КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра математической статистики

Казанцев А.В.

КЛАССИКА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ: ТЕОРЕМА МАРКСА-ШТРОХЕККЕРА

Учебное пособие

Казань 2013

УДК 517.546.1 (075.8) [51(09); 51.001.8]
ББК 22.161.558я73
К 47

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

методической комиссии института вычислительной математики и информационных технологий
Протокол № 9 от 23 мая 2013 г.

заседания кафедры математической статистики
Протокол № 12 от 26 июня 2013 г.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, зав. каф. мат. стат. К(П)ФУ В.С. Желтухин

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. К(П)ФУ М.И. Киндер
канд. физ.-мат. наук, доц. КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева С.Р. Миронова

Казанцев А.В.
Классика однолистных функций: теорема Маркса-Штрохекера: Учебное пособие / А.В. Казанцев. – Казань: Отечество, 2013. – 142 с.

ISBN 978-5-9222-0727-0

В учебном пособии представлен ряд разделов теории однолистных функций, связанных с классическим результатом Маркса-Штрохеккера о порядке звездообразности класса выпуклых функций. Для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по геометрической теории функций комплексного переменного.

© Казанский университет, 2013
© Казанцев А.В., 2013
© Изд-во «Отечество», 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

По свидетельству академика Л.А. Люстерника, в годы его студенчества, да и позднее, существовало расхожее мнение, что «теория функций – это математика для дам».[1] Образ «дамской науки» утверждался здесь как синоним описательности, но когда мне впервые довелось услышать обо всем этом от нашего незабвенного Григория Николаевича Чеботарева, коротко знакомого с Л.А. в годы эвакуации, то в памяти осталась не просто «теория функций», а «комплексного переменного», и ни в коем случае не описательность, а разве что гладкость (на самом деле, как известно, аналитичность). «Эстетизация» ТФКП всегда представлялась мне стремлением обойти «паровозный дым» теории потенциала или «изматывающие лабиринты» римановых поверхностей, заставлявшие делать выбор между ветвями аргумента комплексной величины, а потом доказывать, что результат не зависит от этого выбора...

Тот разговор с Г.Н. Чеботаревым каждый раз возникает в памяти, когда, перелистывая один старый студенческий конспект, я вновь нахожу запись лекции 13 сентября 1984 года. В этот день Е.А. Широкова (ныне профессор, а тогда предмет моей «тайной симпатии») открыла нам, своим слушателям, неравенства $\operatorname{Re} f/z > 1/2$, $\operatorname{Re} zf'/f > 1/2$, справедливые для любой функции f, выпуклой в единичном круге. Доказательство проводилось методом итераций, который выглядел необычайно изысканно даже для ТФКП.

Таким же он представляется и теперь, когда многое безвозвратно ушло, да и «тайная симпатия» сменилась своей противоположностью, впрочем, уже не столь тайной и возвышенной. Данный метод – как потом выяснилось, принадлежащий Э. Штрохеккеру, – оказался началом одного из путей в «цветущий май» геометрической теории функций. Мне захотелось пройти этим путем по прошлому – так появилось настоящее пособие.

А. Казанцев,
май 2013 г.

[1] См. [74], с. 179.

ВВЕДЕНИЕ

А. Теорема Руше и локальная однолистность.

«Геометрическая теория функций комплексного переменного изучает аналитические функции, определяемые каким-либо геометрическим свойством, а также различные геометрические свойства тех или иных классов аналитических функций»...

Так начинает свою, давно уже ставшую научным бестселлером, книгу [6] Геннадий Михайлович Голузин. Ядром геометрической ТФКП является классическая теория однолистных функций, изучение которой можно начинать уже в рамках университетского курса комплексного анализа, сразу после принципа максимума и принципа аргумента с его верной спутницей – теоремой Руше. «Чтобы не откладывать дело в долгий ящик», сформулируем последнюю (взяв за основу [7], с. 137) и покажем, как она применяется для обоснования одного важного свойства однолистных функций, которое позднее получит название локальной однолистности.

Теорема Руше. *Если функции* $h(z)$ *и* $g(z)$ *аналитичны внутри замкнутого контура* C *и на самом контуре и если* $|g(z)|<|h(z)|$ *на* C*, то функции* $h(z)$ *и* $h(z)+g(z)$ *имеют внутри* C *одинаковое число нулей (с учетом кратностей).*

Определение 1. Функция $f(z)$ называется *однолистной* в некоторой области D, если она аналитична и однозначна в D и принимает различные значения в любых двух различных точках области D.

Важное свойство. *Если функция* $f(z)$ *однолистна в* D*, то* $f'(z)\neq 0$ *в* D.

Действительно, предположим, что $f'(z_0)=0$. Тогда функция $f(z)-f(z_0)$ имеет в точке z_0 нуль порядка $n\geq 2$. Так как $f(z)$ не есть постоянная, то можно найти окружность $|z-z_0|=\delta$, на которой функция $f(z)-f(z_0)$ не имеет нулей и внутри которой функция $f'(z)$ не имеет нулей, отличных от z_0. Пусть m – точная нижняя грань функции $|f(z)-f(z_0)|$ на этой окружности. Если $0<|a|<m$, то по теореме Руше функция $f(z)-f(z_0)-a$ имеет в круге n нулей, и она не может иметь там двойных нулей, так как $f'(z)$ не имеет там ну-

лей, отличных от z_0. Но это противоречит тому, что $f(z)$ принимает каждое свое значение только один раз.

Приведенное обоснование, как и определение однолистности, дословно перенесено сюда из книги [7] (с. 227, 226). Читатель, наверное, удивлен тому, что вместо размеренного изложения «основ» мы вот так, по-голузински, сразу берем «быка за рога». Ведь «считается», что он еще «не знает» ни областей (открытых связных множеств), ни контуров (простых кусочно-гладких кривых[2]), ни того, что такое аналитическая функция ($\mathbf{C}$-дифференцируемая в окрестности каждой точки области), да еще с акцентом на ее однозначности. Однако составитель настоящего пособия предлагает восполнить намечающийся дефицит комфорта, уютно обложившись книгами – такими, например, как [34], [35], [38], [43] и некоторыми другими (см. список литературы), – и занявшись разбором приведенного выше доказательства. Проделаем это с опорой на [43], где «аналитичность и однозначность» заменяются на «голоморфность».

Итак, еще раз предположим, что $f'(z_0)=0$. Будучи однолистной, функция f не является тождественной постоянной. Поэтому ([43], с. 103-104) существуют круг $K_\rho(z_0)=\{z\in\mathbf{C}:|z-z_0|<\rho\}$, лежащий в D, и голоморфная в нем функция φ, такие что $\varphi(z)\neq 0$ и

$$f(z)-f(z_0)=(z-z_0)^n\varphi(z) \qquad (1)$$

при $z\in K_\rho(z_0)$, где $n\geq 1$. Дифференцируя представление (1), с учетом $\varphi(z_0)\neq 0$ и предположения $f'(z_0)=0$ получим $n\geq 2$.

