Введение. Понятие о математических моделях

> В 40-х годах известный математик Джон фон Нейман как-то, выступая перед широкой аудиторией, сказал, что математика — это только очень малая и очень простая часть жизни. Когда в ответ на это аудитория зашумела, он добавил: "Если люди не верят, что математика проста, то только потому, что они не осознают, как сложна жизнь".

Слово “модель” употребляется в обычном языке в различных значениях. Например, модель самолета (уменьшенная копия), девушка–модель, которая демонстрирует наряды и т.п. Однако в этих понятиях есть и нечто общее. Каждый раз модель каким–то образом изображает, замещает объект, который она моделирует. Модель самолета по форме похожа на самолет, а девушка–модель замещает собою всех тех женщин, которые могли бы носить показанный ею наряд. Именно этот общий смысл стал основой для термина “модель”, широко используемого современной наукой.

Первоначально под моделью понимали в основном материальную упрощенную копию объекта (манекен; макет плотины, судна или самолета; чучело и т. п.). Однако постепенно это понятие расширялось. В XX веке понятие модели становится все более общим, охватывающим и реальные, и идеальные[1] модели.

В деятельности ученого или исследователя понятие модели занимает главенствующее положение. Всякая теория или гипотеза является, по сути своей, моделью действительности. Она некоторым образом отображает объект в систему понятий, закономерностей, свойств и т.п. Существуют и подчиненные, более мелкие модели, отображающие отдельные объекты под определенным углом зрения.

Один студент, выслушав все это, решительно не согласился с лектором. Зачем строить модели, если лучше изучать объект как он есть? А действительно, зачем? Прежде чем читать дальше, придумайте несколько аргументов «за» и «против» моделей.

Придумали? А теперь добавьте к ним такие:

Модель может:

- ⇒ требовать для своего построения больших усилий и средств. Это как в торговле: чем больше посредников, тем выше цена. А модель и есть посредник между объектом изучения и исследователем;

- ⇒ быть недостаточно похожей на объект (неадекватной): модель должна отражать существенные свойства объекта, а откуда вы знаете, какие свойства существенны до того, как изучили его?

---

[1] В данном случае слово «идеальный» не следует понимать как «очень хороший», «соответствующий идеалу». Оно является синонимом понятия «умозрительный» и антонимом понятия «реальный».

⇒ быть достаточно сложной для изучения: чем точнее модель, тем она сложней.

Зато объект может:

⇒ быть слишком велик: придется учесть все атомы кусочка железа, все капли дождя, все бактерии в человеческом организме, всех граждан некоторой страны;

⇒ быть слишком сложен: в физике считается сложной даже задача о взаимодействии трех тел, что же говорить о сложности человека, человеческого общества!

⇒ быть недоступен: звезды других галактик, подводные жители из глубин океана, процессы в живом человеческом мозге, мысли и побуждения людей;

⇒ изменяться от воздействия исследователя: при исследовании на прочность предмет ломается; для изучения под микроскопом образец нарезается на тонкие слои; изучение общественного мнения влияет на само это мнение;

⇒ вообще не поддаваться исследованию: откуда вы знаете, что изучаете сам объект, а не ту иллюзию, которая создалась в вашем сознании? Причем под действием как чисто внешних ощущений (Солнце ходит вокруг Земли), так и впитанного с детства общего мнения (кто в Средние века сомневался в существовании ведьм?). Уверены ли вы, что ваши сегодняшние убеждения намного достовернее?

Как мы видим, исследование объекта «как он есть» попросту невозможно. Так что с моделями придется смириться, не забывая, конечно, об их изъянах.

Модели можно встретить не только в научной, теоретической, но и в практической деятельности, например, в процессе принятия решений. Когда вы поступали в университет, выбирали факультет, вы пользовались многими моделями: моделью своей профессии, моделью студенческой жизни, наконец, моделью себя самого как той цели, которую вы хотите достигнуть. Сами эти объекты были вам недоступны, однако некоторое – четкое или смутное, верное или ложное, глубокое или поверхностное – представление обо всем этом вы имели.

А теперь ближе к теме, т.е. к математике. Математические модели – важный класс моделей, который широко используется в естественных науках. В последнее время они все чаще применяются и в гуманитарных исследованиях. Какие же из моделей можно отнести к этой группе? Во-первых, эти модели и д е а л ь н ы е , т. е. построены из понятий, утверждений, теорем и т.п. Но таких моделей много, они есть во всех разделах науки. Чтобы понять особенности, отличающие именно математические модели, рассмотрим два примера.

⇒ Самой известной математической моделью является, конечно, ч и с л о . С его помощью описывают различные величины, такие, как размер, вес, возраст, стоимость, доход, количество элементов и т.п. Эти объекты относятся к самым разным областям науки и не только науки. Приходится только удивляться, насколько широко и эффективно применяются числа. Но, конечно, чем сложнее объект, тем меньше пользы от его численного описания. Например, много ли вы узнаете о человеке, зная его вес, рост, возраст? И даже результаты обследований и тестов (будь то IQ или анализ крови) не дадут нам представления о характере человека, его поведении и способностях. Это показывает, что численная модель слишком примитивна, чтобы давать достаточно полную и подробную информацию.

⇒ З а д а ч а 1. В марсианском языке цифра 1 обозначает глагол «съесть» во всех формах, 2 – увидеть, 3 – иметь. Фраза C: (A 1 B) означает "C специально сделал так, что A съел B". Существительные обозначаются первыми буквами.

а) Переведите на марсианский язык такой текст:

Был у вороны сыр. Заметила сыр лиса. Лиса постаралась попасться на глаза Вороне. Ворона похвалилась сыром перед Лисой. Лиса отобрала сыр.

б) А этот текст надо перевести на русский:

В : (В 3 С). В : (Л 2 С). В : (Л 1 С). Л 1 В.

Подобные проблемы изучаются разделом науки, называемым математической лингвистикой. Ясно, что эта задача имеет непосредственно отношение к моделям: "марсианский язык" – это модель обычного языка. Однако возникает еще два вопроса: почему лингвистика математическая, и почему это все же не математика?

Математическая – потому, что модель гораздо проще своего объекта. Вы видите, как много различных глаголов удалось зашифровать самыми скудными средствами! Не математика же потому, что эту модель (в отличие от числа) нельзя перенести на другие, неязыковые объекты.

Итак, можно сказать, что математические модели – наиболее простые и универсальные из идеальных моделей. Эти два свойства являются их основными достоинствами. Простота математической модели позволяет изучить ее очень глубоко и всесторонне. Например, насколько полно можно изучить квадратное уравнение по сравнению с любым, даже одноклеточным, организмом!

> ✐ *Понятие простоты может быть трудным для понимания. Причина тут – в многозначности естественного языка. В одном смысле антонимом к слову «простой» будет «сложный, трудный», а в другом – «сложный, составной». Мы будем иметь в виду второе понимание простоты: простота структуры, состава, а не простота понимания или создания модели.*
> *Эти две "простоты" не всегда совпадают. Например, по структуре шкаф гораздо проще человека, но сделать его – намного труднее.* ☺

Другое хорошее качество, у н и в е р с а л ь н о с т ь , приводит к тому, что модель, построенная для одного объекта, подходит и для описания многих других, что дает большую экономию времени. Более того, зная математические методы, придуманные для других задач, можно предположить, как лучше исследовать ваш объект: математическая модель может оказывать влияние на изучение нового объекта, направляя его и подсказывая методы исследования.

Однако, как часто бывает, достоинства математических моделей тесно связаны с их недостатками. Оборотной стороной простоты является упрощенность, что особенно опасно в гуманитарных науках, предметом которых являются сложные системы. Даже самый надежный и доказательный вывод, сделанный на такой модели, не даст нам никакого представления о свойствах оригинала. Это иногда приводит к обманчивому впечатлению научности исследования, которому поддаются "потребители" теории, а зачастую и сам автор.

> За сто семьдесят шесть лет Нижняя Миссисипи стала короче на двести сорок две мили. В среднем это составляет чуть больше, чем миля с третью за год. Отсюда следует, […] что в нижнесилурийском периоде (он закончился как раз миллион лет назад, в ноябре юбилей) длина Нижней Миссисипи превышала один миллион триста тысяч миль. Точно так же отсюда следует, что через семьсот сорок два года длина Нижней Миссисипи будет равна одной миле с четвертью. Каир и Новый Орлеан сольются и будут процветать, управляемые одним мэром и одной компанией муниципальных советников. В науке действительно есть что–то захватывающе, такие далеко идущие и всеобъемлющие гипотезы способна она строить на основании скудных фактических данных.
>
> (Марк Твен, «Жизнь на Миссисипи»)

Больше пользы может принести математика там, где она выступает с тем или иным запретом. Например, в математической теории, называемой «теория катастроф», исследуется поведение сложных систем. В частности, изучается вопрос, можем ли мы предсказать поведение такой системы на достаточно большой срок. Оказывается, как бы точно мы не описали исходное состояние системы (а погрешности тут неизбежны) и какие бы точные методы прогнозирования не применяли, составить прогноз на достаточно большой срок просто невозможно! Конечно, знание этого факта, строго доказанного математиками, необходимо всем ученым, от метеорологов до социологов.

С другой стороны, надо хорошо знать, где можно использовать ту или иную модель. Хотя применимость математических моделей достаточно широка, но все же не абсолютна.

