Дифференциальное исчисление в *Rn*

Повторение (дифференцирование на прямой)

Если функция удовлетворяет соотношению

$$f(x) = f(x_0) + C(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0$$

при некотором значении $C \in \mathbb{R}$, говорят, что она **дифференцируема** в точке x_0, а выражение $df = C(x - x_0)$ называют её **дифференциалом**. При этом $C = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ называется производной.

Теорема Ферма. Пусть в точке a функция имеет (локальный) максимум и дифференцируема. Тогда ее производная в этой точке равна 0.

Теорема. Пусть функция f дважды дифференцируема в точке x, причем $f'(a) = 0$, тогда

- при $f''(a) > 0$ в точке x – минимум;
- при $f''(a) < 0$ в точке x – максимум;
- если $f''(a) = 0$ требуется дополнительное исследование.

Можно ли перенести эти понятия и теоремы на многомерный случай?

В одномерном случае дифференцируемость и существование производной – равносильные понятия. В многомерном случае это не так. Более того, само понятие «производная» не переносится на функции от нескольких переменных.

Однако понятие дифференциала хорошо переносится.

Пример. $z = (x + y)^3 - 2x$. Придадим аргументам приращения Δx, Δy, тогда

$$\Delta z = (x + \Delta x + y + \Delta y)^3 - 2(x + \Delta x) - ((x + y)^3 - 2x) =$$
$$= 3(x + y)^2(\Delta x + \Delta y) + 3(x + y)(\Delta x + \Delta y)^2 + (\Delta x + \Delta y)^3 - 2\Delta x =$$
$$= (3(x + y)^2 - 2)\Delta x + 3(x + y)^2\Delta y + \cdots$$

В оставшихся слагаемых приращения Δx и Δy находятся в высших степенях, то есть малы по сравнению с первыми степенями (если устремить их к 0).

Выписанные слагаемые образуют главную часть приращения и является дифференциалом функции.

Рассмотрим точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и приращение $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$. Приращение функции $f(x)$ – это разность

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Определение. Говорят, что функция f **дифференцируема** в точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, если ее приращение можно представить в виде

$$\Delta f = C_1 \Delta x_1 + C_2 \Delta x_2 + \dots + C_n \Delta x_n + R$$

1) $R = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$

или

2) $R = \alpha(x) \cdot \|\Delta x\|$

где функции $\alpha_i(x)$, $\alpha(x)$ стремятся к 0 при $\Delta x \to 0$.

Два варианта представления остатка равносильны. Можно сказать, что первый соответствует «равномерному» подходу, а второй – «евклидову».

В примере выше обозначим $\rho = \|(\Delta x, \Delta y)\|$, $\Delta x = \rho \cos\varphi$, $\Delta y = \rho \sin\varphi$, тогда

$$R = \rho^2 (3(x + y)(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 + \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)^3)$$

Выражение в скобках ограничено, поэтому $\alpha(x) = R/\rho$ стремится к 0.

Дифференциал и частные производные

Итак, дифференциал функции от n переменных можно представить в виде $df = C_1\Delta x_1 + C_2\Delta x_2 + \cdots + C_n\Delta x_n$. Как связаны коэффициенты C_i с функцией f? Зафиксируем все аргументы, кроме одного, например, x_1, тогда функцию можно рассматривать как функцию одного аргумента, $g(x_1) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Рассмотрим приращение только по одному аргументу, $\Delta x = (\Delta x_1, 0, \dots, 0)$. Тогда формула для приращения примет вид

$$\Delta g = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1\Delta x_1 + \alpha_1\Delta x_1$$

где $\alpha_1(x)$ стремится к 0 при $\Delta x \to 0$. Это – определение дифференцируемой функции от одного аргумента, поэтому $C_1 = g'(x_1)$.

Эту производную называют **частной производной** функции f по первому аргументу. Обозначения:

$$f'_{x_1}, f'_1, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \partial_{x_1} f, \partial_1 f$$

Заметьте, что для обозначения частной производной используется специальное круглое *d*, которое в системах набора уравнений называется *partial*, то есть «частичный, частный».

