$

б) Решение. Рассуждаем так же, как и в предыдущем примере. Из первой строки мы берем элемент a_{1n} , так как все остальные равны нулю, из второй строки Δ мы можем взять только элемент $a_{2,n-1}$, из третьей строки — элемент $a_{3,n-2}$ и так далее. Таким образом,

$$\Delta = (-1)^{t(j)} a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \dots a_{n1}.$$

Сосчитаем число инверсий $t(j)$ в перестановке $n, n-1, n-2, \dots, 1$. Символ n имеет $n-1$ инверсию, символ $n-1$ имеет $n-2$ инверсии и так далее, и, наконец, символ 2 имеет 1 инверсию. Итак,

$$t(j) = 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следуя определению определителя, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \dots a_{n1} \quad (172)$$

47. $i = 5, k = 1.$

48. $i = 6, k = 2.$

49. $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$

50. $10x^4 - 5x^3.$

51. a) -8, b) 1, c) $x^2 + 2y^2$, d) 2, e) 0, f) $1/\cos^2 \varphi$, g) $\sin x$

52. a) $10/7$, b) окружность с центром в точке $(-2;3)$ и радиусом $R = 5$,
 c) $x_1 = 1; x_2 = 5$, d) $x_1 = \pi k/4, k \in Z; x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$,
 e) $z_1 = 0; z_2 = \pm i.$

53. a) 0, b) 6, c) -210, d) $abc + abx + acx + bcx$, e) -12, f) 40,
 g) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, h) $abc - ax^2 - bx^2 - cx^2 + 2x^3.$

54. a) $x = 5$, b) $x \in [-41/21; +\infty)$, c) $x_1 = -3, x_2 = -2, 5$,
 d) $x \in [-\infty; -7].$

56. a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, e) 0.

58. $8a + 15b + 12c - 19d.$

59. $2a - 8b + c + 5d.$

60. a) -42, b) -15, c) 119.

61. a) -3, b) 48, c) 20, d) 16, e) 54, f) 160, g) 18, h) 18, i) 4, j) 17.

62. a) -24, b) -60, c) 192, d) 220, e) -98, f) -34.

63. a) *Решение.*

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2(-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 7(-1) & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 1(-1) & 1 \cdot 5 + 0(-2) + 8(-1) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Произведение $B \cdot A$ не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3 \neq 2$). b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, произведе-

ния $B \cdot A$ не существует, **с)** $A \cdot B = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$,

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -21 \end{pmatrix}$.

64. а) *Решение.*

$$4A - 5B - \lambda E = 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 - \lambda & -9 & -10 \\ 22 & 11 - \lambda & -23 \\ -12 & -6 & 40 - \lambda \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & -3 \\ 4 & -\lambda & 5 \\ 6 & -7 & -8 - \lambda \end{pmatrix}$,

с) $\begin{pmatrix} 4 & -22 & -29 & 47 \\ 64 & -7 & -33 & 4 \\ -8 & -18 & 14 & -19 \end{pmatrix}$.

65. а) *Решение.* Пусть $n = 2$, тогда

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ -2 \cos^2 \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

При $n = 3$ имеем

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha & \cos 2\alpha \sin \alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha \\ -\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin \alpha & \cos 2\alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha \cos \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

С помощью метода математической индукции докажем, что

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. **б)** $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

66. а) Решение. Пусть $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ — матрица, перестановочная с матрицей A , т.е. выполнено равенство

$$AB = BA. \tag{173}$$

Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix}, \tag{174}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}. \tag{175}$$

Равенство (173) с учетом (174), (175) перепишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \quad (176)$$

Пусть $x_3 = 3a$, $x_4 = b$, тогда $x_1 = b - 3a$, $x_2 = 2a$ и в результате получим

$$B = \begin{pmatrix} b - 3a & 2a \\ 3a & b \end{pmatrix},$$

где a, b — произвольные числа. б) $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{5b}{3} & a + 3b \end{pmatrix}$, где a, b — произвольные действительные числа.

67. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{pmatrix}$.

68. $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$.

69. а) *Решение.* 1) Найдем $|A|$ — определитель матрицы A :

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 0 - 8 \cdot 6 \cdot 1 = \\ &= 84 + 96 - 105 - 48 = 27. \end{aligned}$$

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48; \quad A_{12} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Запишем матрицу

$$\tilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

4) Найдем матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\frac{1}{41} \begin{pmatrix} 11 & 6 & -4 \\ -5 & 1 & 13 \\ 14 & -11 & -20 \end{pmatrix},$

c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix},$ d) $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$ e) обратной матрицы не су-

ществует, f) $\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$

70. а) Решение. Запишем матрицу $(A|E)$ размера (3×6) , с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее к виду $(E|A^{-1})$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{III} : (-2) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} - \text{II} \\ \text{II} + 2\text{III} \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} - 3\text{III} \\ \text{II} + 2\text{III} \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 14 & -10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, f) обратной матрицы не существует,

g) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

71. a) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $X = A^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, d) решений нет,

e) $X = A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

72. a) *Решение.* Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A) \geq 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит $r(A) \geq 2$. Вычислим миноры третьего порядка, окаймляющие минор M_2 :

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. к. 1 и 2 столбцы пропорциональны;}$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. к. пропорциональны 2 и 3 столбцы.}$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2 , равны нулю, следовательно, $r(A) = 2$. Любой ненулевой минор второго порядка матрицы A является

базисным. Например, базисным минором является минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

b) 3, c) 2, d) 3, e) 2, f) 2, g) 3, h) 2.

73. а) Решение. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \leftrightarrow II \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} II - 2 \cdot I \\ III - I \\ \end{matrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ III - 2 \cdot II \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица содержит две ненулевых строки, поэтому ее ранг равен двум. Следовательно, $r(A) = 2$. **b) 3, c) 3, d) 2, e) 4, f) 2.**

74. а) $r = 3$ при $\lambda = \frac{2}{3}$, $r = 4$ при $\lambda \neq \frac{2}{3}$, **b)** $r = 2$ при $\lambda = 3$, $r = 3$ при $\lambda \neq 3$, **с)** $r = 3$ при $\lambda = 3$, $r = 4$ при $\lambda \neq 3$, **d)** $r = 2$ при $\lambda = 0$, $r = 3$ при $\lambda \neq 0$.

75. а) $x = -b$, $y = -\frac{2}{3}a$, если $ab \neq 0$; нет решений, если $ab = 0$,
b) $x = \frac{f_1d - f_2b}{ad - bc}$, $y = \frac{af_1 - cf_2}{ad - bc}$, если $ad - bc \neq 0$; нет решений, если $ad - bc = 0$.

76. а) Решение. Вычислим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 30 + 1 = -29$$

следовательно, по теореме Крамера система имеет единственное решение, которое может быть найдено с помощью правила Крамера. Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 0 - 0 + 16 - 75 = -29,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -32 + 0 + 0 - 0 - 60 + 5 = -87,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 25 - 0 - 10 - 160 = -145.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-87}{-29} = 3, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 = 5, \\ 1 + 3 \cdot 5 = 16, \\ 5 \cdot 3 - 5 = 10. \end{cases}$$

Итак, $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$. **b)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$, **с)** $x_1 = 0$; $x_2 = -4$; $x_3 = -6$, **д)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$, **е)** $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$, $x_4 = -1$, **ф)** $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

77. а) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$, **б)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2$, **с)** $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, **д)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

78. а) Решение. Выполним прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 3\text{I} \\ \text{IV} - 2\text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & -5 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -\text{II} + \text{III} \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{III} + 2\text{II} \\ \text{IV} + 7\text{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{IV} - 2\text{III} \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array} \right).$$

Прямой ход метода Гаусса завершен. Выполним обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{III} - \text{IV} \\ 18\text{II} - 7\text{IV} \\ 9\text{I} + \text{IV} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 18 & 27 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & -36 & 0 & -95 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - 4\text{III} \\ \text{I} + 3\text{II} \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 18 & 0 & 0 & -37 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array} \right) \text{I} - \text{II} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Обратный ход метода Гаусса завершен. В результате получаем систему

$$\begin{cases} 9x_1 = 6, \\ 18x_2 = -43, \\ -9x_3 = -13, \\ 18x_4 = -7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}, \\ x_2 = -\frac{43}{18}, \\ x_3 = \frac{13}{9}, \\ x_4 = -\frac{7}{18}. \end{cases}$$

Итак, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{43}{18}$, $x_3 = \frac{13}{9}$, $x_4 = -\frac{7}{18}$. **b)** $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, **с)** $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -3$, $x_4 = 1$, **д)** $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$, $x_4 = 3$, **е)** $x_1 = 3$; $x_2 = -5$; $x_3 = 4$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1$.

79. а) Решение. 1) Запишем матрицу системы A и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -13 & -4 \\ 2 & 5 & -16 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - 5 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -18 & -9 \\ 0 & 9 & -18 & -9 \end{array} \right) \text{II} : 9 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Здесь базисный минор расположен в первых двух столбцах, главные неизвестные x_1, x_2 , свободные неизвестные x_3, x_4 . Систему, эквивалентную исходной, можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3 - x_4, \\ x_2 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

2) В качестве ненулевого определителя второго порядка проще всего взять единичный определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3) Выбор первой строки определителя означает, что свободные неизвестные принимают значения $x_3 = 1, x_4 = 0$. В этом случае $x_1 = 3, x_2 = 2$. Для второй строки определителя $x_3 = 0, x_4 = 1$ и $x_1 = 1, x_2 = 1$.

