Известия Тульского государственного университета
Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 19–33
Математика

УДК 517.956

Интегральное представление решения одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода с положительным параметром

А. М. Нигмедзианова

Аннотация. Строится фундаментальное решение для многомерного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода с положительным параметром. Дается интегральное представление решения уравнения.

Ключевые слова: многомерное вырождающееся эллиптическое уравнение первого рода с положительным параметром, фундаментальное решение.

1. Введение

Пусть E_p^+ — полупространство $x_p > 0$ p-мерного евклидова пространства точек $x = (x^{'}, x_p), x^{'} = (x_1, x_2, ..., x_{p-1})$, D-конечная область в E_p^+, ограниченная открытой частью Γ_0 гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью Γ.

Рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение с положительным параметром вида:

$$T(U) = x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} + \lambda^2 x_p^m U = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $p \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Фундаментальные решения, интегральные представления, а также решения основных краевых задач (внутренняя и внешняя задачи Дирихле, Неймана и **N**) для многомерных вырождающихся эллиптических уравнений:

$$x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2} + \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2} + x_p^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0,$$

были рассмотрены автором ранее [1]-[4].

Вопрос об изучении многомерных эллиптических уравнений с отрицательным параметром

$$x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} - \lambda^2 x_p^m U = 0$$

был также рассмотрен автором ранее [5].

Вопрос об изучении многомерных эллиптических уравнений с положительным параметром до последнего времени оставался открытым.

2. Фундаментальное решение

Обозначим через $C_0^\infty(\mathrm{E}_p^+)$ множество всех бесконечно дифференцируемых и финитных в E_p^+ функций.

Определение. Функция $\mathcal{E}(x, x_0)$ называется фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0 \in \mathrm{E}_p^+$, если она удовлетворяет условиям:

1) для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathrm{E}_p^+)$, такой, что $x_0 \in \operatorname{supp} \varphi(x)$, имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathrm{E}_p^+} \mathcal{E}(x, x_0)\ T[\varphi(x)]dx = -\varphi(x_0);$$

2) она является решением уравнения (1) во всех точках E_p^+ за исключением точки $x_0 \in \mathrm{E}_p^+$.

С помощью замены переменных по формулам

$$\xi_j = x_j, \quad j = \overline{1, p-1}, \qquad \xi_p = \frac{2}{m+2} x_p^{\frac{m+2}{2}} \tag{2}$$

уравнение (1) приводится к эллиптическому уравнению с отрицательным параметром

$$\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_j^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_p^2}+\frac{m}{m+2}\frac{1}{\xi_p}\frac{\partial U}{\partial\xi_p}+\lambda^2 U=0. \tag{3}$$

Ясно, что $0<\frac{m}{m+2}<1$ при $m>0$.

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$U(\xi)=V(r), \tag{4}$$

где $r=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p}\xi_i^2}$.

Подставляя функцию (4) в уравнение (3), получаем

$$V''+\frac{p-1+\beta}{r}V'+\lambda^2 V=0, \tag{5}$$

где $\beta=\frac{m}{(m+2)}$. Ясно, что $0<\beta<1$ при $m>0$.

Умножая уравнение на r^2, получаем

$$r^2V''+(p-1+\beta)\,rV'+\lambda^2r^2V=0. \tag{6}$$

С помощью замены переменных по формулам

$$V(r)=\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{-\frac{p-2+\beta}{2}}W(t),\quad r=\frac{t}{\lambda} \tag{7}$$

уравнение (6) сводится к уравнению Бесселя

$$t^2W''+tW'+\left(t^2-\nu^2\right)W=0,$$

где $\nu=\frac{p-2+\beta}{2}$. Известно [6], что общее решение уравнения (8) имеет вид

$$W(t)=C_1J_\nu(t)+C_2Y_\nu(t), \tag{8}$$

где $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ – функции Бесселя первого и второго родов соответственно, C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Возвращаясь в (8) к переменной r, с учетом формул (7) получим частное решение уравнения (5):

$$V(r)=ar^{-\nu}\left(C_1J_\nu(\lambda r)+C_2Y_\nu(\lambda r)\right), \tag{9}$$

где a – нормирующая постоянная.

