

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

**Дифференциальные уравнения в
обобщенных функциях**

Казань
2017

УДК 517

*Рекомендовано учебно-методической комиссией института
Математики и Механики Казанского (приволжского)
федерального университета
Протокол № 1 от 28 сентября 2017 г.*

Составители:

д .ф.-м. н., проф. И. А. Бикчантаев,
к .ф.-м. н., проф. Л. Г. Салехов

Дифференциальные уравнения в обобщенных функциях. — Казань: Казанский университет, 2017.— 62 с.

В данном учебном пособии излагаются: свертка обобщенных функций, сверточные алгебры и модули, преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}'$, символическое исчисление и задача Коши для дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения в обобщенных функциях

Свертка обобщенных функций.

Напомним, что пространство $L^1(\mathbb{R}^n)$ функций, интегрируемых на $\mathbb{R}^n$, снабженное сверткой, является сверточной алгеброй, так как операция-свертка является внутренним, коммутативным, ассоциативным законом композиции в $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Лемма. Пусть f и g — две интегрируемые функции на $\mathbb{R}^n$. Тогда имеет место формула

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f \otimes g, \varphi^\Delta \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n),$$

где φ^Δ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: $\varphi^\Delta(x, y) := \varphi(x + y)$, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ — пространство функций непрерывных и финитных на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Очевидно, функция $f(y)g(z)\varphi(y + z)$ интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Поэтому замена переменных в интегрировании по x дает:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)\varphi(x)dx dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y)g(z)\varphi(y + z)dz dy.$$

Замечание. Функция φ^Δ не имеет компактного носителя, хотя функция φ — с компактным носителем. Однако, если $(\text{supp } S \times \text{supp } T) \cap \text{supp } \varphi^\Delta$ будет компактом в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то можно определить $\langle S \otimes T, \varphi^\Delta \rangle$.

Это замечание ведет к изучению таких пар замкнутых множеств (A, B) , чтобы $(A \times B) \cap K^\Delta$ было компактом в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ для любого компакта K из $\mathbb{R}^n$, где $K^\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | (x + y) \in K\}$. Такая пара называется парой, допускающей свертку. Например, пара (A, B) , где A — компакт, а B — замкнутое множество, является парой, допускающей свертку.

Пусть $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$ и $\Gamma_c = \{x \in \Gamma_0 | x_n^2 \geq c^2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2\}$, где $c > 0$. Всякое множество из $\mathbb{R}^n$, содержащееся в сдвиге Γ_0 , называется параболическим множеством, а всякое множество, содержащееся в сдвиге Γ_c , называется гиперболическим множеством. Тогда пара (A, B) , где одно из множеств — параболическое, а другое — гиперболическое, является парой, допускающей свертку. В частности, когда $n = 1$, тогда $\Gamma_0 = \Gamma_c$ и такое множество (гиперболическое или параболическое) называется множеством, ограниченным слева. Любая пара (A, B) , где A и B — множества, ограниченные слева, является парой, допускающей свертку.

I. Определение свертки обобщенных функций.

Пусть S и T — обобщенные функции на $\mathbb{R}^n$, носители которых образуют пару, допускающую свертку. Тогда полагаем:

$$\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S \otimes T, \varphi^\Delta \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Имеют место следующие свойства свертки:

1. Коммутативность. Пусть S и T — две обобщенные функции, носители которых образуют пару, допускающую свертку, тогда

$$S * T = T * S.$$

2. $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеют место равенства: $\delta * T = T * \delta = T$; $\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$; $D^\alpha \delta * T = T * D^\alpha \delta = D^\alpha T$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

3. Ассоциативность.

$$(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$$

при условии, что свертки существуют.

4. $\text{supp}(S * T) \subset \text{supp } S + \text{supp } T$ — (векторная сумма множеств)

$$5. \tau_a(S * T) = S * \tau_a T = \tau_a S * T, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

$$6. D^\alpha(S * T) = D^\alpha S * T = S * D^\alpha T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Известно, что векторное подпространство $\mathcal{A}$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, снабженное сверткой, называется сверточной алгеброй, если свертка является коммутативным, ассоциативным, внутренним законом композиции в $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ — сверточная алгебра с единицей (единицей служит мера Дирака δ), тогда векторное подпространство $\mathfrak{M}$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, содержащее $\mathcal{A}$, называется сверточным модулем на алгебре $\mathcal{A}$, если для любого $A \in \mathcal{A}$ и для любого $M \in \mathfrak{M}$ определена свертка $A * M = M * A \in \mathfrak{M}$, обладающая свойствами:

$$a) A * (M * B) = (A * B) * M;$$

$$b) (A + B) * M = A * M + B * M, \text{ где } A * B \in \mathcal{A}, M \in \mathfrak{M};$$

$$c) A * (M + N) = A * M + A * N, \text{ где } A \in \mathcal{A}, M, N \in \mathfrak{M}.$$

Очень часто алгебру $\mathcal{A}$ называют алгеброй операторов на $\mathfrak{M}$.

Известно, что:

1) Векторное пространство $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, снабженное сверткой, является сверточной алгеброй с единицей.

2) Векторное пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является сверточным модулем на алгебре $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

3) Векторное пространство обобщенных функций с гиперболическими носителями (в случае $n = 1$, с носителями ограниченными слева), снабженное сверткой, является сверточной алгеброй с единицей, на которой пространство обобщенных функций с параболическими носителями образует сверточный модуль.

II. Регуляризующие свойства сверток.

а) Свертка функции и обобщенной функции.

Теорема. Пусть h и k принадлежат $\overline{\mathbb{N}}$, $T \in \mathcal{D}'^n(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{E}^{h+k}(\mathbb{R}^n)$.

Предположим, что T или f с компактным носителем. Тогда

1) Свертка $T * f$ является функцией из $\mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n)$, определяемой по формуле

$$(T * f)(a) = \langle T, \tau_a \check{f} \rangle, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, $\langle T, f \rangle = \text{trace}(T * \check{f}) := (T * \check{f})(0)$.

2) Отображение $f \mapsto T * f$, где $T \in \mathcal{D}'^h(\mathbb{R}^n)$, линейно и непрерывно из $\mathcal{D}^{h+k}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n)$ и из $\mathcal{D}^{h+k}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, если $T \in \mathcal{E}'^h(\mathbb{R}^n)$.

Замечание. В частности, свертка меры μ и функции $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ является непрерывной функцией, а свертка обобщенной функции T и функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ есть функция из класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $T * \check{f}$ представима через функцию $\psi(a)$, определяемую формулой

$$\psi(a) = \langle T, \tau_a f \rangle.$$

Установим сначала равенство

$$\langle T * \check{f}, \varphi \rangle = \langle T * \check{\varphi} \rangle = \langle T, f * \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Имеем

$$\langle T * \check{f}, \varphi \rangle = \langle T \otimes \check{f}, \varphi^\Delta \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(y) \varphi(x + y) dy \right\} dx,$$

$$\langle T * \check{\varphi}, f \rangle = \langle T \otimes \check{\varphi}, f^\Delta \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(y) f(x + y) dy \right\} dx,$$

но

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(y) \varphi(x + y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(y) f(x + y) dy = (f * \varphi)(x).$$

С другой стороны, $\langle T * \check{\varphi}, f \rangle$ может быть вычислено другим способом:

$$\langle T * \check{\varphi}, f \rangle = \langle T \otimes \check{\varphi}, f^\Delta \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(z) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} T(x) f(z + x) dx \right\} dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(z) \check{\psi}(z) dz = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

Откуда $T * \check{f} = \psi$.

б) Свертка двух обобщенных функций, одна из которых с компактным носителем.

Имеет место важная на практике

Теорема. 1) Пусть $\delta \in \mathcal{D}'^h(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{D}'^k(\mathcal{R}^n)$, $f \in \mathcal{E}^{h+k}(\mathbb{R}^n)$ и все с компактными носителями, за исключением одной. Тогда

$$\langle S * T, f \rangle = \langle S, \check{T} * f \rangle = \langle T, \check{S} * f \rangle$$

(формула транспозиции)

2) Билинейное отображение $(S, T) \leadsto S * T$ раздельно непрерывно из $\mathcal{E}'^h \times \mathcal{D}'^k$ в $\mathcal{D}'^{h+k}$ и из $\mathcal{E}'^h \times \mathcal{E}'^k$ в $\mathcal{E}'^{h+k}$.

Замечание. Утверждение 2), например, означает, что при фиксированной $S \in \mathcal{E}'^h(\mathbb{R}^n)$ отображение $T \leadsto S * T$ непрерывно из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ снабжено или слабой, или сильной дуальной топологией.

Доказательство. 1) Из предыдущей теоремы имеем

$$\langle T, g \rangle = \text{trace}(T * \check{g}).$$

Поэтому для доказательства, например, того, что

$$\langle S * T, f \rangle = \langle T, \check{S} * f \rangle$$

достаточно показать, что

$$(S * T) * \check{f} = T * (\check{S} * f)^{\sim}.$$

А это равенство вытекает из тривиального соотношения $(\check{S} * f)^{\sim} = S * \check{f}$, коммутативности и ассоциативности свертки.

2) Доказанные формулы транспозиции показывают, что для каждого $S \in \mathcal{D}'^h(\mathbb{R}^n)$ отображение $T \leadsto S * T$ является транспонированным к отображению $f \leadsto \check{S} * f$, которое, согласно предыдущей теореме, непрерывно отображает $\mathcal{D}^{h+k}(\mathbb{R}^n)$ в

$\mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n)$, поэтому транспонированное к нему отображение непрерывно отображает $\mathcal{E}'^k(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'^{h+k}(\mathbb{R}^n)$.

Аналогично, для каждого $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ отображение $S \curvearrowright T * S$ является транспонированным для отображения $f \curvearrowright \check{T} * f$, которое согласно предыдущей теореме, непрерывно отображает $\mathcal{E}^{k+h}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}^h(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}^{k+h}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}^h(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно, транспонированное к нему отображение непрерывно отображает $\mathcal{E}'^h(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}'^{h+k}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'^h(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'^{h+k}(\mathbb{R}^n)$.

с) Регуляризация обобщенных функций.

Известно, что если $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, а $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — регуляризующая последовательность, тогда последовательность бесконечно дифференцируемых функций $(T * \theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ сходится к T

1) по слабой дуальной топологии $\mathcal{D}'^k(\mathbb{R}^n)$ и по сильной дуальной топологии $\mathcal{D}'^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, если $T \in \mathcal{D}'^k(\mathbb{R}^n)$, где $k \in \bar{\mathbb{N}}$;

2) по слабой дуальной топологии $\mathcal{E}'^k(\mathbb{R}^n)$ и по сильной дуальной топологии $\mathcal{E}'^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, если $T \in \mathcal{E}'^k(\mathbb{R}^n)$, где $k \in \bar{\mathbb{N}}$.

d) Глобальная непрерывность свертки.

Известно, что если $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность обобщенных функций порядка не выше h ($h \in \bar{\mathbb{N}}$), сходящаяся к обобщенной функции S по сильной дуальной топологии $\mathcal{D}'^h(\mathbb{R}^n)$, причем $\text{supp } S_j \subset A$, $\forall j \in \mathbb{N}$, где A — фиксированное замкнутое множество, а $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность обобщенных функций порядка не выше k ($k \in \bar{\mathbb{N}}$), сходящаяся к обобщенной функции T по сильной дуальной топологии $\mathcal{D}'^k(\mathbb{R}^n)$, причем $\text{supp } T_j \subset B$, $\forall j \in \mathbb{N}$, где B — фиксированное замкнутое множество такое, что (A, B) есть пара, допускающая свертку, тогда $(S_j * T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ сходятся по сильной дуальной топологии $\mathcal{D}'^{h+k}(\mathbb{R}^n)$ к обобщенной функции $S * T$.

Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и обобщенные функции медленного роста.

I. По определению $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$ есть подмножество функций

$f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ и $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$

$$q_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty.$$

Элемент из $\mathcal{S}$ называется бесконечно дифференцируемой функцией на $\mathbb{R}^n$, быстро убывающей на бесконечности вместе со всеми ее производными.

Очевидно, что $\mathcal{S}$ есть векторное подпространство из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Естественная топология на $\mathcal{S}$ определяется счетным семейством полунорм

$$q_{l, m}(f) = \sup_{|\alpha| \leq l, |\beta| \leq m} q_{\alpha, \beta}(f), \quad (l, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

II. Свойства пространства $\mathcal{S}$.

1) Векторное пространство $\mathcal{S}$, снабженное мультипликативным произведением, является мультипликативной подалгеброй алгебры $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, и билинейное отображение $(f, g) \mapsto fg$ из $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ непрерывно.

2) Операторы дифференцирования D^α , $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ и умножения на x^α , $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ линейны и непрерывны из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

3) Векторное пространство $\mathcal{S}$, снабженное сверткой, является сверточной алгеброй и билинейное отображение $(f, g) \mapsto f * g$ непрерывно из $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

4) Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$ и $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $f \otimes g$ есть элемент из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+n})$ и отображение $(f, g) \mapsto f \otimes g$ непрерывно из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^l) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+n})$.