Теперь установим существование такого $\Delta>0$, что $f'(z)\neq 0$ при $z\in K_\Delta(z_0)\setminus\{z_0\}$. Действительно, в противном случае нашлась бы последовательность (z_n) нулей функции f', сходящаяся к z_0. Но тогда по теореме единственности для аналитических функций ([43], с. 104) мы получили бы $f'\equiv 0$ – противоречие с однолистностью f.

Положим $\delta=(1/2)\min(\rho,\Delta)$. Тогда по только что доказанному функция $f'(z)$ не имеет внутри $|z-z_0|=\delta$ нулей, отличных от z_0, а в силу (1) и $\varphi\neq 0$ в $K_\rho(z_0)$ функция $f(z)-f(z_0)$ не имеет нулей на ок-

[2] Несомненный оптимизм внушает замечание, которым Титчмарш заключает свои рассуждения о контурах: «...читатель, который предпочтет игнорировать эти наши объяснения и доверится геометрической интуиции, увидит, что все идет как нельзя лучше» ([7], с. 92).

ружности $|z-z_0|=\delta$. Пусть $m=\inf\limits_{|z-z_0|=\delta}|f(z)-f(z_0)|$ и $0<|a|<m$. Тогда функции $h(z)=f(z)-f(z_0)$ и $g(z)\equiv -a$ удовлетворяют условиям теоремы Руше, а значит, функции $h(z)$ *и* $h(z)+g(z)=f(z)-f(z_0)-a$ имеют внутри $|z-z_0|=\delta$ одинаковое число нулей (с учетом кратностей). Поэтому функция $f(z)-f(z_0)-a$ имеет n нулей в круге $K_\delta(z_0)$. Чтобы доказать наше утверждение, требуется исключить случай единственного нуля n-го порядка.

Пусть z_1 – произвольный нуль функции $f(z)-f(z_0)-a$ в $K_\delta(z_0)$; очевидно, $z_1\neq z_0$. Так же, как и в начале настоящего доказательства, устанавливается существование некоторой окрестности $U\subset K_\delta(z_0)$ точки $z=z_1$, голоморфной в U функции ϕ и целого числа $m\geq 1$, таких что $\phi(z)\neq 0$ и $f(z)-f(z_1)-a=(z-z_1)^m\phi(z)$ при $z\in U$. Дифференцируя последнее соотношение в предположении $m\geq 2$, мы получили бы $f'(z_1)=0$, чего быть не может, так как $f'(z)$ не имеет в $K_\delta(z_0)$ нулей, отличных от z_0. Следовательно, $m=1$ и в силу произвольности z_1 функция $f(z)-f(z_0)-a$ имеет в $K_\delta(z_0)$ ровно $n\geq 2$ геометриически различных нулей кратности 1. Но тогда функция $f(z)$ принимает значение $f(z_0)+a$ не менее чем в двух точках круга $K_\delta(z_0)$. Мы пришли к противоречию с однолистностью f, что и завершает доказательство.

Вот так или примерно так следует начинать студенческий разбор «канонических текстов». Именно начинать – ведь подобный разбор предполагает дальнейшую детализацию. Так, например, в приведенном выше доказательстве мы «пропустили» вопрос, который «хорошо идет» как дополнительный на экзамене: «а вообще», может существовать круг с центром в точке z_0, лежащий в D? Ответ: не просто может, а должен, поскольку D, будучи областью, является открытым множеством. И таких вопросов «пропущено» достаточно много...

Тем не менее, там, где возможно, мы будем избегать дополнительных разборов и детализаций, намечая их в упражнениях, вот, например, так.

Упражнение. Разберите обоснование только что доказанного утверждения «однолистность f в D $\Rightarrow$ $f'(z)\neq 0$, $z\in D$», данное в кни-

ге [35] (с. 359). В чем преимущества разобранного выше метода Титчмарша?

Если $f'(z_0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции ([33], с. 142) или вновь по теореме Руше ([7], с. 228) найдется окрестность точки z_0, в которой функция f будет однолистной. Поэтому голоморфная в области D функция f с условием

$$f'(z) \neq 0, \; z \in D, \tag{2}$$

называется *локально однолистной в* D.

Отметим одну особенность «языковых конструкций» геометрической теории функций. Если рассматривать $f : D \to \mathbf{C}$ как объект анализа, т.е. как функцию, то при наличии условия (2) она называется локально однолистной. Если же рассматривать данный «объект» как геометрический, т.е. как отображение, то в случае выполнения (2) оно будет называться *конформным*.

Термин «конформный» здесь используется как название, хотя изначально закреплен за конкретными свойствами f; в «чеканной форме» они проговариваются как *сохранение углов* и *постоянство растяжений.* В эту тему мы не углубляемся, но следует помнить одну важную вещь: соотношения между такими понятиями, как «однолистность», «конформность» и «локальная однолистность», меняются от учебника к учебнику. Например, утверждая аналогом конформности *локальную* однолистность, т.е. условие (2), мы следуем подходу, развиваемому в [38] (с. 99). А вот [34] (с. 109-110), [23] (с. 26) и [44] (с. 4) определяют конформное отображение как реализуемое *однолистной* аналитической функцией (см. определение 1)!

Смещение терминов из области понятий в область названий чревато своего рода логическими курьезами. Так, термин «локально однолистный» уже давно служит *названием* элементов класса голоморфных функций с условием (2); см., напр., [44], с. 4. В этом контексте утверждение «всякая однолистная функция локально однолистна» представляет собой полноправную теорему, доказанную выше методом Титчмарша. Если же вернуться к «исконному» смыслу понятия «локально однолистный», то сформулированное утверждение есть не более чем трюизм, так как локальная однолистность – это обычная однолистность, но в окрестности точки...

Разумеется, не стоит слишком уж увлекаться этим «театром теней», но надо быть готовым к его «постановкам» на экзамене...

Теперь «спустимся на ступеньку ниже», чтобы очутиться среди образов, отражающих дифференциальные свойства рассматриваемых функций. Вначале дадим сводку эквивалентных определений комплексной, или $\mathbf{C}$-дифференцируемости функции комплексного переменного; следуем [43], с. 32-35.

