Казанский государственный университет

Механико-математический факультет
Кафедра аэрогидромеханики

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Учебное пособие к курсу
"Обратные краевые задачи механики жидкости и газа"
Часть I

К А З А Н Ь – 2 0 0 5

УДК 517.9

Печатается по решению учебно-методической комиссии механико-математического факультета Казанского государственного университета от 03.11.2005, протокол № 2.

Н.Б.Ильинский, Д.Ф.Абзалилов. Математические основы обратных краевых задач. Учебное пособие к курсу “Обратные краевые задачи механики жидкости и газа”, часть I. – Казань, Изд.-во УНИПРЕСС. 2005 г. – 56 с.

Методическое пособие основано на курсе лекций, читаемых Н.Б.Ильинским на протяжении 20-ти последних лет, предназначено студентам-механикам III–V курсов механико-математического факультета.

Рецензент – профессор Л.А.Аксентьев

Содержание

Используемые аббревиатуры и обозначения

ОКЗ — обратная краевая задача

ПКЗ — прямая краевая задача

СОКЗ — смешанная обратная краевая задача

ТФКП — теория функций комплексного переменного

$z = x + iy$ — комплексная координата физической плоскости

$C = A + iB$ — комплексная постоянная

$w = \varphi + i\psi$ — искомая функция

$\zeta = \rho e^{i\gamma}$ — комплексная координата канонической плоскости

D_z — область в плоскости z

L_z — граница D_z

D_w, D_ζ — образы D_z в плоскостях w и ζ

L_w, $L_\zeta = e^{i\gamma}$ — образы L_z в плоскостях w и ζ, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$

ℓ — периметр L_z

L — периметр L_w

s — дуговая абсцисса контура L_z, $0 \leqslant s \leqslant \ell$

σ — дуговая абсцисса контура L_w, $0 \leqslant \sigma \leqslant L$

$\omega(\zeta)$ — аналитическая функция, отображающая D_ζ на D_w

$\chi(\zeta) = \xi + i\eta = \ln \dfrac{dz}{d\zeta}$ — аналитическая функция

$\xi(\gamma) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma}) = \ln \left| \dfrac{ds}{d\gamma} \right|$ — действительная часть $\chi(\zeta)$ на L_ζ

Введение

Спецкурс “Обратные краевые задачи механики жидкости и газа” (сокращенно “ОКЗ МЖГ”) состоит из трех разделов.

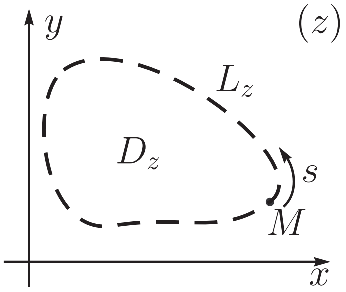
1. Математические основы ОКЗ.
2. ОКЗ аэрогидродинамики (ОКЗА).
3. ОКЗ теории фильтрации и теории взрыва.

Настоящий курс лекций посвящен изложению материала сравнительно молодого научного направления, основные достижения которого относятся к таким областям науки, как математика и механика. Существенные результаты по разработке этого направления принадлежат казанским механикам и математикам и, в первую очередь, профессорам Г.Г.Тумашеву и М.Т.Нужину [1], а также их многочисленным последователям (см., напр., [2]) и ученикам.

К настоящему времени в основном создана математическая теория ОКЗ для аналитических функций. И эта теория нашла применение в таких разделах науки, как теория фильтрации [3], теория взрыва [4], гидро- и аэродинамика [5], теория удара, магнитостатика, электростатика, электрохимическая обработка металлов. Опубликованы сотни работ как в нашей стране, так и за рубежом.

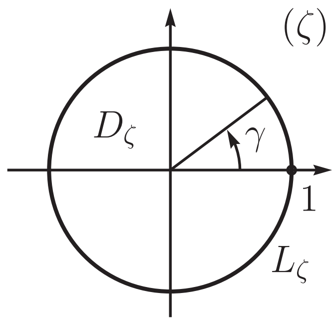
Краткая историческая справка

Впервые ОКЗ как чисто математическую задачу в 1929 г. сформулировал Д.П.Рябушинский (русский аэрогидромеханик, одаренный ученый, богатый московский купец, выделил Н.Е.Жуковскому средства на строительство первой аэродинамической трубы, эмигрировал во Францию в 1919 г.). Задача Рябушинского ставится следующим образом. Функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (т. е. является гармонической) в области D_z, форма которой неизвестна. Требуется определить форму области и саму функцию по заданным на границе значениям этой функции и величины ее нормальной производной в виде функций дуговой абсциссы s. Математическая формулировка имеет следующий вид:



$$\begin{aligned} \triangle\varphi &= 0, \\ \varphi|_{L_z} &= G(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \ell, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{L_z} &= H(s), \\ L_z =? \qquad & \varphi(x,y)|_{D_z} =? \end{aligned}$$

Рябушинский лишь поставил эту задачу. Б.Демченко в 1933 г. решил ее, но лишь после видоизменения постановки. Он ввел в рассмотрение каноническую область в плоскости ζ – единичный круг $|\zeta| < 1$ и снес граничные условия на его границу $\zeta = e^{i\gamma}$. Математическая формулировка задачи Демченко приобрела вид:



$$\begin{aligned} \triangle\varphi &= 0, \\ \varphi|_{L_z} &= g(\gamma), \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{L_z} &= h(\gamma), \\ L_z =? \qquad & \varphi(x,y)|_{D_z} =? \end{aligned}$$

Формулировки задач Рябушинского и Демченко не эквивалентны. Дело в том, что связь между дуговой абсциссой s и параметром γ до решения задачи не определяется.

После Демченко чисто математическими ОКЗ никто не занимался вплоть до 1946 г.

В 1946 г. М.Т.Нужин дал общую постановку ОКЗ, сформулировав ее как задачу для аналитических функций. Им разработана классификация ОКЗ, разработаны методы их решения, рассмотрены вопросы единственности и устойчивости. Вскоре к исследованиям математической теории ОКЗ присоединились С.Н.Андрианов и Ф.Д.Гахов (1952 г.), В.С.Рогожин (1953 г.), Л.А.Аксентьев и Р.Б.Салимов (1957 г.)

1 Сущность прямых и обратных краевых задач

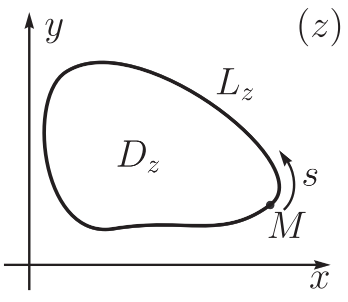
Для того, чтобы выяснить и понять содержание и назначение ОКЗ, а также причины, обусловившие их возникновение, необходимо проанализировать постановку обычных классических прямых краевых задач (ПКЗ).

Под ПКЗ понимают задачи, в которых требуется найти функцию или систему функций, удовлетворяющих в заданной области некоторому дифференциальному уравнению или системе дифференциальных уравнений, а на границе области – заданным условиям.

Рассмотрим некоторые примеры классических ПКЗ.

1.1 Задачи Дирихле, Неймана, Шварца

Проанализируем постановку ПКЗ на примере **задачи Дирихле**. Эта задача формулируется так: *Найти гармоническую в области D_z и непрерывную вплоть до границы L_z функцию $\varphi(x, y)$, которая на L_z принимает заданные непрерывные значения $f(s)$.*



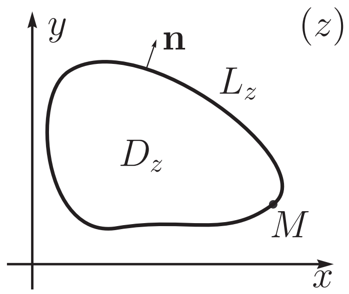
Дано: D_z, L_z,

$\triangle\varphi = 0$ в D_z,

$\varphi|_{L_z} = f(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \ell.$

Найти: $\varphi(x, y)|_{D_z} =?$

В **задаче Неймана** на границе задается не значение искомой функции, а ее нормальной производной:



Дано: D_z, L_z,

$\triangle\varphi = 0$ в D_z,

$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{L_z} = \widetilde{f}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \ell.$

Найти: $\varphi(x, y)|_{D_z} =?$

Задача Шварца ставится для аналитической функции: *Найти аналитическую в области D_z и непрерывную вплоть до границы L_z функцию $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ по известным значениям действительной или мнимой части этой функции на L_z.* Математическая формулировка:

Дано: D_z, L_z,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

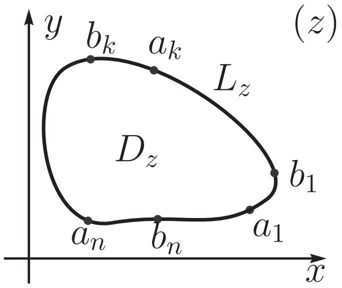
$\varphi|_{L_z} = f(s)$ или $\psi|_{L_z} = \widetilde{f}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \ell.$

Найти: $w(z)|_{D_z} =?$

1.2 Смешанная краевая задача, задача Гильберта

Пусть граница L_z области D_z разбита на $2n$ сегментов точками a_k, b_k, $k = \overline{1, n}$. **Смешанная краевая задача** для аналитической функции формулируется следующим образом: *Найти аналитическую в области D_z и непрерывную на L_z функцию $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ по известной действительной части на сегмен-*

max $(a_k,\ b_k)$, $k = \overline{1,n}$ *и мнимой части на остальной части* L_z.



Дано: $D_z,\ L_z,$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$\varphi|_{L_z} = f(s)$ на $(a_k, b_k),\ k = \overline{1,n},$

$\psi|_{L_z} = \widetilde{f}(s)$ на $(b_k, a_{k+1}),\ a_{n+1} = a_1.$

Найти: $w(z)|_{D_z} = ?$

Линейная **задача Гильберта** для аналитической функции математически формулируется так:

Дано: $D_z,\ L_z,$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$a(s)\varphi(s) + b(s)\psi(s) = c(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \ell,$$

$a(s), b(s), c(s) \in \mathbb{H}$ (усл. Гельдера).

Найти: $w(z)|_{D_z} = ?$

Имеются и другие ПКЗ, например, задача Римана, но мы не будем на них останавливаться.

1.3 Обратная краевая задача

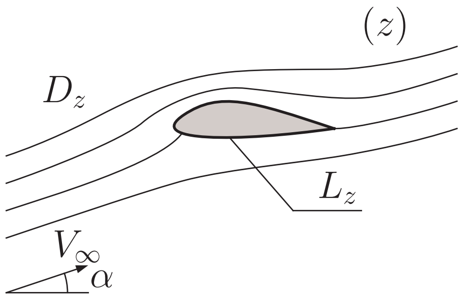
В ПКЗ математической физики как дифференциальное уравнение, так и граничные условия определяются физической сущностью рассматриваемой задачи. Таким образом, постановка ПКЗ и методы их решения призваны к тому, чтобы дать ответ на вопрос, *какими свойствами обладает данная форма области в условиях изучаемого явления.* Примером служит аэродинамический расчет крылового профиля, т. е. определение характера течения вокруг заданного крылового профиля. Очевидно, что такая постановка задач вполне закономерна и целесообразна, если область известна и требуется лишь изучить ее свойства.