⇒ Задача 2 (старинная). Два одноногих человека купили пару ботинок за 25 руб. Когда хозяин узнал, что покупатели – инвалиды, он велел приказчику вернуть им 5 руб., но тот отдал каждому по рублю, а 3 руб. оставил себе. Проведем подсчет: сначала каждый инвалид заплатил по 12,5, а в итоге – по 11,5. Вместе они истратили 23 руб., плюс 3 руб., оставшиеся у приказчика, всего – 26 руб. Откуда взялся лишний рубль?

В этой задаче действия с числами математически правильные, но бессмысленные, так как не соответствуют связям реальных величин.

В модели должны сохраняться основные черты исходного объекта. При выполнении этого условия модель называют а д е к в а т н о й оригиналу. Адекватность – очень сложное, глубокое и трудно проверяемое понятие. Оно относится к области философии и конкретных наук, математика же, отвлекаясь от исходных объектов, занимается только свойствами самих моделей.

Итак, математические модели просты и универсальны. Изучив достаточно большое их число, можно заметить и другие их общие свойства, такие, как ф о р м а л и з о в а н н о с т ь и а н а л и т и ч н о с т ь.

Формализованность математической модели состоит в том, что она исследует только форму, отвлекаясь от содержания. Это свойство тесно связано с универсальностью. Действительно, если одна и та же конструкция должна описывать совершенно разные объекты, то она может учитывать только их самые общие черты, так сказать "грубые контуры".

Как показывает опыт, именно это свойство математических моделей делает их сложными для восприятия. Дело в том, что более естественной и ранней формой осознания человеком действительности является содержательный подход. Формализация же, как одна из форм абстрагирования, требует достаточного мыслительного опыта, к тому же специально натренированного.

Проиллюстрируем этот факт задачами.

⇒ З а д а ч а 3. Найдите концовку анекдота:

> Учитель: Ивица, ты написала очень хорошую работу, но она точно такая же, как у Марка. Что я должен думать?
>
> Ивица: …

Участники логико-математической олимпиады для школьников 6-8 классов предложили вариант "Это он у меня списал", а один даже написал так: "Ивица покраснела, и ничего не сказала". Непонятно, правда, что тут анекдотичного, так что этот ответ – неправильный.

⇒ З а д а ч а 4. Говорят, известный физик Дирак был очень педантичным человеком. Однажды после выступления он обратился к аудитории: "Вопросы есть?" "Я не понял, как Вы получили это выражение", – сказал один из слушателей. Как отреагировал на это высказывание докладчик?

На основе этих примеров можно сделать два наблюдения: 1) формальный ответ кажется нам неожиданным и даже смешным; 2) для того, чтобы его найти, нужно отвлечься от “интеллектуального фона”, задаваемого знакомой ситуацией.

Когда мы рассуждаем формально, приходится четко различать ту информацию, что содержится в тексте (речи) и ту, которая возникает при чтении в нашей голове. Оказывается, мы практически всегда домысливаем ситуацию, используя свой опыт и привычный смысл слов. Вообще говоря, это полезное свойство мышления. Оно позволяет более коротко и без лишних слов описывать ситуацию. Это неизбежно даже в математике: если явно записывать все условия, то даже простая задача станет громоздкой и неудобочитаемой.

> Вы, наверное, замечали, что люди никогда не отвечают именно на тот вопрос, который им задают? Они отвечают на тот вопрос, который услышали или ожидают услышать. Предположим, одна леди гостит в усадьбе у другой и спрашивает: "Кто–нибудь сейчас живет здесь?" На это хозяйка никогда не ответит: "Да, конечно, – дворецкий, три лакея, горничная", – ну и все прочие, хотя горничная может хлопотать тут же в комнате, а дворецкий стоять за ее креслом. Она ответит: "Никто", имея в виду тех, кто мог бы вас интересовать. Зато если врач во время эпидемии спросит ее: "Кто живет в вашем доме?" – она не забудет ни дворецкого, ни горничную, ни всех остальных. Так уж люди разговаривают: вам никогда не ответят на вопрос по существу, даже если ответят сущую правду.
>
> (Г.К.Честертон, "Невидимка")

Надо постоянно помнить о такой особенности восприятия и при необходимости уметь избавиться от нее, отделить ”букву” от “духа”. Как показывают приведенные выше задачи, это не так уж просто. Вот еще пара примеров.

⇒ Задача 5. В рассказе Тэффи "Трубка" главный герой–корректор переделывал слова автора, если ему казалось, что тот пишет неправильно. Например, ему не понравилась фраза “*– Как вы смеете! – вспыхнула Елена*”. Какое исправление внес не в меру старательный корректор?

⇒ В медицине есть специальный термин "ятрогения". Он означает заболевание, возникшее как реакция на неправильно истолкованные больным слова или поведение врача, прочитанную медицинскую литературу и т.п.

Последнее свойство моделей, которое мы упоминали – аналитичность. Основной смысл понятия "анализ" – расчленение (реальное или мысленное) целого на отдельные элементы. Антонимом к нему является понятие "синтез". Об аналитичности математических моделей мы поговорим подробнее в следующем разделе.

> ✍ *Художественный образ и дифференциальное уравнение, рисунок и компьютерная программа, слово и жест … Модель – сложное, противоречивое явление, проясняющее и затемняющее, упрощающее и усложняющее, но совершенно необходимое для общения человека с окружающим его миром.* ☺

Упражнения

1. Подумайте, является ли моделью язык (речь) и что он моделирует? О чем (в терминах моделей) говорят слова Ф.И.Тютчева «Мысль изреченная есть ложь»?

2. Какой смысл в терминах моделей имеет строчка из песни: «Полюбила парня, да не угадала: \\ Вовсе не такого я во сне видала…»?

Ответ: Неадекватность модели (сна) реальному объекту.

3. С венерианского языка фраза «Он 1 2 порядок» переводится как «Он навел идеальный порядок», а «Он 1 2 раскол» – как «Он вызвал глубокий раскол». Еще два перевода: «3 дождь» – «шел дождь»; «3 солнце» – «светило Солнце». Переведите с венерианского: 3 2 свет; 3 2 ветер; он 1 дом.

4. Подумайте, для моделирования каких объектов может применяться такое математическое понятие, как число?

5. То же для геометрических фигур.

6. Закончите анекдоты:

1) – Сделайте мне пробор посередине, чтобы волосы поделились точно пополам.

– Не могу, у вас …

2) Сын приносит из школы новую книжку.

– Это премия, – сказал он. – Нас спросили, сколько ног у страуса и я ответил "три".

– Но ведь у страуса только две ноги!

– Да, но остальные ученики …

3) – Если Вы дадите мне 50 долларов, вы спасете жизнь достойному человеку!

– Что–то Вы не похожи на достойного человека!

– Я имею в виду …

4) – В какую цену у вас телевизоры?

– Вот этот – 6000 рублей, а тот – 7900.

– И какая между ними разница?

– …

5) – Знаете, если бы не усы, вы были бы очень похожи на мою жену!

– Но у меня же нет усов!

– Зато …

6) Сваха нахваливает жениха: и порядочный, и добрый, и с достатком. Одно только плохо – заикается.

– Что, все время?

– Да нет! Только когда …

7) Директор принимает на работу секретаршу.

– Как быстро Вы печатаете на машинке?

– Триста ударов в минуту.

– Я не могу Вас взять. Я не умею так быстро …

8) – Почему Вы все время опаздываете?

– А Вы видели у лифта табличку "Только на 10 человек"? Каждое утро я жду …

9) – Дорогой, закрой форточку, на улице холодно!

– А что, если я закрою форточку, на улице …

10) – Хотел бы я иметь столько денег, чтобы хватило купить слона!

– Зачем тебе слон?

– Слон мне не нужен, мне нужно …

11) – Ремонт Вашей обуви стоит 50 рублей, но так как один ботинок мы потеряли, вы заплатите …

12) – Я дала бы 5 рублей, чтобы только узнать, что ты думаешь.

– Я думаю, когда же ты меня поцелуешь.

Девушка целует его.

– Ну? – говорит молодой человек, – А где же …

7. ☺ Сын отца профессора поссорился с отцом сына профессора, но самого профессора при этом не было. Кто же поссорился?

8. ☺ Почему дождь не может идти 2 дня подряд?

9. ☺ На полке стоит собрание сочинений. Жучок прогрыз его от первой страницы первого тома до последней страницы второго. Какое расстояние он при этом прошел, если в первом томе 320 страниц, во втором – 296, толщина листа – 0,05 мм, обложки – 1 мм?

Ответ: 2 мм.

10. Согласны ли вы с определением Энгельса, что «математика – это наука, которая изучает наиболее общие количественные отношения и пространственные формы реального мира»?

11. Попробуйте сами обнаружить модели в различных областях науки и вашей повседневной жизни.

12. Составьте краткий план Введения или его изложение. Постарайтесь добавить свои примеры и идеи, которые возникли у вас при чтении.

Договоримся о терминах

> Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы, а потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.
>
> Козьма Прутков

Как наиболее просто представить себе изучаемый объект? Можно выделить два подхода, противоположных друг другу. Один предполагает целостное рассмотрение, замену объекта знаком или образом. Другой – расчленение единого на мелкие части, изучение их самих и существующих между ними взаимосвязей. Последний способ называется анализом, а последующая «сборка» модели – синтезом.

> ✍ *Конечно, разбитая и склеенная ваза – не то, что целая, но на каком-то этапе такой метод и полезен, и удобен, и необходим. Дело опытного исследователя – выбрать метод, не забывая о его возможностях и «невозможностях». А лучше всего комбинировать аналитику (и, в частности, математику) с целостными, изначально синтетическими подходами.* ☺

При построении математической модели объект рассматривается именно аналитически, т.е. расчленяется на части (или элементы), которые обладают некоторыми свойствами, между которыми могут существовать различные взаимосвязи и т. п. Все это вместе объединяется понятием «структура». Структура присуща и исходному объекту, и его модели. В таком понимании моделирование состоит в том, что отдельным элементам исходного объекта ставятся в соответствие элементы модели. При этом их связи и свойства могут частично сохраняться, а частично нет.