Определение 2. *Функция* $f = u + iv$ *переменного* $z = x + iy$ *называется* $\mathbf{C}$*-дифференцируемой в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, *если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1) *существует предел*

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

называемый комплексной, или $\mathbf{C}$*-производной функции* f *в точке* z_0;

2) *существует число* $A \in \mathbf{C}$, *такое что*

$$\Delta f(z) = A\Delta z + o(\Delta z),\ \Delta z \to 0,$$

где $\Delta f(z) = f(z) - f(z_0)$, $\Delta z = z - z_0$ *– приращения функции и аргумента,* $df(z_0) = A\Delta z$ *– комплексный, или* $\mathbf{C}$*-дифференциал функции* f *в точке* $z = z_0$ («впоследствии окажется», что $A = f'(z_0)$, $dz = \Delta z$ и $df(z_0) = f'(z_0)dz$);

3) *функции* $u = u(x, y)$ *и* $v = v(x, y)$ $\mathbf{R}$*-дифференцируемы в точке* $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ *и удовлетворяют в этой точке условиям Коши-Римана:*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0),\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0);$$

4) *функция* f $\mathbf{R}^2$*-дифференцируема в точке* $z = z_0$ *и*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \quad (\bar{z} = x - iy).$$

Приведенные определения «подаются» как напоминание давно и хорошо известных фактов; каждый выберет то, что ему ближе. При

этом переход от условия 1) к условию 4) отражает «степень искушенности» читателя в «таинствах» комплексного анализа. Если в эквивалентности 1) и 2) нет ничего нового по сравнению с вещественным случаем – по крайней мере, на уровне символов, то в условии 3) уже очевидна специфика $\mathbf{C}$: комплексная дифференцируемость есть вещественная плюс условия Коши-Римана. Что же касается условия 4), то это перевод 3) на «чисто комплексный язык»: в формальном разложении f «по степеням» переменных z и $\bar{z}$ условие $\mathbf{C}$-дифференцируемости убирает зависимость от $\bar{z}$. Однако, как показывает известный «контрпример» $f(z)=z\bar{z}$ при $z=0$, справедливость последнего тезиса уже нуждается в выходе из точки в ее окрестность.

Посмотрим, как формализуется такой выход в [38], с. 69-70, на основе уже введенного определения $\mathbf{C}$-дифференцируемости функции в точке.

Определение 3. I) *Функция f называется аналитической в области D, если она $\mathbf{C}$-дифференцируема в каждой точке D.*

II) *Функция f называется аналитической в точке, если она аналитична в некоторой окрестности данной точки.*

Б.В. Шабат ([43], с. 35) фактически меняет местами I) и II), но так удобнее вводить аналитичность на замкнутых или даже произвольных множествах.

Определение 3'. I') *Функция f называется голоморфной (аналитической) в точке $z_0 \in \mathbf{C}$, если она $\mathbf{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности z_0.*

II') *Функция f называется голоморфной на открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{C}$, если она голоморфна в каждой точке Ω.*

III) *Будем говорить, что функция f голоморфна на произвольном множестве $M \subset \mathbf{C}$, если ее можно продолжить на некоторое открытое множество $\Omega \supset M$ до голоморфной на Ω функции.*

Последний п. III) объясняет, в частности, как понимать аналитичность функций $h(z)$ и $g(z)$ *на контуре* в теореме Руше.

Упражнение. Покажите, что в точке $z=0$ функция $f(z)=z\bar{z}$ будет $\mathbf{C}$-дифференцируемой, но не голоморфной.

«Аналитичность» означает «разложимость в степенной ряд». Поэтому специальное введение термина «аналитический», «его применимость к функциям комплексного переменного, дифференцируе-

мым в некоторой области, будет оправдана в дальнейшем изложении, когда мы покажем, что такая функция может быть представлена в некоторой окрестности любой точки области в виде суммы сходящегося степенного ряда», – так объясняется необходимость определений вида 3 или 3' в [35] (с. 67). Весьма уместна аналогия с известным еще со школьных уроков английского образом "Future in the Past": нужно объяснить начинающему будущие проблемы, но пока на его собственном уровне.

Если повторить сказанное в [35] «своими словами», то получится, что коль скоро свойство «сходимость степенного ряда в окрестности» данной точки будет наследоваться любой точкой этой окрестности (Future), то и для комплексной дифференцируемости придумана версия с таким же характером наследования (Past). Действительно, свойство аналитичности функции в точке z_0 по определению наследуется любой точкой из некоторой окрестности z_0.

Однако эмоциональная нагрузка на термин «аналитический» не ограничивается будущими связями со сходимостью степенных рядов. В приведенной выше цитате А.И. Маркушевич по-видимому не хочет раньше времени пугать читателя римановыми поверхностями. Поскольку их в нашем повествовании не будет, ограничимся следующим наблюдением.

Грубо говоря, риманова поверхность – это новая область определения, на которой неоднозначная функция – например, $f(z)=\sqrt{z}$ – становится однозначной. Построение аналитической функции на римановой поверхности, как говорили в старину, *отправляется* от локальных разложений исходной функции в степенные ряды в окрестностях точек исходной области определения (см. [43], с. 178).

Завершим тему более респектабельно – следующей цитатой из [47] (с. 4), которая может служить ее кратким конспектом.

«Аналитической функцией $w=f(z)$ в области d называется дифференцируемая в каждой точке этой области функция комплексного переменного z. Любую аналитическую функцию удобно рассматривать как однозначную функцию на римановой поверхности, являющейся поверхностью наложения плоскости z. Регулярной функцией назовем однозначную аналитическую функцию или однозначную ветвь многозначной аналитической функции».

Таким образом, свойство комплексной дифференцируемости при выходе из точки в ее окрестность формализуется тремя понятиями. Римановы поверхности в конце концов поглощаются теорией накрытий (см. [42]), функции комплексного переменного возвращаются в плоскость, а «аналитичность», «регулярность» и «голоморфность» становятся синонимами, но, видит Бог, какой ценой!

Аналитичность несет самую тяжелую смысловую нагрузку, отражающую этапы развития основного объекта исследования ТФКП в духе старинного правила «онтогенез есть краткое повторение филогенеза». *Регулярность* «помнит» историю развития, но дистанцируется от нее, провозглашая принципиальную однозначность. Наконец, *голоморфность* словно и не подвергалась «изгнанию из Рая» в историю – голоморфная функция «изначально» однозначна, подобна многочленам (см. [35], с. 67) и призвана противостоять мероморфности – т.е. наличию полюсов...

Впрочем, чтобы не увлекаться метафорами, отошлем читателя к трудам признанных мэтров, оставив себе на память только один мАленький «автограф» из [43], с. 102, чуть-чуть его «адаптировав»:

«В заключение приведем сводку результатов об эквивалентности различных определений голоморфности функции в точке:

Теорема 4. *Эквивалентны следующие три утверждения:*

(R) *функция* f *в некоторой окрестности* U *точки* a *имеет* $\mathbf{C}$-*производную* $f'(z)$;

(C) *функция* f *непрерывна в некоторой окрестности* U *точки* a, *и интеграл от нее по границе любого треугольника* $\Delta \subset\subset U$ *равен нулю*;

(W) *функция* f *разлагается в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности* U *точки* a.