4) Итак, имеем два решения, которые образуют фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Общее решение системы однородных уравнений будет иметь вид:

$$X_{\text{общ}} = c_1 X_1 + c_2 X_2 = \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 \\ 2c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

б) общее решение $x_1 = 8c_1 - 7c_2, x_2 = -6c_1 + 5c_2, x_3 = c_1, x_4 = c_2$.

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0
-7	5	0	1

с) общее решение $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = -\frac{5}{2}c_1 + 5c_2, x_4 = \frac{7}{2}c_1 - 7c_2$.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	-5/2	7/2
0	1	5	-7

Фундаментальная система решений:

д) система имеет только нулевое решение. Фундаментальная система решений не существует.

е) общее решение $x_1 = 0, x_2 = \frac{c_1 - 2c_2}{3}, x_4 = 0, x_3 = c_1, x_5 = c_2$.

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1/3	1	0	0
0	-2/3	0	0	1

ф) общее решение $x_1 = -3c_1 - 5c_2, x_2 = 2c_1 + 3c_2, x_4 = 0, x_3 = c_1, x_5 = c_2$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	2	1	0	0
-5	3	0	0	1

г) общее решение $x_1 = c_1 - c_2, x_2 = c_1 - c_3, x_3 = c_1, x_4 = c_1, x_5 = c_2, x_6 = c_3$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	1	1	0	0
-1	0	0	0	1	0
0	-1	0	0	0	1

80. а) при $\lambda = -1$ общее решение $x_1 = -5c, x_2 = c, x_3 = 3c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(-5; 1; 3)$; при $\lambda \neq -1$ общее решение $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, фундаментальной системы решений нет.

б) при $\lambda = 6$ общее решение $x_1 = 7c, x_2 = 2c, x_3 = 3c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(7; 2; 3)$; при $\lambda \neq 6$ общее решение $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, фундаментальной системы решений нет.

с) при $\lambda = 2$ общее решение $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -2c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(1; 0; -2)$; при $\lambda = -4$

общее решение $x_1 = 5c$, $x_2 = -24c$, $x_3 = -4c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(5; -24; -4)$; при $\lambda \neq -4$, $\lambda \neq 2$ общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, фундаментальной системы решений нет.

d) при $\lambda = 3$ общее решение $x_1 = 2c_1 + 5c_2$, $x_2 = 3c_1 - 3c_2$, $x_3 = 7c_1$, $x_4 = 7c_2$, фундаментальная система решений состоит из двух векторов: $(2; 3; 7; 0)$, $(5; -3; 0; 7)$; при $\lambda \neq 3$ общее решение $x_1 = 5c$, $x_2 = -3c$, $x_3 = 0$, $x_4 = 7c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(5; -3; 0; 7)$.

81. Строки матрицы A не образуют, строки матрицы B образуют.

82. а) Решение. 1) Запишем расширенную матрицу системы \bar{A} и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \end{array} \right) \text{III} + 2 \cdot \text{I} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последняя матрица соответствует системе, эквивалентной исходной и содержит две ненулевые строки, поэтому $r(A) = r(\bar{A}) = 2$.

2) Исследуем систему на совместность. Поскольку $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < n = 4$, то система совместна и имеет более одного решения.

3) Выберем базисный минор в первом и третьем столбце, имеющий вид

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

При таком выборе базисного минора главными неизвестными являются x_1 и x_3 (так как базисный минор состоит из первого и третьего столбца матрицы). Тогда остальные неизвестные, то есть x_2 и x_4 будут свободными.

4) Основываясь на ступенчатой матрице, запишем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 - x_2 + x_4, \\ -x_3 = 1 - 4x_4. \end{cases}$$

5) Решим полученную систему относительно главных неизвестных x_1 и x_3 . В результате найдем

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 5x_4, \\ x_3 = -1 + 4x_4. \end{cases}$$

Итак, запишем общее решение системы в виде вектора-столбца

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -x_2 + 5x_4 \\ x_2 \\ -1 + 4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_2 и x_4 принимают любые произвольные значения. Для того, чтобы найти частное решение системы, положим, например, $x_2 = 1$ и $x_4 = 1$,

тогда частное решение $X_{\text{частн}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

б) Решение. 1) Запишем расширенную матрицу системы \bar{A} и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & | & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & | & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 2\text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 6 & -3 & -5 & | & 1 \\ -1 & 17 & -8 & -14 & | & -1 \end{pmatrix} \text{I} \leftrightarrow \text{II} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & | & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & | & 2 \\ -1 & 17 & -8 & -14 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} - 3\text{I} \\ \text{III} + \text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & | & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & | & -1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Итак, имеем $r(A) = 2$ и $r(\bar{A}) = 3$.

2) Исследуем систему на совместность. Поскольку $r(A) \neq r(\bar{A})$, то по теореме Кронекера-Капелли система несовместна, то есть данная система не имеет решений.

с) система совместна, общее решение $x_1 = (c_1 - 9c_2 - 2)/11$,
 $x_2 = (-5c_1 + c_2 + 10)/11$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, частное решение $x_1 = -1$,
 $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

д) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$,
 $x_3 = 6 - 15c_1 + 10c_2$, $x_4 = -7 + 18c_1 - 12c_2$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$,
 $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

е) система совместна и имеет единственное решение $x_1 = 3$,
 $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

ф) система совместна, общее решение $x_1 = (-6 + 8c)/7$,
 $x_2 = (1 - 13c)/7$, $x_3 = (15 - 6c)/7$, $x_4 = c$, частное решение $x_1 = -2$,
 $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

г) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = -1 - 8c_1 + 4c_2$,
 $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2c_1 - c_2$ частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$,
 $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.

h) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = 1 + c_1 - c_2$, $x_3 = 1$,
 $x_4 = c_2$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

и) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 22c_1 - 33c_2 - 11$,
 $x_4 = -16c_1 + 24c_2 + 8$, частное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$,
 $x_4 = 0$.

ж) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 1 - 3c_1 - 4c_2$,
 $x_4 = 1$, частное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

к) система несовместна.

л) система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 13$, $x_4 =$

$19 - 3c_1 - 2c_2$, $x_5 = -34$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 13$, $x_4 = 0$, $x_5 = -34$.

83. а) при $\lambda = -4$ система несовместна; при $\lambda = 4$ система совместна, общее решение $x_1 = 3 - 2c$, $x_2 = c$; при $\lambda \neq -4$ и $\lambda \neq 4$ система имеет единственное решение $x_1 = \frac{12}{\lambda+4}$, $x_2 = \frac{6}{\lambda+4}$.

б) при $\lambda = 2$ система совместна, общее решение $x_1 = 5 + c_1 - 2c_2$, $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$; при $\lambda \neq 2$ система совместна, общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 2c - 5$, $x_3 = c$.

в) при $\lambda \neq 8$ система совместна и имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$; при $\lambda = 8$ система совместна, общее решение $x_1 = 3 + 2c$, $x_2 = -1 - c$, $x_3 = c$.

д) при $\lambda \neq 0$ система несовместна; при $\lambda = 0$ система совместна $x_1 = (-5c_1 - 13c_2 - 3)/2$, $x_2 = (-7c_1 - 19c_2 - 7)/2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

84. а) Решение. Поскольку известно частное решение системы, можно ограничиться определением общего решения приведенной однородной системы. Решим эту систему и получим общее решение в виде

$$X_{\text{одн}} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ -c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Теперь, используя формулу (34), можем записать общее решение неоднородной системы

$$X = X_{\text{одн}} + X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 + 2 \\ -c_1 \\ -1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

85. а) $\bar{a} = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. *Указание:* так как направляющие косинусы вектора \bar{a} равны, то мы можем найти эти направляющие косинусы из формулы (44). С учетом, что $|\bar{a}| = 1$, воспользовавшись формулой (45), получим ответ. **б)** $(\sqrt{3} + \sqrt{2})/2$.

	$(*,*)$	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
86.	\bar{i}	1	0	0
	\bar{j}	0	1	0
	\bar{k}	0	0	1

87. **a)** $\bar{x} = (-24; 32; 30)$. *Указание:* так как \bar{x} параллелен вектору $(6; -8; -7, 5)$, то координаты векторов пропорциональны, то есть $\bar{x} = \lambda \cdot (6; -8; -7, 5)$, где λ – произвольное ненулевое вещественное число. Поскольку вектор \bar{x} образует с осью OZ острый угол, то $\lambda < 0$. Вычислив длину вектора \bar{x} , найдем λ , а затем и координаты вектора \bar{x} .

b) $\bar{x} = (1; 0; -1)$. *Указание:* так как $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ перпендикулярен оси OY , то $x_2 = 0$. Из условий $(\bar{x}, \bar{a}) = -3$, $(\bar{x}, \bar{b}) = 8$, найти остальные координаты вектора.

c) $\bar{x} = (2, -1, 1)$. *Указание:* пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Воспользоваться формулой (54) и найти координаты вектора, решив систему линейных уравнений с тремя неизвестными, например, методом Гаусса.

d) $\bar{x} = (2, 4, -6)$. *Указание:* аналогично примеру 3а).