Мы показали, что дифференцируемая функция имеет частные производные по всем переменным и ее дифференциал можно записать в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

где через dx_i, как и в одномерном случае, обозначены приращения переменных, $dx_i = \Delta x_i$. Как мы видим, в многомерном случае (частную) производную нельзя представить в виде отношения дифференциалов, обозначение $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ не является дробью.

Проверим формулу для нашего примера. Имеем $z = (x + y)^3 - 2x$, тогда $z'_x = 3(x + y)^2 - 2$, $z'_y = 3(x + y)^2$. Значит,

$$dz = (3(x + y)^2 - 2)dx + 3(x + y)^2 dy$$

Замечание. Для вычисления дифференциала можно использовать все формулы, которые мы вывели для него в одномерном случае. Например,

$$dz = d((x + y)^3) - 2dx = 3(x + y)^2 d(x + y) - 2dx =$$
$$= 3(x + y)^2 (dx + dy) - 2dx = (3(x + y)^2 - 2)dx + 3(x + y)^2 dy$$

Арифметические свойства дифференциала

Определение дифференциала через o-малое аналогично такому же для функции одной переменной. Поэтому для дифференциала в этом случае выполняются обычные арифметические свойства.

Пример. $z = x^2y$, $dz = d(x^2)y + x^2dy = 2xydx + x^2dy$. Тот же результат получим с помощью частных производных. Более того, можно выписать частные производные из этого равенства, как коэффициенты при dx и dy: $z'_x = 2xy$, $z'_y = x^2$.

Немного сложнее, чем в одномерном случае, выглядит формула для дифференциала сложной функции. Например, пусть $z = f(x, y)$ и $x = x(u, v), y = y(u, v)$. Придадим приращение исходным переменным u, v, $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$. Тогда

$$\Delta x = dx + \alpha\rho = x'_u du + x'_v dv + \alpha_1 du + \alpha_2 dv \to 0 \text{ при } \rho \to 0$$

$$\Delta y = dy + \beta\rho = y'_u du + y'_v dv + \beta_1 du + \beta_2 dv \to 0 \text{ при } \rho \to 0$$

$$\Delta z = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

где $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $\rho \to 0$. Окончательно получаем

$$\Delta z = f'_x \cdot (x'_u du + x'_v dv) + f'_y \cdot (y'_u du + y'_v dv) +$$
$$+ f'_x \cdot (\alpha_1 du + \alpha_2 dv) + \gamma_1 \Delta x + f'_y \cdot (\beta_1 du + \beta_2 dv) + \gamma_2 \Delta y = +$$
$$= f'_x \cdot (x'_u du + x'_v dv) + f'_y \cdot (y'_u du + y'_v dv) + R$$

Причем каждое слагаемое в R содержит хотя бы одну из бесконечно малых $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$, умноженную на du или dv. Значит, выписанные слагаемые являются дифференциалом сложной функции $z(u, v)$.

Группируя слагаемые с одинаковыми дифференциалами, получим формулы для частных производных:

$$z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u; \quad z'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v$$

Замечание. В отличие от функций одной переменной, производная сложной функции не разбивается в произведение производных.

На практике эти формулы применять не обязательно. Можно заменить их идеей инвариантности дифференциала первого рода.

Пример. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Можно считать, что u есть функция от одной переменной, скажем, $t = x^2 + y^2 + z^2$

$$du = \frac{dt}{t} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Аналогичный прием можно применить, если функция задана уравнением.