Эти три утверждения отражают три концепции в построении теории голоморфных функций...» Соотношение $\Delta \subset\subset U$ означает, что множество Δ лежит в U вместе со своим замыканием. Условие (C) – это отправной пункт теории Коши, которой мы коснемся ниже.

Отметим, что всюду в основной части пособия мы будем использовать термин «**регулярная функция**» – просто потому, что им пользовались А. Маркс и Э. Штрохеккер, результатам которых данное пособие и посвящено.

Упомянутые выше ветви многозначных функций – тема отдельного разговора, его методическая проработка до сих пор находится в стадии становления. Возникающие в некоторых разделах пособия непрерывные ветви аргумента комплексного числа суть мнимые части соответствующих ветвей логарифма.

Бесконечнолистное накрытие $\mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$, осуществляемое функцией $z = e^w$, поднимается до отображения $\mathbf{C}$ на риманову поверхность функции $w = \operatorname{Ln} z$ (склеенную из бесконечного числа экземпляров $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ так, как это сделано в [35], с. 635, или [43], с. 172). Сечениями этого отображения и будут непрерывные ветви логарифма, различающиеся тем, на какую из полос в плоскости $\mathbf{C}$ отображается фиксированный экземпляр $\mathbf{C} \setminus \{0\}$; значения этих ветвей отличаются на целые кратные $2\pi i$. Главная ветвь логарифма обозначается $\ln z$ и определяется условием $\ln 1 = 0$. Соответственно, $\arg z = \operatorname{Im} \ln z$ – главная ветвь аргумента с $\arg 1 = 0$.

Приведенная «панорама» довольно умозрительна и собрана как мозаика из представлений, сформированных соответствующими разделами книг [35], [42], [43], [53]. При таком подходе придется различать, например, точки $z \neq 0$ и $ze^{2\pi i}$, где z пробегает тот самый фиксированный экземпляр $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Так что для работы все равно придется «спускаться» в плоскость, а там уже нужно будет считаться с «местными» представлениями об однозначности, которые стремятся не допустить выхода на другие «листы».

Некоторые руководства так и поступают: вводят функцию $\operatorname{Arg} : z(\neq 0) \mapsto A(z) = \{\theta \in \mathbf{R} : z = |z| e^{i\theta}\}$ и выделяют ее однозначную ветвь $\arg_{\theta_0} : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to [\theta_0, \theta_0 + 2\pi) : z \mapsto \theta$ как сужение Arg, но не по области определения, а по множеству значений: $\arg_{\theta_0} = \operatorname{Arg}_{[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)}$ (см. [57], с. 113). Таким образом, функция $\arg_{\theta_0}$ ставит в соответствие числу $z \neq 0$ единственный элемент $\theta \in A(z)$ с условием $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$. Главное значение $\arg$ получается при $\theta_0 = -\pi$, в данном случае указанная процедура «разрезает» плоскость $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ вдоль отрицательной вещественной полуоси. Счастливы те, кому этого достаточно!

Другой подход, основанный на использовании приращения аргумента $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z$ вдоль кривой γ, соединяющей z с фиксированной

точкой области и не проходящей через $z=0$, позволяет «переходить на другие листы» даже при наличии разреза (или используя геометрию области). Показателен пример 5 на с.57 в книге [40], где именно такой подход и развивается; см. также учебники [41] и [36] (в последнем – разделы 3.4 и 3.5).

Упражнение. В свете сложившихся у Вас к настоящему моменту представлений о римановых поверхностях и аргументах разберите известный в теории однолистных функций

Пример Хилла [61]. Для любого $\delta>0$ рассмотрим

$$F_\delta(z)=[(1+z)/(1-z)]^{i\delta}=\exp(i\delta\mathrm{Ln}((1+z)/(1-z))),$$

где Ln – главная ветвь логарифма. Функция $F_\delta(z)$ представляет собой голоморфную универсальную накрывающую проекцию единичного круга $E=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ на кольцо

$$A_\delta=\{w\in\mathbf{C}:\exp(-\pi\delta/2)<|w|<\exp(\pi\delta/2)\}$$

с $F_\delta(0)=1$. Так как область A_δ не является односвязной, то проекция F_δ не однолистна. В частности, она отображает интервал $(-1,1)$ на единичную окружность, покрываемую бесконечное число раз.

Начать можно со статьи [64], где анализируется однолистность функции $F_\delta(z)$. Выделите, в частности, непрерывные однозначные ветви $\mathrm{Arg}\,F_\delta(z)$.

Естественным завершением настоящего раздела является

Принцип аргумента. *Если функция $f(z)$ аналитична на замкнутом контуре C и внутри него и если $f(z)\neq 0$ на C, то*

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz, \qquad (3)$$

где $\Delta_C\arg f(z)$ – полное изменение аргумента функции $f(z)$ при обходе C, а N – полное число нулей $f(z)$, лежащих внутри контура; при этом каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

Замечания. 1. В приведенной формуле под $\arg$ можно понимать любую подходящую ветвь аргумента, а при дополнительных оговорках в стиле [36] – вообще писать Arg. Свою важную роль играет здесь и замечание из сноски 2 о геометрической интуиции.

2. ([34], с. 88) Величина $(1/2\pi)\Delta_C \arg f(z)$ «геометрически представляет собой *число оборотов* вокруг начала $w=0$ вектора $f(z)$ при полном обходе C, или, что то же самое, вектора w при обходе кривой Γ, соответствующей C при отображении $w=f(z)$». Величина из правой части (3) представляет собой сумму логарифмических вычетов $f(z)$ в области D, ограничиваемой контуром C.

3. Полная формулировка принципа аргумента использует в левой части (3) не полное число нулей N, а его разность $N-P$ с полным числом P полюсов функции $f(z)$ внутри C – при соответствующем изменении условий на f. Однако в данной книге нас интересуют не мероморфные, а голоморфные функции, и принцип аргумента нам понадобится именно в приведенной формулировке.

4. Последняя заимствована из [7] (с. 136) с «достройкой» по [34] (с. 88). Следует отметить два типа подобных формулировок, сложившихся в учебной литературе по ТФКП. Речь идет, разумеется, об интегральной теореме Коши и ее следствиях, к числу которых относится и принцип аргумента, – словом, о «голоморфной теории Коши», восходящей к условию (C) процитированной выше теоремы 4 из [43] (с. 102). Вот на примере теоремы Коши мы и проиллюстрируем указанные типы формулировок.

Теорема Коши в «сильной» форме. *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то интеграл от $f(z)$, взятой вдоль границы C этой области, равен нулю:*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Это самая «чеканная» из всех «сильных» формулировок, однако в [34], откуда она «родом» (с. 49), теорема доказывается только для *кусочно-гладких* C. В [35] (с. 415), [38] (с. 165) и [43] (с. 88), где область D – внутренность замкнутой жордановой *спрямляемой* кривой C, доказательства основаны на аппроксимациях: в первом случае –

функции (теорема Рунге), во втором и третьем – границы (построение специальных окаймлений).