88. **a)** -2. *Указание:* воспользоваться формулой (56) при условии $\bar{n} = \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} - 2\bar{b}$. **b)** $\frac{14}{11}$.

89. **a)** -0,5. *Указание:* воспользоваться соотношением $|\bar{a} - \bar{b}|^2 = (\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}) = 3$, откуда найти $(\bar{a}, \bar{b}) = -\frac{1}{2}$. Затем упростить искомое скалярное произведение $(3\bar{a} - 4\bar{b}, \bar{a} + \bar{b})$ и получить ответ. **b)** 11.

90. **a)** $(\bar{a}, \bar{b}) = -33$, $\cos(\widehat{a, b}) = -\frac{33}{65}$; **b)** $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{2}$.

91. 5. *Указание:* воспользоваться формулой (57) и вычислить $|\bar{a}| = \sqrt{(3\bar{m} - 4\bar{n}, 3\bar{m} - 4\bar{n})}$, с учетом, что $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$ и векторы \bar{m} и \bar{n} перпендикулярны, следовательно, $(\bar{m}, \bar{n}) = 0$.

92. 15; $\sqrt{593}$. *Указание:* выразить диагонали параллелограмма через его стороны. Например, имеем одна из диагоналей параллелограмма равна $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, а вторая $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$. Для нахождения длин диагоналей воспользоваться формулой (57): $|\bar{d}_1| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b})}$, $|\bar{d}_2| = \sqrt{(\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b})}$.

93. $\frac{\pi}{3}$. *Указание:* воспользоваться формулами (55), с учетом, что $|\bar{p}| = |\bar{q}| = 1$ и векторы \bar{p} и \bar{q} перпендикулярны, следовательно, $(\bar{p}, \bar{q}) = 0$.

94. $\cos \varphi = \frac{4}{5}$. *Указание:* пусть $\bar{CA} = \bar{a}$, $\bar{CB} = \bar{b}$ – катеты треугольника ABC. Выразить медианы треугольника через его катеты. Например, одна из медиан равна $\bar{m}_1 = \frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$, а вторая $\bar{m}_2 = \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$. Вычислить скалярное произведение (\bar{m}_1, \bar{m}_2) и длины медиан, учитывая, что $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ (так как треугольник равнобедренный) и $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ (т.к. $\triangle ABC$ – прямоугольный). Затем найти $\cos \varphi$, используя формулу (55).

95. $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\angle C = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$. *Указание:* воспользоваться формулой (55).

96. $\cos(\widehat{Q, m}) = \frac{6}{7}$, $\cos(\widehat{Q, n}) = -\frac{2}{7}$, $\cos(\widehat{Q, p}) = \frac{3}{7}$. *Указание:* воспользоваться формулой (55).

97. *Указание:* выразить диагонали ромба через стороны (см. указание к примеру 8) и затем вычислить скалярное произведение диагоналей. Оно должно получиться равно нулю.

98. $\alpha = 40$. *Указание:* вычислить произведение векторов \bar{p} и \bar{q} и воспользоваться признаком перпендикулярности векторов: $(\bar{p}, \bar{q}) = 0$.

99. $(\widehat{s, t}) = \frac{\pi}{3}$. *Указание:* так как векторы \bar{p} и \bar{q} перпендикулярны, то $(\bar{p}, \bar{q}) = 0$, откуда найти (\bar{s}, \bar{t}) . Затем воспользоваться формулой (55), учитывая, что векторы \bar{s} и \bar{t} единичные, поэтому $|\bar{s}| = |\bar{t}| = 1$.

100. $\overrightarrow{AM} = 6$, $\overrightarrow{AD} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$. *Указание:* выразить медиану и высоту через стороны треугольника. Например, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$, где вещественное число λ найти из условия перпендикулярности векторов \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{CB} . Затем найти длины векторов \overrightarrow{AM} и \overrightarrow{AD} , воспользовавшись формулой (57).

101. $[\bar{i}, \bar{i}] = 0$; $[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$; $[\bar{i}, \bar{k}] = -\bar{j}$; $[\bar{j}, \bar{i}] = -\bar{k}$; $[\bar{j}, \bar{j}] = 0$;
 $[\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}$; $[\bar{k}, \bar{i}] = \bar{j}$; $[\bar{k}, \bar{j}] = -\bar{i}$; $[\bar{k}, \bar{k}] = 0$.

102. а) $8\bar{i} + 32\bar{j} + 16\bar{k}$; б) $2\bar{i} + 16\bar{j} + 23\bar{k}$.

103. а) $19[\bar{a}, \bar{b}]$; б) $11[\bar{a}, \bar{b}]$; в) $13[\bar{a}, \bar{b}] - 10[\bar{a}, \bar{c}] - 4[\bar{b}, \bar{c}]$.

104. а) $S = 30$, $H = 10$. *Указание:* вычислить координаты векторов \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} , затем вычислить их векторное произведение, воспользовавшись формулой (63) и наконец вычислить площадь треугольника, построенного на векторах \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} по формуле (65). Затем вычислить высоту H_{Δ} по формуле (66).

б) $[\bar{a}, \bar{b}] = -40\bar{i} + 40\bar{j} + 20\bar{k}$, $S = 60$, $\sin(\widehat{a, b}) = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

105. а) 4,5; **б)** 1,5.

106. а) 11. *Указание:* используя свойства векторного произведения вычислить векторное произведение векторов $[\bar{p}, \bar{q}]$ через векторы \bar{a} и \bar{b} . Вычислить длину векторного произведения $||[\bar{p}, \bar{q}]||$, воспользовавшись, что \bar{a} и \bar{b} – орты, то есть $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $\widehat{a, b} = \frac{\pi}{2}$; **б)** 37,5; **с)** 3,8.

107. 21. *Указание:* воспользоваться формулой $|\bar{Q}| = \sqrt{(\bar{Q}, \bar{Q})}$.

108. $\frac{\sqrt{248}}{\sqrt{273}}$. *Указание:* Выразить диагонали через векторы \bar{a} и \bar{b} , например, $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$. Затем найти векторное произведение диагоналей и найти модуль векторного произведения. Из формулы (58) найти синус угла между диагоналями.

109. а) 44. *Указание:* найти координаты векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} , затем вычислить смешанное произведение этих векторов, используя формулу (73). Применяя формулу (76) вычислить объем тетраэдра. **б)** 2.

110. а) Векторы компланарны. *Указание:* воспользоваться условием компланарности векторов (74). **б)** Векторы компланарны. **с)** Векторы некомпланарны. **д)** Векторы некомпланарны.

111. а) Точки лежат в одной плоскости. *Указание:* вычислить координаты векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} , а затем вычислить их смешанное произведение. Если смешанное произведение равно нулю, то точки лежат в одной плоскости. **б)** Точки лежат в одной плоскости.

112. $4 \bar{c}\bar{b}\bar{a}$. *Указание:* вычислить смешанное произведение векторов. Из формулы (75) найти объем параллелепипеда.

113. а) 25; **б)** 0. *Указание:* ответ очевиден, так как из разложения векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} видно, что они компланарны.

114. $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$. *Указание:* вычислить смешанное произведение векторов и вычислить модуль векторного произведения векторов \bar{a} и \bar{b} . Воспользоваться формулой $h = \frac{V}{S}$, где $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$ – площадь основания параллелепипеда, $V = \pm(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – объем параллелепипеда.

115. Плоскость проходит через точки A, C, D, F . *Указание:* подставить координаты точки в данное уравнение плоскости $4x - y + 3z + 1 = 0$. Если получим верное равенство, то плоскость проходит через данную точку, иначе точка не принадлежит плоскости.

116. **a)** Плоскость параллельна оси Oy ; **b)** Плоскость параллельна плоскости Oxz ; **c)** Плоскость параллельна оси Oz ; **d)** Плоскость проходит через начало координат; **e)** Плоскость проходит через ось Ox .

117. **a)** $y + 5 = 0$; **b)** $x + 3y = 0$; **c)** $9y - z - 2 = 0$.

118. $6x - 7y + 6z - 94 = 0$. *Указание:* применить формулу (76).

119. **a)** $a = -6, b = 4, c = 12$. *Указание:* свободный член уравнения плоскости перенести в правую часть и разделить уравнение на (-12) . Привести уравнение к виду (94); **b)** $a = 3, b = 15, c = -5$; **c)** $a = 1, b = -1, c = 1$; **d)** $a = -6, b = \infty, c = 3/2$ (плоскость параллельна оси Oy); **e)** $a = 0, b = 0, c = 0$ (плоскость проходит через начало координат); **f)** $a = 7, b = \infty, c = \infty$ (плоскость параллельна плоскости Oyz).

120. $x + y + z - 3 = 0$. *Указание:* воспользоваться уравнением (94) при условии $a = b = c > 0$.

121. **a)** $(2/11)x - (9/11)y + (6/11)z - 2 = 0$; **b)** $(-2/3)x - (2/15)y + (11/15)z - 4 = 0$; **c)** $(-6/11)x + (6/11)y + (7/11)z - 3 = 0$.