Итак, мы выделили два ключевых понятия: элемент (какого-то множества) и соответствие. Их нельзя определить, но можно пояснить или описать. Этим мы и займемся.

Множества и операции над ними

Множество (совокупность, семейство, набор, ансамбль и т.п.) состоит из своих элементов. Обычно множества обозначаются прописными буквами, например, A, B, X, Y, …, а их элементы – строчными a, b, x, y, …

> ✐ *Главное свойство множества: про каждый элемент можно точно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Принадлежность элемента множеству обозначается как* $a \in A$ *или* $A \ni a$. ☺

Больше ничего от множества (в математическом смысле) не требуется. Его элементы не должны быть одной природы, не обязаны быть связаны общим свойством и т.д. Нужна только четкость: принадлежит или нет?

Как вам кажется, это понятное свойство? Для проверки ответьте на такие вопросы.

Задача 6. Можно ли считать множеством

а) всех студентов вашей группы;

б) совокупность всех больших городов;

в) группу студентов первого курса, возраст которых не превосходит 10 лет?

Обычные ответы таковы: да, да, нет. Так вот, два последних – неверны! Действительно, проверим основное свойство для пункта б). Про какой город вы можете точно сказать, что он большой? В котором 100.000 населения? 500.000? Миллион? Пусть даже вы выбрали в качестве границы какое–то число, например, 2.000.000. Все города, где больше двух миллионов населения – большие, меньше – небольшие. И что произойдет, когда из двухмиллионного города уедет один житель? Он перестанет быть большим? Это уж слишком экзотичная точка зрения. Итак, точно сказать, является ли город большим, очень трудно и даже невозможно.

Это наблюдение касается большинства понятий естественного языка: умный, красивый, важный … – где граница с глупым, уродливым, несущественным? Даже такое простое понятие как «стол» может пониматься по-разному. У Цветаевой: «Но лучше всего, всех стойче – ты, – мой наколенный стол».

Что касается вопроса в), возражение бывает такое: ведь таких студентов нет! Что это за множество, в котором нет никаких элементов? Вот такое уж множество, очень странное, но и очень важное.

> *Определение 0.1. Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается специальным символом* $\varnothing$.

Это определение не противоречит основному свойству множеств. Действительно, про каждый объект точно известно, принадлежит ли он пустому множеству: не принадлежит!

Пустое множество существует только одно.

> ✍ *Неправильное восприятие термина «множество» связано отчасти с тем, что это – слово обычного языка и имеет в нем свой смысл: «большое количество». В других же языках восприятие его будет иным. Например, соответствующий английский термин «*set*» означает просто «набор», «комплект», а также «конфигурация», «строение» и многое другое. Если вам трудно избавиться от фоновых смыслов, порождаемых привычным словом, попробуйте использовать вместо него иностранное слово или просто символ. Выражение «пустой сет» (*empty set*) звучит совсем не так противоречиво, как «пустое множество».* ☺

Приведенные выше примеры отражают тот самый формальный подход, о котором говорилось во Введении. В математических определениях и утверждениях учитывается только их точный смысл, а не ассоциации, которые они порождают в нашем сознании. И если пример согласуется с определением, но не согласуется с вашим здравым смыслом – тем хуже для здравого смысла.

Да и так ли уж он здрав? Попробуйте, скажем, решить такую занимательную задачку.

Задача 7. Два человека подошли к широкой пустынной реке, на которой была только одна маленькая одноместная лодочка. Тем не менее, оба переправились через реку на этой лодке. Как им это удалось?

У тех, кто решает эту задачу, первые предположения довольно однотипны. Обязательно кто-нибудь скажет, что второй путник плыл, держась рукой за лодку. Но это противоречит условию: сказано, что переправлялись оба на лодке, а не вплавь. Эта задача решается не с помощью подвоха, а чисто логически! (см. решение в конце книги).

Вот вам и здравый смысл! Ведь в задаче не было сказано, что путники шли вместе, мы уже сами домыслили это. И домыслили неправильно. Что уж говорить о строгих и абстрактных математических определениях: там простор для подобных ошибок просто необозрим!

Способы описания множеств

Итак, о самом понятии «множество» мы уже поговорили, теперь надо переходить к изучению конкретных его "представителей". Для начала их надо научиться различать.

Для описания конкретного множества используется несколько способов. Например, можно просто перечислить элементы множества. Такой способ называют «задание множества с помощью списка его элементов». Они записываются через запятую в фигурных скобках. Например,

A = {стол, стул, диван, картина, кашель};

N = {1, 2, 3, …} – множество натуральных чисел;

Z = {… , –2, –1, 0, 1, 2, 3, …} – множество целых чисел.

Иногда такой способ описания неудобен или невозможен. Например, если элементов слишком много (тем более – бесконечное количество) или мы не знаем их все. Тогда используется задание множества с помощью характерного свойства его элементов.

Запись $\{x \mid$ высказывание об $x\}$ обозначает множество всех тех элементов x, для которых высказывание в скобках является верным. В этом случае вертикальная черта читается: “таких, что”. Например,

$B = \{$студент | каждая оценка студента равна 5$\}$

задает множество всех отличников. Множество всех рациональных чисел (обыкновенных дробей) задается так:

$Q = \{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N\}$;

т.е. рациональным числом является любая дробь, числитель которой целый, а знаменатель – натуральный (в частности, не обращается в нуль). Конечно, некоторые из этих дробей обозначают на самом деле не дробные, а целые числа, например, $^{-6}/_{2} = -3$.

> ✐ *Если в фигурных скобках какой-то элемент повторяется, это не значит, что в множестве присутствуют два экземпляра этого элемента. Повторные элементы можно отбросить. Например, по определению множества рациональных чисел, в нем присутствуют дроби* $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}$ *однако все они обозначают один и тот же элемент – единицу. Кроме того, список предполагает какой–то порядок следования элементов, для множества же это безразлично.* ☺

Задача 8. Заданы два множества:

а) группа людей, пришедших на концерт;

б) группа людей, которые могут перенести рояль.

Какое из этих описаний является описанием при помощи характерного свойства элементов?

Ответ. Первое, но не второе.

Как показывает опыт, эта задача сложна для гуманитариев, они иногда дают ответ, прямо противоположный истинному. Мотивировка такая: люди могли прийти на концерт случайно, это их не характеризует, а для переноски рояля нужна сила, это свойство человека более постоянно. В данном случае смешались два смысла понятия "характерное свойство". У одного и того же объекта можно найти множество свойств, но нам важно охарактеризовать его не сам по себе, а как элемент множества.

Заметим, что характерное свойство элемента – это не причина, по которой он попадает в данное множество, а просто констатация факта. Математик вправе создавать множества, по видимости "нелогичные" и "незакономерные", оставляя вопрос о причине объединения элементов открытым. Пусть вы считаете, что появление на концерте еще не характеризует человека как личность. Но этот факт может оказаться очень важным в другом смысле (скажем, для установления алиби!).

Кстати, юридический подход здесь не случаен: по уровню формализации этот тип мышления наиболее близок к математическому среди всех гуманитарных.

Сравнение множеств и операции над множествами

Множества можно сравнивать друг с другом и применять к ним операции, в чем–то схожие с арифметическими.

Например, числа мы можем сравнивать, выясняя, какое из них больше, а какое меньше. А как сравнивать множества? Аналогом отношения “меньше” является отношение “входит”:

> *Определение 0.2. Если все элементы множества* A *входят в множество* B, *то первое множество называют* п о д м н о ж е с т в о м *второго. Символическая запись* $A \subset B$ *читается “*A *является подмножеством* B*” или “*A *входит в* B*”.*

Примеры:

$$\{1;\,3;\,4\} \subset \{1;\,2;\,3;\,4;\,5\}; \qquad N \subset Z \subset Q\,;$$

{брат, сестра, мать} $\subset$ {слово | обозначает родственное отношение} и т.д.

Конечно, каждое множество является подмножеством себя самого. Кроме того, каждое множество содержит в качестве подмножества пустое множество: $A \subset A$; $\varnothing \subset A$. Таким образом, у всякого множества, кроме пустого, существует несколько подмножеств. Если рассмотреть их все, то получим множество подмножеств данного множества. Оно обозначается через 2^A. Формально: $2^A = \{B \mid B \subset A\}$. Например, если $A = \{1;\,2\}$, то $2^A = \{\varnothing;\,\{1\};\,\{2\};\,\{1;\,2\}\}$. Это множество содержит 4 элемента.

В последнем примере мы видим двойные фигурные скобки. Это показывает, что элементы множества сами являются множествами. Такой вариант возможен и даже типичен. Дело в том, что большинство объектов, если к ним присмотреться повнимательней, обнаруживают собственную структуру. Например, факультет делится на курсы, курс состоит из групп, группа – из студентов. Или, как говаривал Козьма Прутков, «Во всех частях земного шара имеются свои, даже иногда очень любопытные, другие части».