Известно [6], что при $r\to\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$V(r)=O\left(r^{-\nu-\frac{1}{2}}\right). \tag{10}$$

Из разложения функций $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ в степенной ряд следует, что решение (9) может быть представлено в виде

$$V(r)=\frac{a\ 2^\nu\Gamma(\nu)}{\pi}r^{-2\nu}+\psi(r), \tag{11}$$

где $\psi(r)$ – функция, имеющая в начале координат особенность вида $r^{-2\gamma}$ $(\gamma<\nu)$.

Функция (11) является решением уравнения (5) и имеет в начале координат степенную особенность вида $r^{-2\nu}$.

Для получения решения уравнения (3) с особенностью в точке ξ_0 применим к функции (11) оператор обобщенного сдвига $T_\xi^{\xi_0}$:

$$\mathcal{G}(\xi;\xi_0)=\frac{a\ 2^\nu\Gamma(\nu)C_\beta}{\pi}\int\limits_0^\pi\Big(|\xi'-\xi_0'|^2+\xi_p^2+\xi_{p_0}^2-2\xi_p\xi_{p_0}\cos\varphi\Big)^{-\nu}\sin^{\beta-1}\varphi d\varphi+$$

$$+\psi^*(\xi;\xi_0), \tag{12}$$

где $C_\beta^{-1}=\int\limits_0^\pi\sin^{\beta-1}\varphi d\varphi=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{\beta+1}{2}\right)$, $\psi^*(\xi;\xi_0)$ – регулярная в точке ξ_0 функция.

Докажем, что интеграл (12) имеет степенную особенность в точке ξ_0. Для этого рассмотрим в (12) подынтегральную функцию

$$\Big(|\xi'-\xi_0'|^2+\xi_p^2+\xi_{p_0}^2-2\xi_p\xi_{p_0}\cos\varphi\Big)^{-\nu}=\Big(|\xi'-\xi_0'|^2+\xi_p^2+\xi_{p_0}^2-2\xi_p\xi_{p_0}+$$

$$+2\xi_p\xi_{p_0}(1-\cos\varphi))^{-\nu}=\left(r_{\xi\xi_0}^2+4\xi_p\xi_{p_0}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-\nu},\ \text{где } r_{\xi\xi_0}^2=\sum_{j=1}^p(\xi_j-\xi_{j_0})^2.$$

Тогда интеграл в (12) запишем в виде

$$\mathcal{J}=\int\limits_0^\pi\Big(|\xi'-\xi_0'|^2+\xi_p^2+\xi_{p_0}^2-2\xi_p\xi_{p_0}\cos\varphi\Big)^{-\nu}\sin^{\beta-1}\varphi d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left(r_{\xi\xi_0}^2+4\xi_p\xi_{p_0}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-\nu}\sin^{\beta-1}\varphi d\varphi= \tag{13}$$

$$=(\xi_p\xi_{p_0})^{-\nu}\int\limits_0^\pi\left(\omega^2+4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-\nu}\sin^{\beta-1}\varphi d\varphi,$$

где $\omega^2 = \frac{r^2_{\xi\xi_0}}{\xi_p \xi_{p_0}}$. Разность между интегралом (13) и интегралом

$$(\xi_p \xi_{p_0})^{-\nu} \int\limits_0^{\pi} \varphi^{\beta-1} \left(\omega^2 + \varphi^2\right)^{-\nu} d\varphi$$

является регулярной функцией от ξ, даже в точке ξ_0, когда $r_{\xi\xi_0} = 0$, т.е. $\omega = 0$. Обозначим ее через $\Phi(\xi, \xi_0)$. Тогда интеграл $\mathcal{J}$ можно представить в виде

$$\mathcal{J} = (\xi_p \xi_{p_0})^{-\nu} \int\limits_0^{\pi} \varphi^{\beta-1} \left(\omega^2 + \varphi^2\right)^{-\nu} d\varphi + \Phi(\xi, \xi_0).$$