122. $p = 10$. *Указание:* привести уравнение плоскости к нормальному виду. Свободный коэффициент в этом уравнении p есть расстояние плоскости от начала координат.

123. **a)** $d = \frac{3}{2}$; **b)** $d = 0$, точка лежит на плоскости. **c)** $d = 4$.

124. **a)** $\varphi = \arccos(0, 7)$; **b)** плоскости перпендикулярны друг другу; **c)** плоскости параллельны между собой.

125. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. *Указание:* искомый угол равен углу между перпенди-

куляром к данной плоскости и осью Ox , то есть углу между векторами $\bar{n} = (1; -1; \sqrt{2})$ и $\bar{i} = (1; 0; 0)$.

126. а) $x - 4y + 5z + 15 = 0$. *Указание:* пусть уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$. Так как данная плоскость параллельна плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$, то необходимо выбрать нормальный вектор плоскости равным $A = 1, B = -4, C = 5$. Для того чтобы найти последний коэффициент, поставим координаты точки в уравнение плоскости. **б)** $2x - y - z = 0$. *Указание:* пусть уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$ и пусть $\bar{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости. Так как плоскость проходит через начало координат, то $D = 0$. Пусть $\bar{n}_1 = (2; -1; 5), \bar{n}_2 = (1; 3; -1)$ – нормальные векторы данных плоскостей. Так искомая плоскость перпендикулярна двум плоскостям, то ее нормальный вектор \bar{n} необходимо выбрать в виде: $\bar{n} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$. **в)** $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$. *Указание:* пусть $Ax + By + Cz - p = 0$ – нормальное уравнение плоскости, тогда $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Так как плоскость проходит через точки $L(0; 0; 1)$ и $N(3; 0; 0)$, то имеем систему уравнений
$$\begin{cases} C - p = 0, \\ 3A - p = 0. \end{cases}$$
 Так как плоскость образует с плоскостью Oxy угол в $\frac{\pi}{3}$, то $C = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Таким образом, $A = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{2}, p = \frac{1}{2}$. И, наконец, находим $B^2 = 1 - C^2 - A^2$.

127. а) $(3; -1; 0)$. *Указание:* необходимо решить систему линейных уравнений, например, методом Гаусса.

б) точки пересечения всех трех плоскостей нет, так как первая и третья плоскость параллельны.

128. а) $9x + 3y + 5z = 0$. *Указание:* пучок плоскостей (102) в нашем случае имеет вид $4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0$. Если раскрыть все скобки, то свободный коэффициент $D = 2\lambda - 1$. Так как плоскость должна проходить через начало координат, то свободный коэффициент $D = 0$. Откуда можно определить коэффициент $\lambda = \frac{1}{2}$. Подставив $\lambda = \frac{1}{2}$ в пучок плоскостей, получим ответ. **б)** $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; **в)** $21x + 14z - 3 = 0$; **д)** $7x + 14y + 5$.

129. $41x - 19y + 52z - 68 = 0$ и $33x + 4y - 5z - 63 = 0$. *Указание:* составить пучок плоскостей и вычислить коэффициент λ из условия перпендикулярности нормального вектора пучка нормальным векторам данных плоскостей.

130. $3x + 4y - z + 1 = 0$ и $x - 2y - 5z + 3 = 0$. *Указание:* пучок плоскостей (102) в нашем случае имеет вид $3x + 4y - z + 1 + \lambda(x - 2y - 5z + 3) = 0$. Подставим координаты точки L в пучок плоскостей, найдем значение λ . Подставим найденное значение в пучок плоскостей, найдем уравнение первой плоскости. Пусть \bar{n}_1 – нормальный вектор найденной плоскости, а $\bar{n}_2 = (3 + \lambda; 4 - 2\lambda; -1 - 5\lambda)$ – нормальный вектор второй плоскости. Так как искомые плоскости перпендикулярны, то $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$. Из этого условия можно найти значение λ и затем уравнение второй плоскости.

131. а) $2y - z = 0$. *Указание:* связка плоскостей (103) в нашем случае имеет вид $x + y - z + 2 + \lambda(4x - 3y + z - 1) + \mu(2x + y - 5) = 0$. Таким образом, $A = 1 + 4\lambda + 2\mu$, $B = 1 - 3\lambda + \mu$, $C = -1 + \lambda$, $D = 2 - \lambda - 5\mu$. Так как по условию задачи плоскость должна проходить через ось Ox , то $A = 0$ и $D = 0$, итак, имеем систему:
$$\begin{cases} 1 + 4\lambda + 2\mu = 0; \\ 2 - \lambda - 5\mu = 0. \end{cases}$$
 Решив систему найдем значения коэффициентов λ и μ . Подставив найденные значения в связку плоскостей, получим ответ.

132. а) $A = 0$ и $A_1 = 0$, т.е. обе плоскости параллельны оси Ox ;
б) $\frac{B}{B_1} = \frac{D}{D_1}$, т.е. обе плоскости пересекают ось Oy в одной и той же точке $x = 0$, $y = -\frac{D}{B} = -\frac{D_1}{B_1}$, $z = 0$;
в) $C = D = 0$ и $C_1 = D_1 = 0$, т.е. обе плоскости проходят через ось Oz ;
г) $\frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$. Если прямая параллельна плоскости Oyz , то в пучке проходящих через нее плоскостей $Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$ должна существовать плоскость, параллельная плоскости Oyz , т.е. $B + \lambda B_1 = 0$ и $C + \lambda C_1 = 0$ при одном и том же значении λ ;
е) $\frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$. *Указание:* Плоскость Oxz имеет уравнение $y = 0$. Поэтому $Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$ содержит плоскость

Oxz при условиях $A + \lambda A_1 = 0$, $C + \lambda C_1 = 0$ и $D + \lambda D_1 = 0$; **f)** $D = D_1 = 0$, т.е. обе плоскости проходят через начало координат.

133. $\frac{x}{4} = \frac{z-2}{3}$, $y = 0$; $x - 4 = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-5}$; $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$; $-x = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-4}$; $\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-7}$; $\frac{x-5}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}$. *Указание:* воспользоваться формулой (106).

134. $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$. *Указание:* необходимо воспользоваться методом перехода от общего уравнения прямой к каноническому уравнению прямой.

135. а) $\begin{cases} x - 2 = 0; \\ y + 5 = 0. \end{cases}$ *Указание:* направляющий вектор оси Oz

равен $\bar{k} = (0; 0; 1)$. Записать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку с направляющим вектором \bar{k} , используя формулу (105). **б)**

$\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$. *Указание:* направляющий вектор параллельной прямой равен $\bar{s} = (4; -6; 9)$. Записать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку с направляющим вектором \bar{s} , используя формулу (105).

с) $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$. *Указание:* в задаче дано общее уравнение параллельной прямой. Используя формулу (111), вычислить направляющий вектор исходной прямой и затем воспользоваться формулой (105).

136. а) и б) пересекаются. *Указание:* воспользоваться условием пересечения прямых (119).

137. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$. *Указание:* так как искомая прямая проходит через точку $A(2; 3; 1)$, то ее уравнения имеют вид: $\frac{x-2}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z-1}{p}$. Неизвестные коэффициенты m , n , p определяем из условия перпендикулярности к данной прямой $2m - n + 3p = 0$ и условия пересечения с данной

прямой: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$ или $8m - 11n - 9p = 0$.

138. $\cos \varphi = \frac{98}{195}$. *Указание:* определить направляющие векторы данных прямых, воспользовавшись формулой (111). Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, поэтому воспользоваться формулой (121).

139. а) $(0;0;-2)$. *Указание:* обозначим три равных соотношения через t , т.е. $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} = t$. Тогда $x = 4t + 12$, $3t + 12$, $z = t + 1$. Вставляя эти значения координат в уравнение плоскости, найдем значение $t = -3$. Окончательно, получим $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. **б)** прямая параллельна плоскости; **с)** точка пересечения неопределена, так как прямая лежит в плоскости;
д) $(2;3;1)$.

140. $A = -1$. *Указание:* воспользоваться условием (113).

141. $A = 4$, $B = -8$. *Указание:* воспользоваться условием (115).

142. $(5; -1; 0)$. *Указание:* из точки A строим прямую перпендикулярно данной плоскости. Из равенства (107) имеем: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Затем ищем точку пересечения этой прямой с плоскостью. Найденная таким образом точка и есть искомая проекция.

143. а) лежит. *Указание:* воспользоваться условием (114). **б)** не лежит; **с)** не лежит.

144. $x + 7y + 3z - 4 = 0$. *Указание:* воспользоваться формулой (122).

145. $8x - 9y - 22z - 59 = 0$. *Указание:* воспользоваться формулой (123).

146. $11x - 17y - 19z + 10 = 0$. *Указание:* воспользоваться формулой (124).

147. $8x - 22y + z - 48 = 0$. *Указание:* воспользоваться формулой (125).

148. $16x - 27y + 14z - 159 = 0$. *Указание:* воспользоваться формулой (126).

149. $23x - 16y + 10z - 153 = 0$. *Указание:* воспользоваться формулой (127).

150. $d = \sqrt{22}$. *Указание:* воспользоваться формулой (128).

151. $(2; 9; 6)$. *Указание:* проводим через точку P плоскость, перпендикулярную к данной прямой, и ищем точку пересечения с этой прямой.