> *Хотя сравнение множеств в чем-то похоже на сравнение чисел, есть и отличия. Дело в том, что про каждые два числа можно сказать, какое из них больше, в противном случае они равны друг другу. Но для множеств это неверно. Например, какое из множеств больше:* A = *{1; 2; 3} или* B = *{2; 4}? На первый взгляд можно подумать, что больше первое множество, потому что в нем 3 элемента, а во втором – только 2. Но такой ответ неверен. По* р а з м е р у *(количеству элементов) больше первое множество, но сами множества – несравнимы, так как ни* A *не входит в* B, *ни* B *не входит в* A.

Теперь поговорим об операциях над множествами. Множества можно объединять (соответствует сложению), пересекать (соответствует умножению), вычитать друг из друга.

> *Определение 0.3.* О б ъ е д и н е н и е м *множеств* A *и* B *(обозначается* $A \bigcup B$*) называется множество, содержащее все элементы как первого множества, так и второго и только их.* П е р е с е ч е н и е м *двух множеств (обозначается* $A \bigcap B$*) называется множество, состоящее из их общих элементов.* Р а з н о с т ь *множеств* $A \setminus B$ *состоит из элементов, входящих в* A *и не входящих в* B.

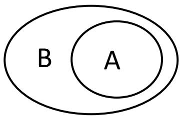
Например,

$$\{1, 2, 4\} \bigcup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 4, 6\}; \qquad \{1, 2, 4\} \bigcap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}.$$

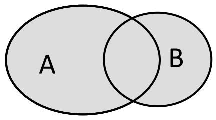
$$\{1, 2, 4\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1\}, \ \{2, 4, 6\} \setminus \{1, 2, 4\} = \{6\}.$$

Если выбрать некоторое универсальное множество E, в котором представлены все нужные нам элементы, то можно ввести понятие дополнения множества A: $\overline{A} = E \setminus A$.

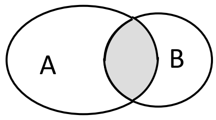
Для того, чтобы представить все введенные понятия наглядно, удобно воспользоваться так называемыми диаграммами Венна. В них отдельные множества изображаются в виде овалов или других геометрических фигур на плоскости. На картинках ниже результирующие множества обозначены затемнением.



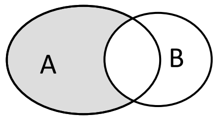
$A \subset B$



$A \bigcup B$



$A \bigcap B$



$A \setminus B$

Задача 9. Из логики известно, что многие понятия можно представить в виде множеств[1], например "отец" $\to$ "множество всех мужчин, являющихся отцами". Изобразите с помощью диаграмм Венна соотношение между множествами-понятиями "отец", "дед", "сын", "внук", "брат".

Заметим, что операции над множествами в некотором смысле соответствуют логическим связкам "и", "или", "не". Действительно, элемент входит в объединение $A \bigcup B$, если он входит в A или входит в B. Пересечение порождается аналогичным образом союзом "и", а дополнение – союзом "не". Понятие "входит" связано с логическим следствием: $A \subset B$, если из $a \in A$ следует, что $a \in B$. Впрочем, словесное выражение операций над множествами может быть весьма разнообразным.

Задача 10. Сравните две фразы:

а) Поздравляем с праздником 8 марта и матерей и жен.

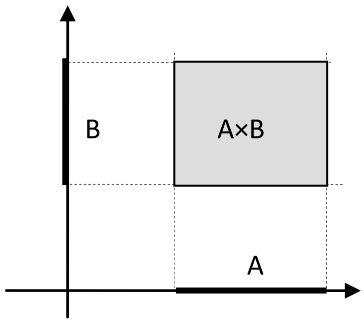
б) Многие женщины являются и матерями и женами.

Какие действия с множествами определяются этими фразами?

Декартово умножение и списки

[1] Точнее, множество задает так называемый объем понятия. Само понятие не совпадает со своим объемом. В частности, для отношений родства далее будет предложен более содержательный подход.

Еще одна операция, применимая к множествам – декартово умножение. Его результат обозначается косым крестом: $A \times B$ и состоит из всех пар вида (a, b),[1] где первый элемент взят из A, а второй – из B. Примером может служить нотация шахматных полей. “Колонки” нумеруются буквами, составляющими множество $A = \{a, b, \ldots, h\}$, а “ряды” – цифрами из множества $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$.



Декартово произведение этих множеств состоит из всех пар $(a, 1)$; $(a, 2)$; …; $(h, 8)$, которые позволяют различать поля доски.

Правда, шахматисты для краткости опускают скобки и запятые и пишут просто $b5$, $g2$ и т.п.

Определение «декартовы» встречается также, как вы знаете, в названии системы координат. И это не случайно: с ее помощью точки плоскости обозначаются парами чисел (x, y), т.е. изображаются как элементы декартова произведения двух числовых прямых. На координатной плоскости можно изобразить декартово произведение наглядно: например, произведением двух отрезков осей будет прямоугольник.

Можно привести и нематематический пример. Пусть A = {Николай, Равиль}, B = {Света, Диляра, Жанна}. Тогда множество $A \times B$ состоит из всех пар (парень, девушка), которые можно составить из этих 5 людей. Таких пар будет, конечно, 6:

$A \times B$ = {(Николай, Света); (Николай, Диляра); (Николай, Жанна);
(Равиль, Света); (Равиль, Диляра); (Равиль, Жанна)}.

Можно перемножать декартовым образом не только разные множества, но одно множество само на себя. В приведенном примере имеем:

$A \times A$ = {(Николай, Николай); (Николай, Равиль); (Равиль, Николай); (Равиль, Равиль)};

т.е. множество из 4 элементов.

Элемент множества $A \times B$, т.е. пара (парень, девушка) может означать, скажем, двух ведущих для студенческого концерта. Попробуйте найти какую-нибудь интерпретацию для элементов множества $A \times A$. Заметьте, что в этом случае составляющие в одной паре могут повторяться и (Николай, Равиль) не равно (Равиль, Николай).

Перемножить в декартовом смысле можно не только два, но и любое число множеств. Элементом декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ будет упорядоченный набор ("n-ка"[2],

---

[1] Если a и b – числа, то это обозначение можно перепутать с обозначением интервала на числовой прямой. Что именно имеется в виду, обычно можно понять из контекста. В спорных случаях следует явно указывать смысл обозначения.

[2] Читается “энка”.

список) элементов ($a_1, a_2, \ldots, a_n$). Здесь $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$. Для краткости это записывается так: $a_i \in A_i$, i = 1, 2, …, n.

Новый объект – список – интересен и без связи с декартовым произведением. Он чем-то очень похож на множество, недаром его даже используют как один из способов описания множества. Но все же это другой объект. Отличия два: в списке важен порядок элементов и повторяющиеся элементы рассматриваются как разные. Например, что представляет собой набор чисел 90, 60, 90? Ответ, конечно, зависит от смысла этих чисел. Если понимать их так, как вы уже догадались – как обхватные размеры фигуры – то это, безусловно, список и его надо заключить в круглые скобки: (90, 60, 90). Другой набор (60, 90, 90) будет описывать совсем другую фигуру и вряд ли удовлетворит строгое жюри конкурса красоты. Также очевидно, что (90, 60, 90) ≠ (90, 60).

Если же считать набор чисел множеством, то скобки должны быть фигурными и {90, 60, 90} = {60, 90, 90} = {90, 60}.

Мы показали выше, что перемножать можно не только два множества, но и больше, так что получатся списки из нескольких элементов. Но можно число сомножителей и уменьшить. Например, математику ничто не мешает рассматривать списки из одного элемента[1] (a); (b); и т.д. При этом все три объекта a, (a) и {a} имеют разный смысл, хотя иногда их путают. Например, неверно говорить, что пересечением двух прямых является точка, $l \cap m = A$, ведь пересечение множеств – снова множество. Правильная запись выглядит так: $l \cap m = \{A\}$, но в школьном курсе геометрии такими тонкостями пренебрегают.

Другой пример: ясно, что слово «а» и буква "а" – не одно и то же. Как же их различить? Математически запись каждого слова можно рассматривать как с п и с о к букв, тогда слово «а» будет списком и з о д н о г о э л е м е н т а : «слово» = (с, л, о, в, о); «а» = (а).

Можно, вообще говоря, рассматривать и список из 0 элементов, т.е. пустой список. Он используется, например, в программировании для организации работы со строками символов.

Соотношения и отношения

Когда мы описывали математические модели, мы говорили, что кроме элементов (частей) объекта, важно знать их взаимосвязи, а также уметь сопоставлять объекту его модель. Связи между элементами могут моделироваться по-разному, в частности, с помощью понятия «соотношение». Соотношение (соответствие) устанавливается между элементами двух множеств.

> *Определение 0.4. Говорят, что между элементами множеств* A *и* B *задано с о о т н о ш е н и е , если для каждой пары элементов (*a, b*), где* a $\in$ A, b $\in$ B, *можно сказать, выполняется это соотношение или нет. Соотношение между элементами о д н о г о и т о г о ж е множества называют о т н о ш е н и е м .*

---

[1] Говорят, англичанин на автобусной остановке выстраивается в аккуратную очередь из одного человека.

Соотношение можно описать как некоторое множество пар элементов. Те пары, для которых оно выполняется, входят в соотношение, а остальные – нет. Никакие другие показатели (давность связи, ее надежность, степень выраженности, полезность, законность и т.п.) не учитываются. В этом смысле соотношение можно считать весьма упрощенной и схематичной моделью, что, однако, не делает ее бесполезной.

Примерами соотношений являются равенство чисел, отношение родства, отношение ученик – учитель, соотношение стимул – реакция и т. д. Обозначается соотношение либо специальным символом, например,

$$< \ \leq \ = \ > \ \geq \ \neq \ \sim \ \Leftrightarrow \ \in \ \notin \ \subset \ \not\subset \ ||$$

и т. п., либо описывается словами.