III. Обобщенные функции медленного роста.

Определение. Пусть T — линейный функционал на векторном пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что T есть обобщенная функция медленного роста (на $\mathbb{R}^n$), если функционал T непрерывен на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в топологии, индуцированной из $\mathcal{S}$.

Так как естественная топология из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ тоньше, чем индуцируемая из $\mathcal{S}$, то всякая обобщенная функция медленного роста является обобщенной функцией на $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Всякая обобщенная функция медленного роста T единственным образом продолжима в линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}$. Множество обобщенных функций медленного роста отождествимо с множеством $\mathcal{S}'$ всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{S}$.

Доказательство. Так как $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ и плотно, то согласно теореме о каноническом вложении дуальных пространств пространство $\mathcal{S}'$ непрерывно вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Поэтому можно отождествить $\mathcal{S}'$ с векторным подпространством из пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. В силу той же теоремы, чтобы элемент T из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ был продолжим в элемент $T^\sharp$ из $\mathcal{S}'$, необходимо и достаточно, чтобы T был бы непрерывен на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, снабженном топологией из $\mathcal{S}$. Заметим, что для получения продолжения $T^\sharp$ для T используется принцип продолжения по непрерывности.

Мы будем отождествлять $\mathcal{S}'$ с подпространством из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и обобщенную функцию медленного роста T со своим продолжением $T^\sharp$.

IV. Свойства обобщенных функций медленного роста.

Пространство $\mathcal{S}'$ снабжается или слабой, или сильной дуальной топологией.

1) Если $T \in \mathcal{S}'$, то для любого $\alpha \in \mathbb{N}^n$ произведение $x^\alpha T$ есть обобщенная функция медленного роста и отображение $T \leadsto x^\alpha T$ непрерывно из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Доказательство. Так как отображение $f \leadsto x^\alpha f$ линейно и непрерывно из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$, то транспонированное к нему отображение непрерывно из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

2) Если $T \in \mathcal{S}'$, то для любого $\beta \in \mathbb{N}^n$ производная $D^\beta T$ есть обобщенная функция медленного роста и отображение

$T \curvearrowright D^\beta T$ непрерывно из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Доказательство аналогично.

3) Если $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l)$ и $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то $S \otimes T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{l+n})$.
(доказать самим).

V. Примеры обобщенных функций медленного роста.

а) Обобщенная функция с компактным носителем.

Всякая обобщенная функция с компактным носителем является обобщенной функцией медленного роста. Действительно, имеет место каноническое непрерывное и плотное вложение $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вкладывается в $\mathcal{S}'$.

б) Меры медленного роста.

Пусть μ — мера Радона, представимая через функцию $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что μ — медленного роста, если существует целое $k > 0$ такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(x)| dx}{(1 + |x|^2)^k} < +\infty.$$

Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$|\langle \mu, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} g \varphi dx \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\varphi(x)(1 + |x|^2)^k] \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(x)| dx}{(1 + |x|^2)^k}.$$

Это неравенство показывает непрерывность функционала μ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в топологии $\mathcal{S}$.

с) Известно также, что пространство $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leq p \leq \infty$ непрерывно вкладывается в пространство $\mathcal{S}'$, снабженное слабой или сильной топологией.

VI. Операторы умножения.

Известно, что умножение на полином является линейной непрерывной операцией из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ и из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$. Обобщим этот результат.

1°. **Определение.** Пусть g — функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что g является мультипликатором для $\mathcal{S}$, если линейное отображение $f \mapsto gf$ непрерывно из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

Множество мультипликаторов обозначают так: $\theta_M(\mathbb{R}^n) = \theta_M$.

2°. **Теорема** (мультипликаторы для $\mathcal{S}'$). Если $g \in \theta_M$, то отображение $T \mapsto gT$ непрерывно из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Доказательство. Рассмотрим отображение, транспонированное к отображению $f \mapsto gf$, которое непрерывно отображает $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Оно в силу топологических свойств транспонированного отображения, непрерывно отображает $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

3°. Имеет место следующее свойство пространства θ_M :

1) θ_M является подалгеброй с единицей мультипликативной алгебры $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

2) Пространства $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ являются мультипликативными модулями с единицей на θ_M .

3) Пусть $g \in \theta_M$. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}^n$ и для любого $\beta \in \mathbb{N}^n$ функции $\check{g}$, $\tau_a g$, $D^\beta g$, $x^\beta g$ суть элементы из θ_M .

4°. Структура мультипликаторов.

Определение. Непрерывная функция f называется функцией медленного роста, если существует константа $k \geq 0$ такая, что функция

$$\frac{f}{(1 + |x|^2)^k}$$

ограничена на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, что любая такая функция является мерой медленного роста и потому обобщенной функцией медленного роста.

5°. Имеет место

Теорема (характеристика мультипликаторов). Если функция $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) для любого $\beta \in \mathbb{N}^n$ функция $D^\beta g$ есть функция медленного роста;

2) функция g есть элемент из θ_M .

3) для любой $f \in \mathcal{S}$ функция gf есть элемент из $\mathcal{S}$.

Замечание. Если $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такая, что $fT \in \mathcal{S}$, $\forall f \in \mathcal{S}$, то T есть (обобщенная функция, порожденная) функция из класса C^∞ на $\mathbb{R}^n$

В самом деле, если взять $f(x) = e^{-|x|^2}$, то $1/f$ есть функция из класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $T = \frac{1}{f}(fT)$.

VII. Операторы свертки.

а) Свертка элемента из $\mathcal{S}$ и элемента из $\mathcal{S}'$.

Известно, что для любого $g \in \mathcal{S}$ линейное отображение $f \mapsto \check{g} * f$ непрерывно отображает $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Через $T \mapsto g * T$ обозначим транспонированное к нему. Иначе говоря, полагаем

$$\langle g * T, f \rangle := \langle T, \check{g} * f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Тогда $g * T$ — элемент из $\mathcal{S}'$, и отображение $T \mapsto g * T$ линейно и непрерывно из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Когда g или T с компактным носителем, это совпадает с обычным определением свертки.

Имеют место следующие формулы:

$$\check{T} * \check{g} = T * g, \quad \tau_a(T * g) = \tau_a T * g, \quad D^\beta(T * g) = D^\beta T * g.$$

б) Сверточный множитель для $\mathcal{S}$ и для $\mathcal{S}'$.

Пусть T — обобщенная функция медленного роста. Говорят, что T — сверточный множитель для $\mathcal{S}$, если отображение $g \mapsto T * g$ непрерывно отображает $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Сверточный множитель для $\mathcal{S}$ называют еще обобщенной функцией быстрого убывания.

Множество сверточных модулей обозначают так: $\theta'_c(\mathbb{R}^n) = \theta'_c$.

Пусть $T \in \theta'_c$, тогда $\check{T} \in \theta'_c$. Следовательно, отображение $g \mapsto \check{T} * g$ непрерывно отображает $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Через $S \mapsto T * S$

S обозначим транспонированное к нему. Иначе говоря, для любого $S \in \mathcal{S}'$ положим

$$\langle T * S, g \rangle := \langle S, \check{T} * g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{S}.$$

Имеют место следующие свойства пространства θ'_c .

- 1) θ'_c является векторным подпространством $\mathcal{S}'$.
- 2) Если $T \in \theta'_c$, то для любого $a \in \mathbb{R}^n$ и любого $\beta \in \mathbb{N}^n$ обобщенные функции $\check{T}$, $\tau_a T$, $D^\beta T$, $x^\beta T$ принадлежат θ'_c .
- 3) Векторное пространство θ'_c , снабженное сверткой, является сверточной алгеброй с единицей, на которой $\mathcal{S}'$ является сверточным модулем.
- 4) Пространство θ'_c содержит локально интегрируемые функции быстрого убывания. Локально интегрируемая функция g называется быстро убывающей, если

$$\sup_{|\alpha| \leq l} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| g(x) dx < \infty, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

- 5) Пространство θ'_c содержит обобщенные функции с компактным носителем.

Преобразование Фурье.

Преобразование Фурье является одним из сильнейших методов исследования в классическом и современном анализе. В последнее время область применения преобразования Фурье значительно расширилась в связи с развитием теории обобщенных функций в смысле Соболева и Шварца. Преобразование Фурье успешно применяется к исследованию линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

В дальнейшем через $x\xi$ или ξx будем обозначать скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, то есть

$$x\xi = \xi x = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Будем полагать также

$$\chi_\xi(x) = \chi_x(\xi) = e^{2\pi i x \xi}.$$

Множество функций $\chi_\xi(x)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, является мультипликативной группой. Эта группа абелева (то есть коммутативная). Она называется группой характеров на $\mathbb{R}^n$.

I. Преобразование Фурье в $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Определения. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$(Ff)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$(\overline{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

Отображения F и $\overline{F}$ называются соответственно преобразование Фурье и копреобразование Фурье на $\mathbb{R}^n$.

Функцию Ff , которую будем обозначать также через $\hat{f}$, называют Фурье-образом для f , или изображением для f .

Напомним, что через $L^1(\mathbb{R}^n)$ обозначают пространство классов функций из $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, где функции из $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ считаются из одного класса, если они совпадают почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Иногда говорят просто: „функция из $L^1(\mathbb{R}^n)$ “ вместо „класс функций из $L^1(\mathbb{R}^n)$ “, хотя это сокращение и некорректно, но удобно. Норму в $L^1(\mathbb{R}^n)$ вводится по формуле

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

Итак, если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то ее Фурье-образ (или изображение) будет по определению Фурье-образом какого-либо представителя из f .

Свойства преобразования Фурье в $L^1(\mathbb{R}^n)$.

1°. Преобразование Фурье является линейным преобразованием.

Линейность вытекает из линейности операции интегрирования.

2°. Если $f = f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n = \bigotimes_{k=1}^n f_k$, $f_k \in L^1(\mathbb{R})$, то

$$Ff = \bigotimes_{k=1}^n Ff_k. \quad (3)$$

Это свойство вытекает из формулы

$$\exp(-2\pi i \xi x) = \prod_{j=1}^n \exp(-2\pi i x_j \xi_j).$$

3°. Имеют место следующие три тождества:

1) $\overline{F(f)} = \overline{Ff}$, где $\overline{f}$ означает знак комплексного сопряжения над f ,

$$2) F\check{f} = \overline{Ff} \quad (4)$$

$$3) \overline{f}(\check{f}) = Ff.$$

Проверим одно из них.

$$\overline{F(\check{f})} = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x) e^{2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = (Ff)(\xi).$$

4) Пусть $\mathcal{I}$ — матрица преобразования $y = \mathcal{I}x$ пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, тогда для любой $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$F(f \circ \mathcal{I}) = \frac{1}{|\det \mathcal{I}|} Ff \circ \mathcal{I}^{*-1},$$

где $\mathcal{I}^*$ — матрица, транспонированная к $\mathcal{I}$.

В самом деле,

$$F(f \circ \mathcal{I})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathcal{I}x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Сделаем замену переменных $y = \mathcal{I}x$ и, учитывая, что

$$(\mathcal{I}^{-1}y)\xi = y(\mathcal{I}^{*-1}\xi),$$

имеем

$$F(f \circ \mathcal{I})(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\det \mathcal{I}|} f(y) e^{-2\pi i y (\mathcal{I}^{*-1} \xi)} dy = \frac{1}{|\det \mathcal{I}|} Ff(\mathcal{I}^{*-1} \xi).$$

Следствия. 1) Если $y = kx$, где $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то

$$[Ff(kx)(\xi)] = \frac{1}{|k|^n} (Ff) \left(\frac{\xi}{k} \right).$$

2) Если $\mathcal{I}$ есть вращение, определяемое некоторой унитарной матрицей U , то $F(f \circ U) = Ff \circ U$, в частности, если f — функция радиальная, то и Ff — радиальная. Напомним, что вещественная матрица U называется унитарной, если $UU^* = E$, где U^* — транспонированная для U , тогда $U^* = U^{-1}$ и $U^{*-1} = U$.

Фундаментальные свойства преобразования Фурье в $L^1(\mathbb{R}^n)$.

1°. Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то

а) ее Фурье-образ $\hat{f}$ является ограниченной непрерывной функцией на $\mathbb{R}^n$ и $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, где

$$\|\hat{f}\|_\infty = \text{ess. sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|, \quad \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx,$$

б) $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$, когда $|\xi| \rightarrow \infty$ (теорема Римана-Лебега).