Найденная точка есть середина отрезка между данной точкой P и искомой точкой.

152. $d = 3$. *Указание:* для решения задачи достаточно найти расстояние любой точки одной прямой до другой прямой, например, расстояние от точки $(2; -1; 0)$ до второй из заданных прямых.

153. $d = 7$. *Указание:* воспользоваться формулами (129) и (130).

154. $d = 13$. *Указание:* воспользоваться формулами (129) и (130).

155. $\frac{x-2}{74} = \frac{y}{57} = \frac{z}{-110}$.

156. а) $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. *Указание:* записать уравнение (106) прямой, проходящей через точки $B(3, 0, 2)$ и $C(7, 4, 6)$; б) $h = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$. *Указание:* искомую высоту h найти по формуле (??), полагая $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3, x_2 = 3, y_2 = 0, z_2 = 2, m = n = p = 1$; в) $d = \sqrt{2}$. *Указание:* каноническое уравнение оси абсцисс имеет вид $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$, так как ось проходит через начало координат $O(0, 0, 0)$, а $\vec{i} = (1, 0, 0)$ – ее направляющий вектор. Каноническое уравнение прямой BC получено в пункте (а): $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. Полагая в формуле (130) $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 3, y_2 = 0, z_2 = 2, \bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) = (1; 0; 0), \bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2) = (1; 1; 1)$, вычислим искомое расстояние; д) $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Указание:* острый угол φ найти из формулы (121), полагая $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) = (1; 0; 0), \bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2) = (1; 1; 1)$; е) $\psi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}}$. *Указание:* сначала необходимо составить уравнение плоскости π , проходящей через три точки $A(1, 2, 3), B(3, 0, 2), C(7, 4, 6)$, воспользовавшись уравнением (122). Уравнение плоскости при этом должно получиться следующим $x + 3y - 4z + 5 = 0$. Затем нужно вычислить угол ψ по формуле (116).

157. а) $\varphi = \arcsin \frac{7}{11}$. *Указание:* чертеж к данной задаче приведен на рис. (63). Записать каноническое уравнение (105) прямой OA , проходящей через начало координат $O(0, 0, 0)$ с направляющим вектором $\vec{OA} = (1, 3, -1)$: $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$. Составляем уравнение плоскости π , проходящей через три точки $A(1, 3, -1), B(2, 1, -2), C(3, -2, 4)$, вос-

пользовавшись уравнением (122). Уравнение плоскости при этом должно получиться следующим $15x + 7y + z - 35 = 0$. Вычисляем искомый угол φ по формуле (116); **б)** $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. *Указание:* координаты точек пересечения медиан треугольника ABC найти как среднее арифметическое координат его вершин: $M \left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{3+1+2}{3}; \frac{-1-2+4}{3} \right)$. Составить уравнение (106) прямой, проходящей через две точки O и M . **в)** $H \left(\frac{21}{11}; \frac{49}{55}; \frac{7}{55} \right)$. *Указание:* составить параметрическое уравнение (108) прямой. Направляющим вектором этой прямой служит нормаль $\bar{n} = (15; 7; 1)$ к плоскости грани ABC (см. пункт (а)). Поэтому

$$\begin{cases} x = 15t, \\ y = 7t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение плоскости грани ABC , находим значение параметра $t = \frac{7}{55}$, соответствующее точке H . Координаты точки H вычисляем по параметрическому уравнению прямой OH , подставляя найденное значение параметра t ; **д)** $\frac{x-2}{300} = \frac{y-\frac{2}{3}}{184} = \frac{z-\frac{1}{3}}{-13}$. *Указание:* координаты точки O' , симметричной точке O относительно плоскости ABC , находим, подставляя в параметрическое уравнение прямой OH значение $t = 2 \cdot \frac{7}{55} = \frac{14}{55}$. Получим $O' = \left(\frac{42}{11}; \frac{98}{55}; \frac{14}{55} \right)$. Осталось составить уравнение (106) прямой, проходящей через две точки M и O' ; **е)** $\psi = \arccos \frac{1}{\sqrt{246}}$. *Указание:* угол ψ между прямыми OM и AB находим как угол между их направляющими векторами $\overrightarrow{OM} = \left(2; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$ (формула (121)); **ф)** $d = \sqrt{5}$. *Указание:* расстояние между прямыми OM и AB найти по формуле (130). **г)** $C' = \left(-\frac{7}{11}; -\frac{21}{11}; \frac{7}{11} \right)$. *Указание:* составить уравнение (76) плоскости, проходящей через точку $C(3, -2, 4)$ перпендикулярно прямой OA (нормалью к этой плоскости служит вектор $\overrightarrow{OA} = (1, 3, -1)$). Точка пересечения этой плоскости с прямой OA и будет искомая точка C' .

$$\text{h) } \begin{cases} 15x + 7y + z - 35 = 0, \\ x - 3y + 6z = 0. \end{cases} \quad \text{. } \text{Указание: составить общее уравнение}$$

нение искомой прямой HN как линии пересечения плоскости основания ABC пирамиды и плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной прямой BC . Уравнение плоскости грани ABC было найдено в п. а): $15x + 7y + z - 35 = 0$. Общее уравнение (76) плоскости, проходящей через точку $O(0; 0; 0)$, с нормалью $\overrightarrow{BC} = (1, -3, 6)$ имеет вид: $x - 3y + 6z = 0$. Записывая уравнения плоскостей в систему, получаем общее уравнение искомой прямой HN .

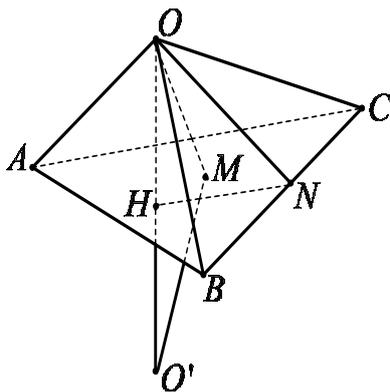


Рис. 63

158. Решение. Операции сложения векторов и умножения вектора на число определены корректно, так как произведение положительных чисел положительно и положительна (по определению) любая вещественная степень положительного числа. Проверим теперь условия 1)–8) определения линейного пространства.

1) Сложение векторов коммутативно потому, что умножение вещественных чисел обладает этим свойством. Действительно, коммутативность сложения векторов следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n) = \\ &= (y_1 \cdot x_1, y_2 \cdot x_2, \dots, y_n \cdot x_n) = y + x \end{aligned}$$

для любых $x, y \in \mathbf{G}$.

2) Аналогично проверяется ассоциативность сложения векторов. Для любых $x, y, z \in \mathbf{G}$ имеем

$$(x + y) + z = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n) + z =$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 \cdot y_1 \cdot z_1, x_2 \cdot y_2 \cdot z_2, \dots, x_n \cdot y_n \cdot z_n) = \\
&= x + (y_1 \cdot z_1, y_2 \cdot z_2, \dots, y_n \cdot z_n) = x + (y + z).
\end{aligned}$$

3) В качестве ноль-вектора нужно взять вектор $0 = (1, 1, \dots, 1)$. Действительно,

$$x + 0 = (x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \dots, x_n \cdot 1) = x$$

для любого вектора $x \in \mathbf{G}$.

4) Для любого вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ противоположным элементом будет вектор

$$x' = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}),$$

так как

$$x + y = (x_1 \cdot x_1^{-1}, x_2 \cdot x_2^{-1}, \dots, x_n \cdot x_n^{-1}) = (1, 1, \dots, 1) = 0.$$

5) Для любых $x, y \in \mathbf{G}$ и любого $\alpha \in \mathbf{R}$ имеем

$$\begin{aligned}
\alpha(x + y) &= \alpha(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n) = \\
&= ((x_1 y_1)^\alpha, (x_2 y_2)^\alpha, \dots, (x_n y_n)^\alpha) = (x_1^\alpha y_1^\alpha, x_2^\alpha y_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha y_n^\alpha) = \\
&= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha) + (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \dots, y_n^\alpha) = \alpha x + \alpha y.
\end{aligned}$$

6) Для любого $x \in \mathbf{G}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ имеем

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)x &= (x_1^{\alpha+\beta}, x_2^{\alpha+\beta}, \dots, x_n^{\alpha+\beta}) = (x_1^\alpha x_1^\beta, x_2^\alpha x_2^\beta, \dots, x_n^\alpha x_n^\beta) = \\
&= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha) + (x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta) = \alpha x + \beta x.
\end{aligned}$$

7) Для любого $x \in \mathbf{G}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ имеем

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)x &= (x_1^{\alpha\beta}, x_2^{\alpha\beta}, \dots, x_n^{\alpha\beta}) = \\
&= ((x_1^\beta)^\alpha, (x_2^\beta)^\alpha, \dots, (x_n^\beta)^\alpha) = \alpha(x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta) = \alpha(\beta x).
\end{aligned}$$

8) Наконец, для любого $x \in \mathbf{G}$

$$1 \cdot x = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) = x.$$

Следовательно, данное множество \mathbf{G} с данными операциями сложения векторов и умножения вектора на вещественное число является вещественным линейным пространством.

159. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 3) и 6).

160. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

161. а) Линейно зависима. б) Линейно независима. в) Линейно зависима. г) Линейно независима.