Пример. $z = f(x, y)$ – функция, удовлетворяющая уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. В силу инвариантности первого дифференциала мы можем продифференцировать это тождество, не заботясь о том, что здесь функция, а что – переменная:

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \implies dz = -\frac{xdx + ydy}{z};\ z'_x = -\frac{x}{z};\ z'_y = -\frac{y}{z}.$$

При желании можно подставить сюда вместо z его значение, то есть $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ или $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Производные по направлению

При изучении пределов и непрерывности мы ввели понятие предела функции по направлению. Аналогично можно поступить и с производной. Будем считать, что приращение аргумента лежит на некотором луче. Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – единичный вектор и $\Delta x = ta, t \geq 0$. В этом случае можно рассмотреть функцию от одной переменной t,

$$g(t) = f(x_1 + ta_1, x_2 + ta_2, \dots, x_n + tx_n)$$

Ее производная в нуле и называется производной функции f по направлению a, f'_a.

Предположим, что функция f дифференцируема в точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда

$$\Delta g = f(x_1 + ta_1, x_2 + ta_2, \dots, x_n + ta_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} ta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} ta_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} ta_n + R =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n \right) t + R$$

где $R = o(t), t \to 0$. Итак,

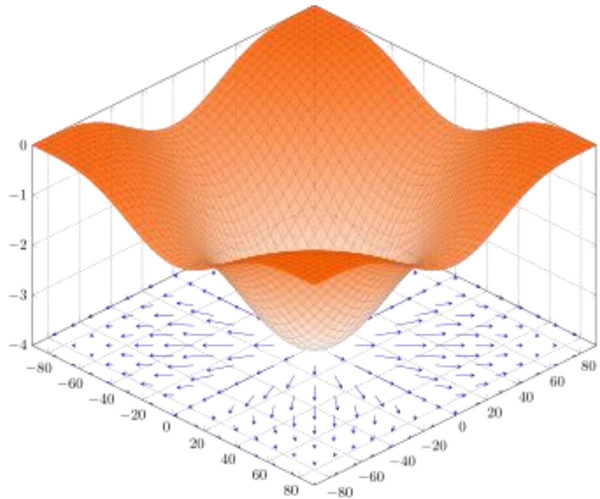
$$f'_a = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n$$

Это равенство можно рассматривать как скалярное произведение вектора a и вектора из частных производных. Такой вектор называют **градиентом** функции,

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Итак, $f'_a = (grad\ f, a)$. Градиент обозначают ещё буквой набла, ∇, то есть $\nabla f \equiv grad\ f$.

На картинке в каждой точке (x, y) показано направление градиента.



Контрольное задание. Покажите, что градиент – это направление наиболее быстрого возрастания функции.

Пример. Мы уже нашли дифференциал функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, он имеет вид $du = \frac{2xdx+2ydy+2zdz}{x^2+y^2+z^2}$. Частные производные – это коэффициенты при дифференциалах. Тогда

$$\nabla u = \frac{(2x, 2y, 2z)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2\vec{r}}{r^2}$$

где через $\vec{r}$ обозначен вектор (x, y, z), а через r^2 – его скалярный квадрат.

Геометрическая интерпретация

Как известно, производная является угловым коэффициентом касательной. Дифференциал функции одной переменной – это приращение касательной.

Аналогично ведет себя производная по направлению. То есть у дифференцируемой функции есть касательная по каждому направлению. Как выглядит множество таких касательных?

Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – некоторая точка, в которой функция дифференцируема, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – единичный вектор направления и $\Delta x = at, t \geq 0$. Как мы показали ранее, производная по направлению будет равна

$$\partial_a f = \frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n$$

Касательная по направлению будет иметь вид

$$Y = f(x^0) + \partial_a f \cdot t = f(x^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n\right) t =$$

$$= f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n =$$

$$= f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - x_n^0) = f(x^0) + df$$

Мы получили уравнение, линейное относительно x_i, то есть уравнение плоскости[1]. Итак, все касательные в точке лежат в одной плоскости (касательной плоскости к графику функции).