Однако на практике часто приходится встречаться с задачами конструктивного характера, т. е. с такими задачами, где речь идет не об изучении готового объекта, а о создании объекта, обладающего наперед заданными свойствами. Например, когда инженер приступает к проектированию крылового профиля, он не имеет наперед заданной формы, а наоборот, стремится найти такую форму, которая обеспечила бы появление потока вокруг него с необходимыми свойствами. Появление таких задач возрастает по мере усиления созидательной деятельности человека.

До появления теории ОКЗ такие задачи решались путем искусственного приведения их к обычной постановке. Для этого, опираясь на имеющийся опыт, выбирают какую-либо форму тела и изучают ее свойства. Если решение не удовлетворяет поставленным требованиям, то изменяют форму тела и снова решают прямую задачу до тех пор, пока не получится решение, близкое к желательному. Такой путь решения задач конструктивного характера нельзя признать удовлетворительным. Для успешного решения таких задач необходимо математически формулировать их так, чтобы форма области была не заданным, а искомым элементом. Задачи в такой постановке получили название обратных.

Под ОКЗ понимают задачи, в которых требуется найти область и функцию (или систему функций), удовлетворяющую в этой области дифференциальному уравнению (или системе уравнений), а на границе области – граничным условиям, которых на *единицу больше, чем в ПКЗ.*

Поясним, как надо изменить постановку задачи, чтобы перейти от прямой задачи к обратной на примере обтекания плоским потенциальным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости непроницаемого крылового профиля.



Прямая пост.:	Обратная пост.:
Дано: L_z,	$\triangle\varphi = 0$ в D_z,
$\triangle\varphi = 0$ в D_z,	$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right\|_{L_z} = 0$,
$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right\|_{L_z} = 0$,	$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}\right\|_{L_z} = f(s)$,
$\varphi\|_{D_z} =?$	$L_z =?$, $\varphi\|_{D_z} =?$

Таким образом, в этой задаче одно из граничных условий, именно $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{L_z} = 0$, вытекает из физической сущности задачи (оно отражает непроницаемость профиля). Второе же условие $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}\right|_{L_z} = f(s)$ остается произвольным (разумеется, с известными ограничениями, связанными в конечном счете с существом задачи). Оно является средством для придания тех свойств, которыми должны обладать искомая область и функция в ней.

2 Необходимые сведения из ТФКП

2.1 Понятия аналитической и регулярной функций

Комплексная в области D_z функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ называется ***аналитической*** *в этой области, если она дифференцируема в каждой точке D_z.*

Если аналитическая функция однозначна в области D_z, то такую функцию называют **регулярной** в D_z.

Точка a называется изолированной **особой точкой** однозначной функции $f(z)$, если существует такая проколотая ε-окрестность $0 < |z-a| < \varepsilon$ этой точки, в которой $f(z)$ дифференцируема.

Существует три вида особых точек:

1. Устранимая особая точка, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

2. Полюс, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, но функцию в некоторой проколотой ε-окрестности точки a можно представить в виде следующего ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-a)^k, \qquad c_{-m} \neq 0.$$

Число m называют порядком полюса. При $m = 1$ полюс называют простым.

3. Существенно особая точка, если предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует.

Необходимыми и достаточными условиями дифференцируемости функции комплексного переменного являются условия Коши-

Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2.2 Условие Гельдера

Пусть L – гладкая кривая, $f(t)$ – некоторая функция точек этой кривой (значения функции могут быть комплексными).

Говорят, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера $f(t) \in \mathbb{H}$ на L, если $\forall\ t_1,\, t_2 \in L \ \ \exists\ A,\, \alpha$ такие, что

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leqslant A|t_2 - t_1|^{\alpha}, \tag{1}$$

где $A > 0$ – постоянная Гельдера, а $\alpha \in (0, 1]$ – показатель Гельдера.

При $\alpha = 1$ условие Гельдера называется условием Липшица (класс $\mathbb{L}$).

Известно, что непрерывность функции заключается в том, что модуль приращения функции $|f(t_2) - f(t_1)|$ может быть сделан сколь угодно малым при уменьшении приращения аргумента $t_2 - t_1$. Вопрос о порядке малости приращения функции по отношению к порядку малости приращения аргумента при этом не рассматривается, этот порядок может быть каким угодно. Условие Гельдера такой порядок устанавливает: приращение функции является малой порядка не ниже α относительно приращения аргумента.

Видно, что класс гельдеровских (т. е. удовлетворяющих условию Гельдера) функций является подклассом непрерывных функций ($\mathbb{C}$). Действительно, если $|t_2 - t_1| \to 0$, то из условия (1) следует, что $|f(t_2) - f(t_1)|$ не превышает $|t_2 - t_1|^{\alpha} \to 0$, т. е. $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$.

Условие дифференцируемости является более сильным, чем условие Гельдера. Если $f(t)$ дифференцируема, т. е. $\exists$ конечная производная $f'(t)$ $\forall t \in [t_1, t_2]$, то из формулы Лагранжа о конечном приращении получим

$$|f(t_2) - f(t_1)| = |f'(\xi)| \cdot |t_2 - t_1| \leqslant \max_{\xi \in [t_1, t_2]} f'(\xi) \cdot |t_2 - t_1|.$$

Таким образом, если $f(t)$ дифференцируема ($f(t) \in \mathbb{C}^1$), то она удовлетворяет условию Липшица. Обратное неверно. Например, функция $f(t) = |t|$ на отрезке $t \in [-1, 1]$ удовлетворяет условию Липшица, но при $t = 0$ не дифференцируема.

Имеет место следующий порядок классов функций:

$$\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{C}.$$

2.3 Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого

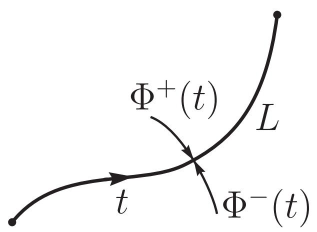
Пусть L – гладкий (т. е. без точек самопересечений, угловых точек и точек возврата) замкнутый или незамкнутый контур, расположенный целиком в конечной части плоскости z, $f(t)$ – непрерывная функция (может быть комплексной), где t – комплексная координата, принадлежащая L. Тогда интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

построенный так же, как интеграл Коши, называется **интегралом типа Коши**. Функция $f(\tau)$ называется плотностью интеграла типа Коши, а $1/(\tau - z)$ – его ядром.

Интеграл типа Коши является аналитической функцией во всей плоскости z (на бесконечности $\lim\limits_{z\to\infty}\Phi(z)=0$), за исключением самого контура L, где интеграл становится особым и существует лишь в смысле главного значения по Коши, если $f(\tau)\in\mathbb{H}$.

Пусть $f(t)\in\mathbb{H}$. Для вычисления $\Phi(z)$ на контуре L используют формулы Сохоцкого



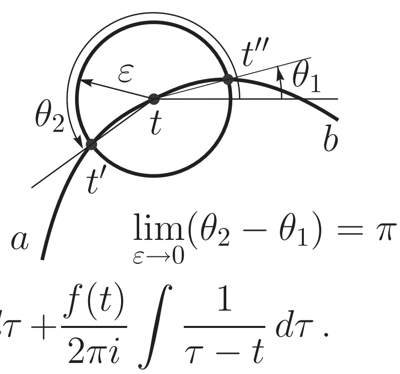
$$\begin{cases} \Phi^+(t) = \dfrac{1}{2}f(t) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \dfrac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau, \\ \Phi^-(t) = -\dfrac{1}{2}f(t) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \dfrac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau. \end{cases} \tag{2}$$

2.4 Главное значение интеграла типа Коши на границе

Главным значением интеграла типа Коши на границе называется предел

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_a^{t'} \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \int\limits_{t''}^{b} \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right].$$

Докажем, что если $f(t)\in\mathbb{H}$ на L, то в формулах Сохоцкого (2) интегралы существуют в смысле главного значения по Коши. Рассмотрим интеграл



$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}\,d\tau}_{J_1} + \underbrace{\frac{f(t)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{\tau-t}\,d\tau}_{J_2}.$$

Так как $f(t) \in \mathbb{H}$, то $|f(\tau) - f(t)| \leqslant A|\tau - t|^{\alpha}$ и

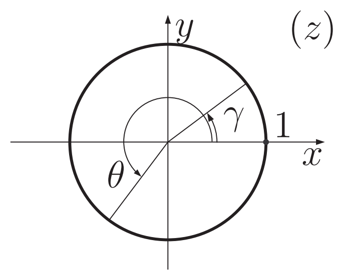
$$|J_1| = \left| \int\limits_L \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t}\, d\tau \right| \leqslant \int\limits_L \frac{|f(\tau) - f(t)|}{|\tau - t|}\, |d\tau| \leqslant A \int\limits_L \frac{|d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha}}.$$

Последний интеграл существует, т. к. показатель степени в знаменателе дроби $0 \leqslant 1 - \alpha < 1$. Второй интеграл также конечен:

$$J_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_a^{t'} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int\limits_{t''}^{b} \frac{d\tau}{\tau - t} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \frac{t' - t}{a - t} + \ln \frac{b - t}{t'' - t} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \frac{b - t}{a - t} + \ln \frac{t' - t}{t'' - t} \right] = \ln \frac{b - t}{a - t} + \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{\varepsilon e^{i\theta_2}}{\varepsilon e^{i\theta_1}} = \ln \frac{b - t}{a - t} + i\pi.$$

2.5 Формула Шварца для круга. Связь между ядрами Коши и Шварца



Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – регулярная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ функция, ее действительная часть на границе $\operatorname{Re} f(z = e^{i\gamma}) = u(\gamma)$ известна и удовлетворяет условию Гельдера $u(\gamma) \in \mathbb{H}$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$. Формула Шварца для круга позволяет найти $f(z)$ в круге по $u(\gamma)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + i\beta, \qquad \beta = \text{const}\,. \tag{3}$$

Решение определяется с точностью до чисто мнимой постоянной. Функцию $u(\theta)$ называют плотностью, а $\dfrac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$ – ядром Шварца.