Проводя в этом интеграле замену переменной по формуле $\varphi = \omega\eta$, получим

$$\mathcal{J} = (\xi_p \xi_{p_0})^{-\nu} \omega^{2-p} \int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} \eta^{\beta-1} \left(1 + \eta^2\right)^{-\nu} d\eta + \Phi(\xi, \xi_0) =$$

$$= (\xi_p \xi_{p_0})^{-\nu} \frac{r^{2-p}_{\xi\xi_0}}{(\xi_p \xi_{p_0})^{\frac{2-p}{2}}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} \eta^{\beta-1} \left(1 + \eta^2\right)^{-\nu} d\eta + \Phi(\xi, \xi_0) =$$

$$= (\xi_p \xi_{p_0})^{-\frac{\beta}{2}} r^{2-p}_{\xi\xi_0} \int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} \eta^{\beta-1} \left(1 + \eta^2\right)^{-\nu} d\eta + \Phi(\xi, \xi_0).$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\mathcal{J} = (\xi_p \xi_{p_0})^{-\frac{\beta}{2}} r^{2-p}_{\xi\xi_0} \int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} \eta^{\beta-1} \left(1 + \eta^2\right)^{-\nu} d\eta + \Phi(\xi, \xi_0) =$$

$$= (\xi_p \xi_{p_0})^{-\frac{\beta}{2}} r^{2-p}_{\xi\xi_0} \int\limits_0^{\infty} \eta^{\beta-1} \left(1 + \eta^2\right)^{-\nu} d\eta -$$

$$- (\xi_p \xi_{p_0})^{-\frac{\beta}{2}} r^{2-p}_{\xi\xi_0} \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}}^{\infty} \eta^{\beta-1} \left(1 + \eta^2\right)^{-\nu} d\eta + \Phi(\xi, \xi_0) = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 + \Phi(\xi, \xi_0).$$

С помощью известной формулы [7]

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{(p + qx^{\nu})^{n+1}} = \frac{1}{\nu p^{n+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right) \Gamma\left(n + 1 - \frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma(n+1)}, \quad 0 < \frac{\mu}{\nu} < n + 1,$$

интеграл $\mathcal{J}_1$ запишется в виде

$$\mathcal{J}_1 = (\xi_p \xi_{p_0})^{-\frac{\beta}{2}}\, r_{\xi\xi_0}^{2-p} \int\limits_0^\infty \eta^{\beta-1}\left(1+\eta^2\right)^{-\nu} d\eta = (\xi_p \xi_{p_0})^{-\frac{\beta}{2}}\, r_{\xi\xi_0}^{2-p}\, \frac{1}{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}.$$

Разлагая подынтегральную функцию интеграла $\mathcal{J}_2$ в степенной ряд, получим

$$\eta^{\beta-1}\left(1+\eta^2\right)^{-\nu} = \eta^{\beta-1}\eta^{-2\nu}\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)^{-\nu} = \eta^{1-p}\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)^{-\nu} =$$
$$= \eta^{1-p}\left[1 - \frac{\nu}{2}\eta^{-2} + \frac{\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{2!}\eta^{-4} - \frac{\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\left(\frac{\nu}{2}+2\right)}{3!}\eta^{-6} + \ldots\right] =$$
$$= \eta^{1-p} - \frac{\nu}{2}\eta^{-(p+1)} + \frac{\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{2!}\eta^{-(p+3)} - \frac{\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\left(\frac{\nu}{2}+2\right)}{3!}\eta^{-(p+5)} + \ldots.$$

Ясно, что этот ряд сходится равномерно в промежутке $[\pi/\omega, \infty)$, поэтому его можно интегрировать в этом промежутке почленно. В результате имеем

$$\mathcal{J} = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\beta}{2}\right)}{2\Gamma(\nu)} (\xi_p \xi_{p_0})^{-\frac{\beta}{2}}\, r_{\xi\xi_0}^{2-p} + \Phi_1(\xi, \xi_0),$$

где $\Phi_1(\xi, \xi_0)$ – регулярная в точке ξ_0 функция. Отсюда и из (12) следует, что

$$\mathcal{G}(\xi;\xi_0) = \frac{a\; 2^{\nu}\Gamma(\nu) C_\beta}{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\beta}{2}\right)}{2\Gamma(\nu)} (\xi_p \xi_{p_0})^{-\frac{\beta}{2}}\, r_{\xi\xi_0}^{2-p} + \Phi_2(\xi;\xi_0). \tag{14}$$