Теорема Коши в «слабой» форме. *Если функция* $f(z)$ *аналитична в односвязной области* D*, то ее интеграл вдоль любого замкнутого контура* C*, лежащего в* D*, равен нулю:*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Это – вновь [34], с. 49. «Слабый» вариант [7] (с. 93) таков:

Если функция $f(z)$ *аналитична внутри простого замкнутого контура* C *и на самом контуре, то*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Упражнение. Покажите, что последнее утверждение – действиительно разновидность теоремы Коши в «слабой» форме.

Б. Принцип максимума и лемма Шварца.

«Тронное имя» принципа максимума – *принцип максимума модуля для аналитических функций*. Наиболее общую формулировку находим в [35], с. 233-234:

Принцип максимума. *Модуль функции* $f(z)$*, аналитической в области* G *и не равной тождественной постоянной, не может иметь максимума ни в одной точке области.*

Формулировки без участия границы области имеются также в [43], с. 192, и [38], с. 204-205. Версия [34], с. 56, наследует «сильную» форму теоремы Коши (см. также [35], с. 183):

Если функция $f(z)$*, не равная тождественной постоянной, аналитична в области* D *и непрерывна в* $\bar{D}$*, то ее модуль не может достигать наибольшего значения во внутренней точке области* D.

Имеется несколько способов доказательства принципа максимума (см. [35]), самый распространенный – с использованием формулы Коши (она еще встретится ниже). Следует отметить, что принцип максимума может быть доказан на основе теоремы о сохранении области при аналитических отображениях [35] (с. 358), [43] (с. 192).

Сразу три способа доказательства дает Титчмарш ([7], с. 190-192), с которым у нас уже «повелось» сверять формулировки. Ту, что он предлагает на своей с. 190, можно назвать (вновь по аналогии с теоремой Коши) «слабой формой» принципа максимума:

Теорема о максимуме модуля. *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая функция, регулярная в некоторой области* D *и на ее границе* C*, которую мы предположим простым замкнутым контуром.*

Если $f(z)$ *не есть постоянная и* $|f(z)| \le M$ *на* C*, то* $|f(z)| < M$ *во всех внутренних точках области* D.

Проще говоря,

Если $|f(z)| \le M$ *на* C*, то же неравенство справедливо и во всех точках области* D.

Именно в такой форме принцип максимума обычно и применяется. Еще два момента. Следующее утверждение, у которого в учебной литературе нет специального названия, давно и прочно вошло в студенческий и аспирантский обиход как

Принцип минимума. *В вышеперечисленных условиях на область* D *и функцию* $f(z)$ *модуль* $|f(z)|$ *не может иметь в* D *минимума, отличного от нуля.*

Данная формулировка по существу принадлежит [7], с. 192; «вышеперечисленные условия» позволяют «подстроить» ее к любому варианту принципа максимума, после которого она обычно и излагается в учебниках.

И второй момент – два свойства гармонических функций.

Определение 4. ([34], с. 199). *Гармонической в области* D *функцией называется действительная функция* $u(x, y)$ *двух действительных переменных, обладающая в этой области непрерывными вторыми частными производными и удовлетворяющая дифференциальному уравнению*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (4)$$

Это уравнение обычно называют уравнением Лапласа (хотя и известно еще со времен Л. Эйлера), а дифференциальный оператор Δ – оператором Лапласа.

С указанным определением можно связать свою «интригу», заключающуюся в том, что в некоторых случаях действительную функцию $u(x,y)$ двух действительных переменных удобнее рассматривать как функцию одного комплексного: $u(z)$, $z=x+iy$. Приведем версию [43] (с. 238).

Определение 4'. *Действительная функция и класса C^2 называется гармонической в области $D\subset\mathbf{C}$, если всюду в D удовлетворяется уравнение* (4).

(Условие «класса C^2» очевидно расшифровывается определением 4.) Приведенная формулировка не делает ударения на выборе переменных и потому не пробуждает ожидания комментариев по поводу перехода к z – как в отношении самой функции u, так и применяемого к ней оператора Лапласа:

$$\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}.$$

Свойство 1 ([43], с. 239)**.** *Для любой функции u, гармонической в односвязной области D, можно построить голоморфную в D функцию f, для которой u является действительной (или мнимой) частью.*

Свойство 2 (принцип экстремума для гармонических функций). *Отличная от постоянной гармоническая функция не может достигать экстремума во внутренней точке области определения.*

Название свойства 2 заимствовано из [43] (с. 241), формулировка – из [34] (с. 204), по своей «чеканности» она уже близка к нашим лозунгам 30-х... Следует подчеркнуть, что, в отличие от ситуации с аналитическими функциями, принцип минимума для гармонических не требует никаких дополнительных условий по сравнению с принципом максимума и поэтому на равных правах объединяется с ним в свойстве 2.

Вернемся к аналитическим функциям. Важнейшим следствием «аналитического» принципа максимума является

Лемма Шварца. *Если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$, $f(0)=0$ и $|f(z)|\le 1$ в $|z|<1$, то $|f(z)|\le|z|$ в $|z|<1$ и, кроме того, $|f'(0)|\le 1$; знаки равенства здесь (в первой оценке при $z\ne 0$) имеют место только в случае, когда $f(z)=\varepsilon z$, $|\varepsilon|=1$.*

Формулировка леммы составлена из двух версий, приведенных в [6] на с. 29 и 319.

Доказательство ([6], с. 29). Функция $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z}$ регулярна в $|z|<1$, если положить $\varphi(0)=f'(0)$. Так как максимум модуля $|\varphi(z)|$ в круге $|z|\le r$, $r<1$, достигается на границе, то в $|z|\le r$ имеем $|\varphi(z)|\le\dfrac{1}{r}$. Но при фиксированном z можно устремить r к 1. Отсюда получаем $|\varphi(z)|\le 1$; это и дает обе оценки, указанные в формулировке леммы. Если теперь в некоторой точке z_0 из круга $|z|<1$ имеем $|\varphi(z_0)|=1$, то $|\varphi(z)|$ достигает в точке z_0 максимума, что возможно только в случае, если $\varphi(z)\equiv\text{const}=e^{i\alpha}$, т.е. если $f(z)=e^{i\alpha}z$. Лемма доказана.

Ясно, что принцип максимума применяется здесь в «слабой» форме, но основной вопрос связан с аналитичностью $\varphi(z)$ в нуле. Разберем, как она доказывается в [34] (с. 58).

