УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Л.У. Бахтиева[1], Ф.Х. Тазюков[2]
[1, 2] кандидат физико-математических наук, доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет (Казань), Россия

Аннотация. *На основе предложенной авторами* [1] *математической модели решена задача устойчивости тонкой круговой цилиндрической оболочки под действием импульса всестороннего внешнего давления. Выведена формула, определяющая зависимость между интенсивностью нагрузки и начальными условиями задачи. Получены численные результаты.*
Ключевые слова: *устойчивость, оболочка, импульс, прогиб.*

Изучение поведения оболочечных конструкций под действием резко изменяющихся во времени нагрузок представляет несомненный практический интерес. В работе [1] на примере оболочки, нагруженной импульсной осевой силой, предложен новый подход к построению математической модели для такого рода задач. Покажем, что указанный алгоритм оказывается эффективным и в случае воздействия на оболочку импульса всестороннего внешнего давления.

Зададим функцию давления

$$p(t) = I\,\Delta(t),$$

где I – интенсивность импульса, $\Delta(t)$ – дельта-функция Дирака, t – время.

Чтобы получить уравнения движения оболочки, используем принцип Остроградского-Гамильтона [4]

$$\delta \int_0^t L dt = 0, \tag{1}$$

где функция Лагранжа $L = K - P + A$. Потенциальная энергия

$$P = \frac{h}{2E}\iint\left((\nabla^2\Phi)^2 - (1+\nu)L(\Phi,\Phi)\right)dxdy + \frac{D}{2}\iint\left((\nabla^2 w)^2 - (1-\nu)L(w,w)\right)dxdy,$$

где $L(w,w) = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – изгибная жесткость, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки.

Для вычисления кинетической энергии имеем выражение

$$K = \frac{\rho h}{2}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy,$$

$\rho = E/V^2$ – плотность, V – скорость звука в материале оболочки; двойное интегрирование здесь и ниже проводится по осевому сечению оболочки.

Работу внешних сил будем вычислять по формуле

$$A = p(t)\iint w(x,y)\,dxdy.$$

Определим функцию прогиба

$$w(x,y) = f_1(t)\sin\alpha x \sin\beta y + f_2(t)\sin^2\alpha x, \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{m\pi}{L}$, $\beta = \frac{n}{R}$, L – длина оболочки, R – радиус, m, n – подлежащие определению волновые числа.

Функцию напряжений Φ найдем после интегрирования уравнения неразрывности деформаций

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi + \frac{1}{2}L(w,w) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$.

Из (1) получаем (см. [1]) систему дифференциальных уравнений для определения амплитуд $f_1(t)$ и $f_2(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial f_i}\right) + \frac{\partial P}{\partial f_i} = 0, i = 1,2 \tag{3}$$

и условия в начальный момент времени $t = 0$

$$f_i(0) = \frac{I \iint \varphi_i(x,y)dxdy}{2\rho h \iint \varphi_i^2(x,y)dxdy}, \quad \varphi_1 = \sin\alpha x \sin\beta y, \varphi_2 = \sin^2\alpha x. \tag{4}$$

После преобразований система (3) – (4) приобретает вид

$$\frac{d^2\xi_1}{d\tau^2} + 4\left(2A_1\xi_1{}^3 + A_2\xi_1 + A_4\xi_1\xi_2{}^2 + A_5\xi_1\xi_2\right) = 0, \xi_i = \frac{f_i}{h},$$

$$\frac{d^2\xi_2}{d\tau^2} + \frac{4}{3}\left(2A_3\xi_2 + 2A_4\xi_2\xi_1{}^2 + A_5\xi_1{}^2\right) = 0, \tau = tV/R,$$

$$\xi_1(0) = 0, \xi_2(0) = \frac{2IVR}{3Eh^2},$$

коэффициенты A_k зависят от геометрических и физических характеристик оболочки, а также от волновых чисел m и n.

Численные расчеты показывают, что при малых значениях начальной скорости $\xi_2(0)$ (т.е. при малой интенсивности импульса нагрузки) оболочка колеблется с амплитудой порядка $\xi_2(0)$ (рис. 1).

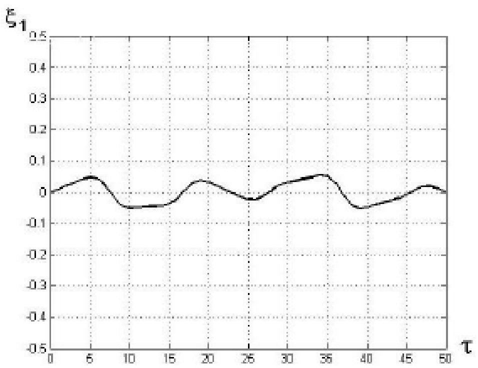

Рис. 1. Зависимость амплитуды прогиба от времени при малых значениях импульса нагрузки

Если значение $\xi_2(0)$ достигает критической величины, то наблюдается резкое возрастание амплитуды прогиба (рис. 2), т.е. происходит потеря устойчивости движения по А.М. Ляпунову.

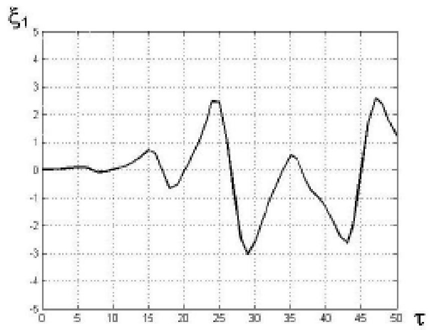

Рис. 2. Зависимость амплитуды прогиба от времени при критических значениях импульса нагрузки

Таким образом, предложенный авторами в работе [1] подход к решению задач устойчивости тонких оболочек при импульсном нагружении оказался эффективным в рассматриваемом случае. Полученные численные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [2, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтиева, Л. У., Тазюков, Ф. Х. Об устойчивости оболочек при импульсном нагружении / Л. У. Бахтиева, Ф. Х. Тазюков // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки, 2014, т. 156, № 1, с. 5–11.
2. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967, 985 с.
3. Григолюк, Э. И., Кабанов, В. В. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – М.: Наука, 1978, 360 с.
4. Коноплев, Ю. Г., Тазюков, Ф. Х. Устойчивость упругих пластин и оболочек при нестационарных воздействиях / Ю. Г. Коноплев, Ф. Х. Тазюков. – Казань: КГУ, 1994, 124 с.

Материал поступил в редакцию 29.10.14.

STABILITY OF SHELLS UNDER PULSE OF EXTERNAL PRESSURE

L.U. Bahtieva[1], F.Kh. Tazyukov[2]
[1, 2] Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kazan (Volga) Federal University (Kazan), Russia

Abstract*. On the basis of mathematical model proposed by the authors [1], the problem of stability of a thin circular cylindrical shell under the action of external pressure pulse was solved. The formula that defines the relationship between the intensity of the load and the initial conditions of the problem was identified. The authors of the work got numerical results.*

Keywords*: stability, shell, impulse, deflection.*