Выведем формулу для $f(e^{i\gamma})$. Введем комплексную координату $\tau = e^{i\theta}$ точек окружности единичного радиуса. Тогда $d\tau = ie^{i\theta} d\theta$ и

$d\theta = \dfrac{d\tau}{i\tau}$. Рассмотрим ядро Шварца

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{2e^{i\theta}-(e^{i\theta}-z)}{e^{i\theta}-z} = \frac{2\tau}{\tau - z} - 1.$$

Эта формула выражает связь между ядрами Шварца и Коши. Подставим эту связь в формулу (3):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta + i\beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \widetilde{u}(\tau)\frac{2\tau}{\tau - z}\frac{d\tau}{i\tau} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)d\theta + i\beta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\widetilde{u}(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)d\theta + i\beta.$$

При $z \to t = e^{i\gamma}$ для интеграла типа Коши согласно первой формуле Сохоцкого (2) получим

$$f^+(t) = \frac{1}{2}\big[2u(\gamma)\big] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2u(\theta)}{e^{i\theta}-e^{i\gamma}}de^{i\theta} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)d\theta + i\beta.$$

Объединив оба интеграла и произведя сокращение, получим

$$f(e^{i\gamma}) = u(\gamma) + i\left[\frac{-1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta + \beta\right].$$

Интеграл, стоящий в выражении для мнимой части $f(e^{i\gamma})$, называется сингулярным интегралом Гильберта.

Формула (3) при смене знака перед интегралом служит для определения функции, регулярной в области $|z| \geqslant 1$ по известной действительной части $u(\gamma)$ на границе.

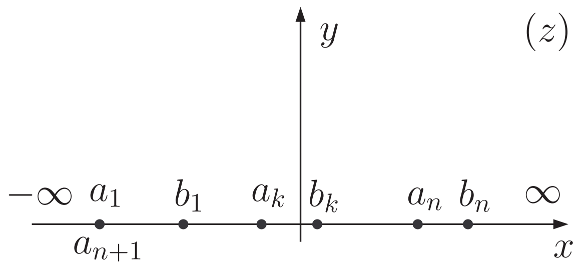
В случае, если требуется определить аналитическую функцию в $|z| \geqslant 1$, имеющую на бесконечности полюс порядка не выше n, используют формулу

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta + \sum_{k=1}^{n}(C_k z^k - \overline{C}_k z^{-k}) + i\beta,$$

где $C_k = A_k + iB_k$, $\overline{C}_k = A_k - iB_k$; A_k, B_k, β – произвольные действительные постоянные.

2.6 Решение смешанной краевой задачи для аналитической функции в полуплоскости. Формула Синьорини

Пусть на вещественной оси x заданы точки $-\infty < a_1 < b_1 < \ldots < a_k < b_k < \ldots < a_n < b_n < \infty$ и пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две действительные функции, которые могут иметь конечное число точек разрыва первого рода.



Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

1. искомая функция $F(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$,
2. на отрезках (a_k, b_k), $k = \overline{1, n}$, известна $\operatorname{Re} F(z) = u(x)$,
3. на отрезках (b_k, a_{k+1}), $a_{n+1} = a_1$, известна $\operatorname{Im} F(z) = v(x)$,
4. функция $F(z)$ ограничена вблизи всех точек a_k, b_k, $k = \overline{1, n}$,
5. предел по точкам верхней полуплоскости $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = u(\infty)$.

Решение этой задачи было дано Синьорини:

$$F(z) = \frac{R(z)}{\pi i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{a_k}^{b_k}\frac{u(\tau)}{R(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + i\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{v(\tau)}{R(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}\right], \qquad (4)$$

где $R(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}$, причем рассматривается та ветвь корня, которая положительна на отрезке (b_n, ∞).

При этом должны выполняться условия разрешимости:

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{a_k}^{b_k} \frac{u(\tau)}{R(\tau)} \tau^{n-1} d\tau + i \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{b_k}^{a_k+1} \frac{v(\tau)}{R(\tau)} \tau^{n-1} d\tau = -\pi i u(\infty), \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{a_k}^{b_k} \frac{u(\tau)}{R(\tau)} \tau^{m} d\tau + i \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{b_k}^{a_k+1} \frac{v(\tau)}{R(\tau)} \tau^{m} d\tau = 0, \qquad m = \overline{0, n-2}.$$

Всего условий разрешимости n. Но если $u(\infty)$ не задано, то условий разрешимости останется $n-1$, а (5) служит для определения этой величины. Таким образом, решение этой задачи существует только при выполнении условий разрешимости.

2.7 Формула Келдыша – Седова

Смешанная краевая задача для аналитической в верхней полуплоскости функции $F(z)$ имеет единственное решение, удовлетворяющее следующим граничным условиям:

1. искомая функция $F(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$,
2. на отрезках (a_k, b_k), $k = \overline{1, n}$, известна $\operatorname{Re} F(z) = u(x)$,
3. на отрезках (b_k, a_{k+1}), $a_{n+1} = a_1$, известна $\operatorname{Im} F(z) = v(x)$,
4. функция $F(z)$ ограничена вблизи всех точек a_k, $k = \overline{1, n}$,
5. интеграл $\int^z F(\tau) d\tau$ ограничен вблизи всех точек b_k,
6. предел по точкам верхней полуплоскости $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = u(\infty)$.

Решение этой задачи было получено Келдышем и Седовым:

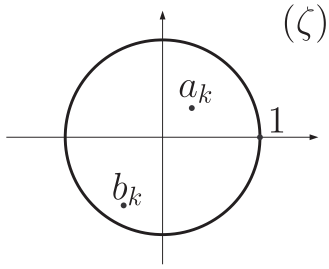
$$F(z)=\frac{g(z)}{\pi i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{u(\tau)}{g(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+i\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{v(\tau)}{g(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}\right]+g(z)u(\infty), \quad (6)$$

где $g(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{z-a_k}{z-b_k}}$, рассматривается ветвь, положительная на интервале (b_n,∞).

Если потребовать ограниченности функции в точках b_k, то получим условия разрешимости, а формула Келдыша – Седова (6) перейдет в формулу Синьорини (4).

2.8 Формула Пуассона – Иенсена

Рассмотрим следующую краевую задачу: в плоскости ζ требуется определить такую функцию $f(\zeta)$, что



1. она аналитична в единичном круге $|\zeta|<1$,
2. в точках a_k, $k=\overline{1,n}$ имеет простые нули,
3. в точках b_j, $j=\overline{1,m}$ имеет простые полюсы,
4. модуль этой функции на границе круга $|f(\zeta)|_{\zeta=e^{i\gamma}}=\Omega(\gamma)$, $0\leqslant\gamma\leqslant 2\pi$, задан и является непрерывной функцией.

Введем функцию $B(\zeta)=\dfrac{\zeta-a_k}{1-\overline{a}_k\zeta}$. Эта функция:

1. преобразует круг единичного радиуса в себя,
2. точка a_k переходит в нуль,
3. ее модуль на границе $|B(\zeta)|_{\zeta=e^{i\gamma}}=1$.

Рассмотрим далее функцию $F(\zeta)=f(\zeta)\prod\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\zeta-b_j}{1-\overline{b}_j\zeta}\Big/\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\zeta-a_k}{1-\overline{a}_k\zeta}$. Эта функция не имеет в круге ни нулей, ни полюсов, т. е. является регулярной. Кроме того, из 3-го свойства функции $B(\zeta)$ следует, что $|F(\zeta)|_{\zeta=e^{i\gamma}} = |f(\zeta)|_{\zeta=e^{i\gamma}} = \Omega(\gamma)$.

Рассмотрим функцию $R(\zeta) = \ln F(\zeta)$. Эта функция также будет регулярной в круге. Ее действительная часть на границе $\operatorname{Re} R(\zeta) = \ln |F(\zeta)| = \ln \Omega(\gamma)$ известна. По формуле Шварца (3) запишем

$$R(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \Omega(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta + i\beta.$$

Следовательно, исходную функцию определим по формуле

$$f(\zeta) = e^{R(\zeta)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\zeta - a_k}{1 - \overline{a}_k \zeta} \Bigg/ \prod_{j=1}^{m} \frac{\zeta - b_j}{1 - \overline{b}_j \zeta}.$$

Эта формула называется формулой Пуассона – Иенсена.

3 Внутренние ОКЗ теории аналитических функций

3.1 Определение основной ОКЗ. Предположения

ОКЗ называется основной, если на границе L_z *искомой области* D_z *заданы значения действительной и мнимой частей аналитической в этой области функции* $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),\ z = x + iy.$ *Требуется найти* L_z*, а затем* $w(z)$ *в* D_z*.*

Или более кратко: *Определить область по заданным на ее границе значениям аналитической функции и затем найти саму функцию.*

Если не налагать на искомую функцию $w(z)$ дополнительных ограничений, то исследование сформулированной основной ОКЗ приводит к большим трудностям. Поэтому в дальнейшем, как правило, будет предполагаться следующее:

1. функция $w(z)$ аналитична в области D_z,
2. $w(z)$ и dw/dz непрерывны в замкнутой области $\overline{D}_z$,
3. $dw/dz \neq 0$ в $\overline{D}_z$,
4. функция $w(z)$ однолистна в $\overline{D}_z$.

3.2 Простейшие ОКЗ и их классификация

Под простейшими ОКЗ понимаются задачи для регулярной функции или функции с одним простым полюсом. Таких задач всего четыре:

1. внутренняя ОКЗ для регулярной функции,
2. внутренняя ОКЗ для функции с простым полюсом,
3. внешняя ОКЗ для регулярной функции,
4. внешняя ОКЗ для функции с простым полюсом.

Сделаем некоторые замечания.

1) В ОКЗ в отличие от ПКЗ существенно различаются внутренние и внешние задачи. Переход от внутренней задачи к внешней (и наоборот) до получения решения в ОКЗ невозможен! В ПКЗ такой переход возможен до построения решения. К примеру, функция $1/z$ отображает внутреннюю область, содержащую точку $z = 0$, во внешнюю и наоборот.

2) При решении ОКЗ наличие полюса у искомой функции не вызывает каких-либо затруднений в решении, т. е. решения ОКЗ для регулярной функции и функции с простым полюсом отличаются лишь незначительными деталями. При решении ПКЗ, наоборот, наличие полюса вызывает определенные трудности.

3) При решении ОКЗ очень важно, функцией какого параметра задаются исходные граничные условия. Такими параметрами могут быть: s – дуговая абсцисса, x, y – координаты, θ – угол наклона касательной к контуру, γ – параметр в канонической области и другие.

От параметра зависит не только метод решения, но и разрешимость задачи. При одном параметре задача может содержать условия разрешимости, а при другом может быть произвол в решении.

В ПКЗ параметр не влияет на решение задачи, т. к. область является известной и переход от одного параметра к другому можно сделать до решения задачи.