Примеры: $a = b$, $1 < 2$, Сидоров – ученик Петрова и т. п. Можно обозначить его и какой-нибудь буквой (например, ρ) или символом (например, ✧). Тогда фраза «a находится с b в соотношении ρ (соотв. ✧)» будет кратко записываться как $a \rho b$ (соотв. a ✧ b).

Многие слова реального языка описывают на самом деле не объекты, а соотношения. Например, что такое «мать»? Сравните фразы «По улице идет мать» и «Анна Ивановна – мать Лены». Первая явно ошибочна, так как слово «мать» означает не просто женщину, а ее отношение с некоторым другим человеком (ее ребенком).[1]

> *Определение не требует, чтобы соотношение было “осмысленно”: с математической точки зрения любой набор пар* (a, b) *является соотношением. В этом смысле соотношение – это просто подмножество декартова произведения множеств* A *и* B. *В частности, пустое множество пар порождает пустое (нулевое) соотношение. Аналогично все множество* $A \times B$ *является соотношением, которое можно назвать единичным.*

Может показаться, что эти соотношения тривиальны, но это не так. Например, лозунг французской революции "Свобода, равенство, братство" призывает сделать свойство свободы и отношения равенства и братства единичными[2].

Полезным может оказаться и пустое соотношение. Например, факт, что соотношение "отпечатки пальцев" между множеством подозреваемых и множеством отпечатков, найденных на месте преступления, пусто, не раз использовался авторами детективов для организации сюжета.

---

[1] Названием этого отношения лучше считать слова "быть матерью". Более подробно эти вопросы разбираются в логике. Например, в учебнике [Ивлев].

[2] Впрочем, тривиальность и величие не всегда противоречат друг другу. Уже упоминавшийся Г.К.Честертон говорит в рассказе "Сапфировый крест": "Французы будоражат мир не парадоксами, а общими местами. Они облекают прописные истины в плоть и кровь: вспомним их революцию".

Если множества A и B конечны, то соотношение, связывающее их элементы можно задать с помощью таблицы. Например, так:

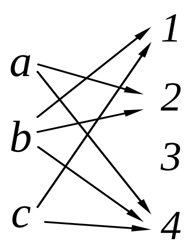
Элементы множества A	Элементы множества B			
	1	2	3	4
a		✓		✓
b	✓	✓		✓
c	✓			✓

В этом примере в соотношение входят (находятся в данном соотношении) пары (a, 2), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 4), (c, 1), (c, 4). Если обозначить это соотношение через σ, можно записать, что $a\ \sigma\ 4$, но $b\ \overline{\sigma}\ 3$.

Иногда вместо таблицы используют матрицу, т.е. таблицу, заполненную числами. При этом на месте галочек ставят единицы, а на остальных местах – нули. В таком виде информацию удобнее заносить в ЭВМ и обрабатывать формальными методами.

Для соотношений применяется также наглядный способ описания, с использованием так называемых г р а ф о в (от латинского *grapheo* – пишу). Граф – это набор вершин, некоторые из которых связаны д у г а м и (направленными отрезками прямых или кривых).

Для описания соотношения применяют так называемый двудольный граф. Все его вершины разбиваются на две группы: слева – вершины, соответствующие элементам множества A, а справа – элементам B. Стрелки в этом случае идут только слева направо. Например, соотношение, заданное выше таблицей, графически изображено на рисунке справа.



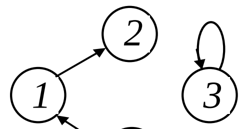
Аналогичные способы можно применить для описания отношения: например, таблица, матрица и граф справа описывают одно и то же отношение. Соответствующее множество пар состоит из пяти элементов: {(1; 2), (1; 4), (3; 3), (4; 1); (4; 4)}.

Граф отношения, в отличие от соотношения, не является двудольным: каждый элемент множества представлен только одной вершиной.

На этом рисунке вы видите петли: так обозначаются дуги, у которых начало совпадает с концом. В общем случае может оказаться, что неко-

	1	2	3	4
1		✓		✓
2				
3			✓	
4	✓			✓

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



торые вершины не связаны ни одной дугой, а другие – одной или даже двумя (направленными в разные стороны).

Заметим, что в соотношении a ρ b элементы a и b играют, вообще говоря, разную роль. Обычно один из них естественно считать з н а ч е н и е м соотношения, тогда другой можно назвать а р г у м е н т о м . В соотношениях, определяемых фразами русского языка, значение стоит обычно на первом месте, а аргумент – на втором. Например, во фразе "Сидоров – ученик Петрова" естественно считать Сидорова значением соотношения (учеником), а Петрова – аргументом. При записи соотношения в виде набора пар, наоборот, аргумент помещают на первое место, а значение – на второе. Например, соотношение "столица" можно записать так:

Россия $\rightarrow$ Москва,

США $\rightarrow$ Вашингтон,

Франция $\rightarrow$ Париж,

Великобритания $\rightarrow$ Лондон,

Германия $\rightarrow$ Берлин,

…

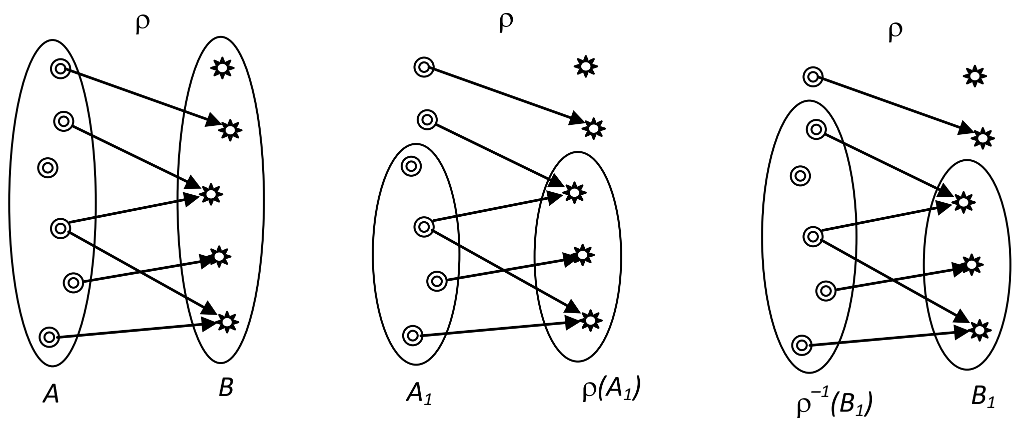
Впрочем, в некоторых соотношениях (и особенно отношениях) разница между аргументом и значением стирается: скажем, для отношения "меньше", $a < b$, "роли" элементов a и b различны, но нет разумных оснований считать какой-нибудь из них значением. Формально будем считать значением первое из чисел, а аргументом – второе. С точки зрения грамматики в фразе «a меньше b» "a" является подлежащим, а "меньше b" – сказуемым.

Вообще говоря, одному аргументу может соответствовать несколько значений. Они образуют множество, которое называется о б р а з о м данного элемента. Приведем примеры: 1) учителя Васи; 2) произведения А.С.Пушкина; 3) дети Анны Ивановны. Заметим, что у Анны Ивановны может и не быть детей, тогда соответствующий образ – пустой. Образ можно находить не только для одного элемента, но и для целого множества: 1) учителя 10а класса; 2) произведения советских писателей; 3) дети работниц швейной фабрики.

> *Определение 0.5. Пусть задано соотношение ρ между множествами* A *и* B, *О б р а з о м множества* $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}$ *при этом соотношении называется множество всех значений соотношения ρ, которые оно принимает на элементах множества* A_1. *Обозначается образ через* $\rho(\mathrm{A}_1)$. *Иначе говоря, в* $\rho(\mathrm{A}_1)$ *входят такие элементы* $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$, *для которых существует* $\mathrm{a} \in \mathrm{A}_1$ *такое, что* $\mathrm{a}\,\rho\,\mathrm{b}$.

Аналогично понятию "образ" вводится и понятие "п р о о б р а з ", надо только поменять местами аргумент и значение. Например, "столицы европейских государств" это образ, а "государства, столицы которых насчитывают менее 1.000.000 человек" – прообраз, если в качестве соотношения выбрано "столица".

Определение 0.6. *П р о о б р а з о м некоторого множества* $B_1 \subset B$ *называется множество всех элементов из* A, *таких, что значения соотношения на них лежат в множестве* B_1. *Обозначается прообраз как* $\rho^{-1}(B_1)$. *Иначе говоря, в* $\rho^{-1}(B_1)$ *входят такие элементы* $a \in A$, *для которых существует* $b \in B_1$ *такое, что* $a \rho b$.



З а д а ч а 11. Как определить логический объем понятия (см. примечание к задаче 9) через образ (или прообраз) порожденный соответствующим соотношением?

З а д а ч а 12. Пусть ρ = "<" – отношение, заданное на множестве натуральных чисел. Найти а) ρ ({3; 6}); б) ρ^{-1}({3; 6}).

Действия над соотношениями

Действия над соотношениями можно разбить на два класса.

1. Д е й с т в и я с м н о ж е с т в а м и . Заметим, что соотношение между элементами некоторого множества можно само рассматривать как множество, например, множество отмеченных пар или множество дуг на графе. Поэтому к соотношениям, связывающим одни и те же множества, можно применять обычные операции объединения, пересечения и разности, а также проверять, входит ли одно из них в другое. Можно также рассматривать дополнение некоторого соотношения, причем в качестве универсального множества естественно рассматривать набор всех пар, т.е. $E = A \times B$. Дополнение называется еще соотношением, п р о т и в о п о л о ж н ы м к данному.