---

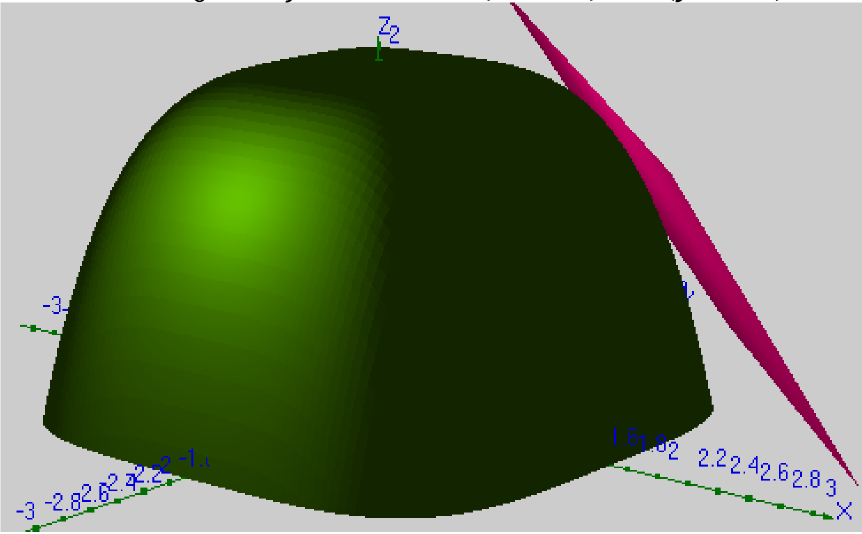
[1] Точнее, гиперплоскости, то есть векторного пространства размерности n – 1.

Пример. Пусть функция задана формулой $z = 2 - (x^4 + y^4)/4$. В точке $(x_0, y_0) = (1; 1)$ значение функции равно 1,5. Для построения касательной плоскости найдем df в точке (x_0, y_0). Имеем

$$df = -x^3 dx - y^3 dy|_{x=1, y=1} = -dx - dy = -(x-1) - (y-1)$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z = z_0 + df = 1{,}5 - (x-1) - (y-1) = -x - y + 3{,}5$$



Существование дифференциала

В одномерном случае дифференцируемость равносильна существованию производной. Возникает вопрос: достаточно ли для дифференцируемости функции нескольких переменных существования ее частных производных? Или производных по любому направлению?

Как и в случае с пределом, ответ отрицательный. Требование дифференцируемости является более сильным, чем существование производных.

Однако при дополнительных условиях на частные производные они обеспечивают существование дифференциала.

Теорема. Пусть в окрестности точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ у функции f существуют все частные производные $\partial_{x_i} f$, причем они непрерывны в точке x. Тогда функция дифференцируема в этой точке.

Доказательство проведём на примере функции от двух переменных. Пусть $z = f(x, y)$, частные производные f'_x, f'_y непрерывны в окрестности $U(x, y)$ точки (x, y). Рассмотрим приращение $(\Delta x, \Delta y)$ настолько малое, что оно не выводит точку из этой окрестности. Имеем

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$
$$= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$
$$= f'_x(c, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, d)\Delta y$$

Мы применили формулу конечных приращений Лагранжа. Здесь c, d – некоторые промежуточные точки.

В силу непрерывности частных производных имеем

$f'_x(c, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(x, y)$, $f'_y(x, d) = f'_x(x, y) + \beta(x, y)$

где $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ стремятся к 0 при $(\Delta x, \Delta y) \to (0; 0)$. Для приращения получаем формулу

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(x, y)\Delta x + \beta(x, y)\Delta y$$

что и означает, что функция f дифференцируема.

Старшие дифференциалы и производные

Дифференциал функции сам является функцией от тех же переменных. И ещё от независимых переменных dx_i. Поэтому от него можно снова взять дифференциал (если он существует). При этом будем считать dx_i параметрами, то есть они в каждый момент просто константы. При втором дифференцировании приращения переменных задаются теми же самыми величинами dx_i.

Обозначение второго дифференциала: $d(df) = d^2 f$, читается «дэ два эф». Запишем его для случая функции от двух переменных.