Возвращаясь в (14) к переменной x, с учетом формул (2) и значений $\nu = \frac{p-2+\beta}{2}$, $\beta = \frac{m}{(m+2)}$, имеем

$$\mathcal{E}(x;x_0) = \frac{a\; 2^{\nu-1-\beta} C_\beta (m+2)^\beta}{\pi} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right) (x_p x_{p_0})^{-\frac{m}{4}}\, \rho_{xx_0}^{2-p} + \mathcal{E}^*(x;x_0) =$$
$$= \widetilde{\mathcal{E}}(x, x_0) + \mathcal{E}^*(x, x_0), \tag{15}$$

где $\rho_{xx_0} = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j_0})^2 + \left(\frac{2}{m+2}\right)^2\left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2}$, $\mathcal{E}^*(x, x_0)$ – регулярная функция в E_p^+.

Из формул (10) следует, что при $\rho_{xx_0} \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\mathcal{E}(x;x_0) = O\left(\rho_{xx_0}^{-\nu-1/2}\right).$$

Докажем, что при определенном значении постоянной a функция (15) удовлетворяет равенству (1) и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (T) с особенностью в точке $x_0 \in E_p^+$. Для этого введем формулы Грина для оператора T.

Обозначим через $C^n(D)$ множество n раз непрерывно дифференцируемых функций в D.

Пусть функции $U \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $V \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что имеет место тождество

$$VT[U] + \left(x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_p} \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x_p^m V \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_p} \left(V \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) + \lambda^2 x_p^m UV.$$

Интегрируя обе части этого тождества по области D и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\int\limits_D VT[U]dx + \int\limits_D \left(x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_p} \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) dx =$$

$$= \int\limits_\Gamma VA[U]d\Gamma + \lambda^2 \int\limits_D x_p^m UV dx, \tag{16}$$

где $A[U] = x_p^m \sum\limits_{j=1}^{p-1} \cos(n, x_j) \frac{\partial U}{\partial x_j} + \cos(n, x_p) \frac{\partial U}{\partial x_p}$ – конормальная производная, n – единичный вектор внешней нормали к границе. Формула (16) называется первой формулой Грина для оператора T.

Меняя местами U и V в формуле (16), имеем

$$\int\limits_D UT[V]dx + \int\limits_D \left(x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial U}{\partial x_p} \frac{\partial V}{\partial x_p} \right) dx =$$

$$= \int\limits_\Gamma UA[V]d\Gamma + \lambda^2 \int\limits_D x_p^m UV dx.$$

Вычитая это равенство из (16), получаем

$$\int\limits_D [VT[U] - UT[V]]dx = \int\limits_\Gamma [VA[U] - UA[V]]\, d\Gamma. \tag{17}$$

Формула (17) называется второй формулой Грина для оператора T.

Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathrm{E}_p^+)$, $x_0 \in \operatorname{supp}\varphi(x)$ — фиксированная точка, $S_{x_0\varepsilon}$ — сфера с центром в точке x_0 и радиуса ε такого, что $S_{x_0\varepsilon} \subset \mathrm{E}_p^+$, $S_R^+ = \{x \in \mathrm{E}_p^+ : |x| = R, x_p > 0\}$ — полусфера в E_p^+ с центром в начале координат, такая, что $\operatorname{supp}\varphi \subset Q_R^+$, где Q_R^+ — полушар в E_p^+ с центром в начале координат и радиуса R. Через $Q_{\varepsilon R}^+$ обозначим область, ограниченную полусферой S_R^+, сферой $S_{x_0\varepsilon}$ и частью гиперплоскости $x_p = 0$.

Применяя к функциям (15) и $\varphi(x)$ вторую формулу Грина в области $Q_{\varepsilon R}^+$, получаем

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon R}^+} [\mathcal{E}(x,x_0)T[\varphi(x)] - \varphi(x)T[\mathcal{E}(x,x_0)]]dx =$$
$$= \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} [\mathcal{E}(x,x_0)\overline{A}[\varphi(x)] - \varphi(x)\overline{A}[\mathcal{E}(x,x_0)]]dS_{x_0\varepsilon},$$

где $\overline{A}$ — внутренняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$.