3.3 Внутренняя ОКЗ для регулярной функции

Постановка задачи. Итак, надо найти замкнутый контур L_z заданной длины ℓ, ограничивающий конечную область D_z, по заданным на нем условиям:

$$\varphi = f_1(s), \qquad \psi = f_2(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \ell, \tag{7}$$

где s – дуговая абсцисса. Функции $f_j(s)$, $j = 1, 2$ удовлетворяют следующим условиям:

1. функции $f_j(s)$ однозначны,
2. функции $f_j(s)$ дифференцируемы,
3. $f_j(\ell) = f_j(0)$, $f_j'(\ell) = f_j'(0)$,
4. производные $f_j'(s)$ одновременно не обращаются в нуль,
5. производные $f_j'(s)$ удовлетворяют условию Гельдера (1).
6. при любых двух значениях s_1 и s_2 (за исключением точек 0 и ℓ) выполняется условие $\sum\limits_{j=1}^{2} [f_j(s_1) - f_j(s_2)]^2 \neq 0$.

Установление вида области D_w и контура L_z. Соотношения (7) являются параметрическими уравнениями замкнутого (следствие условия 3) контура L_w, ограничивающего конечную (следствие регулярности $w(z)$) область D_w. Функция $w(z)$ конформно отображает D_z на D_w. Контур L_w будет простым, т. е. не имеющим угловых точек и точек возврата (следствие условий 4–5), и также точек самопересечения (следствие условия 6)

Обозначим через $d\sigma$ элемент дуги контура L_w. Тогда

$$d\sigma = \left|\frac{dw}{dz}\right|_{L_z} |dz|_{L_z} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2} ds = \sqrt{f_1'^2(s) + f_2'^2(s)}\, ds.$$

Проинтегрируем это соотношение, приняв $\sigma = 0$ в точке, соответствующей $s = 0$:

$$\sigma(s) = \int\limits_0^s \sqrt{f_1'^2(s) + f_2'^2(s)}\, ds. \qquad (8)$$

Зависимость $\sigma(s)$ является монотонной, т. к. подынтегральное выражение всегда положительно. Вследствие этого существует обратная к ней функция $s = s(\sigma)$, $0 \leqslant \sigma \leqslant L$.

Введение функции $R(w) = \ln \dfrac{dz}{dw}$**, решение в** D_w**.** Рассмотрим вспомогательную функцию

$$R(w) = \ln \frac{dz}{dw}. \qquad (9)$$

В силу принятых условий $\dfrac{dz}{dw}$ будет функцией регулярной в D_w, т. е. не имеющей особенностей и нулей. Следовательно, $R(w) = \ln \dfrac{dz}{dw}$ будет регулярной D_w.

Вещественная часть этой функции на границе известна:

$$P(\sigma) \equiv \operatorname{Re} R(w)|_{L_w} = \ln \left| \frac{dz}{dw} \right|_{L_w} = \ln \frac{ds}{d\sigma}, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant L.$$

Таким образом, мы получили задачу Шварца для R_w в известной области D_w. Следовательно, R_w может быть найдена с точностью до мнимого слагаемого

$$R(w) = \mathbb{S}[P(\sigma)](w) + i\beta,$$

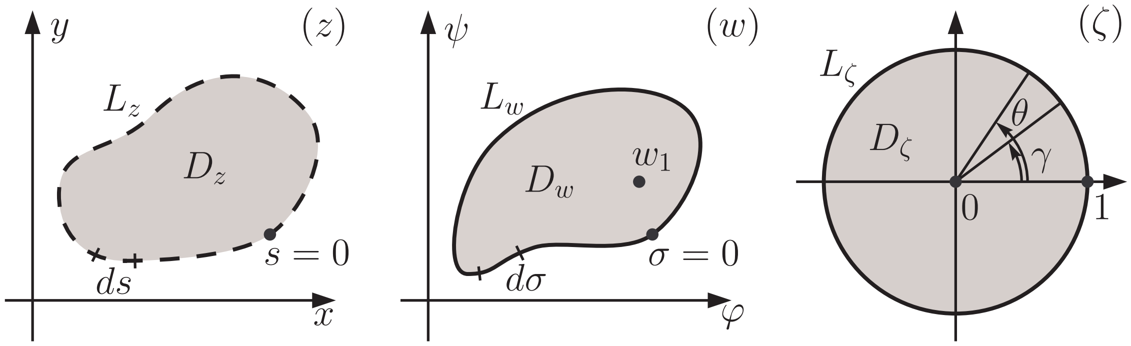
где $\mathbb{S}$ – оператор Шварца (заметим, что вид этого оператора зависит от формы области D_w).

Определив $R(w)$, из (9) найдем функцию $z = z(w)$, отображающую D_w на искомую область D_z:

$$\frac{dz}{dw} = e^{R(w)}, \quad z(w) = \int^w e^{R(w)} dw + C = e^{i\beta} \int^w e^{\mathbb{S}[P(\sigma)](w)} dw + C. \quad (10)$$

Таким образом, поставленная задача свелась по существу к задаче Шварца. Перейдя в (10) на границу D_w, определим в параметрическом виде $w = w(\sigma)$ контур L_z:

$$x(\sigma) + iy(\sigma) = z[w(\sigma)], \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant L.$$



Решение с использованием канонической области. Введем плоскость $\zeta = \rho e^{i\gamma}$ и в качестве канонической области D_ζ в ней возьмем единичный круг $|\zeta| < 1$. Пусть $w = \omega(\zeta)$ – функция, конформно отображающая D_ζ на известную область D_w. Из ТФКП известно, что для однозначного определения этой функции необходимо задать три вещественных условия. В качестве таких условий выберем

$$w = w_1 \mapsto \zeta = 0, \qquad \sigma = 0 \mapsto \gamma = 0 \ (\zeta = 1)$$

Решение ОКЗ не будет зависеть от выбора этих точек, т. к. оно всецело определяется зависимостью $s = s(\sigma)$.

Использовав равенство

$$w(s) = f_1(s) + if_2(s) = \omega(e^{i\gamma}),$$

выражающее соответствие точек контуров L_z и L_ζ при конформном отображении, установим зависимость

$$s = s(\gamma), \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi.$$

В качестве вспомогательной функции теперь будет регулярная функция

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta} = \ln \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| + i \arg \frac{dz}{d\zeta} = \xi + i\eta.$$

Регулярность этой функции следует из соотношения $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dw}\frac{dw}{d\zeta} \neq 0$. На границе круга мы знаем

$$\xi(\gamma) \equiv \operatorname{Re} \chi(\zeta)\big|_{\zeta=e^{i\gamma}} = \ln \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=e^{i\gamma}} = \ln \frac{ds}{d\gamma}.$$

Следовательно, по формуле Шварца (3)

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \xi(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta + i\beta.$$

Искомая отображающая функция $z = z(\zeta)$ будет

$$z(\zeta) = \int\limits^{\zeta} e^{\chi(\zeta)} d\zeta + C. \tag{11}$$

Перейдя на границу $\zeta = e^{i\gamma}$, получим

$$x(\gamma) + iy(\gamma) \equiv z(e^{i\gamma}) = \int\limits^{\gamma} e^{\xi(\gamma)+i\eta(\gamma)} de^{i\gamma} + C = i \int\limits^{\gamma} \frac{ds}{d\gamma} e^{i[\eta(\gamma)+\gamma]} d\gamma + C,$$

где

$$\eta(\gamma) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \xi(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \gamma}{2} d\theta + \beta. \tag{12}$$

Отделив действительные и мнимые части, получим параметрические уравнения контура L_z:

$$\begin{cases} x(\gamma) = -\displaystyle\int\limits^{\gamma} \frac{ds}{d\gamma} \sin[\eta(\gamma) + \gamma] d\gamma + A, \\ y(\gamma) = \displaystyle\int\limits^{\gamma} \frac{ds}{d\gamma} \cos[\eta(\gamma) + \gamma] d\gamma + B, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi. \tag{13}$$

Из (12) и (13) видно, что решение определяется с точностью до трех вещественных постоянных: β, A, B. Но эти постоянные на форму контура не влияют, они влияют лишь на его положение в плоскости z: A и B определяют плоскопараллельное смещение L_z в z, а β – его поворот. Такое решение принято считать единственным.

Как было сказано ранее, после нахождения области D_w, построение $w(z)$ трудностей не представляет. Действительно, найти функцию $w(z)$ в D_z просто, зная функции $w = \omega(\zeta)$ и $z = z(\zeta)$. Для этого достаточно исключить ζ из этих функций $w(z) = \omega[\zeta(z)]$.

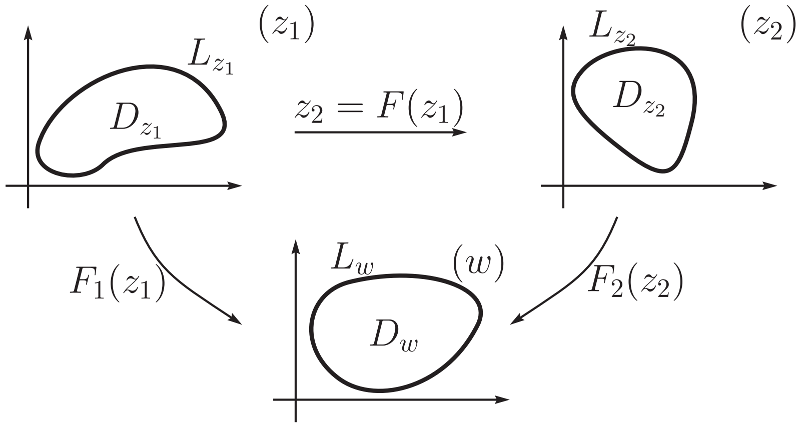
В формуле (12) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Этот интеграл существует, если $\xi(\theta)$ удовлетворяет условию Гельдера. Остается показать, что принятые условия на $w(z)$ и $f_j(s)$ обеспечивают выполнение этого условия на всем интервале $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$. Об этом будет сказано позднее.

О замкнутости искомого контура в ОКЗ. Из курса ТФКП известно, что в односвязной области интеграл от регулярной функции по любому замкнутому контуру равен нулю (теорема Коши). Подынтегральная функция в (11) регулярна вследствие регулярности $\chi(\zeta)$. Поэтому интеграл $\int_{L_z} e^{\chi(\zeta)} d\zeta = 0$ и на границе справедливы соотношения $x(0) = x(2\pi)$ и $y(0) = y(2\pi)$.

Доказательство единственности решения. Вообще говоря, единственность решения нами уже показана, она следует из метода решения. Но представляет интерес доказательство единственности без построения самого решения.

Для доказательства используем метод от противного. Пусть существует две различные области D_{z_1} и D_{z_2} и две функции $w =$

$F_1(z_1)$, $w = F_2(z_2)$, отображающие соответствующие области на заданную D_w. Приравняв $F_1(z_1) = F_2(z_2)$, определим функцию $z_2 = F(z_1)$. На границе $s_2 = F(s_1) = s = s_1$, следовательно $\dfrac{ds_2}{ds_1} = 1$.



