8. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Будем рассматривать признаки сходимости числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (*)$$

с неотрицательными членами. С несущественными изменениями их можно применять и для исследования сходимости рядов, у которых $a_n \geq 0$, только начиная с некоторого номера.

Признак Коши.

Пусть $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$. Тогда $a_n \leq q^n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, как известно, сходится. Следовательно, ряд $(*)$ также сходится.

Если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ для бесконечного числа номеров, то $a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, ряд $(*)$ расходится.

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$. Тогда, если

а) $\alpha < 1$, то ряд $(*)$ сходится,

б) $\alpha > 1$, то ряд $(*)$ расходится,

в) $\alpha = 1$, то однозначного вывода сделать нельзя, и надо применить другие методы исследования.

Можно взять $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ и вывод сделать такой же, как и выше.

Замечание 1. При применении признака Коши часто используются доказанные в прошлом семестре соотношения: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ $(c > 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. Тогда, если

а) $\alpha < 1$, то ряд $(*)$ сходится,

б) $\alpha > 1$, то ряд $(*)$ расходится,

в) $\alpha = 1$, то однозначного вывода сделать нельзя, и надо применить другие методы исследования.

Замечание 2. Попытавшись применить признак Коши в предельной форме или признак Даламбера к исследованию сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, мы всегда получаем $\alpha = 1$, что не позволяет сделать никакие выводы о сходимости.

Интегральный признак. Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ — монотонная функция, и $a_n = f(n)$. Тогда ряд $(*)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пример (№ 2578). Здесь $a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$. Вычислим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, 1000^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Согласно признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.