Так как в $Q_{\varepsilon R}^+$ $T[\mathcal{E}(x,x_0)] = 0$, то последняя формула может быть записана следующим образом:

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_{\varepsilon R}^+} \mathcal{E}(x,x_0)T[\varphi(x)]dx = \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} [-\mathcal{E}(x,x_0)A[\varphi(x)] + \varphi(x)A[\mathcal{E}(x,x_0)]]dS_{x_0\varepsilon} = \\ = -\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \mathcal{E}(x,x_0)A[\varphi(x)]dS_{x_0\varepsilon} + \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)A[\mathcal{E}(x,x_0)]dS_{x_0\varepsilon} = I'_\varepsilon + I''_\varepsilon,\end{gathered} \tag{18}$$

где A — внешняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$.

Вычислим пределы при $\varepsilon \to 0$ двух интегралов в правой части последней формулы. Ясно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I'_\varepsilon = 0$. Вычислим предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла

$$\begin{gathered}I''_\varepsilon = \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)A[\mathcal{E}(x,x_0)]dS_{x_0\varepsilon} = -(p-2)\frac{a\ 2^{\nu-1-\beta}C_\beta(m+2)^\beta}{\pi}\times \\ \times\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)(x_{p_0})^{-\frac{m}{4}} \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)\rho_{xx_0}^{1-p}A[\rho_{xx_0}]x_p^{-\frac{m}{4}}\,dS_{x_0\varepsilon} + J''_\varepsilon.\end{gathered} \tag{19}$$

Также нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J''_\varepsilon = 0. \tag{20}$$

Вычислим предел интеграла

$$\begin{gathered}J'_\varepsilon = -(p-2)\frac{a\ 2^{\nu-1-\beta}C_\beta(m+2)^\beta}{\pi}\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)(x_{p_0})^{-\frac{m}{4}}\times \\ \times\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)\rho_{xx_0}^{1-p}A[\rho_{xx_0}]x_p^{-\frac{m}{4}}\,dS_{x_0\varepsilon}\end{gathered}$$

при $\varepsilon \to 0$. Вычисляя конормальную производную $A[\rho_{xx_0}]$ и пользуясь формулой Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$, получаем

$$J'_\varepsilon = -(p-2)\frac{a\ 2^{\nu-1-\beta}C_\beta(m+2)^\beta}{\pi}\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)\frac{(x_{p_0})^{-\frac{m}{4}}}{\varepsilon}\times$$

$$\times\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)\frac{x_p^m\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j_0})^2 + (x_{p_0} + \theta(x_p - x_{p_0}))^{\frac{m}{2}}\,x_p^{\frac{m}{2}}(x_p - x_{p_0})^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j_0})^2 + (x_{p_0} + \theta(x_p - x_{p_0}))^m(x_p - x_{p_0})^2\right)^{\frac{p}{2}}}x_p^{-\frac{m}{4}}\,dS_{x_0\varepsilon}.$$

Переходя в этих интегралах к обобщенной сферической системе координат

$$\begin{cases} x_1 = x_{1_0} + r\sin\phi_1\sin\phi_2\ldots\sin\phi_{p-2}\sin\phi_{p-1}, \\ x_2 = x_{2_0} + r\cos\phi_1\sin\phi_2\ldots\sin\phi_{p-2}\sin\phi_{p-1}, \\ x_3 = x_{3_0} + r\cos\phi_2\ldots\sin\phi_{p-2}\sin\phi_{p-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p-1} = x_{p-1_0} + r\cos\phi_{p-2}\sin\phi_{p-1}, \\ x_p = x_{p_0} + r\cos\phi_{p-1}, \end{cases}$$

$(\ 0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \phi_1 < 2\pi;\ 0 \leqslant \phi_\nu \leqslant \pi; \nu = 2, \ldots, p-1\ )$ и учитывая, что элемент поверхности сферы представляется в виде $dS_{x_0\varepsilon} = \varepsilon^{p-1}\sin\varphi_2\ldots$ $\ldots\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_1\ldots d\varphi_{p-1}$, имеем

$$J'_\varepsilon = -(p-2)\frac{a\ 2^{\nu-1-\beta}C_\beta(m+2)^\beta}{\pi}\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)\frac{(x_{p_0})^{-\frac{m}{4}}}{\varepsilon}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2\int\limits_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}\ d\varphi_{p-2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\varphi(x_{1_0} + \varepsilon\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{p-1}, \ldots, x_{p_0} + \varepsilon\cos\varphi_{p-1})\times$$