Введем функцию $\Omega(z_1) = \ln \dfrac{dz_2}{dz_1} = \lambda + i\delta$. Ее вещественная часть на границе известна

$$\lambda(s_1) = \operatorname{Re}\Omega(z_1)\big|_{z_1=z_1(s_1)} = \ln\left|\frac{dz_2}{dz_1}\right|_{z_1=z_1(s_1)} = \ln\frac{ds_2}{ds_1} = \ln 1 = 0.$$

Но если гармоническая функция $\lambda(x, y)$ равна нулю на границе, то она равна нулю во всей области и сопряженная ей функция постоянна $\delta(x, y) = \delta_0 = \text{const}$. Итак,

$$\ln\frac{dz_2}{dz_1} = i\delta_0 \quad \Rightarrow \quad dz_2 = e^{i\delta_0}\, dz_1 \quad \Rightarrow \quad z_2 = e^{i\delta_0}\, z_1 + C.$$

Видно, что z_1 и z_2 отличаются друг от друга плоскопараллельным сдвигом и поворотом, а такое решение мы условились считать единственным.

Существование особого интеграла в (12)**.** Покажем, что условия на функции f_j (стр. 26) обеспечивают существование интеграла в формуле (12). Для существования данного сингулярного интеграла достаточно показать, что функция $\xi(\gamma) = \ln \dfrac{ds}{d\gamma}$ удовлетворяет условию Гельдера (1). Так как натуральный логарифм является дифференцируемой функцией при положительном аргументе, то достаточно показать, что $0 < \dfrac{ds}{d\gamma} < \infty$ и $\dfrac{ds}{d\gamma} \in \mathbb{H}$.

Представим эту функцию в виде

$$\frac{ds}{d\gamma} = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{L_\zeta} = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{L_\zeta} \Bigg/ \left|\frac{dw}{dz}\right|_{L_z}.$$

Знаменатель этой дроби $\left|\dfrac{dw}{dz}\right|_{L_z} = \sqrt{f_1'^2(s) + f_2'^2(s)}$, но т. к. производные f_j' существуют, удовлетворяют условию Гельдера и не равны нулю одновременно, то $\left|\dfrac{dw}{dz}\right|_{L_z} \in \mathbb{H}$.

Для исследования числителя дроби используем теорему.

Теорема Келлога. *Если функция $w(\zeta)$ реализует конформное отображение области D_ζ (т. е. круга), граница L_ζ которой является дугой Ляпунова, на область D_w, причем ее граница L_w также является дугой Ляпунова, то на L_ζ производная $\dfrac{dw}{d\zeta}$ существует и удовлетворяет условию Гельдера, а в замкнутой области $\overline{D}_\zeta$ не обращается в нуль.*

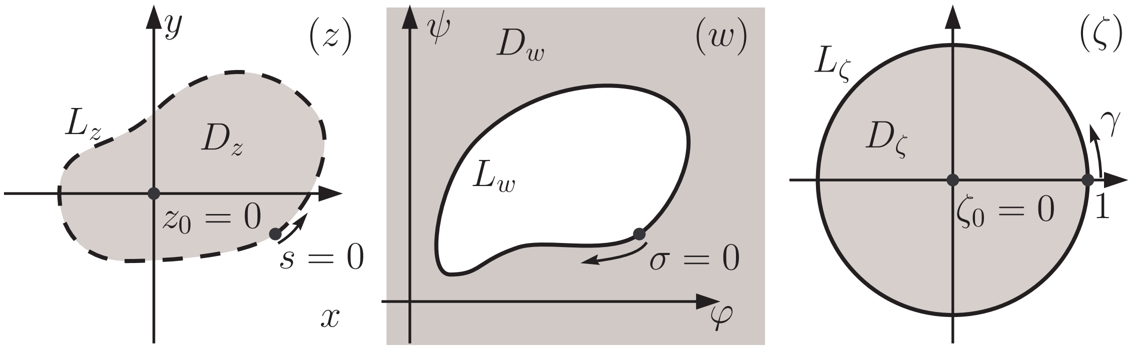
Под дугой Ляпунова понимают кривую, угол наклона касательной к которой, записанный в виде функции дуговой абсциссы, удовлетворяет условию Гельдера. Для окружности L_ζ это выполняется.

Таким образом, нам осталось показать, что L_w является дугой Ляпунова. Запишем выражение для угла наклона касательной

$$\beta(\sigma) = \operatorname{arctg} \frac{d\psi}{d\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{f_2'(s)}{f_1'(s)} = \operatorname{arctg} \frac{f_2'[s(\sigma)]}{f_1'[s(\sigma)]} \in \mathbb{H}$$

т. к. $f_j' \in \mathbb{H}$ по условию, а $s(\sigma)$ является непрерывной однозначной функцией как функция, обратная к (8).

3.4 Внутренняя ОКЗ для функции с простым полюсом



Как уже было сказано выше, решение ОКЗ для функции с простым полюсом практически ничем не отличается от решения ОКЗ для регулярной функции.

Пусть функция $w(z)$ имеет простой полюс в точке $z_0 = 0$. Тогда область D_w будет содержать бесконечно удаленную точку. Так же, как в и ОКЗ для регулярной функции, введем $w = \omega(\zeta)$, положив, что точка $\zeta = 0$ перешла в бесконечно удаленную точку плоскости w, а граничная точка $\zeta = 1$ – в точку $w(\sigma = 0)$. Сравнив значения w на границе $w(s) = \omega(e^{i\gamma})$, определим зависимость $s = s(\gamma)$.

Далее введем в рассмотрение функцию $\chi(\zeta) = \ln \dfrac{dz}{d\zeta}$, действительная часть которой на границе известна и равна $\ln \dfrac{ds}{d\gamma}$. Определив по формуле Шварца $\chi(\zeta)$, искомую $z(\zeta)$ найдем по формуле, аналогичной (11)

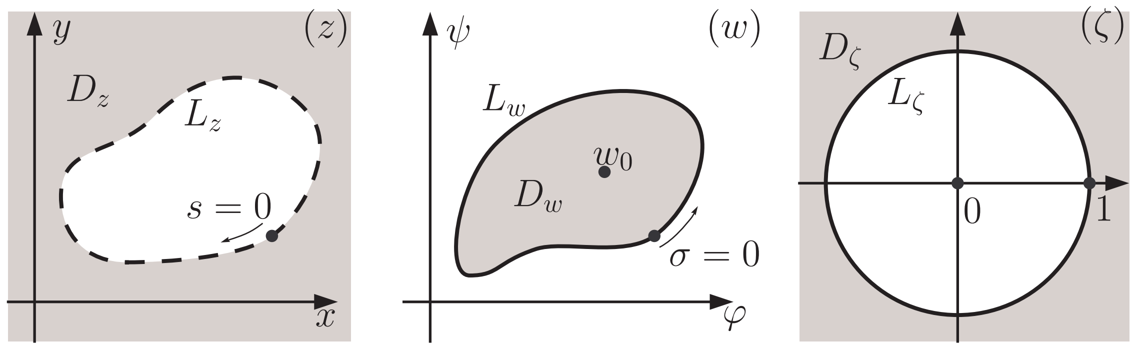
$$z(\zeta) = \int\limits_0^\zeta e^{\chi(\zeta)} d\zeta + C.$$

Так как $z = 0 \mapsto \zeta = 0$ (прообразы точки $w = \infty$), то постоянная $C = 0$. Эту постоянную удалось определить явно вследствие того, что мы зафиксировали в плоскости z одну точку (полюс).

4 Внешние ОКЗ теории аналитических функций

4.1 Внешняя ОКЗ для регулярной функции, когда величина $w(\infty)$ задана (задача Нужина)

Во внешних задачах бесконечно удаленная точка принадлежит области. В ПКЗ, когда область известна, это обстоятельство не играет особого значения. В ОКЗ, где область ищется, присутствие бесконечно удаленной точки играет важную роль. При постановке внешних ОКЗ может быть два случая: 1) когда величина $w(\infty)$ задана (задача М.Т.Нужина) и 2) когда не задана (задача Ф.Д.Гахова). Это различие существенно. Во всех известных на сегодняшний день прикладных ОКЗ $w(\infty)$ задается заранее.



Постановка задачи и схема решения. Дадим постановку задачи Нужина: *найти область* D_z *по заданным на* L_z *значениям регулярной функции* $w(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$*:* $\varphi=f_1(s)$, $\psi=f_2(s)$

и условию, что $w(\infty) = w_0$. Функции $f_j(s)$ удовлетворяют условиям со стр. 26.

Естественно, что $w_0 \in D_w$, т. к. $w(z)$ – регулярная функция. Отобразим D_w на $|\zeta| > 1$ так, чтобы $w_0 \mapsto \zeta = \infty$ и $\sigma = 0 \mapsto \zeta = 1$. Таким образом, $z = \infty \mapsto \zeta = \infty$.

Далее установим связь $s = s(\gamma)$ и введем

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta}. \tag{14}$$

Функция $\dfrac{dz}{d\zeta} = \dfrac{dw}{d\zeta}\dfrac{dz}{dw}$ является регулярной вследствие регулярности функций $\dfrac{dw}{d\zeta}$ и $\dfrac{dz}{dw}$. Кроме того, эти функции не обращаются в нуль внутри области, поэтому функция (14) также будет регулярной и можно применить формулу Шварца для внешности круга. Далее решение строится по той же схеме, что и внутренняя ОКЗ для регулярной функции.

Условия замкнутости. Из (14) следует, что $\dfrac{dz}{d\zeta} = e^{\chi(\zeta)}$. А т. к. $\chi(\zeta)$ – регулярная функция во внешности круга, то в окрестности бесконечности имеет место разложение

$$\frac{dz}{d\zeta} = c_0 + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \frac{c_{-3}}{\zeta^3} + \ldots \tag{15}$$

Проинтегрировав этот ряд, получим

$$z(\zeta) = c_0\zeta + c_{-1}\ln\zeta + \widetilde{c} - \frac{c_{-2}}{\zeta} - \frac{c_{-3}}{2\zeta^2} + \ldots \tag{16}$$

Чтобы контур был замкнут, необходимо выполнение условия $c_{-1} = 0$. Иначе функция $z(\zeta)$ будет неоднозначной из-за присутствия $\ln\zeta$ в (16).