162. *Указание.* Воспользоваться определением и подобрать числа c_1, c_2, c_3 так, чтобы для любых x, y, z выполнялось равенство $c_1(\alpha x - \beta y) + c_2(\gamma y - \alpha z) + c_3(\beta z - \gamma z) = 0$.

163. а) *Решение.* Составим линейную комбинацию (131) данных векторов и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 = 0$$

или

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем следующую однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы $r(A)$ равен 2 и меньше числа неизвестных $n = 3$, поэтому однородная система имеет бесконечно много решений и, следовательно, существуют ненулевые числа x_1, x_2, x_3 в системе (131). Следовательно, система векторов a^1, a^2, a^3 линейно зависима; б) линейно зависима; в) линейно независимая система; г) линейно независимая система; е) линейно зависима.

164. а) Решение. Нулевым элементом в пространстве \mathbf{Q}_2 является полином, тождественно равный нулю. Составим линейную комбинацию трех данных полиномов и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 \cdot p^1(x) + x_2 \cdot p^2(x) + x_3 \cdot p^3(x) = 0.$$

Преобразуя данное соотношение, получаем

$$(x_1 - x_2 + 9x_3) + (x_2 + 6x_3)x + x_3x^2 = 0.$$

Это равенство справедливо для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ только в том случае, когда коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x равны нулю. Таким образом, приходим к следующей системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен числу неизвестных поэтому получаем, что данная система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Следовательно, система полиномов $p^1(x)$, $p^2(x)$, $p^3(x)$ является линейно независимой; **б)** линейно независимая система; **с)** линейно зависящая система; **д)** линейно зависящая система; **е)** линейно независимая система.

165. а) Решение. Да. Согласно свойству базиса, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов по столбцам

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ -4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-8) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-11) = 88 \neq 0.$$

Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве \mathbf{R}^3 . **б)** Нет. **с)** Нет. **д)** Да.

166. а) Решение. Да. Так как любая линейно независимая система, число векторов в которой совпадает с размерностью пространства ($\dim \mathbf{P}_2 = 3$) является базисом в нем, то достаточно проверить линейную независимость системы многочленов p_1, p_2, p_3 . Следуя определению, запишем

линейную комбинацию многочленов и приравняем ее нулевому многочлену. $\alpha_1(1 - 3x - 2x^2) + \alpha_2(2 - 4x + x^2) + \alpha_3(2 + 3x + 2x^2) = 0 + 0x + 0x^2$. Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и приравняем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x . Получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Линейная зависимость системы равносильна существованию нетривиального решения данной однородной системы. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных. Найдем ранг системы с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 0 & -16.5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $rank = 3$ и, следовательно, однородная система алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение, что доказывает линейную независимость системы многочленов p_1, p_2, p_3 . **b)** Нет. **c)** Да. **d)** Нет.

167. a) Решение. Да. Размерность линейного пространства \mathbf{M}^{22} всех матриц второго порядка равна четырём. Матриц в системе тоже четыре. Достаточно проверить линейную независимость. Запишем линейную комбинацию матриц системы и приравняем ее нулевому элементу (нулевой матрице):

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Складывая и приравнивая нулю соответствующие элементы матриц, получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффици-

циентов α_i :

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Линейная зависимость системы равносильна существованию нетривиального решения данной однородной системы. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных. Найдем ранг системы с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -39 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{17} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $rank = 4$, следовательно, однородная система алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение, что доказывает линейную независимость системы матриц A_1, A_2, A_3, A_4 . **b)** Нет. **c)** Да. **d)** Нет.

168. a) Решение. Да. Согласно свойству базиса, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов по столбцам

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 является базисом в пространстве \mathbf{R}^3 . Для нахождения координат вектора x в базисе \mathbf{e} нужно из векторного

уравнения $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x$ найти неизвестные координаты x_1, x_2, x_3 . После подстановки векторов получим

$$x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 = -7, \end{cases}$$

решая которую, например, методом Гаусса, найдем неизвестные координаты вектора x в базисе \mathbf{e} . $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Наконец, найдем вектор y . По

определению $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ б) Да. } x_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}. \text{ в) Да. } x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

169. а) Решение. Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, g(x) = 1 - 2x + 4x^2;$

б) Да, является. $h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g(x) = 3 - 2x + 4x^2;$ **в) Да, является.**

$$h_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, g(x) = 5 + 2x + x^2.$$

170. а) *Решение.* Поскольку $p(x) \in \mathbf{P}_4$, то данный многочлен представим в виде

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4,$$

где a, b, c, d, f – произвольные вещественные числа. Имеем

$$p(1) = a + b + c + d + f, \quad p(-1) = a - b + c - d + f.$$

По условию задачи $p(1) + p(-1) = 0$, следовательно, получаем равенство $a + c + f = 0$. Из полученного соотношения можно выразить один из коэффициентов через остальные, например, $a = -c - f$. Поэтому

$$p(x) = (-c - f) + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4 = bx + (x^2 - 1)c + dx^3 + (x^4 - 1)f,$$

то есть любой многочлен $p(x) \in \mathbf{V}$ представим в виде линейной комбинации четырех многочленов

$$p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2 - 1, \quad p_3(x) = x^3, \quad p_4(x) = x^4 - 1.$$

Система многочленов $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbf{V}$ является линейно независимой (докажите это). Итак, система многочленов p_1, p_2, p_3, p_4 образуют базис пространства \mathbf{V} . Следовательно, $\dim \mathbf{V} = 4$. **б)** $\dim V = 2$, базис состоит, например, из следующих многочленов $1 - x^2, x - x^2$. **с)** $\dim V = 4$, базис состоит, например, из следующих многочленов $x - 2, x^2 - 4, x^3 - 8, x^4 - 16$.

171. а) $\dim V = 6$, базисом, например, является следующая система матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **б)** $\dim V = 4$, базисом, например, является

следующая система матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **с)** $\dim V = 3$, базисом, например, является следующая си-

стема матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

172. а) Решение. Пусть e, u – матрицы, у которых по столбцам стоят координаты базисных векторов. Тогда для вычисления матрицы перехода и координат векторов в базисах можно применить следующий алгоритм:

$$1) \text{ Найти } e^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2) \text{ Найти } T_{e \rightarrow u} = e^{-1} * u = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3) \text{ Найти } T_{u \rightarrow e} = T_{e \rightarrow u}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) \text{ Найти } x_u = T_{u \rightarrow e} * x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$5) \text{ Найти } y_e = T_{e \rightarrow u} * y_u = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b)} T_{e \rightarrow u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, y_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_e = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{c)} T_{e \rightarrow u} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, y_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

173. а) Решение.

1) Составить матрицу перехода $T_{e \rightarrow u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) Найти $T_{e \rightarrow u}^{-1} = (-1) * \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

3) Найти $x_u = T_{e \rightarrow u}^{-1} * x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. б) $x_u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. в) $x_u = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

174. а) Решение. Для фиксированного числа a обозначим

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x = \begin{pmatrix} a \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}.$$

Для любых $x = \begin{pmatrix} a \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ из \mathbf{V}_1 их сумма $x + y =$

$$\begin{pmatrix} 2a \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}. \text{ Вектор } x + y \text{ принадлежит } \mathbf{V}_1 \text{ тогда и только тогда, когда}$$

выполняется равенство $2a = a$. Это возможно лишь при $a = 0$. Таким образом, при $a \neq 0$ множество \mathbf{V}_1 не является линейным подпространством. Если $a = 0$, то для любых $x, y \in \mathbf{V}_1$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ линейная комбинация $\lambda x + \mu y$ принадлежит множеству \mathbf{V}_1 , следовательно, рассматриваемое множество \mathbf{V}_1 является линейным подпространством только тогда, когда верно равенство $a = 0$. б) Нет; в) Нет; д) Да.

175. а) Решение. Пусть b, c фиксированные вещественные числа. Обозначим через \mathbf{V}_1 – множество всех многочленов $f(x)$ степени не вы-

ше n таких, что $f(b) = c$. Если $f, g \in \mathbf{V}_1$, то $f(b) = g(b) = c$, поэтому $(f + g)(b) = f(b) + g(b) = 2c$. Многочлен $f + g$ будет принадлежать \mathbf{V}_1 тогда и только тогда, когда $2c = c$, что эквивалентно $c = 0$. Таким образом, если $c \neq 0$ множество \mathbf{V}_1 не является линейным подпространством. Если $c = 0$, то для любых $f, g \in \mathbf{V}_1$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ принадлежит множеству \mathbf{V}_1 , действительно, имеем

$$(\lambda f + \mu g)(b) = \lambda f(b) + \mu g(b) = \lambda c + \mu c = 0.$$

Следовательно, множество \mathbf{V}_1 является линейным подпространством тогда и только тогда, когда $c = 0$. **b)** Да; **с)** Да; **d)** Нет.

176. а) Решение. 1) Записать матрицу A , расположив координаты всех векторов по строкам, получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Любым способом найти ранг матрицы A , имеем $r(A) = 2$. Следовательно, любая линейно независимая подсистема, содержащая два вектора будет являться базисом системы векторов.