$$\times\frac{(x_{p_0} + \varepsilon\cos\varphi_{p-1})^m\varepsilon^2\sin^2\varphi_{p-1}}{\left(\varepsilon^2\sin^2\varphi_{p-1} + (x_{p_0} + \theta\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^m\varepsilon^2\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}}+$$

$$+\frac{(x_{p_0} + \varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{\frac{m}{2}}(x_{p_0} + \theta\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{\frac{m}{2}}\varepsilon^2\cos^2\varphi_{p-1}}{\left(\varepsilon^2\sin^2\varphi_{p-1} + (x_{p_0} + \theta\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^m\varepsilon^2\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}}\times$$

$$\times(x_{p_0} + \varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{-\frac{m}{4}}\varepsilon^{p-1}\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}.$$

Сократив на ε^{p+1} и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$J' = -(p-2)\frac{a\,2^{\nu-1-\beta}C_\beta(m+2)^\beta}{\pi}\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)(x_{p_0})^{\frac{m}{2}}\varphi(x_0)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1\ldots$$

$$\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}\,d\varphi_{p-2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^m\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}},$$

где $J' = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} J'_\varepsilon$.

Учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}\;d\varphi_{p-2} = \frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(\frac{p-1}{2})}$ ([8], с. 62), имеем

$$J' = -(p-2)a\,2^{\nu-\beta}C_\beta(m+2)^\beta\Gamma(\beta/2)\pi^{\frac{p-3}{2}}\,(x_{p_0})^{\frac{m}{2}}\,\varphi(x_0)\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^m\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}}. \tag{21}$$

Преобразуем последний интеграл в (21):

$$I = \int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^m\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}} = 2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^m\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}} =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^{p-2}\varphi_{p-1}d(\operatorname{tg}\varphi_{p-1})}{\left(\operatorname{tg}^2\varphi_{p-1}+x_{p_0}^m\right)^{\frac{p}{2}}} =$$

$$= 2\,x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{tg}\varphi_{p-1})^{p-2}d((x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{tg}\varphi_{p-1})}{\left((x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{tg}\varphi_{p-1})^2+1\right)^{\frac{p}{2}}}.$$

Используя замену

$$\begin{aligned}&x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\operatorname{tg}\varphi_{p-1} = t,\\ &\varphi_{p-1} = 0,\quad t = 0,\\ &\varphi_{p-1} = \frac{\pi}{2},\quad t = \infty,\end{aligned}$$

получаем

$$I = 2x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{p-2}dt}{(1+t^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

С помощью известной формулы

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{(p+qx^\nu)^{n+1}} = \frac{1}{\nu p^{n+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma(n+1)}, \quad 0<\frac{\mu}{\nu}<n+1,$$

имеем

$$I = 2x_{p_0}^{-\frac{m}{2}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Подставляя полученное выражение в (21), имеем

$$J' = -(p-2)a\; 2^{\nu-\beta}C_\beta(m+2)^\beta\pi^{\frac{p-2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\varphi(x_0). \qquad (22)$$

Находим нормирующую константу:

$$a = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(p-2)2^{\nu-\beta}\pi^{\frac{p-3}{2}}(m+2)^\beta\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}. \qquad (23)$$

Следовательно, имеет место следующее предельное соотношение:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)A[\mathcal{E}(x,x_0)]dS_{x_0\varepsilon} = -\varphi(x_0). \qquad (24)$$

Переходя к пределу в (18) при $\varepsilon\to 0$ и $R\to\infty$, с учетом (23), предельных соотношений (20), (22) и финитности функции $\varphi(x)$, получаем (1).

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке x_0 представляется в виде

$$\mathcal{E}(x,x_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(p-2)\;2\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}(x_p x_{p0})^{-\frac{m}{4}}\,\rho_{xx_0}^{2-p} + \mathcal{E}^*(x;x_0),$$

где $\mathcal{E}^*(x,x_0)$ – регулярная функция в E_p^+.