Найдем коэффициент c_{-1}. Для этого запишем разложение $\chi(\zeta)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, учтя, что $\dfrac{\zeta + e^{i\theta}}{\zeta - e^{i\theta}} = 1 +$

$+2e^{i\theta}\dfrac{1}{\zeta}+2e^{2i\theta}\dfrac{1}{\zeta^2}+\ldots$. Имеем

$$\chi(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\xi(\theta)\left[1+2e^{i\theta}\frac{1}{\zeta}+2e^{2i\theta}\frac{1}{\zeta^2}+\ldots\right]d\theta-i\beta=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\xi(\theta)d\theta}_{a_0}+\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\xi(\theta)e^{i\theta}d\theta}_{a_{-1}}\frac{1}{\zeta}+\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\xi(\theta)e^{2i\theta}d\theta}_{a_{-2}}\frac{1}{\zeta^2}+\ldots-i\beta.$$

Следовательно $e^{\chi(\zeta)}=e^{a_0}e^{-i\beta}e^{\frac{1}{\zeta}\left(a_{-1}+a_{-2}\frac{1}{\zeta}+\ldots\right)}$. Известно, что в окрестности нуля имеет место разложение $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$. Поэтому

$$e^{\chi(\zeta)}=e^{a_0-i\beta}\left\{1+\frac{1}{\zeta}\left(a_{-1}+a_{-2}\frac{1}{\zeta}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\zeta^2}\left(a_{-1}+a_{-2}\frac{1}{\zeta}+\ldots\right)^2\right\}+\ldots$$

Учтя условие (15), найдем коэффициент $c_{-1}=e^{a_0-i\beta}a_{-1}$. Он будет равен нулю, если $a_{-1}=0$, т. е.

$$\int\limits_0^{2\pi}\xi(\theta)e^{i\theta}d\theta=0$$

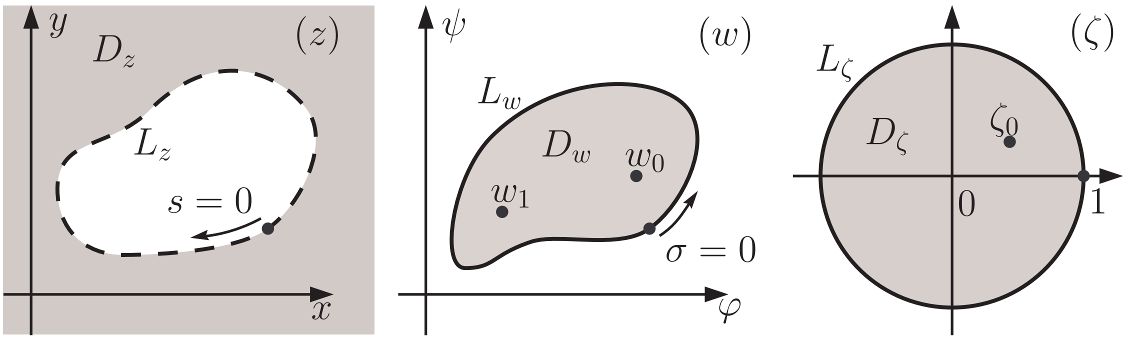
или в виде вещественных условий

$$\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{ds}{d\theta}\,\cos\theta d\theta=0,\qquad\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{ds}{d\theta}\,\sin\theta d\theta=0.\tag{17}$$

Эти условия называют условиями разрешимости задачи. Появление этих условий – не неожиданность, т. к. мы дополнительно к граничным условиям задали w_0, т. е. два вещественных параметра.

4.2 Внешняя ОКЗ для регулярной функции, когда величина $w(\infty)$ не задана (задача Гахова)

Постановка и схема решения.



Задача ставится так же, как и задача Нужина, за исключением того, что $w(\infty) = w_0$ не задается.

Найдем область D_w – внутренность замкнутой кривой L_w, которая строится по параметрически заданным граничным условиям. Отобразим круг $|\zeta| < 1$ на эту область функцией $w = \omega(\zeta)$. Для однозначности отображения потребуем, чтобы внутренняя точка $\zeta = 0$ перешла в точку $w_1 \in D_w$, а граничная точка $\zeta = 1 \mapsto w(\sigma) = 0$. Пусть точка $z = \infty$ переходит в какую-то точку $w(\infty) = w_0$, соответствующую точку в плоскости ζ обозначим $\zeta_0 = \rho_0 e^{i\gamma_0}$.

Сравнив граничные значения $w = w(s)$ и $w = \omega(e^{i\gamma})$, установим зависимость $s = s(\gamma)$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$.

Введем далее функцию

$$\chi(\zeta) = \xi + i\eta = \ln \frac{dz}{d\zeta} = \ln \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| + i \arg \frac{dz}{d\zeta}.$$

На окружности $|\zeta| = 1$ известна ее действительная часть

$$\xi(\gamma) \equiv \xi|_{\zeta = e^{i\gamma}} = \ln \frac{ds}{d\gamma}, \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi.$$

Таким образом, нам известна $\operatorname{Re}\chi(\zeta)$ на границе круга. Но мы не можем применить для нахождения всей функции в круге формулу Шварца. Дело в том, что $\chi(\zeta)$ не будет являться регулярной функцией. Так как точке $\zeta = \zeta_0$ соответствует $z = \infty$, то в окрестности ζ_0 функция $z(\zeta)$ имеет простой полюс, а ее производная имеет разложение

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{c_{-2}}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(\zeta - \zeta_0)} + c_0 + c_1(\zeta - \zeta_0) + \ldots \tag{18}$$

Следовательно, $\ln \dfrac{dz}{d\zeta}$ не будет регулярной во внутренности круга $|\zeta| < 1$. Поэтому воспользуемся формулой Пуассона – Иенсена для нахождения функции $\dfrac{dz}{d\zeta}$, имеющей в точке ζ_0 полюс второго порядка (18) по известному на границе модулю $\dfrac{ds}{d\gamma}$.

$$\frac{dz}{d\zeta} = e^{R(\zeta)} \left(\frac{1 - \overline{\zeta_0}\zeta}{\zeta - \zeta_0} \right)^2, \qquad R(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \xi(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta + i\beta. \tag{19}$$

Условия замкнутости. Задача решена, но в решении присутствует неизвестная постоянная $\zeta_0 = \rho_0 e^{i\gamma_0}$. Исследуем вопрос условий замкнутости в задаче Гахова. Ясно, что контур будет замкнут, если в разложение (18) коэффициент $c_{-1} = 0$. Найдем этот коэффициент, исходя из (19). Пусть

$$\Omega(\zeta) \equiv e^{R(\zeta)}, \qquad T(\zeta) \equiv \Omega(\zeta)(1 - \overline{\zeta_0}\zeta)^2 = \Omega(\zeta)(1 - \rho_0^2)^2.$$

Обе функции являются ограниченными в круге. Разложим последнюю в ряд Тейлора в окрестности точки ζ_0

$$T(\zeta) = T(\zeta_0) + T'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{2}T''(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)^2 + \ldots$$

Коэффициент c_{-1} из (18) равен нулю, если $T'(\zeta_0) = 0$. С другой стороны

$$T'(\zeta_0) = -2\overline{\zeta_0}(1-\rho_0^2)\Omega(\zeta_0) + (1-\rho_0^2)^2\Omega'(\zeta_0) = 0.$$

Так как ζ_0 лежит внутри D_ζ, то $\rho_0 \neq 1$ и на множитель $(1-\rho_0^2)$ можно сократить, после чего получим

$$\frac{\Omega'(\zeta_0)}{\Omega(\zeta_0)} = \frac{2\overline{\zeta_0}}{1-\rho_0^2}. \tag{20}$$

Итак, для однозначности $z(\zeta)$, т. е. для замкнутости L_z, надо, чтобы:

1) уравнение (20) было разрешимо относительно ζ_0,

2) чтобы точка ζ_0 лежала внутри круга ($|\zeta_0| < 1$).

Доказательство разрешимости задачи. Уравнение (20) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big[\ln\Omega(\zeta) + 2\ln\big(1-\zeta\overline{\zeta}\big)\Big]\Big|_{\zeta=\zeta_0} = 0$$

Добавив к нему тождество $\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\ln\overline{\Omega(\zeta)} = 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\ln\Big[|\Omega(\zeta)|\big(1-|\zeta|^2\big)\Big]^2\Big|_{\zeta=\zeta_0} = 0$$

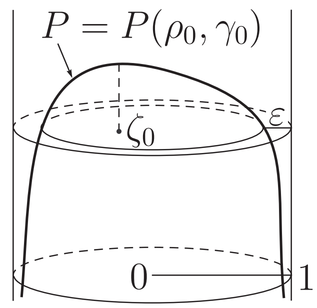
Так как $|\Omega(\zeta)|\big(1-|\zeta|^2\big)$ – вещественная функция двух переменных ρ и γ, то последнее равенство можно записать в виде двух вещественных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\Big[|\Omega(\zeta)|(1-\rho^2)\Big]\Big|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\ln\Big[|\Omega(\zeta)|(1-\rho^2)\Big]\Big|_{\gamma=\gamma_0} = 0. \tag{21}$$

Эти условия являются необходимыми условиями существования экстремума у функции $P(\rho,\gamma) \equiv \ln\Big[|\Omega(\zeta)|(1-\rho^2)\Big]$. Если доказать, что экстремум существует, то будет доказана разрешимость уравнения (20).

Функция $\Omega(\zeta)$ является регулярной в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$, следовательно, $\lim\limits_{\rho\to 1}\big[|\Omega(\zeta)|(1-\rho^2)\big] = 0$ и

$$\lim_{\rho\to 1} P(\rho,\gamma) = -\infty. \tag{22}$$



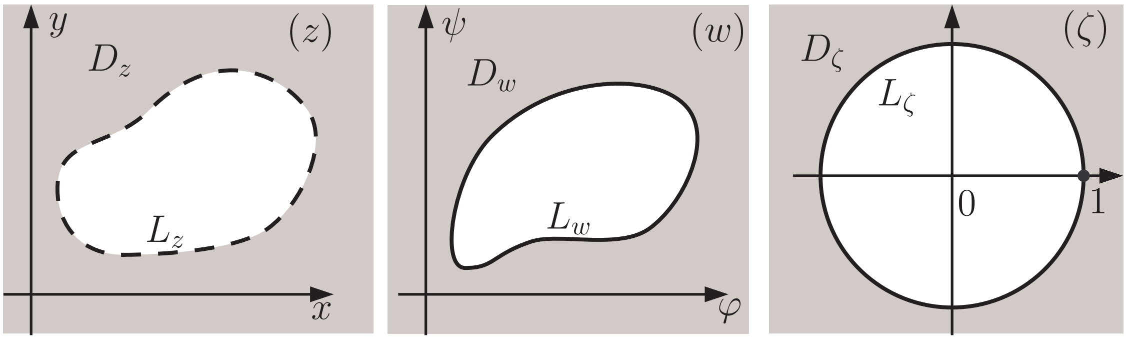
В замкнутом круге радиуса $1-\varepsilon$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ функция $P(\rho,\gamma)$ определена, непрерывна и по теореме Вейерштрасса достигает своих верхней и нижней граней. Эта функция не может достигать верхней грани на границе при $\varepsilon \to 0$ вследствие (22), значит, верхняя грань достигается внутри круга.

Следовательно, существует глобальный максимум $P(\rho_0,\gamma_0)$ в круге, в котором выполняются условия (21), и эта точка является решением уравнения (20).