Итак, рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z} & \text{при } z\ne 0,\\ f'(0) & \text{при } z=0.\end{cases} \tag{5}$$

Из условий леммы следует, что $\varphi(z)$ аналитична в кольце $0<|z|<1$ и непрерывна в точке $z=0$; последнее получается из того, что

$$\lim_{z\to 0}\varphi(z)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=f'(0). \tag{6}$$

Но тогда $z=0$ – устранимая особая точка функции $\varphi(z)$, и соотношения (5) и (6) устанавливают аналитичность $\varphi(z)$ в $z=0$.

Проведенное рассуждение и «закодировано» голузинской фразой «функция $\varphi(z)$ регулярна в $|z|<1$, если положить $\varphi(0)=f'(0)$».

Радикально иной подход к обоснованию регулярности $\varphi(z)$ развивается в [31], с. 106. Посмотрим, как работает в данном случае интегральная формула Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\frac{f(t)}{t-z}dt, \qquad (7)$$

справедливая для любой точки z круга $|z|<\varepsilon$, где ε – произвольное положительное число, меньшее единицы.

В силу (7) и условия $f(0)=0$ заключаем, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t}\right)f(t)dt=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\frac{f(t)}{t(t-z)}dt, \qquad (8)$$

т.е. функция

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\frac{f(t)}{t(t-z)}dt \qquad (9)$$

аналитична в круге $|z|<\varepsilon$, причем

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\frac{f(t)}{t^2}dt \qquad (10)$$

по одному из свойств интеграла (типа) Коши, в [31] оно приведено на с. 95; в частности, там отмечено, что обнаружить это свойство нетрудно, если заметить, что

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\frac{f(t)}{(t-z)(t-z-\Delta z)}dt,$$

где $z+\Delta z$ не лежит на $|t|=\varepsilon$. Дальнейшее обоснование этого свойства стандартно; как говорят в таких случаях, читатель может сам без труда обнаружить его в любом учебнике, см., напр., [39], с. 53-54.

Теперь из [31] (с. 106) осталось переписать только одно предложение: «таким образом, функция $\varphi(z)=f(z)/z$, $\varphi(0)=f'(0)$, аналитична в круге $|z|<1$». Впрочем, нам нужна только аналитичность в нуле, а установлена она в любом круге вида $|z|<\varepsilon$, $\varepsilon<1$. Всю остающуюся здесь «недосказанность» собираем в следующие

Упражнения. **1.** Покажите, что функция $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z|<1$.

2. В процессе осмысления приведенных доказательств аналитичности $\varphi(z)$ в нуле мы начинаем догадываться, что по существу обосновывали представление (1) (при $z_0=0$). Дайте прямое доказательство (1) методами [34] и [31].

3. Объясните, зачем в итоговом выводе в [31] говорится об аналитичности функции $\varphi(z)=f(z)/z$, $\varphi(0)=f'(0)$, если у нас уже есть аналитичность функции (9), да еще со свойством (10)? Ведь казалось, что цель метода [31] – «обойти стороной» рассмотрение функции вида (5), нет? И вообще, можно ли «безнаказанно» перейти от соотношения, соединяющего левую и правую части (8) к функции (9), аналитической в круге $|z|<\varepsilon$? Или аналитична только правая часть (9)?..

Тем не менее, упражнение 2 показывает, что мы вернулись «на круги своя» – значит, пора менять тему разговора. Более широкий взгляд на проделанную работу говорит нам, что пришло время «встряхнуться» и придать повествованию элемент драматизма.

В. «Сто лет одиночества».

Враг любого пособия – вспомогательный материал. Его приходится как-то структурировать, мотивировать, диагностировать, при этом как назло норовят выпасть «лишние детали», нарушающие стройность и однородность изложения. По мнению составителя данного пособия при освещении вспомогательных тем инвентаризация должна уступать место драматургии. Нужно что-то доказывать, сталкивать цели и задачи, чтобы введение из разрозненного набора сведений превратилось в равноправную главу книги. В предыдущих разделах мы так и поступили, сразу уведя читателя от «коллекционирования» теорем ТФКП из «университетского стандарта» к «составлению пазлов» с участием некоторых из них. В результате (как мы надеемся) у читателя должно было возникнуть правильное представление о том, что́ ему нужно делать в процессе чтения этой книги. Сейчас нам предстоит более трудная задача – придумать или отыскать в прошлом интригу, призванную обеспечить сюжетом введение

основных классов однолистных функций – выпуклых и звездообразных.

Начало исследования выпуклых однолистных в круге функций принято относить к §§ 13 и 14 части II книги Эдуарда Штуди «Лекции по избранным темам геометрии». Эта вторая часть, «Конформное отображение односвязной области» [16], вышла в свет в 1913 году при участии Вильгельма Бляшке. Данный труд, несомненно, представляет собой памятник эпохи и требует особого подхода ко всем принятым в те времена нюансам различий между обоснованием, описанием и обсуждением, навсегда оставшимся в XIX веке.

Задача же настоящего пособия более скромная: реконструировать в рамках современных представлений результаты Штуди о выпуклости и их развитие в работах ближайших последователей. За основу возьмем следующее

Определение 5 (ср. [6], с. 202; [23], с. 40). Область называется *выпуклой,* если отрезок, соединяющий две любые ее точки, целиком принадлежит этой области. Регулярная в круге функция называется *выпуклой*, если она однолистна в этом круге и отображает его на выпуклую область.

Мы продолжаем работать в единичном круге $E=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$, где рассматриваются регулярные и однолистные функции f. Введем обозначение $E_r=\{z\in\mathbf{C}:|z|<r\}$, $0<r<1$. Линии уровня функции f суть образы окружностей ∂E_r, $0<r<1$, при отображении $w=f(z)$ и будут обозначаться $f(|z|=r)$.

Следующее утверждение никогда не доказывается в курсе ТФКП и является своего рода «методической аксиомой».

Принцип выпуклости. *Пусть функция* f *регулярна и однолистна в* E *и* $0<r<1$. *Область* $f(E_r)$ *выпукла* (*в контексте определения* 5) *тогда и только тогда, когда линия уровня* $f(|z|=r)$ *выпукла в том смысле, что «при обходе ее в определенном направлении касательная к ней вращается в одном направлении».*

Здесь цитируется данная в [6] (с. 165) характеристика выпуклости линии уровня, выступающая как *граничное* определение выпуклой области в противовес *внутреннему* (с. 202; см. выше определение 5). Граница в первом определении должна быть аналитической, т.е. образом окружности при отображении регулярной и однолистной функцией (точную формулировку приводит, напр., [44], с. 41). В не-

равноправии обоих определений (второе не требует дополнительных условий), а также в традиционном уклонении от доказательства их эквивалентности для областей с аналитическими границами просматривается теперь та самая интрига, которая обеспечивает наше повествование не только математическим, но и историческим сюжетом.