Нетрудно доказать, что для фундаментального решения $\mathcal{E}(x,x_0)$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(\xi,x) = O\left(x_p^{-\frac{m}{4}-(p-2)\frac{m+2}{2}}\right) \quad \text{при} \quad x_p\to 0,\\ \frac{\partial\mathcal{E}(\xi,x)}{\partial x_p} = O\left(x_p^{-\frac{m}{4}-1-(p-2)\frac{m+2}{2}}\right) \quad \text{при} \quad x_p\to 0,\\ \frac{\partial\mathcal{E}(\xi,x)}{\partial x_p} = O\left(x_p^{-\frac{m}{4}-(p-1)\frac{m+2}{2}}\right) \quad \text{при} \quad \xi_p\to 0,\end{gathered} \qquad (25)$$

$$\mathcal{E}(x,x_0) = O\left(\rho_{x0}^{-(p-2)}\right),\; A[\mathcal{E}(x,x_0)] = O\left(\rho_{x0}^{-p}\right), \quad r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}\to\infty,$$

где
$$\rho_{x0}^2=\sum_{j=1}^{p-1}x_j^2+\left(\frac{2}{m+2}\right)^2 x_p^{m+2}.$$

3. Интегральное представление решения уравнения (1) и вытекающие из него свойства

Пусть функция $U(x)\in C^2(D)\cap C_0^1(\overline{D})$ — решение уравнения (1) в области D.

Зададим в области D произвольную точку x_0. Вырежем эту точку шаром $Q_{x_0\varepsilon}$. Радиус ε возьмем столь малым, чтобы шар $Q_{x_0\varepsilon}$ целиком находился внутри области D. В области $D_\varepsilon=D\setminus\overline{Q}_{x_0\varepsilon}$ фундаментальное решение $\mathcal{E}(x,x_0)$ уравнения (1) принадлежит классу $C^2(D_\varepsilon)\cap C_0^1(\overline{D_\varepsilon})$ и в силу (25) удовлетворяет условию
$$\frac{\partial\mathcal{E}(x,x_0)}{\partial x_p}\Big|_{x_p=0}=0. \tag{26}$$

Применяя к функциям $U(x)$ и $\mathcal{E}(x,x_0)$ вторую формулу Грина для оператора T в области D_ε, с учетом условия (26) получим
$$\begin{aligned}&\int\limits_\Gamma[\mathcal{E}(x,x_0)A[U(x)]-U(x)A[\mathcal{E}(x,x_0)]]d\Gamma=\\ &=\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}[\mathcal{E}(x,x_0)A[U(x)]-U(x)A[\mathcal{E}(x,x_0)]]dS_{x_0\varepsilon}=I_{1\varepsilon}-I_{2\varepsilon}.\end{aligned} \tag{27}$$

Ясно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}I_{1\varepsilon}=0$. Интеграл $I_{2\varepsilon}$ имеет такой же вид, что и интеграл (19). Аналогично доказательству, проведенному для этого интеграла,
$$\lim_{\varepsilon\to0}I_{2\varepsilon}=-U(x_0). \tag{28}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$ в формуле (27), с учетом (28) получаем
$$\int\limits_\Gamma[\mathcal{E}(x,x_0)A[U(x)]-U(x)A[\mathcal{E}(x,x_0)]]d\Gamma=U(x_0). \tag{29}$$

Из интегрального представления (29) вытекают следующие свойства решений уравнения (1):

1^0. Существуют решения $U(x)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющие условию
$$U(x)=O\left(x_p^{-\frac{m}{4}-(p-2)\frac{m+2}{2}}\right)\quad \text{при}\quad x_p\to0. \tag{30}$$

2^0. Существуют решения $U(x)$ уравнения (1) в области $D_e = \mathrm{E}_p^+ \backslash \overline{D}$, удовлетворяющие условию

$$U(x) = O\left(\rho_{x0}^{-(p-2)}\right) \text{ при } r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2} \to \infty,$$

где

$$\rho_{x0}^2 = \sum_{j=1}^{p-1} x_j^2 + \frac{4}{(m+2)^2} x_p^{m+2}.$$

3^0. Принцип максимума, вытекающий из интегрального представления (29), сформулируем в виде теоремы:

Теорема (принцип максимума). *Пусть* $U \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ *— решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (30), *тогда функция* $U(x)$ *достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений на границе* Γ, *если она тождественно не равна нулю.*