Следовательно, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

2°. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда имеет место свойство транспозиции

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx.$$

3°. Преобразование Фурье переводит сдвиг в экспоненциальное умножение и обратно (формулы запаздывания):

$$\widehat{\tau_a f} = \chi_{-a} \hat{f}, \quad \widehat{\chi_a f} = \tau_a \hat{f},$$

где $\tau_a f := f(x - a)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

4°. Преобразование Фурье переводит операцию дифференцирования в операцию мономинального умножения и обратно, и переставляет свойства дифференцируемости и убывания на бесконечности:

1) то есть, если $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ для всякого $\alpha \in \mathbb{N}^n$ такого, что $|\alpha| \leq k$, где $k \in \mathbb{N}$, тогда $\widehat{f} f \in \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n)$ и, кроме того, имеет место равенство: $\widehat{(-2\pi i x)^2 f} = D^\alpha \widehat{f}$;

2) то есть если $f \in \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n)$, где $D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ для всякого $\beta \in \mathbb{N}^n$ такого, что $|\beta| \leq k$, где $k \in \mathbb{N}$, тогда $\xi^\beta \widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство функций, существенно ограниченных на $\mathbb{R}^n$, и, кроме того, имеет место равенство: $\widehat{D^\beta f} = (2\pi i \xi)^\beta \widehat{f}$.

Фундаментальный пример. В качестве непосредственного приложения указанных фундаментальных свойств вычислим Фурье-образ $\widehat{f}$ для $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$). Функция $f = e^{-\pi x^2}$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0$$

или

$$f'(x) + i(-2\pi i x) f(x) = 0.$$

Переходя к отображениям, имеем: $2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) + i \widehat{f}'(\xi) = 0$ или $\widehat{f}'(\xi) + 2\pi \xi \widehat{f}(\xi) = 0$. Так как множество решений линейного уравнения первого порядка (однородного) является векторным пространством размерности 1, то имеем: $\widehat{f} = k f$, или $\widehat{f}(\xi) = k e^{-\pi \xi^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Константа k определяется, если положить $\xi = 0$:

$$k = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

(интеграл Гаусса). Итак, имеем: $\widehat{f} = f$. (Покажите, что $\overline{F}f = f$).

В качестве еще одного важного приложения фундаментальных свойств получим подготовительную формулу Ритца.

Рассмотрим функции: $\tau_{-a}f$ и g , где $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и применим к ним свойство транспозиции:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-a}f)\widehat{g}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(\tau_{-a}f)}gdx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ia\xi} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi.$$

Итак, получили подготовительную формулу Ритца:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)e^{2\pi ia\xi}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+a)\widehat{g}(x)dx.$$

Замечание относительно формулы обращения для преобразования Фурье в пространстве $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда, как известно, ее образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$ является непрерывной функцией на $\mathbb{R}^n$ и определяется формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Обратно, если $\widehat{f}$ также является интегрируемой на $\mathbb{R}^n$, тогда функция $f(x)$ необходимо является непрерывной и определяется формулой

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x}d\xi.$$

Если f не является (не равна почти всюду непрерывной функции) непрерывной, тогда $\widehat{f}(\xi)$ не будет интегрируемой на $\mathbb{R}^n$. Поэтому невозможно поточечное восстановление функции f с помощью последней формулы.

Однако, в случае $n = 1$ и функция f будет функцией с ограниченной вариацией, возможно поточечное ее восстановление, а именно, имеет место

Теорема (об обращении Фурье-Дирихле). Пусть f — интегрируемая функция на $\mathbb{R}$ и с ограниченной вариацией на

каждом компактном интервале из $\mathbb{R}$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_{|\xi| \leq k} e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

стремится к $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, когда $k \rightarrow \infty$, где $f(x+0)$ и $f(x-0)$ — предельные значения справа и слева функции f в точке x .

Преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{S}$.

Теорема о топологическом автоморфизме.

Напомним, что линейное непрерывное биективное отображение векторного топологического пространства X на векторное топологическое пространство Y называется топологическим изоморфизмом пространства X на Y .

Теорема. Преобразование Фурье F является топологическим изоморфизмом пространства $\mathcal{S}$ на себя (то есть топологическим автоморфизмом пространства $\mathcal{S}$). Обратным изоморфизмом является $\overline{F}$.

Иначе говоря, для любого $f \in \mathcal{S}$ имеет место равенство

$$F\overline{F}f = \overline{F}Ff = f$$

(формула обращения)

Доказательство. 1) Отображение F является непрерывным из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. В самом деле, для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ фундаментальное свойство 4° дает

$$(2\pi i \xi)^\alpha D^\beta \widehat{f} = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{(-2\pi i x)^\beta f} = D^\alpha [(-2\pi i x)^\beta f].$$

В силу фундаментального свойства 1° имеем:

$$\|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{|\beta| - |\alpha|} \|D^\alpha (x^\beta f)\|_1,$$

где $\|D^\alpha (x^\beta g)\|_1$ — полунормы в $\mathcal{S}$, эквивалентные полунормам $\|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$ также в $\mathcal{S}$.

Это неравенство влечет, что $\widehat{f} \in \mathcal{S}$, если $f \in \mathcal{S}$; оно же показывает непрерывность отображения $f \mapsto \widehat{f}$.

2) Отображение $\overline{F}$ является непрерывным из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$, ибо F и $\overline{F}$ отличаются друг от друга только заменой i на $-i$.

3) $\overline{F}$ является обратным отображением для F .

В действительности достаточно показать, что $\overline{F}Ff = f$, $f \in \mathcal{S}$. Иначе говоря, необходимо показать, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-2\pi i \xi x) dx \right] \exp(2\pi i \xi a) d\xi = f(a).$$

Так как функция $(x, \xi) \mapsto f(x) e^{2\pi i \xi(a-x)}$ не является интегрируемой на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, нельзя применить теорему Рубини о перестановке интегралов. Поэтому предварительно построим последовательность вспомогательных функций $(g_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$. Пусть φ — какой-либо элемент из $\mathcal{S}$. Положим $g_j(x) = \varphi(x/j)$, $j \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Используем теперь подготовительную формулу Ритца:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g_j(\xi) \exp(2\pi i a \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(a + \xi) \widehat{g}_j(\xi) d\xi.$$

Так как $\widehat{g}_j(\xi) = j^n \widehat{\varphi}(j\xi)$ в силу следствия 1) из свойства 4° преобразования Фурье, то правая часть равенства может быть записана в виде

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(a + \frac{s}{j}\right) \widehat{\varphi}(s) ds.$$

Пусть теперь $j \rightarrow \infty$, тогда последовательность $\widehat{f}(\xi) g_j(\xi) e^{2\pi i a \xi}$ стремится к $\widehat{f}(\xi) \varphi(0) \exp(2\pi i a \xi)$. С другой стороны,

$$|\widehat{f}(\xi) g_j(\xi) \exp(2\pi i a \xi)| \leq \|\varphi\|_{\infty} \cdot |\widehat{f}(\xi)|.$$

Тогда теорема Лебега о мажорированной сходимости (или о предельном переходе под знаком интеграла) показывает, что

левая часть предыдущего равенства сходится к

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i a \xi} d\xi.$$

Замечание. Напомним упомянутую теорему Лебега:

Пусть $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность элементов из $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$), сходящаяся почти всюду к функции f . Предположим, что существует функция $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, такая, что $|f_j(x)| \leq g(x)$ для почти всех x . Тогда f принадлежит $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ и последовательность $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ сходится к f по топологии пространства $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Продолжим доказательство. Оценка

$$\left| f\left(a + \frac{s}{j}\right) \widehat{\varphi}(s) \right| \leq \|f\|_{\infty} |\widehat{\varphi}(s)|$$

аналогично позволяет заключить на основании той же теоремы, что правая часть того же равенства стремится к

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(a) \widehat{\varphi}(s) ds.$$

Окончательно имеем для всех $f \in \mathcal{S}$ и для всех $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \exp(2\pi i a \xi) d\xi = f(a) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(s) ds.$$

Полагая $\varphi(x) = \exp(-\pi|x|^2)$, имеем: $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ (показать самим).

Так как $\varphi(0) = 1$, и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(s) ds = 1,$$

то

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \exp(2\pi i a \xi) d\xi.$$

Теорема о перестановке. В пространстве $\mathcal{S}$ преобразование Фурье переводит свертку в мультипликативное произведение и обратно — мультипликативное произведение переводит в свертку. Иначе говоря, для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$

$$\overline{F}(\varphi\psi) = (\overline{F}\varphi) * (\overline{F}\psi), \quad F(\varphi * \psi) = (F\varphi)(F\psi).$$

Доказательство. В силу подготовительной формулы Ритца имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(\xi)g(\xi) \exp(2\pi i a \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+a)(Fg)(x) dx,$$

или

$$\overline{F}[(Ff)g] = f * F^{\sim}g = f * Fg$$

(в силу свойства преобразования Фурье 3°, 2).

Теперь положим $g = \psi$, $Ff = \varphi$, тогда $\overline{F}(\varphi\psi) = (\overline{F}\varphi) * (\overline{F}\psi)$.

Далее применим преобразование Фурье к обеим частям полученного равенства: $\varphi\psi = F[(\overline{F}\varphi) * (\overline{F}\psi)]$, и затем, полагая $\varphi_1 = \overline{F}\varphi$, $\psi_1 = \overline{F}\psi$, получим

$$(F\varphi_1)(F\psi_1) = F(\varphi_1 * \psi_1).$$

Теорема об изометрии (Планшереля-Парсеваля).

Заметим, что скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}^n)$ обозначается так: $(\cdot | \cdot)_{L^2}$.

Пусть $\mathcal{S}$ снабжено предгильбертовой структурой из $L^2(\mathbb{R}^n)$, тогда преобразование Фурье сохраняет величину скалярного произведения (более точно: является унитарным оператором из $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$)

Замечание. Линейный непрерывный оператор T , отображающий гильбертово пространство H в себя называется изометрическим, если он не меняет величины скалярного произведения: $(Tx | Ty)_{L^2} = (x | y)_{L^2}$, $x, y \in H$. Если, в частности,

$T(H) = H$, то изометрический оператор T называется унитарным оператором.

Доказательство теоремы. Пусть $f, g \in \mathcal{S}$, положим $\bar{g} = Fh$. Тогда в силу свойства транспозиции имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(\xi)h(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(Fh)(x)dx,$$

но $h = \overline{F}(\bar{g}) = \overline{Fg}$; тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(\overline{Fg})d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}dx,$$

или $(Ff|Fg)_{L^2} = (f|g)_{L^2}$.

Имеет место также теорема (Ритца-Планшереля) о продолжении преобразования Фурье на пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема (Ритца-Планшереля).

1°. Преобразование Фурье F (соответственно $\overline{F}$) продолжимо в унитарный оператор из $L^2(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Обозначая снова через F (соответственно $\overline{F}$) это продолжение, имеем

$$\overline{F}Ff = F\overline{F}f = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

2°. Если $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то Ff есть предел (по топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$) последовательности $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$, определяемой формулой

$$g_k(\xi) = \int_{B_k} f(x) \exp(-2\pi i x \xi) dx,$$

где $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность множеств относительно компактных, сходящаяся к $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Теорема вытекает из плотности $\mathcal{S}$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и полноты пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$.

II. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$.

Напомним, что F является линейным непрерывным отображением из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

1°. **Определение.** Преобразование F' , транспонированное к преобразованию Фурье F из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$, называется преобразованием Фурье из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Будем снова писать F (вместо F'), то есть полагаем

$$\langle FT, \varphi \rangle := \langle T, F\varphi \rangle, \quad T \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Аналогично полагаем

$$\langle \overline{F}T, \varphi \rangle := \langle T, \overline{F}\varphi \rangle, \quad T \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

2°. Обоснование определения.

Преобразование Фурье, определенное на $\mathcal{S}'$, является продолжением преобразования Фурье, определенного на $L^2(\mathbb{R}^n)$ и на $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p = 1, 2$, и $\varphi \in \mathcal{S}$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(F\varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)\varphi dx.$$

В самом деле, если $p = 1$, то это равенство выражает фундаментальное свойство транспозиции в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Если $p = 2$, то это равенство вытекает из теоремы Планшереля-Парсеваля, выражающей консерватизм скалярного произведения при преобразовании Фурье F :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{\psi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(\overline{F\psi}) dx,$$

ибо достаточно положить $\psi = \overline{F\varphi}$.

3°. **Теорема об автоморфизме.**

Преобразование Фурье F является автоморфизмом для $\mathcal{S}'$, а обратным автоморфизмом является $\overline{F}$:

$$\overline{F}FT = F\overline{F}T = T, \quad T \in \mathcal{S}'.$$

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы об изоморфизме, транспонированном к топологическому изоморфизму.

Имеют место следующие равенства:

$$F\check{T} = \overline{F}T, \quad \overline{F}\check{T} = FT.$$

Откуда вытекает, что формула обращения может быть представлена еще в следующем виде: $FF\check{T} = \check{T}$.

4°. Фундаментальное свойство преобразования Фурье в $\mathcal{S}'$.

Теорема о перестановке.