О единственности решения задачи. Итак, внешняя ОКЗ для регулярной функции $w(z)$, когда $w(\infty)$ не задана, разрешима. Вопрос о числе решений остается открытым: их будет столько, сколько решений имеет уравнение (20). М.Т.Нужин показал, что если у этого уравнения есть два решения, то контуры L_{z_1} и L_{z_2} будут существенно различные. Пример ОКЗ, в котором решение неединственно, впервые построил В.С.Рогожин. Несколько достаточных признаков единственности решения, выражающихся через $\xi(\theta)$, нашел С.Н.Кудряшов.

4.3 Внешняя ОКЗ для функции с простым полюсом

Случай I, когда $w(\infty) = \infty$. Эта задача решается точно так же, как и внешняя задача для регулярной функции, когда $w(\infty) = w_0$ задана. Отличие лишь в том, что теперь D_w – внешняя область. Отобразим D_w на внешность круга $|\zeta| > 1$ со следующим соответствием $z = \infty \quad \mapsto \quad w = \infty \quad \mapsto \quad \zeta = \infty$.



Проделав аналогичные выкладки, получим те же формулы и те же условия замкнутости (17).

Случай II, когда $w(z_0) = \infty$. Полюс $z = z_0$ находится в конечной точке. Соответствие точек при этом такое $z = z_0 \quad \mapsto \quad w = \infty$, $z = \infty \quad \mapsto \quad w = w_0$.

Могут быть два подслучая.

1) Когда образ w_0 бесконечно удаленной точки задан. Тогда задача решается так же, как задача Нужина. Получаются те же формулы для определения контура профиля и условия замкнутости (разрешимости).

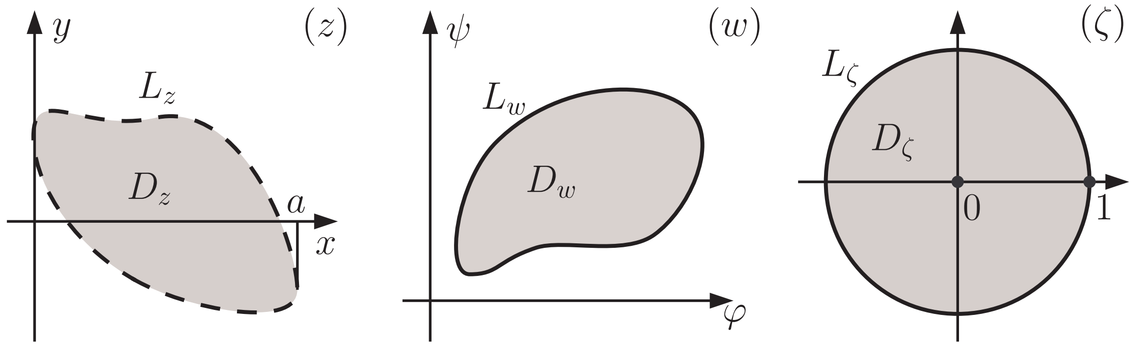
2) Когда точка w_0 не задана. Приходим к задаче Гахова.

5 ОКЗ при задании граничных условий как функции параметра x

Как уже было отмечено выше, в ОКЗ роль параметра, через который выражаются задаваемые граничные условия $w(z)$, более существенны, чем в ПКЗ. Смена параметра в ОКЗ возможна лишь после нахождения области, т. е. после решения задачи. Выбор параметра влияет на *постановку* задачи, на ее *разрешимость*, на сам *метод* построения решения.

Мы остановимся лишь на случае, когда параметром служит абсцисса x. Этот случай понадобится при решении ряда прикладных задач в дальнейшем и на нем можно проследить указанные выше различия в методе решения.

5.1 Внутренняя ОКЗ для регулярной функции



Пусть

$$w = \begin{cases} w_1(x) = \varphi_1(x) + i\psi_1(x), \\ w_2(x) = \varphi_2(x) + i\psi_2(x), \end{cases} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

где $w_1(0) = w_2(0)$, $w_1(a) = w_2(a)$, φ_j, ψ_j $(j = 1, 2)$ – однозначные функции, относящиеся к различным сторонам отрезка.

По этим граничным условиям построим контур L_w. Этот контур будет состоять из двух дуг, но их концы будут совпадать и образуют замкнутый контур. Пусть задача решается для регулярной функции, тогда область D_w будет внутренностью L_w.

Отобразим $|\zeta| < 1$ на D_w функцией $w = \omega(\zeta)$. Сопоставив $w(x) = \omega(e^{i\gamma})$, установим зависимость

$$x = x(\gamma), \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi.$$

У регулярной функции $z = z(\zeta)$ на границе известна действительная часть $\operatorname{Re} z(e^{i\gamma}) = x(\gamma)$, следовательно, по формуле Шварца

$$z(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta + iy_0.$$

Отделив действительные и мнимые части на границе, получим параметрические уравнения контура L_z

$$\begin{cases} x(\gamma) = & x(\gamma), \\ y(\gamma) = & \dfrac{-1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta + y_0, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi.$$

Видно, что контур определяется с точностью до одной постоянной – жесткого смещения вдоль оси y.

5.2 Внутренняя ОКЗ для функции с простым полюсом

Решение задачи в случае наличия простого полюса ничем не отличается от решения задачи для регулярной функции. Зафиксируем точку с полюсом, пусть он располагается в точке $z_0 = x_0 + i0 \mapsto w = \infty \mapsto \zeta = 0$. Таким образом, функция $z(\zeta = 0) = 0$.

Подставив это условие в выражение для параметрического уравнения контура, получим

$$x_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\frac{e^{i\theta}+0}{e^{i\theta}-0}d\theta + iy_0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{2\pi} x(\theta)d\theta = x_0, \quad y_0 = 0.$$

Таким образом, после того, как мы зафиксировали полюс, у нас определился свободный параметр y_0 и появилось дополнительное условие разрешимости.

5.3 Внешняя ОКЗ для регулярной функции, когда величина $w(\infty)$ задана

Пусть D_z – внешняя область. Так же, как и для внутренней задачи, построим D_w, введем каноническую область – внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ и установим связь $x = x(\gamma)$. Пусть $z = \infty \mapsto w = w_0 \mapsto \zeta = \infty$.

Функция $z(\zeta)$ – аналитическая вне круга и имеет на бесконечности простой полюс. Применим формулу Шварца для внешности круга с полюсом

$$z(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta + (A+iB)\zeta - (A-iB)\frac{1}{\zeta} + iy_0, \tag{23}$$

или

$$\begin{cases} x = & x(\gamma), \\ y = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta + 2A\sin\gamma + 2B\cos\gamma + y_0. \end{cases}$$

Видно, что решение зависит от трех постоянных: A, B, y_0 даже при задании w_0. Напомним, что при задании граничных условий как функции от s у нас появлялось два условия разрешимости – замкнутости искомого контура.

О замкнутости искомого контура. Функция $z(\zeta)$ определяется формулой (23). Правая часть – функция однозначная, поэтому никаких проблем с разомкнутостью искомого контура не возникает. Неоднозначность может возникнуть при наличии членов, содержащих логарифмы. В (23) таких членов нет.

5.4 Внешняя ОКЗ для регулярной функции, когда величина $w(\infty)$ не задана

Пусть точка w_0 не задана. Тогда удобнее отобразить D_w на внутренность круга функцией $w = \omega(\zeta)$. Для однозначности потребуем, чтобы $w(x = 0) \mapsto \zeta = 1$ и $w_1 \mapsto \zeta = 0$.

Далее, сопоставив $w(x)$ и $\omega(e^{i\gamma})$, найдем $x = x(\gamma)$.

Рассмотрим функцию $z(\zeta)$, у нее при $\zeta = \zeta_0 = \rho_0 e^{i\gamma_0}$ – простой полюс. Решением этой задачи будет

$$z(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta + (A+iB)(\zeta-\zeta_0) - (A-iB)\frac{1}{\zeta-\zeta_0} + iy_0.$$

В нее входит 5 неизвестных постоянных A, B, y_0, ρ_0, γ_0.

6 ОКЗ, приводящиеся к основной

Выше были изучены простейшие ОКЗ, являющиеся частными случаями основной ОКЗ, когда на искомой границе заданы действительная и мнимая части аналитической функции w. Однако практические задачи приводят к необходимости решения таких ОКЗ, в которых задаются другие величины, так или иначе связанные с w. Например, в ОКЗ аэродинамики на искомом контуре задаются $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ и $\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$. Наиболее часто встречающиеся величины, связанные с w – это φ, ψ, $|w|$, $\arg w$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$, $\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$.

Здесь семь элементов, число пар из них – 21. При задании их как функций параметра s две пары – $(\varphi, \dfrac{\partial\psi}{\partial n})$ и $(\psi, \dfrac{\partial\varphi}{\partial n})$ – следует исключить, т. к. из условий Коши-Римана мы имеем

$$\varphi'(s) = \frac{\partial\psi}{\partial n}, \qquad \psi'(s) = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Рассмотрим несколько характерных случаев сведения к основной ОКЗ:

Пример 1. Пусть заданы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = f_1(s)$ и $\dfrac{\partial\psi}{\partial n} = f_2(s)$.

Из условий Коши-Римана находим

$$\begin{array}{lll} \varphi'(s) = \dfrac{\partial\psi}{\partial n} & \Rightarrow & \varphi(s) = \displaystyle\int^s f_2(s)ds + A, \\ \psi'(s) = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} & \Rightarrow & \psi(s) = -\displaystyle\int^s f_1(s)ds + B. \end{array}$$

Функция $w(z)$ определилась с точностью до постоянной $C = A + iB$, которая не влияет на форму контура L_z, т. к. эта постоянная влияет лишь на перемещение L_w в плоскости w.

Пример 2. Пусть заданы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = f_1(s)$ и $\left|\dfrac{dw}{dz}\right| = f_2(s)$.

Как в примере 1, находим $\psi(s) = -\int^{s} f_1(s)ds + B$.

Из соотношения $f_2^2(s) = \varphi'^2(s) + \psi'^2(s)$ следует

$$\varphi(s) = \pm\int^{s}\sqrt{f_2^2(s) - f_1^2(s)}ds + A.$$

Пример 3. Пусть заданы $\arg w = f_1(s)$ и $|w| = f_2(s)$.

Так как $w = |w|e^{i\arg w}$, то

$$\varphi(s) = f_2(s)\cos f_1(s), \qquad \psi(s) = f_2(s)\sin f_1(s).$$

Пример 4. Пусть заданы $\arg w = f_1(s)$ и $\left|\dfrac{dw}{dz}\right| = f_2(s)$.

Этот пример посложнее предыдущих. Пусть $F(s) = |w|$, тогда, как в примере 3,

$$\varphi(s) = F(s)\cos f_1(s), \qquad \psi(s) = F(s)\sin f_1(s).$$

Подставим эти соотношения в равенство $f_2^2(s) = \varphi'^2(s) + \psi'^2(s)$:

$$\big[F(s)\cos f_1(s)\big]'^2 + \big[F(s)\sin f_1(s)\big]'^2 = f_2^2(s),$$

или после преобразования

$$F'^2(s) + F^2(s)f_1'^2(s) = f_2^2(s).$$

Пришли к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для нахождения $F(s)$.