3) Найти любой базисный минор матрицы A . Вектора, координаты которых вошли в базисный минор будут являться базисом. Таким образом, базис будет определяться неоднозначно. Например, минор $M_{2,5}^{1,2} \neq 0$ – базисный, это означает, что векторы a^2, a^5 являются базисом данной системы векторов. **b)** a^1, a^3, a^5 .

177. а) Решение: Для того, чтобы доказать, что оператор φ_1 является линейным необходимо проверить два условия линейности (141).

1) Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – произвольный вектор-столбец из пространства

\mathbf{R}^3 . По условию задачи имеем

$$\varphi_1(y) = \begin{pmatrix} 6y_1 - 5y_2 - 4y_3 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2 + 2y_3 \end{pmatrix}$$

поэтому

$$\varphi_1(x) + \varphi_1(y) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6y_1 - 5y_2 - 4y_3 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2 + 2y_3 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, также по условию задачи получаем

$$\varphi_1(x + y) = \begin{pmatrix} 6(x_1 + y_1) - 5(x_2 + y_2) - 4(x_3 + y_3) \\ -3(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) \\ (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) \end{pmatrix}.$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, можно сделать вывод, что $\varphi_1(x + y) = \varphi_1(x) + \varphi_1(y)$.

2) Проверим второе условие линейности, имеем

$$\varphi_1(\alpha \cdot x) = \begin{pmatrix} 6(\alpha x_1) - 5(\alpha x_2) - 4(\alpha x_3) \\ -3(\alpha x_1) - 2(\alpha x_2) - (\alpha x_3) \\ (\alpha x_2) + 2(\alpha x_3) \end{pmatrix} = \alpha \cdot \varphi_1(x).$$

Это означает, что второе условие выполнено. Следовательно, оператор φ_1 является линейным.

Для того, чтобы найти матрицу оператора φ_1 в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ необходимо вычислить образы базисных векторов, имеем

$$\varphi_1(e_1) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 - 5 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \\ -3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 0 \\ 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_2) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 0 - 5 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \\ -3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 \\ 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_3) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \\ -3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 \\ 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Разложим найденные векторы $\varphi_1(e_1)$, $\varphi_1(e_2)$, $\varphi_1(e_3)$ по базису $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, имеем

$$\varphi_1(e_1) = 6e_1 - 3e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_2) = -5e_1 - 2e_2 + 1e_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(e_3) = -4e_1 - 1e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Из получившихся векторов составляем матрицу A_e , расставляя их по столбцам, в результате получаем $A_e = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Операторы φ_2 и φ_3 не являются линейными. **б)** φ_3 – линейный оператор, $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Операторы φ_1 и φ_2 не являются линейными.

в) φ_2 – линейный оператор, $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Операторы φ_1 и φ_3 не являются линейными.

178. а) *Решение:* Для того, чтобы найти матрицу оператора φ в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ необходимо вычислить образы базисных векторов, имеем

$$\varphi(e_1) = -3 \cdot (1)'' + 3 \cdot (1)' = 0,$$

$$\varphi(e_2) = -3 \cdot (x)'' + 3 \cdot (x)' = 3,$$

$$\varphi(e_3) = -3 \cdot (x^2)'' + 3 \cdot (x^2)' = -6 + 6x.$$

Разложим найденные векторы $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ по базису $e = \{e_1, e_2, e_3\}$,
имеем

$$\varphi(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_2) = 3e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e_3) = -6e_1 + 6e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из получившихся векторов составляем матрицу A_e , расставляя их по

столбцам, в результате получаем $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|\varphi| = |A_e| = 0$.

b) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|\varphi| = -2$. c) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $|\varphi| = 20$.

d) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|\varphi| = 2$.

179. а) Решение: 1) Найдем координаты многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ в базисе $f = \{f_1, f_2, f_3\}$, имеем

$$g_1^f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2^f = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, g_3^f = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{f \rightarrow g}$ перехода от от базиса f к базису g . Для этого запишем координаты многочленов $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ в матрицу по столбцам, получим

$$T_{f \rightarrow g} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к $T_{f \rightarrow g}$, имеем

$$T_{f \rightarrow g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (145), найдем матрицу A_g линейного оператора φ в базисе g по формуле

$$A_g = (T_{f \rightarrow g}^{-1} \cdot A_f) \cdot T_{f \rightarrow g} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot T_{f \rightarrow g} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

180. а) Решение: 1) Найдем координаты векторов u_1, u_2, u_3 в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, имеем

$$u_1^e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2^e = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3^e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{e \rightarrow u}$ перехода от от базиса e к базису u . Для этого запишем координаты векторов $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ в матрицу по столбцам, получим

$$T_{e \rightarrow u} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к $T_{e \rightarrow u}$,
имеем

$$T_{e \rightarrow u}^{-1} = - \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (145), найдем матрицу A_u линейного оператора φ
в базисе u по формуле

$$A_u = (T_{e \rightarrow u}^{-1} \cdot A_e) \cdot T_{e \rightarrow u} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot T_{e \rightarrow u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 29 & -41 & -9 \\ 19 & -27 & -6 \\ 7 & -9 & -4 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -11 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

181. а) Решение: 1) Найдем координаты векторов e_1, e_2, e_3 в базисе
 $u = \{u_1, u_2, u_3\}$, имеем

$$e_1^u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2^u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3^u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $T_{u \rightarrow e}$ перехода от от базиса e к базису u . Для этого
запишем координаты векторов e_1, e_2, e_3 в матрицу по столбцам, получим

$$T_{u \rightarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим методом присоединенной матрицы обратную матрицу к $T_{u \rightarrow e}$,
имеем

$$T_{u \rightarrow e}^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Применяя формулу (145), найдем матрицу A_u линейного оператора φ в базисе u по формуле

$$A_u = (T_{u \rightarrow e} \cdot A_e) \cdot T_{u \rightarrow e}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot T_{u \rightarrow e}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

182. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(1, -1)$, где $c \neq 0$; b) Собственных значений и собственных векторов у данного оператора нет; c) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 0$ имеют вид $c(1, -1)$, а для $\lambda_2 = 2$ – вид $c(1, 1)$, где $c \neq 0$; d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Собственные векторы имеют вид $c(1, -1)$, где $c \neq 0$.

183. a) $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = -2 + i$ имеют вид $c(1, i)$, а для $\lambda_2 = -2 - i$ – вид $c(1, -i)$, где $c \neq 0$; b) $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = i$ имеют вид $c(1, 1 + i)$, а для $\lambda_2 = -i$ – вид $c(1, 1 - i)$, где $c \neq 0$; c) $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 2i$ имеют вид $c(1, i)$, а для $\lambda_2 = -2i$ – вид $c(i, 1)$, где $c \neq 0$; d) $\lambda_1 = 2 - 2i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 2 - 2i$ имеют вид $c(-1, 1)$, а для $\lambda_2 = -i$ – вид $c(1, 1 - i)$, где $c \neq 0$;

184. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид $c(1; 1; -1)$, где $c \neq 0$; b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1; 2; 0) + c_2(0; 0; 1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно; c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1; 1; 1)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – вид $c(1; 2; 3)$, где $c \neq 0$; d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(3; 1; 1)$, где $c \neq 0$; e) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1; 2; 2)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ – вид $c(1; 2; 1)$, где $c \neq 0$; f) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 5$ имеют

вид $c(1; -1; 1)$, для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1; 1; -1)$, для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1; 1; 1)$, где $c \neq 0$.

185. а) базис состоит, например, из векторов $a_1 = (3; 1; 3)$, $a_2 = (0; 1; 3)$, $a_3 = (1; 2; 1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

б) матрица к диагональному виду не приводится; **с)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1; -1; 1)$, $a_2 = (1; 1; -1)$, $a_3 = (1; 1; 1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

д) базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1; 1; -1)$, $a_2 = (1; -1; 1)$, $a_3 = (1; 1; 1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

е) базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1; 1; -1)$, $a_2 = (1; -1; 1)$, $a_3 = (1; 1; 1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

186. а) Да. **б)** Нет. **с)** Да.

187. а) Нет. **б)** Нет. **с)** Нет.

188. а) Да. **б)** Да. **с)** Да.

189. а) $(a, b) = -18, |a| = \sqrt{18}, |b| = \sqrt{24}, \varphi = 5\pi/6$; **б)** $(a, b) = -7, |a| = \sqrt{14}, |b| = \sqrt{7}, \varphi = 3\pi/4$; **с)** $(a, b) = -6, |a| = \sqrt{12}, |b| = \sqrt{12}, \varphi = 2\pi/3$;

190. а) $(a, b) = 0, |a| = \sqrt{7}, |b| = \sqrt{23}, \varphi = \pi/2$; **б)** $(a, b) = 3, |a| = 3, |b| = 2, \varphi = \pi/3$; **с)** $(a, b) = 11, |a| = \sqrt{11}, |b| = \sqrt{22}, \varphi = \pi/4$.