В пространстве $\mathcal{S}'$ преобразование Фурье переставляет пространство сверточных множителей θ'_c и пространство мультипликаторов θ_M , а также свертку и мультипликативное произведение. Иначе говоря, если $S \in \mathcal{S}'$, $T \in \theta'_c$, $f \in \theta_M$, тогда

$$FT \in \theta_M, \quad Ff \in \theta'_c,$$

$$F(T * S) = (FT)(FS), \quad F(fS) = (Ff) * (FS).$$

Предварительно докажем лемму, которая является частным случаем теоремы.

Лемма. Для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ и для любой $T \in \mathcal{S}'$ имеют место равенства

$$F(\varphi * T) = (F\varphi)(FT), \quad F(\varphi T) = (F\varphi) * (FT).$$

Доказательство леммы. Пусть $\psi \in \mathcal{S}$. По определению преобразования Фурье в $\mathcal{S}'$ имеем

$$\langle F(\varphi * T), \psi \rangle = \langle \varphi * T, F\psi \rangle.$$

По определению $\varphi * T$, правая часть равенства равна $\langle T, \check{\varphi} * F\psi \rangle$ или $\langle \overline{F}FT, \check{\varphi} * F\psi \rangle$. Используя определение $\overline{F}$ в $\mathcal{S}'$, получим

$$\langle F(\varphi * T), \psi \rangle = \langle FT, \overline{F}(\check{\varphi} * T\psi) \rangle.$$

Далее, согласно теореме о перестановке в $\mathcal{S}$, имеем

$$\overline{F}(\check{\varphi} * F\psi) = (\overline{F}\check{\varphi})(\overline{F}F\psi) = (F\varphi)\psi.$$

Окончательно имеем

$$\langle F(\varphi * T), \psi \rangle = \langle FT, (F\varphi)\psi \rangle = \langle (F\varphi)(FT), \psi \rangle,$$

где последнее равенство получено, исходя из определения умножения обобщенной функции FT на $F\varphi$.

Аналогично доказывается, что $F(\varphi T) = (F\varphi) * (FT)$.

Доказательство теоремы.

1. Пусть $T \in \theta'_c$, тогда линейное отображение $\varphi \leadsto \varphi * T$ непрерывно из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Положим $f = FT$ и покажем, что отображение $\psi \leadsto \psi f$ является непрерывным из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Действительно,

$$\psi f = F\overline{F}\psi FT = F(\overline{F}\psi * T)$$

(согласно лемме). Следовательно, отображение $\psi \leadsto \psi f$ является композицией следующих непрерывных отображений из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$

$$\psi \leadsto \overline{F}\psi, \quad \varphi \leadsto \varphi * T, \quad \chi \leadsto F\chi,$$

и поэтому оно является также непрерывным; иначе говоря, $f \in \theta_M$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} \langle F(T * S, \varphi) \rangle &= \langle T * S, F\varphi \rangle = \langle S, \check{T} * F\varphi \rangle = \\ &= \langle \overline{F}FS, \check{T} * F\varphi \rangle = \langle FS, \overline{F}(\check{T} * F\varphi) \rangle = \\ &= \langle FS, (\overline{F}\check{T})(\overline{F}F\varphi) \rangle = \langle FS, (FT)\varphi \rangle = \langle (FT)(FS), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

2. Пусть $f \in \theta_M$. Тогда линейное отображение $\varphi \leadsto \varphi F$ является непрерывным из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Положим $T = Ff \in \mathcal{S}'$. Согласно лемме имеем

$$\psi * T = F(\overline{F}\psi) * Ff = F[(\overline{F}\psi)f].$$

Рассмотрим отображение $\psi \leadsto \psi * T$, которое преобразует $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. В силу предыдущего соотношения это отображение является композицией следующих непрерывных отображений из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$

$$\psi \leadsto \overline{F}\psi, \quad \varphi \leadsto \varphi f, \quad \chi \leadsto F\chi.$$

Следовательно, оно преобразует непрерывно $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$, то есть $T \in \theta'_c$. Теперь положим $R = FS \in \mathcal{S}'$. Имеем, согласно пункту 1:

$$fS = (\overline{F}T)(\overline{A}K) = \overline{F}(T * R).$$

Откуда по формуле обращения имеем

$$F(fS) = T * R = (Ff) * (FS).$$

5. Преобразование Фурье в $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. Образ Фурье обобщенной функции с компактным носителем, то есть $\hat{T}$, является функцией из класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ медленного роста, а также все ее производные, то есть $\hat{T} \in \theta_M$, если $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Функция $\hat{T}(\xi)$ имеет вид

$$\hat{T}(\xi) = \langle T, \overline{\chi}_\xi \rangle, \quad \text{где } \overline{\chi}_\xi(x) = \exp(-2\pi i \xi x),$$

а производная

$$D^\beta \hat{T}(\xi) = \widehat{(-2\pi i x)^\beta T}.$$

Доказательство. 1. По определению $\hat{T}$ имеем для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}, \varphi \rangle &= \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle T(x), \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i \xi x) \varphi(\xi) d\xi \rangle = \\ &= \langle T(x), \langle e^{-2\pi i \xi x}, \varphi \rangle \rangle = \langle T(x) \otimes \varphi(x), e^{-2\pi i \xi x} \rangle = \\ &= \langle \varphi(\xi), \langle T(x), e^{-2\pi i \xi x} \rangle \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \langle T, \overline{\chi}_\xi \rangle = \langle \langle T, \overline{\chi}_\xi \rangle, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

то есть $\hat{T}(\xi) = \langle T, \bar{\chi}_\xi \rangle$.

Далее следует, что $\hat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$D^\beta \hat{T}(\xi) = \langle T, (-2\pi i x)^\beta \bar{\chi}_\xi \rangle = \langle (-2\pi i x)^\beta T, \bar{\chi}_\xi \rangle = \widehat{(-2\pi i x)^\beta T}.$$

2. Так как $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, то существуют такие константа C , компакт K и целое $m \in \mathbb{N}$, что для любой $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C P_{k, m}(\varphi) = C \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\beta \varphi(x)|,$$

где $P_{k, m}(\varphi)$ — одна из полунорм пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Если теперь взять в качестве $\varphi = e^{-2\pi i \xi x}$, то

$$|\hat{T}(\xi)| \leq C \sup_{|\beta| \leq m} |(2\pi i \xi)^\beta| \leq C_1 (1 + |\xi|^2)^{m/2}.$$

Это неравенство показывает, что $\hat{T}$ — медленного роста. Аналогично следует медленный рост и у $D^\beta \hat{T}$ в силу компактности носителя у $(-2\pi i x)^\beta T$.

6°. Следствие. Всякая обобщенная функция с компактным носителем является сверточным множителем для $\mathcal{S}'$

Действительно, согласно доказанной теореме, имеем: $F\mathcal{E}' \subset \theta_M$, а формула обращения дает: $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \bar{F}\theta_M$; но в силу теоремы о перестановке $\bar{F}\theta_M = \theta'_c$.

7°. Примеры. Образы Фурье для сдвига и производных функции Дирака.

$$1) \hat{\delta}_a(\xi) = \langle \delta_a, \bar{\chi}_\xi \rangle = \bar{\chi}_\xi(a), \text{ то есть } \hat{\delta}_a(\xi) = \bar{\chi}_\xi(a), \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

$$2) \widehat{D^\beta \delta}(\xi) = \langle D^\beta \delta, \bar{\chi}_\xi \rangle = \langle \delta, (-1)^{|\beta|} D^\beta \bar{\chi}_\xi \rangle = \langle \delta, (2\pi i \xi)^\beta \bar{\chi}_\xi \rangle =$$

$$(2\pi i \xi)^\beta \hat{\delta}(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta, \text{ то есть } \widehat{D^\beta \delta}(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta, \quad \beta \in \mathbb{N}^n.$$

3) В силу формулы обращения, взятой в виде $FFT = \check{T}$, имеем $F\bar{\chi}_a = FF\delta_a = \check{\delta}_a$, то есть $F\chi_{-a} = \delta_{-a}$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Также

$$F[(2\pi i \xi)^\beta] = FFD^\beta \delta = D^{\beta \sim} \delta = (-1)^\beta D^\beta \delta.$$

Откуда

$$\widehat{(-2\pi i \xi)^\beta} = D^\beta \delta, \quad \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Итак, имеем для всех $\beta \in \mathbb{N}^n$ и для всех $a \in \mathbb{R}^n$:

$$F\delta = 1, \quad F\delta_a = \bar{\chi}_a, \quad F(D^\beta \delta) = (2\pi i \xi)^\beta,$$

$$F1 = \delta, \quad F\chi_a = \delta_a, \quad F[(-2\pi i x)^\beta] = D^\beta \delta.$$

8°. **Следствие.** Пусть T — обобщенная функция медленного роста на $\mathbb{R}^n$, тогда

1) для любого $\beta \in \mathbb{N}^n$ имеем

$$\widehat{D^\beta T} = (2\pi i \xi)^\beta \hat{T}, \quad \widehat{(-2\pi i x)^\beta T} = D^\beta \hat{T},$$

2) для любого $a \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\widehat{\tau_a T} = \bar{\chi}_a \hat{T}, \quad \widehat{\tau_a \hat{T}} = \chi_a T.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \widehat{D^\beta T} &= \widehat{D^\beta \delta * T} = \widehat{D^\beta \delta} \hat{T} = (2\pi i \xi)^\beta \hat{T}, \\ \widehat{(-2\pi i x)^\beta T} &= \widehat{(-2\pi i x)^\beta * \hat{T}} = D^\beta \delta * \hat{T} = D^\beta \hat{T}, \\ \widehat{\tau_a T} &= \widehat{\tau_a \delta * T} = \widehat{\tau_a \delta} \hat{T} = \bar{\chi}_a \hat{T}, \\ \widehat{\chi_a T} &= \widehat{\hat{\chi}_a * \hat{T}} = \delta_a * \hat{T} = \tau_a \hat{T}. \end{aligned}$$

III. Образы Фурье некоторых пространств обобщенных функций.

1°. Образ Фурье пространства мультипликаторов θ_M .

Образ Фурье некоторого элемента из θ_M характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $T \in \mathcal{S}'$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) T является образом Фурье для некоторой функции $f \in \theta_M$;

2) T является элементом из θ'_c ;

3) для любого $m \in \mathbb{N}$ существует конечное семейство непрерывных функций:

$$\{f_\beta, \beta \in \mathbb{N}^n \mid |\beta| \leq k(m)\}$$

такое, что

$$T = \sum_{|\beta| \leq k(m)} D^\beta f_\beta, \quad (1 + |x|^2)^m f_\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad |\beta| \leq k(m).$$

Замечание. Заметим, что последнее условие может быть заменено условием

$$(1 + |x|^2)^m f_\beta \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

ибо достаточно заменить m на $m + n$ и заметить, что

$$\frac{1}{(1 + |x|^2)^n} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) уже доказана (II, 4°). Покажем эквивалентность утверждений 1) и 3).

а) Пусть $f \in \theta_M$. В силу теоремы (E.VI, 5°), $\forall m \in \mathbb{N}$ существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq 2m$ функция

$$\frac{D^\alpha f}{(1 + |x|^2)^l}$$

интегрируема на $\mathbb{R}^n$. Положим

$$g = \frac{f}{(1 + |x|^2)^l};$$

тогда g есть функция из класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq 2m$ функция $D^\alpha g$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$. Согласно свойству перестановочности дифференцируемости и убывания на бесконечности при преобразовании Фурье, функция $x^\alpha Fg$ непрерывна

и ограничена на $\mathbb{R}^n$. Но

$$Ff = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^l Fg,$$

то есть

$$T = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right) Fg.$$

Таким образом, утверждение 3) доказано.

б) Обратно, пусть T — обобщенная функция медленного роста, удовлетворяющая утверждению 3). Покажем, что T есть образ Фурье для некоторого элемента из θ_M , или, в силу формулы обращения в $\mathcal{S}'$, что $\hat{T} \in \theta_M$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. По гипотезе существует конечное семейство из непрерывных функций $\{f_\beta, \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq k(m)\}$ такое, что

$$T = \sum_{|\beta| \leq k(m)} D^\beta f_\beta$$

и

$$(1 + |x|^2)^m f_\beta \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad |\beta| \leq k.$$

Тогда, в силу фундаментального свойства 4°, преобразования Фурье в $L^1(\mathbb{R}^n)$, следует, что $\hat{f}_\beta \in \mathcal{E}^{2m}(\mathbb{R}^n)$ и $D^\alpha \hat{f}_\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, если $|\alpha| \leq 2m$.

Поэтому T есть функция из класса C^{2m} и для любого $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 2m$, имеем

$$D^\alpha \hat{T} = \sum_{|\beta| \leq k} D^\alpha [(2\pi i \xi)^\beta \hat{f}_\beta].$$

Откуда

$$|D^\alpha \hat{T}| \leq C(1 + |\xi|^2)^{k/2} \leq C(1 + |\xi|^2)^k,$$

2°. Образ Фурье пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. (Пэли-Винера)

Пусть $\mathbf{b}$ — положительное число, f — функция, определенная на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) f является образом Фурье для некоторой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, носитель которой содержится в шаре $\{|x| \leq \mathbf{b}\}$.