Если это уравнение имеет решение $F(s,K)$ в виде неотрицательной функции, причем должно выполняться условие $F(\ell,K) = F(0,K)$, то задача сводится к основной ОКЗ. Вещественная постоянная K влияет на форму контура L_z, поэтому для получения однозначного решения надо задать, например, значение $|w|$ в одной из точек L_z.

7 Особенности решения прямых и обратных краевых задач

7.1 Способ сопоставления плоскостей

При решении ПКЗ, как известно, основная трудность состоит в том, чтобы конформно преобразовать заданную область D_z на какую-либо каноническую область (например, круг), для которой решение может быть явно выражено через граничные условия. Степень трудности решения ПКЗ зависит от вида области D_z, характер же граничных условий играет малую роль.

При решении ОКЗ основная сложность состоит в отыскании отображающей функции $w = \omega(\zeta)$ для области D_w. Следовательно, трудность решения ОКЗ в значительной степени зависит от характера граничных условий, определяющих эту область.

В ряде важных практических задач граничные условия имеют несложный вид. Например, в задачах об обтекании профилей функция тока ψ принимает на границе постоянные значения. Поэтому для любого профиля областью D_w будет плоскость с разрезом по вещественной оси, для которой $w = \omega(\zeta)$ хорошо известна. Аналогично обстоит дело в задачах напорной фильтрации, электростатики и других. Как следствие этого, такие задачи значительно проще решаются в обратной постановке, т. е. в этих случаях легче найти форму области с заданными свойствами, чем изучить свойства области заданной формы.

Разумеется, возможны случаи, неблагоприятные с точки зрения ОКЗ, когда граничные значения порождают контур L_w сложного вида, в то время как контур L_z оказывается простым.

Рассмотрим подробнее случай, когда одна из функций φ или ψ на границе принимает постоянное значение. Как уже упоминалось, решение обратных задач при этом упрощается. Отметим еще одно обстоятельство, которое в ряде случаев небесполезно иметь ввиду при определении зависимости $s = s(\gamma)$.

Пусть в области D, ограниченной контуром L, гармоническая функция $\varphi(x, y)$, принимающая на L значения $f(s)$, описывает некоторое физическое явление. Пусть функция $z_1 = F(z)$ осуществляет конформное отображение области D на D_1. Преобразованная гармоническая функция $\varphi_1(x_1, y_1)$ на L_1 будет принимать значения $f_1(s_1)$, отличные от $f(s)$. В силу того, что граничные условия изменились при преобразовании, φ_1 уже не будет описывать в области D_1 это физическое явление. Таким образом, при преобразовании $z_1 = F(z)$, изменяющем $f(s)$, функция φ утрачивает свои характеристические свойства. Однако эти свойства сохраняются, если $f(s) = \text{const}$, в этом случае $f_1(s_1) = \text{const}$ и функции φ и φ_1 описывают одно и то же явление в соответствующих областях.

При решении ОКЗ сохранение характеристических свойств можно использовать следующим образом. Пусть аналитическая функция $w(z) = \varphi + i\psi$ описывает некоторое явление в искомой области D_z, причем одна из функций φ или ψ на границе L_z принимает постоянные значения, например, $\varphi = \varphi(s)$, $\psi = \text{const}$. Допустим, исходя из физических соображений, удалось построить функцию $w = \omega(\zeta)$, описываемую изучаемое явление в какой-либо канонической области. Если это сделано, то искомая зависимость $s = s(\gamma)$ определяется путем сравнения $\varphi(s)$ и $\mathrm{Re}\,\omega(\gamma)$. Таким образом, в этом случае отпадает необходимость в построении и исследовании области D_w.

7.2 Вопросы физической реализуемости решений ОКЗ

В ОКЗ отыскивается область по заданным условиям. Эти условия определяются желанием исследователя найти область, в которой данное физическое явление обладает нужными свойствами. Но заранее неизвестно, существуют ли такие области. Поэтому в ОКЗ вопросы физической реализуемости, т. е. разрешимости (существования, единственности, устойчивости) и однолистности играют бо́льшую роль, чем в ПКЗ.

Говорят, что задача поставлена **корректно** (по Адамару), если ее решение *существует*, *единственно* и *устойчиво*.

Для внутренних ОКЗ мы убедились, что *существование* решения следует из самого метода решения. Но во внешних ОКЗ, когда функция $w = w_\infty$ задана, возникают условия разрешимости (замкнутости искомого контура), следовательно, решение существует лишь при выполнении дополнительных условий, накладываемых на исходные данные задачи.

Относительно *единственности* решения ОКЗ заметим, что внутренняя ОКЗ имеет единственное решение, в то время как внешняя ОКЗ в случае, когда $w(\infty)$ не задается, может иметь несколько решений.

Первые исследования по *устойчивости* решения ОКЗ проведены М.Т.Нужиным. Получены некоторые достаточные условия, накладываемые на $\xi(\gamma) = \ln \frac{ds}{d\gamma}$ (Ю.М.Молокович, Р.Б.Салимов, Л.А.Аксентьев, Л.Н.Кузнецова).

7.3 Некоторые условия однолистности

Еще один новый момент, который возникает при решении ОКЗ – это *однолистность* решения. Большинство ОКЗ математической физики имеет практическое значение и чтобы их решения воплотить в жизнь, они должны быть физически реализуемыми, т. е. (кроме выполнения условий разрешимости) еще и однолистными. Для таких задач особый интерес представляют достаточные условия однолистности решения.

Дело в том, что существование решения еще не означает, что оно может быть реализовано физически. Легко представить себе случай, когда мы предписываем искомой области такие свойства, которые физически реализоваться не могут. Типичный пример – крыловой профиль, у которого нижняя поверхность в некоторой области расположена выше верхней.

Первое достаточное условие было получено И.С.Красновидовой и В.С.Рогожиным

$$|\xi(\gamma_1) - \xi(\gamma_2)| < \frac{\pi}{4\ln 2}|\gamma_1 - \gamma_2|.$$

Такое условие, налагаемое не на исходные данные $f_j(s)$, а на промежуточную функцию $\xi(\gamma)$, называют “слабым”. Далее это условие улучшали Л.А.Аксентьев, С.Н.Кудряшов, Ф.Г.Авхадиев и др.

Ф.Г.Авхадиев получил достаточные условия однолистности для одной задачи теории фильтрации, которые выражаются непосредственно через исходные граничные условия (они называются “сильными”).

Переход от исходных функций $f_j(s)$ к $\xi(\gamma)$ достаточно сложен, его дает формула

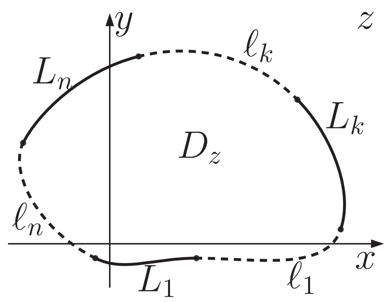
$$\frac{ds}{d\gamma} = \frac{|dw/d\zeta|}{|dw/dz|} = \frac{|\omega'(e^{i\gamma})|}{\sqrt{f_1'^2[s(\gamma)] + f_2'^2[s(\gamma)]}}.$$

Сложность заключается в следующем: во-первых, вид $|\omega'(e^{i\gamma})|$ может быть сложным, даже если $\omega(\zeta)$ записана в явном виде; во-вторых, даже имея явный вид $|\omega'(e^{i\gamma})|$, надо решить нелинейное дифференциальное уравнение относительно $s(\gamma)$.

7.4 Смешанная обратная краевая задача

Важное значение имеет более общая задача, когда одна часть контура известна, а остальная – отыскивается. Эту задачу называют смешанной ОКЗ (СОКЗ, не путать с прямой смешанной задачей).

СОКЗ содержит в себе в качестве частных случаев как прямую, так и обратную задачи. Постановка основной СОКЗ (дал М.Т.Нужин): *на известных частях контура задана действительная или мнимая часть аналитической функции, на неизвестных – обе части этой функции. Требуется определить неизвестные* *части границы области и саму аналитическую функцию.*



Дано: $L_k\,(k = \overline{1,n})$,

$\varphi = \varphi(s)$ или $\psi = \psi(s)$ на L_k,

$\varphi = \varphi(s)$ и $\psi = \psi(s)$ на ℓ_k.

Найти: $\ell_k = ?$

$w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = ?$

Очевидно, что в СОКЗ сохраняется возможность активного влияния на форму области в целом, следовательно, основное содержание этих задач такое же, как и ОКЗ.

Решение поставленной основной СОКЗ до настоящего времени не получено даже для простейшего случая, когда $n = 1$. Также не изучены вопросы разрешимости данной задачи. Наибольшие успехи в решении СОКЗ получены при исследовании прикладных задач, в которых либо известная часть контура прямолинейна, либо на искомой действительная или мнимая часть постоянны. М.И.Хайкин и В.Н.Монахов достигли успехов в исследовании вопросов разрешимости СОКЗ. М.И.Хайкин использовал методы, примененные ранее при изучении струйных задач, а В.Н.Монахов изменил постановку, считая заданным на известной части не $\varphi(s)$, а зависимость $F(\varphi, \psi)$ (ясно, что при этом в плоскости w сразу строится область D_w).

7.5 Развитие теории ОКЗ и нерешенные проблемы

К настоящему моменту теория ОКЗ получила свое развитие. К достижениям можно отнести следующее.

1. Изучены возможности задания граничных условий через параметры, отличные от дуговой абсциссы s.
2. Рассмотрены ОКЗ, в которых искомый контур имеет особые (угловые) точки.
3. Решена ОКЗ для функции с простым полюсом и логарифмической особенностью (задача построения крылового профиля с циркуляцией).
4. Изучены ОКЗ для многосвязных областей.
5. Изучены вопросы однолистной разрешимости ОКЗ, в основном для "слабой" проблемы.
6. Исследованы ОКЗ на римановых поверхностях.

К нерешенным проблемам математической теории ОКЗ следует в первую очередь отнести:

1. Получение условий замкнутости через исходные данные.
2. Получение условий однолистности через исходные данные, т. е. решение "сильной" проблемы однолистности.
3. Решение СОКЗ в общем случае.

Литература

1. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во КГУ, 1965.

2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

3. *Нужин М.Т., Ильинский Н.Б.* Методы построения подземных контуров гидротехнических сооружений. Казань: Изд-во КГУ, 1963.

4. *Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Краевые задачи теории взрыва. Казань: Изд-во КГУ, 1986.

5. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994.

6. *Ильинский Н.Б.* Об обратных краевых задачах // Труды семинара по краевым задачам. Вып. 23. Казань: Изд.-во КГУ, 1987.