191. а) *Решение:* Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим

$$e_1 = x_1; e_2 = x_2 - a_{12}e_1, \text{ где } a_{12} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{1 + 2 - 10 - 3}{1 + 4 + 4 + 1} = -1,$$

следовательно, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Для вычисления e_3

имеем равенство

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2,$$

где

$$a_{13} = \frac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{3 + 4 + 16 + 7}{1 + 4 + 4 + 1} = 3,$$

$$a_{23} = \frac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{6 + 6 - 24 - 14}{4 + 9 + 9 + 4} = -1.$$

Таким образом, получаем

$$e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Система векторов $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ является

ортогональной. **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

192. а) Решение: Так как $(x_1, x_2) = 0$, то по определению векторы x_1 и x_2 ортогональны.

Размерность пространства \mathbf{R}^4 равна 4, то базис этого пространства содержит также четыре вектора. Таким образом, нам необходимо добавить

два вектора. Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ – вектор из пространства \mathbf{R}^4 такой что y

ортогонален как вектору x_1 , так и вектору x_2 , то есть имеем следующую систему равенств

$$\begin{cases} (y, x_1) = 0, \\ (y, x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 = 0, \\ 2y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 4y_4 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ эквивалентна следующей ступенчатой

матрице $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ и, следовательно, имеет ранг $r = 2$.

Пусть свободные неизвестные $y_3 = 1, y_4 = 0$, тогда базисные неизвестные равны $y_1 = y_2 = 2$, то есть первый вектор в фундаментальной си-

стеме решений имеет вид $Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогичным образом, полагая

$y_3 = 0, y_4 = 1$, находим $y_1 = -17, y_2 = -10$, следовательно, $Y_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

– второй вектор в ФСР. Итак, получаем, что система векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образует ортогональный базис пространства \mathbf{R}^4 . Следует отметить, что

координаты векторов Y_1 и Y_2 находятся неоднозначно. **б)** Можно доба-

вить, например, следующие векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ -17 \\ -6 \end{pmatrix}$.

193. а) Решение: Так как $(x_1, x_2) = 0$, то по определению векторы x_1 и x_2 ортогональны. Более того, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, поэтому эти векторы нормированные.

Размерность пространства \mathbf{R}^3 равна 3, то базис этого пространства содержит также три вектора. Таким образом, нам необходимо добавить

только один вектор. Пусть $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ – вектор из пространства \mathbf{R}^3 та-

кой что y ортогонален как вектору x_1 , так и вектору x_2 , то есть имеем следующую систему равенств

$$\begin{cases} (y, x_1) = 0, \\ (y, x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 0, \\ y_1 + 2y_2 - 2y_3 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ эквивалентна следующей ступенчатой

матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и, следовательно, имеет ранг $r = 2$. Пусть свобод-

ное неизвестное $y_3 = 1$, тогда базисные неизвестные равны $y_1 = -2, y_2 = 2$, то есть фундаментальная система решений состоит из одного вектора

$Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пронормируем вектор Y . Имеем

$$Y = \frac{1}{\|Y\|} \cdot Y = \frac{1}{\sqrt{(Y, Y)}} \cdot Y = \frac{1}{3} \cdot Y = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Итак, получаем, что система векторов

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

образует ортонормированный базис пространства \mathbf{R}^3 . Следует отметить, что координаты вектора Y находятся неоднозначно. **б)** Например,

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{194.} \quad \mathbf{а)}$$

Решение: 1) В данную квадратичную форму переменная x_1 входит в первой и второй степенях одновременно. Выбираем ее в качестве ведущей.

2) Сгруппируем все слагаемые квадратичной формы, содержащие ведущую переменную x_1 , и вынесем общие множители за скобку

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 3[x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3] + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3 = \\ &= 3[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3)] + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3. \end{aligned}$$

Выделим полный квадрат, для этого в квадратичную форму добавим и вычтем слагаемое $(x_2 - x_3)^2$, получим

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 3[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 3(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_2x_3 = \\ &= 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 5x_2x_3. \end{aligned}$$

Введем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Получаем квадратичную форму $f_1(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 5y_2y_3$. Продолжим преобразования, так как в квадратичной форме присутствует произведение y_2y_3 .

3) В квадратичной форме $f_1(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 5y_2y_3$ нет ведущих переменных, так как каждая переменная переменная входит в форму либо

во второй степени, либо в первой, но не в первой и второй степенях одновременно. Однако имеется произведение $y_2 y_3$ разных переменных. Следуя четвертому пункту алгоритма, сделаем замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 - z_3, \\ y_3 = z_2 + z_3. \end{cases}$$

Тогда получим квадратичную форму $f_2(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + 5z_2^2 - 5z_3^2$. Квадратичная форма f_2 имеет канонический вид.

Найдем теперь невырожденную линейную замену переменных, приводящую данную форму к каноническому виду. Во втором и третьем пунктах решения выполнялись замены $x = S_1 \cdot y$ и $y = S_2 \cdot z$ с матрицами

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицу S искомой замены $x = S \cdot z$ находим как произведение

$$S = S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, итоговое преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 2z_3, \\ x_2 = z_2 - z_3, \\ x_3 = z_2 + z_3. \end{cases}$$

b) $z_1^2 - 3z_2^2 - \frac{8}{3}z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 - \frac{5}{3}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{1}{3}z_3$, $x_3 = z_3$.

c) $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 - z_3$, $x_2 = z_1 + z_2 - z_3$, $x_3 = z_3$.

d) $z_1^2 - z_2^2$, $x_1 = z_1 + z_2 - 5z_3$, $x_2 = z_2 - 4z_3$, $x_3 = z_3$.

e) $z_1^2 + 4z_2^2 - 9z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 + \frac{5}{2}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3$, $x_3 = z_3$.

f) $4z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_3$, $x_2 = z_2 - z_3$, $x_3 = z_2 + z_3$.

g) $z_1^2 - \frac{7}{2}z_2^2 + 2z_3^2$, $x_1 = z_1 - \frac{5}{2}z_2 - z_3$, $x_2 = z_2$, $x_3 = \frac{1}{2}z_2 + z_3$.

h) $3z_1^2 - \frac{8}{3}z_2^2 + \frac{23}{32}z_3^2$, $x_1 = z_1 - \frac{2}{3}z_2 + \frac{5}{8}z_3$, $x_2 = z_2 - \frac{3}{16}z_3$, $x_3 = z_3$.

i) $2z_1^2 + \frac{5}{2}z_2^2 + \frac{19}{10}z_3^2$, $x_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_2 - \frac{9}{10}z_3$, $x_2 = z_2 + \frac{1}{5}z_3$, $x_3 = z_3$.

195. а) Решение: Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа. Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 32 = -(\lambda - 4)^2(\lambda + 2).$$

Оно имеет корни $\lambda_{1,2} = 4$, $\lambda_3 = -2$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы $f_1(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$;

b) $6y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; c) $y_1^2 + \sqrt{3}y_2^2 - \sqrt{3}y_3^2$.

196. Решение: Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа. Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 5$, $\lambda_{2,3} = -1$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы $f_1(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

Построим теперь матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к этому каноническому виду. С этой целью,

найдем собственные векторы матрицы A . Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора X , соответствующего собственному значению $\lambda = 5$, являются решением системы уравнений $(A - 5E)X = 0$, то есть системы

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$$

у которой ранг r матрицы равен 2, а $n - r = 1$. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например, такого

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя X_1 , получаем собственный вектор

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора X , соответствующего собственному значению $\lambda = -1$, являются решением системы уравнений $(A + E)X = 0$, то есть системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

у которой ранг r матрицы равен 1, а $n - r = 2$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из двух векторов. Чтобы их найти, оставим только первое уравнение системы (второе и третье являются следствием первого). Положим вначале $x_2 = 1, x_3 = 0$, тогда $x_1 = -1$; затем положим $x_2 = 0, x_3 = 1$, тогда $x_1 = -1$. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из следующих векторов

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это и есть два линейно независимых собственных вектора матрицы A , соответствующих собственному значению $\lambda = -1$.

Заметим, что собственные векторы X_2 и X_3 матрицы A ортогональны к собственному вектору U_1 , но не ортогональны между собой. Применим к ним процедуру ортогонализации. С этой целью положим

$$Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3 - \alpha Y_2.$$

Коэффициент α определяется из условия ортогональности Y_2 и Y_3 , то есть из условия

$$\alpha = \frac{(X_2, X_3)}{(X_2, X_2)} = 1/2.$$

Итак, мы построили два ортогональных собственных вектора матрицы A , соответствующих собственному значению $\lambda = -1$:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя их, получаем собственные векторы

$$U_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Матрица искомого ортогонального преобразования состоит из столбцов U_1, U_2, U_3 , то есть искомое преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3. \end{cases}$$

Это преобразование приводит квадратичную форму к каноническому виду

$$f_1(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Следует отметить, что канонический вид и ортогональное преобразование определяются неоднозначно. **b)** $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; **с)** $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; **д)** $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$; **е)** $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_2$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; **ф)** $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 - \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$.

197. а) *Решение:* Найдем главные миноры матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 3 > 0, \Delta_3 = \det(A) = 3(\lambda - 1).$$

Пользуясь критерием Сильвестра, находим, что данная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\Delta_3 > 0$, то есть при $\lambda > 1$. **b)** $\lambda > 2$; **с)** $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$; **д)** $-0.8 < \lambda < 0$; **е)** требуемых значений λ не существует; **ф)** требуемых значений λ не существует.

Литература

- [1] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2007. – 431 с.
- [2] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2006. – 382 с.
- [3] Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2004. – 287 с.