2) f продолжима в голоморфную на $\mathbb{C}^n$ функцию $\tilde{f}$, обладающую свойством: $\forall k \in \mathbb{N}$ существует число C_k такое, что

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leq C_k(1 + |\zeta|^2)^{-k} e^{2\pi b |\operatorname{Im} \zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Замечания.

1) Отметим, что C_k не зависит от ζ , но может зависеть от f .

2) Отметим также, что

$$|\operatorname{Im} \zeta|^2 = \sum_{j=1}^n (\operatorname{Im} \zeta_j)^2,$$

ибо $\operatorname{Im} \zeta = (\operatorname{Im} \zeta_1, \dots, \operatorname{Im} \zeta_n)$.

Доказательство. I. Пусть дано 1), то есть $f = F\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n) | \operatorname{supp} \varphi \subset B(0, b)$. Для любого $\zeta \in \mathbb{C}^n$ положим

$$\tilde{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \zeta} dx,$$

где $x\zeta = x_1\zeta_1 + \dots + x_n\zeta_n$. Очевидно, $\tilde{f}$ продолжает f на $\mathbb{C}^n$. Далее, теорема Лебега о дифференцировании под знаком интеграла показывает, что $\tilde{f}$ дифференцируема на $\mathbb{C}^n$ (то есть голоморфна на $\mathbb{C}^n$) и

$$D^\beta \tilde{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\beta \varphi(x) \exp(-2\pi i x \zeta) dx, \quad \beta \in \mathbb{N}^n.$$

С другой стороны, интегрирование по частям дает

$$(2\pi i \zeta)^\beta \tilde{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \zeta} D^\beta \varphi(x) dx, \quad \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Откуда

$$|(2\pi \zeta)^\beta \tilde{f}(\zeta)| \leq \sup_{|x| \leq b} e^{-2\pi i x \zeta} \int_{|x| \leq b} |D^\beta \varphi(x)| dx \leq e^{2\pi b |\operatorname{Im} \zeta|} \|D^\beta \varphi\|_1.$$

Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$(1 + |\zeta|^2)^k |\tilde{f}(\zeta)| \leq C_k e^{2\pi b |\operatorname{Im} \zeta|}.$$

II. Обратно, пусть f — функция, удовлетворяющая утверждению 2). Положим

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(2\pi i x \xi) f(\xi) d\xi.$$

Тогда $\varphi(x) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и f есть образ Фурье для φ .

Остается показать, что φ имеет носитель, содержащийся в шаре $B(0, b)$. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^n$, тогда, учитывая, что

$$|f(\zeta)| \leq C_1 (1 + |\zeta|^2)^{-1} e^{2\pi b |\eta|},$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, можно сдвинуть контур интегрирования в комплексную плоскость $\mathbb{C}$, то есть

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x_1 (\xi_1 + i\eta_1)} f(\xi_1 + i\eta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\xi_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x_1 \xi_1} f(\xi_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\xi_1.$$

А тогда для любого $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (\xi + i\eta)x} f(\xi + i\eta) d\xi.$$

Откуда

$$|\varphi(x)| \leq C_n e^{2\pi(b|\eta| - x\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^n},$$

причем справа стоит сходящийся интеграл. Возьмем теперь $\eta = \alpha x$, где $\alpha > 0$, тогда

$$|\varphi(x)| \leq C'_n e^{2\pi\alpha|x|(b-|x|)}.$$

Отсюда вытекает, что $\varphi(x) = 0$, если $|x| > b$, заставляя $\alpha \rightarrow +\infty$.

3°. Образ Фурье пространства $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3 (Пэли-Винера-Шварца).

Пусть b — положительное число, а f — функция, определенная на $\mathbb{R}^n$, тогда следующие утверждения эквивалентны

1) f является образом Фурье некоторой обобщенной функции $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, носитель которой содержится в компактном шаре $B(0, b)$;

2) f продолжимо в голоморфную функцию $\tilde{f}$ на $\mathbb{C}^n$, обладающую свойством: существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что для любого $\zeta \in \mathbb{C}^n$

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|^2)^{m/2} e^{2\pi b |\operatorname{Im} \zeta|}.$$

Доказательство. I. Пусть $f = FT$, где T — обобщенная функция с носителем содержащимся в компакте $K = B(0, b)$. Известно, что f определяется формулой $f(\xi) = \langle T, \bar{\chi}_\xi \rangle$, где $\bar{\chi}_\xi(x) = \exp(-2\pi i x \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Положим $\tilde{f}(\zeta) = \langle T, \bar{\chi}_\zeta \rangle$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Тогда функция $\tilde{f}(\zeta)$ является голоморфной на $\mathbb{C}^n$. С другой стороны, так как T — обобщенная функция с компактным носителем, содержащимся в K , то существуют константа $C > 0$, целое число $m \in \mathbb{N}$, такие, что для любого $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C P_{k, m}(\varphi) = C \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{|x| \leq b} |D^\beta \varphi(x)|.$$

Возьмем $\varphi = \exp(-2\pi i \zeta x)$, тогда

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leq C \sup_{|\beta| \leq m} |(2\pi \zeta)^\beta| e^{2\pi b |\operatorname{Im} \zeta|},$$

то есть $\tilde{f}$ удовлетворяет утверждению 2).

II. Обратно, пусть f удовлетворяет 2). Тогда f является образом Фурье некоторой обобщенной функции медленного роста (так как f — обобщенная функция медленного роста).

Пусть θ_j , $j \in \mathbb{N}$, — регуляризирующая последовательность, где $\operatorname{supp} \theta_j \subset B(0, \varepsilon_j)$ и $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

Положим $T_j = \theta_j * T$, тогда $\hat{T}_j = \hat{\theta}_j \hat{T} = \hat{\theta}_j f$. В силу теоремы 2 каждая $\hat{\theta}_j$ продолжима на $\mathbb{C}^n$ в функцию, которую снова будем

обозначать $\hat{\theta}_j$, в голоморфную и обладающую свойством: для любого $h \in \mathbb{N}$ существует $C_{h, j}$ такая, что

$$|\hat{\theta}_j(\zeta)| \leq C_{h, j} \exp(2\pi\varepsilon_j |\operatorname{Im} \zeta|)(1 + |\zeta|^2)^{-n/2}.$$

Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $C_{k, j}$ такое, что

$$|\hat{T}_j(\zeta)| \leq C_{k, j} \exp[2\pi(\varepsilon_j + b)|\operatorname{Im} \zeta|](1 + |\zeta|^2)^{-k/2}$$

(достаточно взять $C_{k, j} = C \cdot C_{(k+m), j}$)

В силу теоремы 2 (вторая часть), T_j имеет носитель, содержащийся в компактном шаре $B(0, \varepsilon_j + b)$. Когда $j \rightarrow \infty$, последовательность $T_j \rightarrow T$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, где $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{C}B(0, b)$; для j достаточно большого имеем $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{C}B(0, b + \varepsilon_j)$ и, следовательно, $\langle T_j, \varphi \rangle = 0$. Откуда $\langle T, \varphi \rangle = 0$, то есть $\operatorname{supp} T \subset B(0, b)$.

Следствие. Образ Фурье обобщенной функции, отличной от нуля, с компактным носителем не является функцией с компактным носителем, то есть $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap F\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $f = \hat{T}$. Тогда f продолжима в $\tilde{f}$ — функцию, голоморфную на $\mathbb{C}^n$, то есть аналитическую на $\mathbb{C}^n$. Откуда вытекает, что f есть аналитическая функция на $\mathbb{R}^n$. Но всякая аналитическая на $\mathbb{R}^n$ функция, равная нулю на непустом открытом множестве из $\mathbb{R}^n$, тождественно равна нулю на $\mathbb{R}^n$. Следовательно, f не может быть с компактным носителем.

Замечание. Голоморфная функция $\tilde{f}$ называется образом Фурье-Лапласа для обобщенной функции T с компактным носителем.

Символическое исчисление и задача Коши.

Символическое исчисление является техникой, позволяющей решать уравнения интегральные, в частных производных,

в конечных разностях, интегродифференциальные с постоянными коэффициентами посредством операций чисто алгебраических. Эта техника использует свойства сверток обобщенных функций.

I. Сверточные алгебры и модули.

1°. Сверточная алгебра. Напомним, что векторное подпространство $\mathcal{A}$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, снабженное индуцированной структурой, называется сверточной алгеброй, если свертка является коммутативным, внутренним законом композиции в $\mathcal{A}$. Снабженное тремя обычными законами композиции (умножение на скаляр, сложение, свертка), $\mathcal{A}$ является алгеброй в абстрактном смысле ассоциативной и коммутативной. Если, кроме того, мера Дирака δ принадлежит $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ называется сверточной алгеброй с единицей.

Примеры.

1) Векторное пространство $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ является сверточной алгеброй с единицей.

2) Векторное пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$, носители которых содержатся в интервале $\mathbb{R}_+ = [0, \infty]$, является сверточной алгеброй с единицей. Эта алгебра используется в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

3) Векторное пространство обобщенных функций с гиперболическими носителями является сверточной алгеброй с единицей. Эта алгебра применяется в символическом исчислении со многими переменными.

4) Векторное пространство θ'_c сверточных сомножителей для $\mathcal{S}'$ является сверточной алгеброй с единицей.

5) Пространства $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}$ являются сверточными алгебрами без единицы.

Алгебра $\mathcal{A}^{m \times m}$.

Пусть m — целое положительное число. Множество матриц порядка $(m \times m)$, элементы которых есть элементы из $\mathcal{A}$, будем

записывать $\mathcal{A}^{m \times m}$.

$$[A] \in \mathcal{A}^{m \times m} \Leftrightarrow [A] = (A_{ij})_{i, j=\overline{1, m}}, \quad A_{ij} \in \mathcal{A}.$$

Множество $\mathcal{A}^{m \times m}$ снабжают тремя законами композиции:

1) Сложение: $[C] = [A] + [B]$ означает $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $i, j = 1, \dots, m$.

2) Скалярное умножение: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $[C] = \lambda[A]$ означает

$$C_{ij} = \lambda A_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

3) Свертка: $[C] = [A] * [B]$ означает, что

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} * B_{kj}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда множество $\mathcal{A}^{m \times m}$ является сверточной алгеброй ассоциативной, не коммутативной относительно свертки, с единицей. Ее единицей является матрица $[\delta] = (\delta_{ij})$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \delta, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

2°. Сверточный модуль.

Напомним, что векторное подпространство $\mathfrak{M}$ обобщенных функций, содержащее сверточную алгебру с единицей $\mathcal{A}$ называется сверточным модулем на алгебре $\mathcal{A}$, если $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall M \in \mathfrak{M}$ определена свертка $A * M = M * A \in \mathfrak{M}$, обладающая свойствами:

$$A * (B * M) = (A * B) * M,$$

$$(A + B) * M = A * M + B * M, \quad A, B \in \mathcal{A}, \quad M \in \mathfrak{M},$$

$$A * (M + N) = A * M + A * N, \quad A \in \mathcal{A}, \quad M, N \in \mathfrak{M}.$$

Часто алгебру $\mathcal{A}$ называют алгеброй операторов на $\mathfrak{M}$.

Примеры.

1) Всякая сверточная алгебра с единицей есть модуль на себе.

2) $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является сверточным модулем на алгебре $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

3) Пространство обобщенных функций с параболическим носителем является сверточным модулем на алгебре обобщенных функций с гиперболическими носителями.

4) $\mathcal{S}'$ есть сверточный модуль на алгебре θ'_c .

Сверточные модули $\mathfrak{M}^m$ и $\mathfrak{M}^{m \times m}$.

Через $\mathfrak{M}^m$ обозначим множество векторов, m компонент которых являются элементами из $\mathfrak{M}$. Обычным образом это множество превращают в векторное пространство. С другой стороны, для любого $A \in \mathcal{A}$ и $\vec{M} = (M_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathfrak{M}^m$ определяет $\vec{N} = A * \vec{M}$ посредством равенств $N_i = A * M_i$, $i = 1, \dots, m$; тогда $\mathfrak{M}^m$ становится модулем на $\mathcal{A}$.

Аналогично для $[A] \in \mathcal{A}^{m \times m}$ и $\vec{M} \in \mathfrak{M}^m$ определяют $\vec{N} = [A] * \vec{M}$ посредством равенств

$$N_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} * M_j.$$

Тогда $\mathfrak{M}^m$ становится модулем на алгебре $\mathcal{A}^{m \times m}$. И наконец, можно рассматривать векторное пространство $\mathcal{M}^{m \times m}$ матриц порядка $(m \times m)$ с элементами из $\mathfrak{M}$ и затем из него можно сконструировать модуль на алгебре $\mathcal{A}$ или на алгебре $\mathcal{A}^{m \times m}$.