Упражнение. Покажите, что в условиях принципа выпуклости линия уровня $f(|z|=r)$ есть граница области $f(E_r)$.

Процитированная характеристика восходит к Штуди ([16], с. 107, 108), который вводит одно из определений выпуклости в терминах неубывания опорной угловой функции (*Stützwinkelfunktion*), которая в «нашем случае» имеет вид $F_r(\theta)=\pi/2+\theta+\operatorname{Im}\ln f'(re^{i\theta})$; отголосок такого подхода оставил след в [37] (отдел третий, с. 133 и 322, задача № 113).

В следующем утверждении собраны результаты из [16], в основе которых лежит принцип выпуклости.

Предложение 1. *Пусть* f *регулярна и однолистна в* E.

1. *Если* $0<r<1$, *то кривая* $f(|z|=r)$ *выпукла тогда и только тогда, когда на окружности* $|z|=r$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\geq 0. \tag{11}$$

2. *Существует радиус выпуклости* R *функции* f, *т.е. точная верхняя грань множества значений* $r\in(0,1)$, *для которых линии уровня* $f(|z|=r)$ *выпуклы;* $0<R\leq 1$.

3. *Всякая линия уровня функции* f, *лежащая внутри выпуклой линии уровня, сама является выпуклой. Неравенство* (11) *является строгим на* $|z|=r$ *при всех* $0<r<R$. *Ни одна кривая* $f(|z|=r)$ *не является выпуклой при* $R<r<1$.

4. *Функция* f *выпукла в круге* E, *если в нем выполняется неравенство* (11), *которое необходимо будет строгим.*

Доказательство п. 1 извлекаем из [6], с. 165-166. Если взять на $|z|=r$ точку $z=re^{i\varphi}$, то касательная к $|z|=r$, исходящая из этой точки, образует с вещественной осью угол $\pi/2+\varphi$, а следовательно, соответствующая касательная к образу окружности $|z|=r$ при отображении ее однолистной функцией $w=f(z)$ образует с вещественной

осью угол $\frac{\pi}{2}+\varphi+\arg f'(z)$. Отсюда следует (см. принцип выпуклости), что $|z|\le r$ тогда и только тогда переходит в выпуклую область, если на $|z|=r$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi+\arg f'(z)\right)\ge 0$$

или, что то же, если на $|z|=r$ выполняется неравенство (11).

2. Так как f однолистна в E и $f'(z)\ne 0$ при $z\in E$, то найдется $r_0>0$ такое, что при $|z|\le r_0$ будет справедливым (строгое) неравенство (11). Согласно п. 1 отсюда следует, что множество значений $r\in(0,1)$, для которых линии уровня $f(|z|=r)$ выпуклы, не пусто; кроме того, оно ограничено сверху. Поэтому радиус выпуклости R существует и $0<R\le 1$.

3. В силу п. 1 выпуклость $f(|z|=r)$ при некотором $r\in(0,1)$ означает выполнение неравенства (11) на $|z|=r$. По принципу максимума для гармонической функции из левой части (11) (см. свойство 1 гармонических функций, раздел Б) получим, что при $|z|<r$ имеет место уже строгое неравенство (11), которое, таким образом, выполняется на любой окружности $|z|=\rho$ с $\rho<r$. Остается воспользоваться п. 1.

Отсюда, в частности, следует, что неравенство (11) при $|z|=\rho$ будет строгим для всех $0<\rho<R$: достаточно применить только что доказанное к какому-либо r, $\rho<r<R$. Неравенство (11) при $|z|=R$ можно обосновать посредством *argumentum ex contrario*, как и последнее утверждение настоящего пункта.

4. Как показывает п. 3, выполнение оценки (11) во всем круге E может быть только строгим.

Фиксируем произвольные точки w_1 и w_2 области $f(E)$. Их прообразы z_1 и z_2, однозначно определяемые в E благодаря однолистности f, погружаем в круг E_r для подходящего значения $r\in(0,1)$. Согласно п. 1 (строгое) неравенство (11) влечет за собой выпуклость области $f(E_r)$. Поэтому отрезок с концами в w_1 и w_2, целиком принадлежит этой области, а значит, и $f(E)$.

Только что доказанное предложение 1 можно рассматривать как «современный вариант» центрального результата Штуди вместе с его

«окружением» ([16], с. 108-109). Отметим, что п. 1 – это принятая позднее каноническая версия использования опорной функции Штуди, а п. 4 означает, что функция f выпукла в E, если $R=1$, т.е. если все кривые $f(|z|=r)$, $0<r<1$, выпуклы.

Единственное, что хочется усилить в предложении 1, так это довести его п. 4 до уровня эквивалентности. Эту задачу решает следующее утверждение, которое назовем

Теорема Радо. *Пусть функция f регулярно и однолистно отображает E на выпуклую область B, причем $f(0)=0$. Тогда и образ $B_r = f(E_r)$ при любом $r\in(0,1)$ также есть выпуклая область.*

Доказательство (как и формулировку) вновь переписываем из [6], с. 203: это почти в точности текст из [13], но ссылки на эту статью Голузин почему-то не приводит. Счел ли он данную теорему элементарной или в своей стремительной манере сам доказал ее, так сказать, «на марше» – мы теперь вряд ли когда-нибудь узнаем...

Итак, область B выпукла и $0<r<1$. Пусть $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$, где $z_1, z_2 \in E_r$; считаем $|z_1|\le|z_2|$. Согласно определению 5, все точки $\varphi(z)=tf((z_1/z_2)z)+(1-t)f(z)$ лежат в B, когда $|z|<1$ и $0<t<1$. Поэтому функция $\psi(z)=f^{-1}(\varphi(z))$ регулярна в E, $\psi(0)=0$ и $|\psi(z)|\le 1$ при $z\in E$. По лемме Шварца получаем $|\psi(z)|\le|z|$. При $z=z_2$ это дает $|f^{-1}(tw_1+(1-t)w_2)|\le r$. Но $tw_1+(1-t)w_2 = f(z_0)$, где $|z_0|<1$. Отсюда следует, что $|z_0|\le r$, значит, $tw_1+(1-t)w_2\in B_r$. Это и доказывает, что область B_r будет выпуклой.

Здесь следует сделать важное отступление. Рассмотрим следующее утверждение, название которого сложилось в работах [10], [12], [13] и некоторых других.

Теорема Штуди. *Пусть функция f регулярна и однолистна в E и $0<r\le 1$. Если f выпукла в E_r, то она выпукла и в каждом круге E_ρ при $\rho<r$.*

Различие между случаями $r=1$ и $r<1$ очевидно и отражает упомянутое выше неравноправие между двумя определениями выпуклости. При $r<1$ приведенное утверждение получено в [16], с. 108-109, и составляет содержание п. 3 предложения 1, при $r=1$ оно совпадает с утверждением теоремы Радо (формально отличаясь только «на»

$f(0)=0$). Название ей здесь дано благодаря доказательству Радо из [13] – единственному, которое нам известно для случая $r=1$.