З а д а ч а 13. Найти

а) объединение отношений "мать" и "отец";

б) пересечение отношений "≤" и "≥";

в) отношение, противоположное отношению ">";

г) Пересекаются ли отношения "отец", "дед", "сын", "внук", "брат", заданные на множестве мужчин (ср. с задачей 9)?

З а д а ч а 14. Противоположное к ρ соотношение можно обозначить через $\overline{\rho}$. Почему?

З а д а ч а 15. Соотношения ρ и σ заданы таблицами:

ρ	1	2	3	4
a	✓			
b	✓			✓
c		✓		✓

σ	1	2	3	4
a	✓		✓	
b		✓		✓
c	✓	✓		

Найти их объединение и пересечение.

2. Д е й с т в и я , п о д х о д я щ и е т о л ь к о д л я с о о т н о ш е н и й . Это композиция (суперпозиция) и обращение (отыскание обратного соотношения).

О б р а т н о е соотношение получается из заданного, если поменять местами аргумент и значение. Например, обратным к отношению "мать" будет отношение "ребенок".

> *Определение 0.7. Рассмотрим соотношение ρ, действующее между множествами* A *и* B. *О б р а т н о е соотношение ρ^{-1} действует между множествами* B *и* A, *причем* b ρ^{-1} a *тогда и только тогда, когда* a ρ b.

З а д а ч а 16. а) Найти соотношения, обратные к соотношениям "жена", "ученик", "брат", "начальник", ">".

б) Какие соотношения обратны к соотношениям "мать" и "отец", чем они отличаются друг от друга?

При изображении обратного соотношения с помощью таблицы необходимо поменять местами в исходной таблице строки и столбцы. На графе при обращении меняется направление стрелок.

З а д а ч а 17. а) Соотношение ρ и отношение σ заданы таблицами. Найти соотношения, обратные к ним; противоположные к ним.

ρ	1	2	3	4
a	✓			
b	✓			✓
c		✓		✓

σ	*a*	*b*	*c*
a	✓		✓
b		✓	
c	✓	✓	

*б) Могут ли отношения ρ^{-1} и $\overline{\rho}$ совпадать между собой?

З а д а ч а 18. Обозначение ρ^{-1} уже возникало в определении прообраза. Связано ли это определение с понятием обратного соотношения?

Композицию (сложное соотношение) можно составить, если значения одного соотношения могут рассматриваться как аргументы второго. Например, понятие "авторский гонорар (за книгу)" составляется из двух: "гонорар (автора)" и "автор (книги)". Аналогично можно рассматривать понятия "мать ученика", "численность населения столицы" и т.п. В последнем примере в композицию входит три соотношения, а его аргументами являются государства мира.

> *Определение 0.8. Рассмотрим два соотношения: ρ, действующее между множествами* A *и* B *и σ, связывающее* B *и* C. *Для таких двух соотношений можно построить композицию (сложное соотношение) $\sigma \circ \rho$. А именно, будем считать, что элементы* $a \in A$ *и* $c \in C$ *связаны соотношением $\sigma \circ \rho$, если существует такой элемент* $b \in B$, *что* $a \rho b$ *и* $b \sigma c$.

Заметим, что для отношения ρ можно рассматривать композицию с самим собой. Например, "мама" ∘ "мама" = "бабушка (по материнской линии)".

Задача 19. Найти композицию

а) соотношений ">" и "возраст".

б) отношения "≤" с самим собой;

в) отношений "брат" и "жена" в том и другом порядке.

Отображение и его разновидности

Важным частным случаем соотношений, использующимся во всех математических дисциплинах и необходимым при построении математической модели, является отображение.

Для отображений разница между аргументом и значением существенна. В случае соотношения одному аргументу может соответствовать несколько значений, а одному значению – несколько аргументов. Например, у учителя много учеников, а у ученика – несколько учителей. Однако во многих случаях требуется, чтобы значение по аргументу определялось однозначно. Такое соотношение и называется отображением (соответствием, преобразованием, функцией).

> *Определение 0.9. Отображение – это соотношение, в котором каждому аргументу соответствует не более одного значения.*

В обратном направлении однозначность не требуется, т. е. одно и то же значение может получаться для разных аргументов.

Для отображения f, действующего из множества A (область аргументов f) в множество B (область значений) используются такие обозначения: $f : A \to B$; $a \xrightarrow{f} b$ или $f(a) = b$, где $a \in A$, $b \in B$. Здесь a – аргумент отображения, а b – его значение на аргументе a. Так как отображение является в то же время и соотношением, его можно записать как набор пар, а именно, пар вида $(a, f(a))$.

Запись отображения в виде таблицы неэкономна, так как в каждом столбце окажется только одна пометка. Поэтому для отображений используют другой тип таблицы, из двух строк: в первой записываются аргументы, а во второй – соответствующие им значения. То же можно записать в столбик. Для числовых отображений чаще используют запись с помощью формулы.

П р и м е р . Функция «длина» применяется к отрезкам, а ее значениями являются числа. Обозначим множество всех отрезков через W, т.е. $W = \{[a, b] \mid a \in R;\ b \in R;\ a \le b\}$, где через R обозначено множество действительных чисел. Можно записать формально: д л и н а : $W \to R$. Читается это так: «длина – отображение из множества отрезков в множество чисел». Значение функции "длина" определяется формулой д л и н а ($[a, b]$) = $b - a$.

З а д а ч а 20. а) Какие из родственных отношений являются функциями (отображениями): "брат", "отец", "дед", "дед по отцу", "дед по матери". б) Что является областью определения функции "мама"? областью ее значений?

Иногда определение отображения задают несколько по-другому, а именно, требуют, чтобы для каждого аргумента существовало р о в н о о д н о значение. Мы будем придерживаться более широкого взгляда, при котором некоторым элементам множества A не соответствуют никакие значения. При этом естественно выделить в отдельное множество те элементы из A, для которых значения существуют. Это множество назовем о б л а с т ь ю о п р е д е л е н и я отображения f и обозначим через $D(f)$. Можно заметить, что (в терминах определения **Ошибка! Закладка не определена.**) это множество – прообраз множества B при отображении f, $D(f) = f^{-1}(B)$.

Аналогично может оказаться, что не все элементы множества B являются значениями отображения. Например, для функции "длина" значениями будут не любые действительные числа, а только неотрицательные. Если выделить в множестве B только те элементы, которые являются значениями отображения, то получим м н о ж е с т в о з н а ч е н и й отображения f, которое обозначается через $E(f)$. Формальная запись: $E(f) = \{y \in B \mid \exists$[1] $x \in A,\ y = f(x)\}$. В частности, E(д л и н а) = $[0; +\infty)$. В терминах определения **Ошибка! Закладка не определена.** это множество – образ множества A при отображении f, $E(f) = f(A)$.

Иногда точный вид множества $E(f)$ определить довольно трудно. Пусть через v обозначена функция «возраст человека». Ее значениями будут неотрицательные числа, но не слишком большие (уж точно не более 300). С другой стороны, исторические исследования или достижения медицины могут изменить верхнюю границу этого множества.

Если среди всех людей рассматривать только школьников (обозначим их множество через Ш), то образ Ш при отображении v имеет вид v(Ш) = [6; 17], если измерять возраст в целых годах. С другой стороны, обозначение $v^{-1}([31; +\infty))$ описывает множество «тех, кому за 30» как прообраз промежутка $[31; +\infty)$.

---

[1] Этот значок читается «существует» (перевернутое E из слова Exist). Аналогично вместо слова «любой» используется знак $\forall$ (от английского All)

З а д а ч а 21. Запишите множество всех пенсионеров (по возрасту), используя функцию v и множества М (мужчин) и Ж (женщин).

Необходимо научиться отличать функцию от ее значения. Математические функции записываются обычно с помощью формул, например, $f(x) = x^2$. Здесь x^2 – з н а ч е н и е функции, саму же ее можно описать как “возведение в квадрат”. Иногда эту функцию называют sqr. Точно также $\log_a$ – это функция (логарифм по основанию a), а $\log_a b$ – ее значение в точке b (или для аргумента b). Знак же log без конкретного основания задает функцию уже от двух (положительных) аргументов, т.е. $\log : R^+ \times R^+ \to R$.

Нечисловые примеры: "годовой доход" – это отображение, а "годовой доход КАМАЗа" – его значение; "автор" – отображение[1], "автор «Евгения Онегина»" – значение.

Разновидности отображений

Отображения можно классифицировать исходя из того, какие объекты являются их аргументами и значениями. Естественно, в математичке особую роль играют отображения, связанные с числами.

Отображение, для которого областью з н а ч е н и й является множество чисел (N, Z, Q или другое) называют ф у н к ц и о н а л о м . Примеры функционалов – длина кривой и площадь фигуры, рост и возраст человека и т. п. Если и а р г у м е н т , и з н а ч е н и е отображения – числа, то его называют ф у н к ц и е й . Вы знаете много примеров функций из школьного курса математики. Например, линейная функция, квадратичная функция, sin, cos, log, … Впрочем, слово “функция” используют иногда расширительно, называя так л ю б о е отображение.

Если область определения отображения $D(f)$ – множество натуральных чисел N, то оно называется п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю . Для элементов последовательности a существует специальное обозначение: вместо $a(n)$ пишут a_n. Последовательностью можно считать любой набор пронумерованных объектов: последовательность дней в месяце, пунктов в анкете, футболистов в команде и т. п.