II. Уравнения сверток.

Пусть $\mathcal{A}$ — сверточная алгебра с единицей и $\mathfrak{M}$ — сверточный модуль на $\mathcal{A}$. Всякое уравнение в $\mathfrak{M}^m$, где $\mathfrak{M}^m$ — сверточный модуль на $\mathcal{A}^{m \times m}$, вида

$$[A] * \vec{X} = \vec{W},$$

где $[A] \in \mathcal{A}^{m \times m}$ и $\vec{W} \in \mathfrak{M}^m$ заданы, а $\vec{X}$ — неизвестный вектор из $\mathfrak{M}^m$, называется системой из m уравнений сверток с m

неизвестными обобщенными функциями. Матрица $[A]$ называется матрицей коэффициентов системы. Если $\vec{W} = \vec{0}$, то система называется соответствующей однородной системой. Если $m = 1$, то система сводится к одному уравнению свертки.

1°. Общие свойства решений.

1) Если $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ — два вектора-решения неоднородной системы, то $\vec{X}_1 - \vec{X}_2$ есть вектор-решение соответствующей однородной системы.

Действительно, из соотношений $[A] * \vec{X}_1 = \vec{W}$ и $[A] * \vec{X}_2 = \vec{W}$ выводим

$$[A] * (\vec{X}_1 - \vec{X}_2) = [A] * \vec{X}_1 - [A] * \vec{X}_2 = \vec{W} - \vec{W} = \vec{0}.$$

2) Пусть $\vec{X}$ — вектор-решение однородной системы. Если $[B]$ есть матрица из $\mathcal{A}^{m \times m}$, коммутирующая с матрицей $[A]$, то вектор $[B] * \vec{X}$ также является решением однородной системы; в частности, для любого $B \in \mathcal{A}$ вектор $B * \vec{X}$ есть также решение однородной системы.

Доказать самим.

3) Пусть $\mathfrak{M}$ снабжено хаусдорфовой топологией (отделимой), согласующейся со структурой векторного пространства, и пусть отображение $X \mapsto A * X$ преобразует $\mathfrak{M}$ непрерывно в $\mathfrak{M}$ ($A \in \mathcal{A}$). Тогда множество векторов-решений системы уравнений свертки является замкнутым в $\mathfrak{M}^m$.

Доказательство. Множество решений $\vec{X}$ системы $[A] * \vec{X} = \vec{W}$ является, очевидно, ядром отображения $\vec{X} \mapsto [A] * \vec{X} - \vec{W}$, но по гипотезе это отображение преобразует непрерывно $\mathfrak{M}^m$ в $\mathfrak{M}^m$. Следовательно, его ядро, которое является прообразом начала, является замкнутым в $\mathfrak{M}^m$.

Замечание. Напомним: для того, чтобы отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз всякого замкнутого множества из Y был замкнут в X .

2°. Элементарные решения системы уравнений свертки.

Определение. Матрица $[E] \in \mathfrak{M}^{m \times m}$, удовлетворяющая системе

$$[A] * [E] = [E] * [A] = [\delta],$$

называется элементарным решением системы

$$[A] * \vec{X} = \vec{W}.$$

а) Неединственность элементарного решения.

Теорема. Пусть $[E]$ — элементарное решение системы и пусть $\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \dots, \vec{Z}_m$ — m векторов-решений соответствующей однородной системы. Положим

$$[Z] = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \dots, \vec{Z}_m).$$

Тогда $[E] + [Z]$ есть элементарное решение той же системы.

Доказать самим.

б) Приложение. (правая часть системы принадлежит алгебре операторов).

Теорема. Пусть $\vec{W} \in \mathcal{A}^m$; тогда всякое решение $\vec{X}$ системы

$$[A] * \vec{X} = \vec{W}$$

имеет вид $\vec{X} = [E] * \vec{W} + \vec{Z}$, где $[E]$ — элементарное решение системы, а $\vec{Z}$ — какое-либо вектор-решение соответствующей однородной системы.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если бы $\vec{W} \in \mathfrak{M}^m$, то не всегда существует $[E] * \vec{W}$. Поэтому $\vec{W} \in \mathcal{A}^m$, а тогда

$$[A] * ([E] * \vec{W} + \vec{Z}) = ([A] * [E]) * \vec{W} + [A] * \vec{Z} = [\delta] * \vec{W} + \vec{0} = \vec{W}.$$

Обратно, если провести замену искомого вектора $\vec{X} = [E] * \vec{W} + \vec{Z}$, то $\vec{Z}$ есть решение соответствующей однородной системы.

с) Случай, когда элементарное решение принадлежит алгебре операторов. Теорема существования и единственности решения.

Теорема. Пусть система $[A] * \vec{X} = \vec{W}$ имеет элементарное решение $[E]$, принадлежащее $\mathcal{A}^{m \times m}$; тогда

1) для любого $\vec{W} \in \mathfrak{M}^m$ система обладает единственным решением, которое имеет вид

$$\vec{X} = [E] * \vec{W};$$

2) Не существует других элементарных решений (даже в $\mathfrak{M}^{m \times m}$)

Замечание. Утверждение 1) показывает в частности, что соответствующая однородная система

$$[A] * \vec{Z} = \vec{0}$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство.

1) Так как $[E] \in \mathcal{A}^{m \times m}$, то $[E] * \vec{W}$ имеет смысл. Тогда $[A] * ([E] * \vec{W}) = ([A] * [E]) * \vec{W}$, то есть $[E] * \vec{W}$ есть решение системы.

Покажем, что не существует других решений. В самом деле, пусть $\vec{X}$ — какое-либо решение системы $[A] * \vec{X} = \vec{W}$. Умножим (сверточно) обе части этого равенства (слева) на $[E]$. Получим $[E] * ([A] * \vec{X}) = [E] * \vec{W}$; но левая часть равна

$$([E] * [A]) * \vec{X} = [\delta] * \vec{X} = \vec{X},$$

то есть $\vec{X} = [E] * \vec{W}$.

2) Применяя утверждение 1) к $\vec{W} = (\delta, 0, \dots, 0)$, затем к $\vec{W} = (0, \delta, 0, \dots, 0), \dots, \vec{W} = (0, 0, \dots, \delta)$, получаем утверждение 2).

Следствие. Пусть $\mathfrak{M} = \mathcal{A}$, и рассмотрим систему $[A] * \vec{X} = \vec{W}$ в $\mathcal{A}$. Тогда

1) Существует, самое большее, одно элементарное решение $[E]$, которое является матрицей обратной (по отношению к свертке) для матрицы $[A]$.

2) Система обладает единственным решением для любого $\vec{W} \in \mathcal{A}^m$ если, и только если, существует элементарное решение $[E]$ и тогда вектор-решение определяется формулой

$$\vec{X} = [E] * \vec{W}.$$

Что касается применения этого следствия на практике, известно, что:

а) условием обратимости матрицы, элементами которой являются элементы из коммутативной алгебры $\mathcal{A}$, служит условие:

Матрица $[A] \in \mathcal{A}^{m \times m}$ обратима (в качестве элемента из $\mathcal{A}^{m \times m}$), если и только если, ее сверточный определитель Δ обратим (в качестве элемента из алгебры $\mathcal{A}$).

б) Выражение обратной матрицы.

Пусть $[A]$ — обратимая матрица и пусть Δ^{-1} — обратный элемент (по свертке) к Δ . Обозначим через $\overset{\circ}{A}_{ij}$ алгебраическое дополнение (по свертке) для A_{ij} . Тогда компонентами матрицы $[E] = [A]^{-1}$ являются $E_{ij} = \Delta^{-1} * A_{ji}$.

III. Случай, когда алгебра операторов есть $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Пусть алгебра операторов $\mathcal{A} = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда пространство $\mathfrak{M}$ неизвестных может быть взято равным $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

1°. Примеры.

а) Система уравнений в свертках в частных производных с постоянными коэффициентами.

Если $A = P\delta$, где P — дифференциальный полином с постоянными коэффициентами вида

$$P = \sum_{|\beta| \leq k} a_\beta D^\beta = \sum_{j=0}^k \sum_{|\beta|=j} a_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} \dots D_n^{\beta_n},$$

где

$$a_\beta \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j};$$

тогда уравнение $A * X = W$ есть уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами.

Если $[A] = (A_{ij})$, $1 \leq i, j \leq m$, $A_{ij} = P_{ij}\delta$, где P_{ij} — дифференциальные полиномы с постоянными коэффициентами, и если $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$, $\vec{W} = (W_1, W_2, \dots, W_m)$ — векторы размерности m , то система $[A] * \vec{X} = \vec{W}$ является системой уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

Элементарное решение такой системы называют также элементарным решением матрицы дифференцирования (P_{ij}) , $i, j = 1, \dots, m$.

б) Уравнения в конечных разностях с постоянными коэффициентами.

Если A есть конечная линейная комбинация вида

$$A = \sum_{h \in \mathbb{R}^n} a_h \tau_h \delta,$$

то уравнение $A * X = W$ является уравнением в конечных разностях (с постоянными коэффициентами).

Можно также рассматривать системы уравнений в конечных разностях, а также системы, содержащие как уравнения в частных производных, так и уравнения в конечных разностях.

2°. Общие свойства.

Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ снабжено или слабой дуальной топологией, или сильной дуальной топологией.

Теорема 1. Множество векторов-решений системы $[A] * \vec{X} = \vec{W}$ с коэффициентами из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ является замкнутым в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Топология $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ согласуется (по ее определению) со структурой векторного пространства. Для любого $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ отображение $T \mapsto A * T$ преобразует непрерывно $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Поэтому достаточно теперь применить общее свойство 3° системы уравнений свертков.

Теорема 2. Пусть дана однородная система $[A] * \vec{Z} = \vec{0}$ с коэффициентами в $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, тогда

1) Свертка вектора-решения с какой-либо обобщенной функцией с компактным носителем, то есть с элементом из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, снова является решением

2) Производные (всех порядков), сдвиги (на любой вектор $a \in \mathbb{R}^n$) и регуляризации (посредством любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) вектора-решения, являются снова векторами-решениями.

3) Пространство вектор-решений равно замыканию в $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^m$ пространства векторов-решений из класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из общего свойства 2° для систем уравнений сверток. Утверждение 2) вытекает из доказанного уже утверждения 1), учитывая, что $D^\alpha T = D^\alpha \delta * T$, $\tau_a T = \delta_a * T$, $T_\varphi = \varphi * T$ — регуляризация посредством φ , где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Утверждение 3) вытекает из утверждения 2), из теоремы 1 и из того факта, что всякая обобщенная функция есть предел в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ своих регуляризаций.

3°. Случай линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, $n = 1$).

Теорема 3. Решения однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами являются функциями из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (то есть они являются классическими решениями).

Замечание. В частности, если производная обобщенной функции T на $\mathbb{R}$ равна нулю, то эта обобщенная функция есть (представима через) константа.

Доказательство. Известно, что пространство векторов-решений из класса $C^\infty(\mathbb{R})$ является пространством конечной размерности (это классический результат). Следовательно, это пространство равно своему замыканию в $[\mathcal{D}'(\mathbb{R})]^m$.

Замечание. Эта теорема остается справедливой, если

1) коэффициенты системы есть функции из класса C^∞ ;

2) коэффициент при старшей производной равен единице.

Следствие. Неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой есть непрерывный вектор $\vec{W}$, не имеет других решений, кроме классических.

Доказательство. Достаточно применить доказанную теорему и общее свойство 1° для системы уравнений сверток.

IV. Уравнения сверток в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Напомним, что через $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ обозначаем сверточную алгебру обобщенных функций на $\mathbb{R}$, носители которых содержатся в интервале $\mathbb{R}_+ = [0, \infty]$.

Оператор дифференцирования будем по прежнему обозначать через D .

1°. Существование элементарного решения в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ у оператора

$$P = D^m + C_1 D^{m-1} + \dots + C_{m-1} D + C_m$$

с постоянными коэффициентами.

Теорема. Оператор P обладает единственным элементарным решением E в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Оно равно произведению функции Хевисайда Y на решение $\mathbf{e}$ однородного уравнения $P\mathbf{e} = 0$, удовлетворяющего начальным условиям

$$\mathbf{e}(0) = \mathbf{e}'(0) = \dots = \mathbf{e}^{(m-2)}(0) = 0, \quad \mathbf{e}^{(m-1)}(0) = 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — решение указанной задачи Коши, которое, как известно, единственно. Рассмотрим $E = Y\mathbf{e}$, где Y — функция Хевисайда.

Имеем

$$D^j E = Y D^j \mathbf{e} + \delta(D^{j-1} \mathbf{e})(0) + \dots + D^{j-1} \delta \mathbf{e}(0), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Учитывая начальные условия, получаем

$$D^j E = Y D^j \mathbf{e},$$

если $0 \leq j \leq m - 1$ и

$$D^m E = Y D^m \mathbf{e} + \delta.$$

Поэтому

$$PE = Y P \mathbf{e} + \delta.$$

2°. Решение неоднородного уравненияю

а) Свойства.