Доказательство. Пусть функция $U \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ удовлетворяет уравнению (1), условию (30) и достигает своего наибольшего положительного значения U_0 в некоторой внутренней точке $M_0(x_0)$ области D, т.е. существует δ-окрестность $Q_{x_0\delta}$ точки x_0 (шар), где

$$U(x) \ < \ U(x_0) \ = \ U_0 \quad x \neq x_0 \quad , \quad U(x) > 0. \tag{31}$$

Полагая в интегральном представлении (29) $\Gamma = S_{x_0\delta}$, где $S_{x_0\delta}$ — сфера с центром в точке x_0 радиуса δ, получаем

$$U(x_0) = \int\limits_{S_{x_0\delta}} \mathcal{E}(x, x_0) A[U(x)] dS_{x_0\delta} - \int\limits_{S_{x_0\delta}} U(x) A[\mathcal{E}(x, x_0)] dS_{x_0\delta} = I_{1\delta} + I_{2\delta}. \tag{32}$$

Здесь конормаль A — внешняя по отношению к сфере $S_{x_0\delta}$, $\mathcal{E}(x, x_0) > 0$ и $U(x) > 0$ в силу (31), поэтому $A[U(x)] < 0$, $A[\mathcal{E}(x, x_0)] < 0$ и, следовательно, $I_{1\delta} < 0$ и $I_{2\delta} > 0$.

В силу (24)

$$\lim_{\delta\to 0} I_{1\delta} = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{S_{x_0\delta}} \mathcal{E}(x, x_0) A[U(x)] dS_{x_0\delta} = 0,$$

$$\lim_{\delta\to 0} I_{2\delta} = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{S_{x_0\delta}} U(x) A[\mathcal{E}(x, x_0)] dS_{x_0\delta} = U(x_0) = U_0.$$

Значит, при $\delta \to 0$ $I_{1\delta}$ возрастая стремится к нулю, а $I_{2\delta}$ возрастая стремится к U_0. Отсюда следует, что

$$I_{1\delta} < 0, \quad I_{2\delta} < U_0. \tag{33}$$

Заменяя в правой части формулы (32) во втором интеграле $U(x)$ на U_0 и учитывая оценки (33), получаем $U_0 < I_{2\delta} < U_0$, т.е. $U_0 \neq U_0$.

Полученное противоречие доказывает справедливость первого утверждения теоремы. Второе утверждение доказывается переходом от U к $-U$. При этом наименьшее отрицательное значение переходит в наибольшее положительное значение.

Следствие. Если функция $U \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (30), то

$$|U(x)| \leqslant \max_{x_0 \in \Gamma} |U(x_0)|,\ x \in D.$$

В частности, если $U(x)\Big|_{\Gamma} = 0$, то $U(x) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Список литературы

1. *Нигмедзянова А. М.* Решение основных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений методом потенциалов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань, 2007.
2. *Нигмедзянова А. М.* Исследование основных краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения методом потенциалов // Изв. вузов. Математика. 2007. №1 (536). С.34–44.
3. *Нигмедзянова А. М.* Интегральное представление решения одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып.2. С.72–82.
4. *Нигмедзянова А. М.* Решение краевых задач **N** для одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода методом интегральных уравнений // Изв. Смоленского государственного университета. 2012. Вып.4. С.363–374.
5. *Нигмедзянова А. М.* Интегральное представление решения одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода с отрицательным параметром // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып.1. С.28–42.
6. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч.1. М.: ИЛ, 1949.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
8. *Тиман А. Ф., Трофимов В. Н.* Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1966.

Нигмедзянова Айгуль Махмутовна (aigmani@rambler.ru), к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Integrated representation of the solution of one multidimensional degenerating elliptic equation of the first kind with positive parameter

A. M. Nigmedzianova

Abstract. The fundamental solution for the multidimensional degenerating elliptic equation of the first kind with positive parameter is under construction. Integrated representation of the solution of the equation is given.

Keywords: multidimensional degenerating elliptic equation of the first kind with positive parameter, fundamental solution.

Nigmedzianova Aigul (aigmani@rambler.ru), candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, department of higher mathematics and mathematical design, Institute of mathematic and mechanic after N.I. Lobachevsky, Kazan (Volga Region) Federal University.

Поступила 01.08.2014