В некотором смысле последовательность – обобщение понятия «список», так как элементы списка всегда можно пронумеровать в том порядке, в котором они записаны. Но последовательность может быть не только конечной, но и бесконечной, так как бесконечно само множество номеров N.

---

[1] Вообще говоря, понятие "автор" не является отображением в чистом виде, так как у одной книги их может быть несколько. Чтобы обойти эту трудность, будем рассматривать всех соавторов одного произведения как некоего "коллективного автора". В таком понимании автор определяется однозначно.

Примеры отображений

1. График дежурств. Каждой дате ставится в соответствие человек (группа людей), который будет дежурить в этот день.

2. Театральные билеты задают отображение их владельцев на места в зале.

3. Цвет волос – отображение множества людей в множество цветов.

4. Оценка по некоторому предмету – отображение множества студентов в множество из четырех элементов {неуд., удовл., хор., отл.}.

5. Тождественное отображение, заданное на множестве A произвольной природы. Каждому элементу множества оно ставит в соответствие сам этот элемент. Иногда его обозначают id или id_A. Для любого элемента $a \in A$ имеем $\mathrm{id}(a) = a$.

6. Постоянное отображение, принимающее одно и то же значение для всех аргументов. Обозначается const.

7. Вес предмета – числовое отображение (функционал), принимающий положительные значения.

8. Годовой доход – также функционал, применяемый к физическим и юридическим лицам. Впрочем, можно считать, что значениями этого отображения (как и предыдущего) являются не числа, а именованные величины. Действительно, одна и та же сумма, выраженная в рублях и в долларах, будет задаваться совсем разными числами.

9. Число элементов множества – функционал, аргументами которого являются конечные множества, а значениями – неотрицательные целые числа.

10. Функция sign (сигнум, т. е. знак) принимает значение 1, если ее аргумент положителен, –1 для отрицательных аргументов и 0 для нуля. Коротко это записывают так:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \\ -1, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

11. Производная – отображение (иногда говорят оператор), аргументы и значения которого – функции.

12. Если число аргументов отображения конечно, то его можно описать с помощью таблицы значений. Например, картинки на шкафчиках в детском саду задают отображение из множества воспитанников в множество рисунков:

Аргумент	Анюта	Ваня	Гузель	Алеша	Руслан	Айдар	Лейсан
Значение	Зайчик	Роза	Солнце	Лиса	Мячик	Мишка	Домик

13. Последовательность полных квадратов 1, 4, 9, 16, … можно описать также формулой $a_n = n^2$.

14. Последовательность, задаваемая формулой $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, имеет элементы –1; 1; –1; 1; –1, …

> ☝ *Не следует думать, что отображение должно быть всегда «осмысленно». Определение функции не предполагает, что соответствие между аргументом и значением должно починяться какому-либо правилу или порядку. Тем более, что понятие осмысленности очень трудно формализовать, и не менее трудно проверить. Например, на первый взгляд кажется, что цифры 8, 2, 9, 0, 1, 5, 7, 3, 4, 6 чередуются как попало. На самом деле здесь есть порядок: они расставлены … по алфавиту! Как видно из этого простого примера, то, что на первый взгляд кажется хаосом, с другой точки зрения является вполне закономерным. И наоборот, внешне закономерное может оказаться абсурдным. Например: медведь – медведица, верблюд – верблюдица, лис – лисица, стол –… столица!? ☺*

Действия с отображениями

К отображениям, как и ко всем соотношениям, можно применять действия: объединение, пересечение, дополнение, обращение и композицию. Возникает вопрос, когда результаты также будут отображениями? Исследуем этот вопрос для некоторых действий.

1. О б ъ е д и н е н и е отображений f и g чаще всего не является отображением. Действительно, оно включает пары вида $(a, f(a))$ и $(a, g(a))$, поэтому при $f(a) \neq g(a)$ единственность значений нарушается. Объединение $f \cup g$ будет отображением только тогда, когда f и g совпадают на общей части их областей определения. Например, если $f(x) = x$ для $x \geq 0$, а $g(x) = -x$ для $x \leq 0$, то объединение этих отображений будет также отображением, а именно, функцией $| x |$.

2. П е р е с е ч е н и е отображений всегда будет отображением. А именно, $f \cap g$ принимает для аргумента a некоторое значение b, если $f(a) = g(a)$, при этом $b = f(a)$. Например, пересечением отображений "староста" и "старший", заданных на множестве студенческих групп, будут те студенты которые одновременно и старосты в своих группах, и старшие (по возрасту) в них.

3. К о м п о з и ц и я отображений – снова отображение. Действительно, рассмотрим два отображения: $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Значения отображения f могут в этом случае являться аргументами отображения g. Так что, выбрав элемент $a \in A$, с помощью отображения f мы можем найти единственный элемент $b = f(a)$ из B, а с помощью отображения g – единственный элемент $c = g(b)$ из C. Поэтому элемент c определяется по a также однозначно. В общем случае композиция $h = g \circ f$ вычисляется по формуле $h(a) = g(f(a))$.

В качестве иллюстрации рассмотрим "театральное" отображение из второго примера. Его можно разбить на 3 шага. Первое отображение “владелец” $\to$ “билет” возникает при покупке билета в кассе. Отображение “билет” $\to$ “номер места” появилось при печатании билетов в типографии. И, наконец, отображение “номер места” $\to$ “кресло” было задано при установке кресел в зале. Композиция трех этих отображений и позволяет человеку, купившему билет, безошибочно найти свое место. ☺

З а д а ч а 22. Найти композицию функций "мама" и "муж" в том и другом порядке.

Понятие сложной функции часто вызывает трудности для восприятия. Причина этого в том, о чем говорилось выше: в сознании смешивается сама функция и ее значение.

З а д а ч а 23. Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Найти формулы, выражающие функции $f \circ f$; $f \circ g$; $g \circ f$; $g \circ g$.

4. Если соотношение, о б р а т н о е к данному отображению, само является отображением, то исходное отображение называют о б р а т и м ы м. При этом не только одному аргументу соответствует одно значение, но и одному значению – один аргумент. В силу этого обратимое отображение называют еще в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м[1].

> *Определение 0.10. Если для каждого значения из множества значений отображения существует е д и н с т в е н н ы й а р г у м е н т, при котором отображение получает это значение, то отображение называют в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м или о б р а т и м ы м.*

Вот несколько разных способов записи этого определения.

В б у к в а х: пусть f действует из A в B, причем для каждого элемента $b \in B$ существует единственный элемент $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Тогда отображение f называют в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м.

Ч е р е з к в а н т о р ы $\forall, \exists$: $f : A \to B$ называется взаимно однозначным, если для $\forall b \in B\ \exists$ единственное $a \in A$ такое, что $f(a) = b$.

И е щ е: f взаимно однозначно, если из $f(a_1) = f(a_2)$ следует, что $a_1 = a_2$.

Если f – обратимо, то, зная значение b, мы можем найти аргумент a, такой, что $b = f(a)$. Это значит, что можно считать a функцией от b. Эту функцию (отображение) обозначают через f^{-1} и называют о б р а т н ы м о т о б р а ж е н и е м (обратной функцией) для f.

Понятие обратимости тесно связано с тем, какое множество рассматривается в качестве о б л а с т и о п р е д е л е н и я функции. Например, функция sqr (возведение в квадрат) необратима, так как числа x и $-x$ она переводит в одно и то же значение x^2. В то же время, если рассматривать sqr только для неотрицательных аргументов, она становится обратимой. Обратная к ней функция называется квадратным корнем ($\sqrt{\ }$ или sqrt). Пользуясь введенными обозначениями, можно записать: $\mathrm{sqr}^{-1} = \mathrm{sqrt}$ и $\mathrm{sqrt}^{-1} = \mathrm{sqr}$ (сравните с равенством $(x^2)^{-1}=1/x^2$).

В качестве нечислового примера снова обратимся к театральным билетам. Так как они печатаются с обозначением мест, то на каждое место приходится только один зритель. Поэтому кроме отображения "зритель" $\to$ "место" можно рассматривать и обратное отображение “мес-

[1] Соответствующий английский термин короче и выразительней: one-to-one, т.е. один-к-одному.

то" $\to$ "зритель". По сути оба отображения – это одно взаимно однозначное соответствие которое можно обозначить двойной стрелкой: "зритель" $\leftrightarrow$ "место". Разница между ними определяется только точкой зрения. Для зрителя первичен он сам, он ищет для себя место по билету. Для администратора же театра картина иная: места заполняются зрителями.

Задача 24. Опишите понятие «аншлаг» в терминах свойств отображения, задаваемого театральными билетами.

Задача 25. Известно, что система брака, принятая в нашем обществе (моногамия) – не единственная. В мусульманском мире распространена полигамия (многоженство), в некоторых первобытных обществах практиковалась полиандрия (многомужество). К этому можно добавить еще так называемую "шведскую семью", где число мужей и жен не фиксируется. В каких из этих систем

а) соотношение "жена" является отображением?

б) отображением является обратное соотношение?

в) отображение "жена" обратимо?

> ✍ *Функциональная зависимость понимается в математике не совсем так, как в конкретных науках. Если* b *зависит от* a *(является функцией от* a*) это не значит, что* a *является причиной* b. *Тем более, что в случае взаимно однозначной зависимости обе величины можно считать функциями друг от друга, так что разница между причиной и следствием здесь стирается.* ☺

Заметим, что в силу определения обратного соотношения, можно рассматривать композицию соотношений ρ и ρ^{-1} в любом порядке. Например, "солдатские матери" – это образ множества солдат при отображении "мать", а "дети солдатских матерей" – прообраз этого образа. Ясно, что он не совпадает с исходным множеством, т.к. включает в себя не только самих солдат, но и их братьев и сестер.