1) Уравнение $PT = W$, где $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, имеет единственное решение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, определяемое формулой $T = E * W$.

В частности, однородное уравнение $PT = 0$ имеет только тривиальное решение $T = 0$.

Это свойство является частным случаем теоремы, когда элементарное решение принадлежит алгебре операторов.

2) Если $W \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, то решение T принадлежит классу $C^{m-1}(\mathbb{R})$.

Замечания.

1) Напомним, что пространство $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ содержит все пространства функций, а само содержится во всех пространствах обобщенных функций.

2) Известно, что если на $\mathbb{R}^n$ существуют свертки $f * g$ и $f * h$, а g и h равны почти всюду на $K \setminus \text{supp } f$, где K — какой-либо компакт из $\mathbb{R}^n$, тогда $(f * g)$ и $(f * h)$ равны почти всюду на K .

3) Известна теорема: если $f \in L^p_{\text{compact}}(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, где p и q — гармонически сопряженные, то есть $1/p + 1/q = 1$, то их свертка $f * g$ есть непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство свойства 2).

Пусть $W \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Тогда на любом компакте $K \subset \mathbb{R}$ функции $E * W$ и $E * W \chi_{K \setminus \text{supp } E}$ совпадают почти всюду; здесь $\chi_{K \setminus \text{supp } E}$ — характеристическая функция множества $K \setminus \text{supp } E$.

Но функция $W \cdot \chi_{K \setminus \text{supp } E} \in L^1_{\text{compact}}(\mathbb{R})$, а $E \in L^\infty_{\text{loc}}$, поэтому, в силу замечания 3), свертка $E * W \chi_{K \setminus \text{supp } E}$ является

непрерывной функцией на $\mathbb{R}$. Откуда следует непрерывность $E * W$.

Аналогично для $j \leq (m - 1)$, имеем $D^j E \in L_{\text{loc}}^\infty$, поэтому $D^j T = D^j E * W$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$.

3) Если W из класса $C^k(\mathbb{R})$, то решение принадлежит классу $C^{m+k}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Если W — непрерывная на $\mathbb{R}$, то $D^m T$ — непрерывна на $\mathbb{R}$, ибо

$$D^m T = W - (C_1 D^{m-1} T + \dots + C_{m-1} D T + C_m T).$$

Если W из класса $C^k(\mathbb{R})$, то $D^k W \in C(\mathbb{R})$. А так как $P(D^K T) = D^k W$, то $D^k T \in C^m(\mathbb{R})$, то есть $T \in C^{m+k}(\mathbb{R})$.

б) Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Ищется функция u , определенная на $\mathbb{R}_+$, из класса $C^{m-1}(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая уравнению

$$Pu = D^m u + C_1 D^{m-1} u + \dots + C_{m-1} D u + C_m u = f \quad (1)$$

в смысле обобщенных функций из $]0, \infty[$, и начальным условиям

$$(D^j u)(0) = a_j, \quad 0 \leq j \leq (m - 1), \quad (2)$$

где $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$; a_j ($j = 0, 1, \dots, m - 1$) — заданные числа. Предположим, что u — решение задачи. Пусть U — функция вида $U = Y u$, где Y — функция Хевисайда. Для $j = 1, \dots, m$ имеем

$$\begin{aligned} D^j U &= Y D^j u + (D^{j-1} u)(0) \delta + \dots + u(0) D^{j-1} \delta = \\ &= Y D^j u + a_{j-1} \delta + \dots + a_0 D^{j-1} \delta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$PU = Y f + \sum_{j=0}^{m-1} b_j D^j \delta, \quad (3)$$

где

$$b_j = a_{m-1-j} + C_1 a_{m-2-j} + \cdots + C_{m-1-j} a_0. \quad (4)$$

Итак, U удовлетворяет дифференциальному уравнению (3) в смысле обобщенных функций на $\mathbb{R}$. Согласно свойству 1) для уравнения $PT = W$, функция U представима в следующем виде

$$U = E * \left(Yf + \sum_{j=0}^{m-1} b_j D^j \delta \right) = E * Yf + \sum_{j=0}^{m-1} b_j D^j E,$$

откуда вытекает единственность решения U , и следовательно, единственность для u .

В силу свойства 2) для уравнения $PT = W$, $E * Yf$ есть функция из класса C^{m-1} на $\mathbb{R}$, равная нулю на $] -\infty, 0[$ и она представима на $\mathbb{R}_+$ в виде

$$\begin{aligned} (E * Yf)(t)(Ye * Yf)(t) = \\ = \int_0^\infty f(\tau) Ye(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) e(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Замечаем также, что сужение $D^j E$ на $[0, \infty[$ (для $j = m-1$) является функцией из класса $C^\infty([0, \infty[)$ и $(D^j E)(t) = D^j e(t)$, $t \geq 0$. Следовательно, сужение U на $[0, \infty[$ есть функция из класса $C^{m-1}([0, \infty[)$ и дается формулой

$$u(t) = \int_0^t e(t - \tau) f(\tau) d\tau + \sum_{j=0}^{m-1} b_j D^j e(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Покажем, что $u(t)$ действительно является решением рассматриваемой задачи.

Беря сужение уравнения (3) на $]0, \infty[$, получаем

$$Pu = f.$$

Далее, полагая для $0 \leq j \leq m-1$

$$b_j^{\#} = (D^{m-1-j}u)(0) + C_1(D^{m-2-j}u)(0) + \cdots + C_{m-1-j}u(0),$$

будем необходимо иметь

$$Yf + \sum_{j=0}^{m-1} b_j D^j \delta = Yf + \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{\#} D^j \delta.$$

Откуда $b_j = b_j^{\#}$ для $j = 0, 1, \dots, m-1$, то есть $a_j = (D^j u)(0)$.

Таким образом, доказана

Теорема. Если $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, то решение задачи Коши (1), (2) существует и притом единственно из класса $C^{(m-1)}(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющее уравнению (1) в смысле обобщенных функций на $]0, \infty[$ и начальным условиям (2). Это решение дается формулой

$$u(t) = \int_0^t e(t-\tau)f(\tau)d\tau + \sum_{j=0}^{m-1} b_j D^j e(t), \quad t \geq 0,$$

где $b_j = a_{m-1-j} + C_1 a_{m-2-j} + \cdots + C_{m-1-j} a_0$, а $e(t)$ является решением однородного уравнения $Pe = 0$, удовлетворяющим условиям $e(0) = e'(0) = \cdots = e^{(m-2)}(0) = 0$. $e^{(m-1)} = 1$.

3°. Примеры. В качестве упражнения показать, что элементарными решениями операторов 1) $D + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$; 2) $(D + \lambda)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$; 3) $D^2 + \omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}$, являются соответственно функции

$$1) Y(t)e^{-\lambda t}; \quad 2) Y(t)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda t}; \quad 3) Y(t)\frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

4) Решить интегральное уравнение $A * T = W$, где $A(t) = Y(t) \cos t$, $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

5) Показать, что в сверточной алгебре $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ матрица

$$[A] = \begin{pmatrix} \delta'' & \delta' \\ \delta' & \delta'' \end{pmatrix}$$

обратима. Найти обратную матрицу. Решить систему уравнений свертки

$$\begin{cases} \delta'' * X_1 + \delta' * X_2 = \delta, \\ \delta' * X_1 + \delta'' * X_2 = 0. \end{cases}$$

V. Символическое исчисление в задаче Коши для волнового оператора.

Предварительные сведения и вычисления.

Прежде всего напомним естественное обобщение для меры Дирака δ . Пусть S — кусочно гладкая замкнутая поверхность в $\mathbb{R}^3$ и $\mu(x)$ — кусочно непрерывная на S функция. Введем обобщенную функцию $\mu\delta_S$, действующую по формуле

$$\langle \mu\delta_S, \varphi \rangle := \int_S \mu(x)\varphi(x)ds_x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \quad (1)$$

Очевидно, $\mu\delta_S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Эта обобщенная функция напоминает меру Дирака δ в каждой точке поверхности S : $\mu\delta_S = 0$, если $x \notin S$, то есть $\text{supp}(\mu\delta_S) \subset S$.

Обобщенная функция $\mu\delta_S$ называется простым слоем на поверхности S с плотностью μ .

Пусть теперь $\delta_{S(0; R)}(x)$ — простой слой а $\mathbb{R}^3$, где $S(0; R)$ — сфера с центром в начале координат радиуса R . Так как $\delta_{S(0; R)}$ — обобщенная функция с компактным носителем, то преобразование Фурье для нее имеет вид

$$\begin{aligned} F\delta_{S(0; R)} &= \langle \delta_{S(0; R)}, \bar{\chi}_\xi \rangle = \\ &= \int_{S(0; R)} e^{-2\pi i \xi x} ds_x = R^2 \int_{S(0; R)} e^{-2\pi i R \xi s} ds. \end{aligned}$$

Для упрощения счета ось z направим вдоль вектора ξ и перейдем к сферическим координатам, тогда

$$F\delta_{S(0; R)} = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-2\pi i R |\xi| \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= 4\pi R^2 \frac{\sin 2\pi R|\xi|}{2\pi R|\xi|}. \quad (2)$$

В дальнейшем точку пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать (t, x) , где $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Напомним, что множество из $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащееся в образе при сдвиге полу-пространства $\{((t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \geq 0)\}$, называется параболическим множеством, а всякое множество из $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащееся в образе при сдвиге конуса $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \geq |x|\}$, где $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, называется гиперболическим множеством. Известно, что множество $\mathcal{A}$ обобщенных функций на $\mathbb{R}^{n+1}$ с гиперболическими носителями является сверточной алгеброй, а множество $\mathfrak{M}$ обобщенных функций с параболическим носителем является сверточным модулем на алгебре $\mathcal{A}$.

Мы собираемся показать, что оператор

$$\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

называемый даламберианом, обладает элементарным решением, принадлежащим алгебре $\mathcal{A}$, а это позволяет решить уравнение $\square_n U = T$, $T \in \mathfrak{M}$ в случае целого $n \leq 3$.

2°. Построение элементарного решения волнового оператора.

а) Применяя к равенству

$$\square_n E_n \equiv \frac{\partial^2 E_n}{\partial t^2} - \Delta E_n = \delta(t, x) = \delta(t) \otimes \delta(x)$$

преобразование Фурье F по x , то есть F_x , для обобщенной функции $F_x E_n = \hat{E}_n(t, \xi)$ получим уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{E}_n(t, x) + (2\pi|\xi|)^2 \hat{E}_n(t, x) = \delta(t) \otimes 1(\xi), \quad (4)$$

где $\delta(t) \otimes 1(\xi)$ — обобщенная функция, не зависящая от ξ . Далее, пользуясь элементарным решением оператора $D^2 + \omega^2$, где $\omega = 2\pi|\xi|$, (IV. 3°) имеем

$$\hat{E}_n(t, \xi) = Y(t) \frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|}, \quad (5)$$

где $Y(t)$ — функция Хевисайда.

Пусть теперь $n = 3$, тогда, в силу формулы (2), полагая $R = t$, получаем

$$E_3(t, x) = \frac{Y(t)}{4\pi t} \delta_{S(0, t)}, \quad (6)$$

причем обобщенная функция $E_3(t, x)$ действует по правилу

$$\begin{aligned} \langle E_3, \varphi \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \langle \delta_{S(0, t)}, \varphi \rangle \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_{S(0, t)} \varphi(t, x) dS_x; \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4). \end{aligned} \quad (7)$$

Или

$$\langle E_3, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|x|, x)}{|x|} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4). \quad (8)$$

Замечания.

1) Отметим, что в силу теоремы существования и единственности в случае, когда элементарное решение принадлежит алгебре операторов (II, 2°, с)), не существует других элементарных решений с гиперболическим или параболическим носителем.

Конус $\{(t, x) \in \mathbb{R}^4 \mid t \geq |x|\}$ называется конусом волн будущего в $\mathbb{R}^4$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Оператор $\square_3$ обладает единственным элементарным решением E_3 с носителем, содержащимся в конусе волн будущего в $\mathbb{R}^4$. Это элементарное решение дается формулой (8).

Можно было бы прямым счетом найти элементарное решение для оператора $\square_2$, но это привело бы к длинным и утомительным вычислениям, поэтому для отыскания элементарного решения E_2 для оператора $\square_2$ применим метод спуска.

b) Метод спуска.