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

Если каждая из частных производных дифференцируема, то ее дифференциал можно записать аналогичной формулой:

$$d^2 f = d(\partial_x f)dx + d\left(\partial_y f\right)dy =$$
$$= \left(\partial_x \partial_x f dx + \partial_y \partial_x f dy\right)dx + \left(\partial_x \partial_y f dx + \partial_y \partial_y f dy\right)dy =$$
$$= \partial_x \partial_x f dx^2 + (\partial_y \partial_x f + \partial_x \partial_y f)dxdy + \partial_y \partial_y f dy^2$$

Мы видим, что в данном выражении участвуют вторые частные производные, как по одной и той же переменной, так и смешанные.

Более компактная запись:

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + \left(f''_{xy} + f''_{yx}\right)dxdy + f''_{yy}dy^2$$

Напомним, что выражение dx^2 означает $(dx)^2$, а не $d(x^2)$. Обозначение f''_{xy} означает, что сначала взяли производную по x, а от нее по y.

Пример. $z = x^3y - 2xy^2 + 3x$. Найдём её вторые производные.

$$z'_x = 3x^2y - 2y^2 + 3;\ z'_y = x^3 - 4xy$$

$$z''_{xx} = 6xy;\ z''_{xy} = 3x^2 - 4y;$$

$$z''_{yx} = 3x^2 - 4y;\ z''_{yy} = -4x$$

Как мы видим, смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} совпадают. Это, конечно, не случайно. В большинстве случаев (при соблюдении некоторых естественных требований) смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

Приведем соответствующие утверждения без доказательства.

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке

$(x; y)$. Тогда ее производные f''_{xy} и f''_{yx} совпадают между собой.

Теорема 2. Пусть в точке $(x; y)$ у функции $f(x, y)$ существуют и непрерывны производные f''_{xy} и f''_{yx}. Тогда они совпадают между собой.

Ясно, что аналогичное свойство верно при перестановке порядка частных производных в смешанных производных любого порядка.

Итак, второй дифференциал можно переписать в виде

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

Аналогично, третий дифференциал через производные запишется как

$$d^3 f = f'''_{xxx} dx^3 + 3 f'''_{xxy} dx^2 dy + 3 f'''_{xyy} dx dy^2 + f'''_{yyy} dy^3$$

Чтобы не писать много x и штрихов, применяют такое обозначение:

$$f'''_{xxx} = f^{(3)}_{x^3};\ f'''_{xxy} = f^{(3)}_{x^2 y}$$

В силу независимости от порядка дифференцирования, достаточно указать, сколько производных взято по x и сколько по y.

Общая формула будет похожа на бином Ньютона:

$$d^n f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(n)}_{x^k y^{n-k}}\, dx^k dy^{n-k}$$

Здесь мы применили так называемую операторную запись. Выражение в скобках является оператором, то есть отображением одних функций в другие. «Произведение» двух операторов означает их последовательное применение. Такое «умножение» в общем случае не коммутативно.

Степень оператора возникает, если мы применяем его несколько раз.

Аналогично можно записать старшие дифференциалы для функций большего числа переменных.

Формула Тейлора в дифференциалах

Формулу Тейлора можно перенести на функции многих переменных, однако выглядеть она будет достаточно громоздко. Однако, используя понятие дифференциала, можно записать ее более компактно.

Пусть функция f достаточное число раз дифференцируема в окрестности точки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Обозначим разность

$$x - a = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$$

через $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$. Тогда

$$f(x) = f(a) + df + \frac{1}{2}d^2 f + \dots + \frac{1}{n!}d^n f + R_n$$

где $R_n = o(\|\mathrm{d}x\|^n)$

Например, для функции двух переменных имеем

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x \cdot (x - a) + f'_y \cdot (y - b) +$$

$$+\frac{1}{2}(f''_{xx} \cdot (x - a)^2 + 2f''_{xy} \cdot (x - a)(y - b) + f''_{yy} \cdot (y - b)^2) + R_2$$

Второй дифференциал является квадратичной формой от dx, dy. Этот факт можно использовать при изучении поведения функции.