Для отображения же картина иная. Если прямое отображение f переводит элемент a в b, то обратное – b в a, поэтому композиция $f^{-1} \circ f$ переводит a в a. Это значит, что $f^{-1} \circ f$ = id, т.е. тождественному отображению на $D(A)$. Точно также можно показать, что $f \circ f^{-1}$ = $\mathrm{id}_{f(A)}$, т.е. тождественному отображению на $E(A)$. Каждое из этих равенств можно считать определением обратного отображения.

Взаимно однозначные соответствия играют большую роль при построении математических моделей. Действительно, математическая модель изучает то общее, что есть у многих объектов. И если свойства у них одинаковы, значит, мы можем заменить элементы одного элементами другого и наоборот. Конечно, такое соответствие должно не просто превращать один объект в другой, но и сохранять характерные свойства. В этом случае отображение называется изоморфизмом, от изо- – "равный, одинаковый, подобный" и морфа – "форма". В каждой области математики и ее приложений есть свое понимание изоморфизма, в зависимости от того, какие свойства считаются существенными.

В качестве примера рассмотрим множество вещественных чисел, в котором введена операция сложения[1]. Какие отображения сохраняют эту структуру, т.е. переводят с у м м у ч и с е л снова в сумму? Запишем данное свойство формально: если $z = x + y$, то для искомого отображения f выполняется равенство $f(z) = f(x) + f(y)$, т.е. $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Подставим сюда $y = x$, получим $f(2x) = 2f(x)$, т.е. мы выразили $f(2x)$ через $f(x)$. Подставим теперь $y = 2x$, получим $f(3x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$ и т.д. … $f(nx) = nf(x)$. Если обозначить $nx = y$, из предыдущего свойства будет следовать, что $f(y/n) = f(y)/n$. Комбинируя эти соотношения, получим, что $f(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}f(x)$, в частности, $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}f(1) = k\frac{m}{n}$, где через k обозначено число $f(1)$. Можно предположить, что и для всех остальных чисел x будет выполняться $f(x) = kx$. Это действительно так при некоторых естественных предположениях (непрерывность f). Легко проверить, что функция kx действительно переводит сумму чисел в сумму: $kz = k(x + y) = kx + ky$.

Значит, эта функция – изоморфизм числовой оси с заданной на ней суммой. Этот вид изоморфизма называется еще л и н е й н о с т ь ю.

Упражнения

13. Почему фраза «Множество есть то, что состоит из элементов» не является определением? Какое правило логики здесь нарушено?

14. Какие из приведенных ниже объектов являются множествами? Можно ли считать их описание описанием через характерное свойство элементов?

а) алфавит; б) множество красивых девушек; в) набор из шести чисел, сумма которых равна 20.

15. Может ли существовать множество, элементы которого сами являются множествами? Приведите примеры.

16. Попробуйте придумать общее свойство, которое могло бы объединять элементы множества A, описанного на с. 11.

17. Сколько элементов в множестве {1, 4, 2, 1, 6}?

18. Сколько элементов в множестве $\{\varnothing\}$? А в множестве $\{\{\varnothing\}, \varnothing\}$?

19. Перечислите все подмножества множества $\{a, b, c\}$. Сколько их? Как вы думаете, почему множество всех подмножеств данного множества A обозначается через 2^A?

20. Даны множества $A = \{x \in Z \mid x^2 < 10\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Найти также $\overline{B}$, если за универсальное множество взято множество всех цифр.

[1] Разбор этого примера может быть опущен при первом чтении.

21. Чем отличаются друг от друга множества $[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ (отрезок) и $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ (интервал)?

22. Запишите символически высказывание “Множества A и B не пересекаются”.

23. Чем отличается список элементов от множества тех же элементов? Сколько элементов в списке (a, c, b, a) и в множестве $\{a, c, b, a\}$? Верны ли равенства $(a, c, b) = (a, b, c)$ и $\{a, c, b\} = \{a, b, c\}$?

24. Чем считать алфавит: множеством или списком? От чего это зависит?

25. Запишите декартово произведение $A \times B$ множеств $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Сколько в нем элементов?

26. ☺ Каковы заслуги Декарта перед театром?

27. Соотношение может связывать не обязательно два объекта, но и больше. Например, отношение «между» применяется к трем предметам: А находится между В и С. Покажите, что понятие «подарок» описывает некоторое соотношение. Сколько объектов оно связывает?

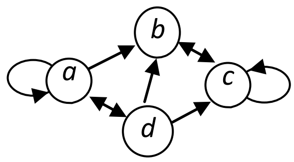
28. Покажите, что определение подмножества (см. стр. 13) является, по сути, определением некоторого отношения. Чем являются аргументы и значения этого отношения?

29. Соотношение задано таблицей (справа). Опишите его с помощью графа и с помощью набора пар.

	1	2	3	4
a	✓			✓
b		✓		
c	✓		✓	

30. Запишите таблицу и граф отношения “<“ для целых чисел от 1 до 5.

31. Отношение задано графом. Опишите его с помощью таблицы.



32. Является ли отображением отношение «брат», т.е. b = брат(a), где a и b – люди? Тот же вопрос, если слово “брат” заменить на “сын”, "муж".

33. В каком порядке можно составить композицию отношений "мама" и "жена"? Чему она равна?

34. Пусть единичное соотношение ρ действует между множествами A и B, а пустое соотношение σ действует между множествами B и A. Чему равны композиции $\rho \circ \sigma$ и $\sigma \circ \rho$?

35. В лингвистике функция $Magn(x)$ означает "высокая степень проявления x". Так, $Magn$(свет) = яркий, $Magn$(звук) = громкий.

а) Найдите значения $Magn$(брюнет), $Magn$(дурак).

б) Будет ли эта функция отображением в строгом смысле слова?

в) Найдите прообраз $Magn^{-1}$(проливной).

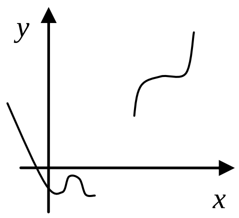
г) Имеет ли $Magn$ обратную функцию?

36. Пусть при проведении эксперимента замерялись два параметра – x и y. Результаты измерений приведены в таблице:

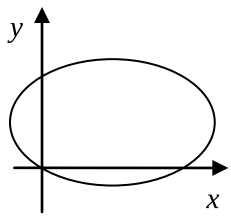
x	1	3	4	2	3	1	4
y	2	7	1	5	5	3	1

Можно ли считать, что параметр y является функцией от параметра x? А наоборот? Почему?

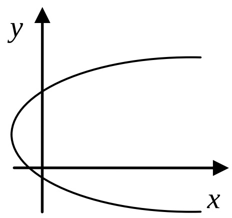
37. Какие из приведенных ниже графиков а) – г) являются графиками функций $y = f(x)$, а какие – нет? Почему?



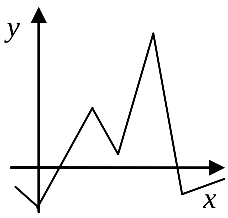
а)



б)



в)



г)

38. Какие еще отображения порождаются информацией на театральном билете (пример 2)?

39. Отображение «годовой доход» описано в тексте не совсем точно. На самом деле, оно имеет не один, а два аргумента. Какие?

40. Последовательность задана формулой $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2n-1}$. Выпишите несколько ее первых членов.

41. Предложите общие формулы для членов последовательностей

а) 1, 3, 5, 7, …

б) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

в) 0, 2, 6, 12, 20, …

42. Продолжите последовательности

а*) 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, …

б**) 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, …

43. Найдите образ множества [–1; 2] при отображении $f(x) = x^2$; прообраз множества [1; 4] при том же отображении.

44. В каком случае дополнение к данному отображению также будет отображением? Тот же вопрос для разности отображений.

45. Пусть K – множество квадратов на плоскости, и $a(K)$ – длина стороны K. Какой смысл у функции $sqr \circ a$? Существует ли функция $a \circ sqr$?

46. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$. Найдите $f \circ f$; $f \circ g$; $g \circ f$; $g \circ g$.

47. Пусть $f(x) = (x^2 + 2)^3$. Каким-нибудь способом представьте ее в виде композиции $f = g \circ h$. Запишите формулы для $h(x)$ и $g(x)$.

48. Какие из отображений, приведенных в примерах (в тексте параграфа), обратимы, а какие – нет?

49. Какая функция будет обратной к функции exp? По определению $\exp(x) = e^x$.

50. Будет ли функция sin обратима на всей прямой? А на каком–либо отрезке? На отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$? Какая функция будет обратной к sin, заданному на этом отрезке?

51. (*) Найдите функции, заданные для положительных чисел, и переводящие произведение аргументов в произведение значений, т.е. являющиеся изоморфизмом множества R^+ с заданным на нем произведением.

52. Числовая функция называется возрастающей, если бóльшие числа она переводит в большие (или равные). Аналогично можно дать определение убывающей функции: функция f называется убывающей, если для всех x и y из области ее определения, таких, что $x \leq y$, выполняется $f(x) \geq f(y)$. И возрастающие, и убывающие функции называются также монотонными. Какой будет композиция двух возрастающих функций? двух убывающих? возрастающей и убывающей?

53. Если в определениях предыдущего упражнения заменить неравенства на строгие, то функция будет называться строго возрастающей (соотв. строго убывающей, строго монотонной). Покажите, что строго монотонная функция всегда обратима.