Пусть E_n — элементарное решение оператора $\square_n$ с носителем, содержащимся в конусе волн будущего в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть L — линейный функционал, определенный на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$\langle L, \varphi \rangle := \langle E_n, \varphi \otimes 1(x_n) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

где

$$\varphi \otimes 1(x_n) := \varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1});$$

тогда L есть элементарное решение оператора $\square_{n-1}$ с носителем, содержащимся в конусе волн будущего в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Так как $\text{supp } E_n \cap \text{supp } (\varphi \otimes 1(x_n))$ есть компакт, то выражение $\langle E_n, \varphi \otimes 1(x_n) \rangle$ имеет смысл. Пусть K — некоторый компакт из $\mathbb{R}^n$ и пусть η — элемент из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, равный 1 в окрестности $\text{supp } E_n \cap (K \times \mathbb{R})$. Тогда соотношение

$$\langle L, \varphi \rangle = \langle E_n, \eta(\varphi \otimes 1(x_n)) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$$

говорит о непрерывности функционала L на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а потому L есть обобщенная функция на $\mathbb{R}^n$. Ее носитель содержится в конусе волн будущего в $\mathbb{R}^n$, так как если бы $\text{supp } \varphi$ не пересекал этот конус, тогда $\text{supp } (\varphi \otimes 1(x_n))$ не пересекал бы конус волн будущего в $\mathbb{R}^{n+1}$. И наконец, для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \square_{n-1} L, \varphi \rangle &= \langle L, \square_{n-1} \varphi \rangle = \\ &= \langle E_n, (\square_{n-1} \varphi) \otimes 1(x_n) \rangle = \\ &= \langle E_n, \square_n (\varphi \otimes 1(x_n)) \rangle = \langle \square_n E_n, \varphi \otimes 1(x_n) \rangle = \\ &= (\varphi \otimes 1(x_n))(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

то есть

$$\square_{n-1}L = \delta.$$

Применим теперь метод спуска к E_3 для отыскания элементарного решения E_2 оператора $\square_2$.

Известно, что

$$\langle E_3, \Phi \rangle = \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi t} \int_{|x|=t} \Phi(t, x) dS_x, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4).$$

Заменяем Φ на $\varphi \otimes 1(x_3)$ и учтем, что

$$\begin{aligned} \int_{|x|=t, x_3 \geq t} \varphi(t, x_1, x_2) dS_x &= \int_{|x|=t, x_3 \leq t} \varphi(t, x_1, x_2) dS_x = \\ &= \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq t^2} \varphi(t, x_1, x_2) \frac{t dx_1 dx_2}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle E_3, \varphi \otimes 1(x_3) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq t^2} \frac{\varphi(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2}{\sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t \geq |x|} \frac{\varphi(t, x) dt dx}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Итак,

$$\langle E_2, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{t \geq |x|} \frac{\varphi(t, x) dt dx}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

или

$$E_2(t, x) = \frac{Y(t - |x|)}{2\pi \sqrt{t^2 - |x|^2}}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Применяя еще раз метод спуска к E_2 , получим E_1 — элементарное решение оператора

$$\square_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} :$$

$$E_1(t, x) = \frac{1}{2}Y(t - |x|), \quad x = x_1 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, доказана теорема 2 о существовании элементарного решения с гиперболическим носителем у оператора

$$\square_n \quad (n = 1, 2, 3).$$

Оператор $\square_n$ ($n = 1, 2, 3$) имеет единственное элементарное решение E_n с носителем, содержащимся в конусе волн будущего в $\mathbb{R}^{n+1}$. Это элементарное решение дается формулой

$$\begin{aligned} \langle E_1, \varphi \rangle &= \frac{1}{2} \int_{t \geq |x|} \varphi(t, x) dt dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \\ \langle E_2, \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{t \geq |x|} \frac{\varphi(t, x) dt dx}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \\ \langle E_3, \varphi \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|x|, x)}{|x|} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4). \end{aligned}$$

с) Следствие. $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ с параболическим носителем существует единственная обобщенная функция $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ с параболическим носителем, такая, что на $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\square_n U = T, \quad (n = 1, 2, 3).$$

Достаточно применить теорему существования и единственности (II. 2°.с)), причем обобщенная функция U определяется формулой

$$U = E_n * T.$$

3°. Задача Коши для волнового оператора.

а) Постановка задачи.

Пусть U_0, U_1 — две заданные обобщенные функции на $\mathbb{R}^n$, а h — заданная обобщенная функция на $\mathbb{R}^{n+1}$ с носителем в полупространстве

$$\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ищется обобщенная функция $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ с носителем в указанном полупространстве, удовлетворяющая уравнению

$$\square_n U = h + U_0 \otimes \delta'(t) + U_1 \otimes \delta(t), \quad n = 1, 2, 3, \quad (1)$$

в смысле обобщенных функций на $\mathbb{R}^{n+1}$.

Замечание. Так как носитель обобщенной функции $U_0 \otimes \delta'(t) + U_1 \otimes \delta(t)$ принадлежит $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, то U удовлетворяет уравнению $\square_n U = h$ в $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

б) Теорема существования и единственности решения.

Существует и притом единственное решение задачи Коши, которое определяется формулой

$$U = E_n * (h + U_0 \otimes \delta'(t) + U_1 \otimes \delta(t)). \quad (2)$$

Эта теорема непосредственно вытекает из следствия (2°. с)).

с) Корректность постановки задачи Коши.

Покажем теперь устойчивость решения $U(t, x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, то есть непрерывную зависимость решения (2) от U_0 и U_1 в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Пусть $U_{0k} \rightarrow U_0$, $U_{1k} \rightarrow U_1$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, тогда, в силу непрерывности тензорного произведения, имеем

$$U_{0k} \otimes \delta'(t) + U_{1k} \otimes \delta(t) \rightarrow U_0 \otimes \delta'(t) + U_1 \otimes \delta(t)$$

в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

И, наконец, пользуясь непрерывностью свертки, имеем⁴

$$U_k(t, x) = E_n * [h + U_{0k} \otimes \delta'(t) + U_{1k} \otimes \delta(t)] \rightarrow$$

$$E_n * [h + U_n * [h + U_0 \otimes \delta' + U_1 \otimes \delta]] = U,$$

при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Таким образом, задача Коши для волнового оператора поставлена корректно, причем $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ с носителем в указанном

полупространстве является классом корректности задачи Коши.

d) Упрощение вида решения.

Учитывая, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ получим из формулы (2) более простую формулу, полезную для практики.

Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$\begin{aligned} < E_n * (\delta \otimes U_1), \varphi \otimes \psi > = < E_n, (\delta \otimes \check{U}_1) * (\varphi \otimes \psi) > = \\ &= < E_n, \varphi \otimes (\check{U}_1 * \psi) > = < E_n, \check{U}_1 * \varphi \otimes \psi > = < E_n * U_1, \varphi \otimes \psi >, \end{aligned}$$

то есть

$$E_n * \delta \otimes U_1 = E_n * U_1. \quad (3)$$

Далее, пользуясь правилами дифференцирования тензорного произведения и свертки, а также формулой (3), имеем

$$E_n * \delta' \otimes U_0 = E_n * \frac{\partial}{\partial t} (\delta \otimes U_0) = \frac{\partial}{\partial t} (E_n * \delta \otimes U_0) = \frac{\partial}{\partial t} (E_n * U_0). \quad (4)$$

Замечание. Полезно отметить здесь формулу, часто используемую на практике, а именно, если свертка $E_n * g$ существует, где $E_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, а $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то обобщенная функция $(E_n * g)$ действует по формуле

$$< E_n * g, \varphi(t) \otimes \psi(x) > = < E_n, \varphi(t)(\check{g} * \psi) >. \quad (5)$$

Учитывая теперь формулы (3) и (4), решение задачи Коши, выражаемое формулой (2), можно представить в виде

$$U = E_n * h + E_n * U_1 + \frac{\partial}{\partial t} (E_n * U_0). \quad (6)$$

e) Регулярность и интегральное представление решения.

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения. Пусть $U_0(x) \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, а $U_1(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)$, где $k \in \mathbb{N}$. Получим интегральное представление решения. Исходя из формулы (6),

видно, что достаточно найти интегральное представление для обобщенной функции $E_n * U_1$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, а $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, согласно формуле (5) при $n = 3$, имеем

$$\langle E_3 * U_1, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle E_3, \varphi \otimes (\check{U}_1 * \psi) \rangle,$$

но

$$\check{U}_1 * \psi = \int_{\mathbb{R}^3} U_1(x - y) \psi(x) dx.$$

Учитывая, что E_3 действует по формуле

$$\langle E_3, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_{S(0, t)} \Phi(t, y) dS_y,$$

где $\Phi(t, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Имеем при $\Phi = \varphi \otimes \psi$:

$$\begin{aligned} \langle E_3 * U_1, \varphi \otimes \psi \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(t) dt}{t} \int_{S(0, t)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} U_1(x - y) \psi(x) dx \right\} dS_y = \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{4\pi t} \int_{S(0, t)} U_1(x - y) dS_y \right\} \psi(x) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Или $\langle E_3 * U_1, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle Y(t) M U_1, \varphi \otimes \psi \rangle$, то есть

$$E_3 * U_1 = Y M U_1, \quad (7)$$

где Y — функция Хевисайда, а $M U_1(t, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} M U_1(t, x) &= \frac{1}{4\pi t} \int_{S(0, t)} U_1(x - y) dS_y = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} U_1(x + ty) dS_y = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} U_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Проводя аналогичные вычисления для $n = 1, 2$, получим: если $n = 2$, то

$$E_2 * U_1 = Y M U_1, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} MU_1(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq t} \frac{U_1(x-y)dy}{\sqrt{t^2-|y|^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq 1} \frac{U_1(x+ty)dy}{\sqrt{1-|y|^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{|x-\xi|=t} \frac{U_1(\xi)d\xi}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

И если $n = 1$, то

$$E_1 * U_1 = YMU_1, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} MU_1(t, x) &= \frac{1}{2} \int_{-t}^t U_1(x-t)dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U_1(x+ty)dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} U_1(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, решение (классической) задачи Коши для однородного волнового уравнения при $n = 1, 2, 3$ можно записать в виде единой формулы

$$U(t, x) = MU_1(t, x) + \frac{\partial}{\partial t} MU_0(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} &Mf(t, x) = \quad (14) \\ &\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{-t}^t f(x-y)dy = \frac{t}{2} \int_{-1}^1 f(x+ty)dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f(\xi)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq t} \frac{f(x-y)dy}{\sqrt{t^2-|y|^2}} = \frac{t}{2\pi} \int_{|y| \leq 1} \frac{f(x+ty)dy}{\sqrt{1-|y|^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{|x-\xi| \leq t} \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ &\frac{1}{4\pi t} \int_{|y|=t} f(x-y)dS_y = \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} f(x+ty)dS_y = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} f(\xi)dS_\xi, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Формула (13) показывает, что если $U_0(x) \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, а $U_1 \in C^k(\mathbb{R}^n)$, то $U(t, x)$ есть функция из класса $C^k([0, \infty[\times \mathbb{R}^n)$. В частности, если U_1 — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$, а U_0 — дважды непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$, то

1) $U(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty[\times \mathbb{R}^n$;

2) $U(t, x)$ удовлетворяет уравнению $\square_n U = 0$ в смысле обобщенных функций;

3) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место равенства

$$U(+0, x) = U_0(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(+0, x) = U_1(x).$$

Формула (13) в случае $n = 3$ называется формулой Кирхгофа, в случае $n = 2$ — формулой Пуассона и в случае $n = 1$ — формулой Даламбера, которая очень проста:

$$U((t, x)) = \frac{U_0(x+t) + U_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} U_1(\xi) d\xi.$$

И в этом случае ($n = 1$), если $U_0(x) \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, а $U_1(x) \in C^k(\mathbb{R})$, то $U(t, x)$ принадлежит классу $C^{k+1}([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

Заметим также, что в случае $n = 3$ величина $U(t, x)$ в точке x в момент t зависит только от величин U_0 и U_1 на сфере с центром в точке x радиуса t . В этом случае говорят, что нет диффузии (рассеивания) волн, то есть имеет место принцип Гюйгенса.

Напротив, в случаях $n = 1, 2$ величина $U(t, x)$ в точке x в момент t зависит от величин U_0 и U_1 на каждом шаре с центром x радиуса t . В этом случае говорят, что имеется диффузия волн, то есть принцип Гюйгенса не выполняется.

В качестве упражнения на технику сверток покажите, что классическое решение задачи Коши для неоднородного уравнения $\square_n U = h$ при нулевых начальных условиях имеет вид

$$U(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{|x-\xi| \leq t} \frac{h(t-|x-\xi|, \xi)}{|x-\xi|} d\xi, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{|x-\xi| \leq (t-\tau)} \frac{h(\tau, \xi) d\xi d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}}, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} h(\tau, \xi) d\xi d\tau, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases} \quad (15)$$

где $h(t, x) \in C^2([0, \infty[\times \mathbb{R}^n)$.

Список литературы

- [1] Л. Хёрмандер. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1–4.* М., Мир, 1986.
- [2] В. С. Владимиров. *Уравнения математической физики.* М., Наука, 2003.
- [3] В. Хадсон, Дж. Пим. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* М., Мир, 1983.
- [4] Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. *Функциональный анализ.* М. Наука. 2007.
- [5] А. Я. Хелемский. *Лекции и упражнения по функциональному анализу.* МЦ- НМО, Москва, 2004.
- [6] Ю. В. Егоров. *Линейные дифференциальные уравнения главного типа.* М., Наука, 1984.