Теоремы о неявно заданной функции

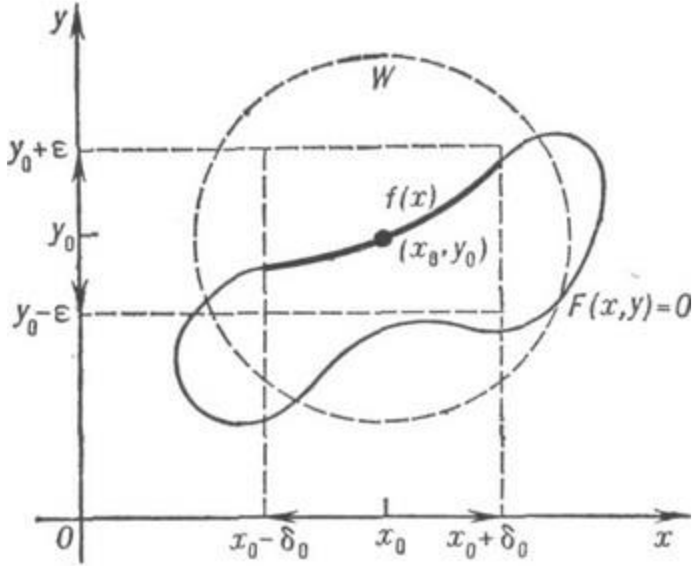
Мы уже рассматривали выше функцию, заданную уравнением: $z = f(x, y)$ – одно из решений уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Возникает вопрос, при каких условиях подобное уравнение разрешимо? Единственное ли у него решение? Будет ли оно непрерывно или дифференцируемо?

В данном случае для каждой точки (x, y) такой, что $x^2 + y^2 < a^2$ существует ровно два решения уравнения, $z_1 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ или $z_2 = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. При $x^2 + y^2 = a^2$ такое решение одно, $z = 0$. Если не накладывать дополнительных условий, то в каждой точке можно выбрать для z любое из значений z_1, z_2. Однако полученная функция не будет непрерывной. Ясно, что непрерывных решений будет два, они и описаны формулами.

Заметим, что практически любая точка сферы лежит на графике одного из этих решений. Кроме точек экватора. Во-первых, решение с экватора нельзя продолжить вовне круга $x^2 + y^2 < a^2$. Во-вторых, продолжить его можно двумя способами, и вниз, и вверх. Итак, точки экватора – особые точки для неявно заданной функции.

Вспомним, что обратимость функции тесно связана с ее монотонностью. А на экваторе, при $z = 0$, функция $z^2 + C$ не является монотонной.

Подробно описывать все теоремы с доказательствами достаточно долго, дадим только идею рассуждения.



Сначала рассмотрим одномерный случай, то есть уравнение $F(x, y) = 0$. Пусть F непрерывна как функция двух переменных и монотонна по y при любом x в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

На картинке изображен одномерный случай, здесь y ищется как функция от x. В прямоугольнике функция F монотонна по y. Например, выше точки (x_0, y_0) она положительна, ниже – отрицательна. По локальному свойству непрерывной функции такие же знаки F имеет на сторонах некоторого малого прямоугольника: на верхней стороне – положительна, на нижней – отрицательна. Тогда она обращается в 0 где-то между верхней и нижней сторонами. В силу монотонности F на каждой «вертикали» такая точка (x, y) единственна. Это и означает, что y является функцией от x. Можно показать, что эта функция непрерывна.

Аналогично разбирается случай большего числа переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, функцию F считаем непрерывной. Предположим, что мы нашли какое-то решение этого уравнения, а именно, (x_0, y_0, z_0), причем F монотонна по z в окрестности этой точки. Для определенности – она строго возрастает. Тогда $F(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon) < F(x_0, y_0, z_0) = 0 < F(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$. В силу непрерывности F это же соотношение выполняется в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то есть

$$F(x,y,z_0-\varepsilon)<0; F(x,y,z_0+\varepsilon)>0$$

Но тогда, по свойству непрерывной функции, в некоторой промежуточной точке между $z_0-\varepsilon$ и $z_0+\varepsilon$ функция $F(x,y,z)$ обращается в 0. В силу монотонности функции F по z такая точка на этом промежутке единственная.

Рассуждение дает идею доказательства следующего утверждения:

Теорема 1 о неявной функции. Пусть функция $F(x,y,z)$ обращается в 0 в точке (x_0,y_0,z_0), непрерывна в окрестности этой точки и *монотонна* по z при фиксированных x,y. Тогда в достаточно малой окрестности точки (x_0,y_0) существует непрерывная функция $z=f(x,y)$, такая, что $F(x,y,f(x,y))=0$ и $f(x_0,y_0)=z_0$.

Монотонность функции можно проверить с помощью производной. Кроме того, ограничения на гладкость F дают возможность сделать и f достаточно гладкой.

Теорема 2 о неявной функции. Пусть функция $F(x,y,z)$ обращается в 0 в точке (x_0,y_0,z_0), дифференцируема в окрестности этой точки и ее частная производная $\frac{\partial F}{\partial z}$ непрерывна и не обращается в 0 в точке (x_0, y_0, z_0).

Тогда в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) существует дифференцируемая функция $z = f(x, y)$, такая, что $F(x, y, f(x, y)) = 0$ и $f(x_0, y_0) = z_0$.

Заметим, что дифференциал функции f можно найти, опираясь на свойство инвариантности формы первого дифференциала. Действительно, в силу того, что $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$, это равенство можно продифференцировать,

$$0 = dF(x, y, f(x, y)) = F'_x dx + F'_y dy + F'_z df$$

откуда

$$df = -\frac{F'_x dx + F'_y dy}{F'_z}$$

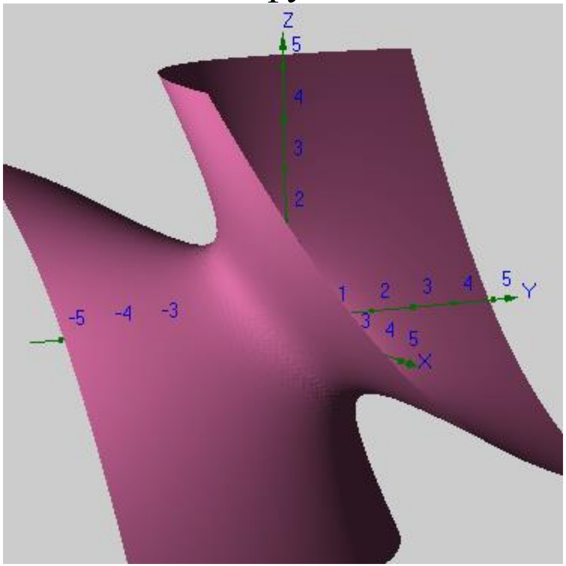
Деление допустимо, так как по предположению $F'_z \neq 0$.

Применим это правило к уравнению сферы.

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \implies dz = -\frac{xdx + ydy}{z};\ z'_x = -\frac{x}{z};\ z'_y = -\frac{y}{z}.$$

При желании можно подставить сюда вместо z его значение. Эти равенства не имеют смысла при $z = 0$, т.е. на экваторе сферы.

Точки экватора – это точки склейки двух решений, точки «ветвления» неявной функции.



Пример. Рассмотрим поверхность, задаваемую уравнением

$$xy + yz + zx + z^2/2 = 1$$

Здесь $F(x, y, z) = xy + yz + zx + \frac{z^2}{2} - 1$ так что $F'_z = y + x + z$. Это выражение обращается в 0 на плоскости $y + x + z = 0$. Пересечение этой плоскости с исходной поверхности дает кривую, на которой расположены особые точки (в данном случае – точки склейки решений)