Тем не менее, и сам Радо, и Каратеодори [10], и Пешль [12] в случае $r=1$ утверждают авторство Штуди. Однако в том, как они это делают, улавливается смутная недосказанность. Пешль формулирует теорему Штуди так, как она приведена выше, но ссылается на штудиевский прототип п. 4 предложения 1. Каратеодори дает более широкую ссылку ([16], с. 109), но она охватывает разве лишь случай $r<1$. Радо точнее: указываемое им утверждение ([16], с. 110) действительно можно интерпретировать как случай $r=1$ (в терминах линий уровня функции Грина), но доказано ли оно у Штуди? Сам Радо дал более чем красноречивый ответ; интересно, что именно его доказательство вошло в монографии [6] и [23] (с. 42-43 и тоже без ссылки), принадлежавшие двум различным традициям преподавания комплексной теории функций. Наконец, и Каратеодори, и Радо напоминают о наличии альтернативного доказательства теоремы Штуди [9], причем Радо называет это доказательство "üblichen", что можно перевести как «обычное» или даже «нормальное»...

Возможно, все дело в том, что к результатам Штуди следует относиться в большей степени как к «прототипам», апробированным в «хороших» ситуациях: ясно, что в приведенной теореме Штуди случаи $r<1$ и $r=1$ «неразличимы», когда образ $f(E)$ имеет аналитическую границу, и Штуди, разумеется, об этом знал. Кроме того, могли играть роль соображения приоритета: все-таки, [16] или [9]? Однако, если такой источник напряженности и был, то он иссяк со смертью Штуди в 1930 г., и Пешль – ученик Каратеодори – в своей диссертации [12] ссылается уже только на [16].

Более интересным является вопрос о том, почему все эти перипетии «выпуклого сюжета» геометрической теории функций не оставили следов в отечественной учебной традиции; показательно отсутствие таких следов, скажем, в книге [29] – ведь ее автора по праву можно назвать арбитром вкуса в данной области. Ответ неожиданно прост: достаточно заметить, например, что Вильгельм Бляшке (участвовавший в написании книги [16]) был членом нацистской партии, а Пешль успел даже «побегать» в штурмовиках.[3]

[3] См., напр., http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Blaschke.html и http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Peschl.html

Воистину, обнаруживаемое в интернете сравнение Штуди с Мефистофелем[4] хочется назвать провидческим (хоть и «задним числом»).

Обратимся теперь к пересказу [62] работы [9] – эту последнюю, к сожалению, найти не удалось. Согласно [62], в [9] установлена следующая версия результата Штуди:

Теорема Каратеодори. *Условием, необходимым и достаточным для того, чтобы аналитическая функция* $f(z)$ *однолистно отображала круг* $|z|<R$ *на выпуклую область, является регулярность в этом круге функции* $1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$, *положительность в нем ее вещественной части и* $f'(0)\neq 0$.

Необходимость следует из теоремы Радо и предложения 1 (см. также [6], с. 203-204). Однако для доказательства достаточности средств у нас пока нет, несмотря на то, что, как утверждается в [6] (с. 204), *легко видеть*, что если функция $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$ регулярна в круге E и удовлетворяет в нем (строгому) неравенству (11), то она *однолистно* отображает E на выпуклую область.

Упражнение. Проверьте пересказ [62], сравнив его с оригиналом [9].

Завершим тему выпуклости в следующем разделе, предварительно «подтянув» на нужный уровень «идущую параллельным курсом» тему звездообразности.

Г. Классы S, S^0 и S^*.

Через S обозначается класс всех регулярных и однолистных в E функций f с нормировками $f(0)=f'(0)-1=0$; S^0 – подкласс S, выделяемый свойством выпукости.

Определение 6 (ср. [6], с. 202; [23], с. 40). Область называется *звездообразной* относительно некоторой точки, если отрезок, соединяющий любую ее точку с указанной точкой, целиком принадлежит этой области. Регулярная в круге функция называется *звездообразной,* если она однолистна в этом круге и отображает его на область, звездообразную относительно начала координат.

[4] "Eduard Study (1862–1930) – ein mathematischer ***Mephistopheles*** im geometrischen Gärtchen" (http://d-nb.info/978165624/34).

Через S^* обозначается подкласс, состоящий из всех звездообразных функций, содержащихся в S. Определения 5 и 6 показывают, что $S^0 \subset S^* \subset S$. Функции f с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ называются *нормированными.*

Начало исследования звездообразности принято относить к работе [8], в которой установлена следующая

Теорема Александера. *Если* f *регулярна в* E *и* $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, *то* $f \in S^0$ *тогда и только тогда, когда* $zf'(z) \in S^*$.

Данную теорему удобно доказывать уже после получения основных результатов, чем сейчас и займемся. Будем строить изложение по аналогии с выпуклым случаем.

Принцип звездообразности. *Пусть* $f \in S$ *и* $0 < r < 1$. *Область* $f(E_r)$ *звездообразна относительно точки* $w = 0$ (*в контексте определения* 6) *тогда и только тогда, когда линия уровня* $f(|z| = r)$ *звездообразна в том смысле, что «если точка* w *движется по ней в положительном направлении, то* $\arg w$ *все время возрастает».*

Здесь вновь цитируется данная в [6] (с. 166-167) характеристика звездообразности линии уровня (см. также [37], с. 132), играющая роль *граничного* определения звездообразной области; *внутреннее* было дано в определении 6.

Упражнение. Попытайтесь доказать принцип звездообразности, а если получится – то «замахнуться» и на принцип выпуклости. Можно пойти не математическим, а «историографическим» путем – либо по старым статьям, либо расшифровывая современные руководства (такие, например, как [52], §§ 10-12).

Аналог предложения 1 мы формулировать не будем, дадим сразу аналог теоремы Радо – под романтическим названием

Лемма о наследовании звездности. *Пусть* $f \in S^*$ *и* $B = f(E)$. *Тогда при любом* $r \in (0,1)$ *образ* $B_r = f(E_r)$ *будет звездообразным относительно* $w = 0$.

Доказательство. Пусть $w \in B$. Тогда, по определению 6, tw при $0 < t < 1$ также принадлежит B. Значит, функция $\psi(z) = f^{-1}(tf(z))$, $\psi(0) = 0$, определена и регулярна в E, где $|\psi(z)| \le 1$. По лемме Шварца отсюда имеем $|\psi(z)| \le |z|$, $z \in E$. Пусть теперь $w_1 \in B_r$; тогда будет $w_1 = f(z_1)$, $|z_1| < r$. Поэтому $|\psi(z_1)| \le |z_1|$, т.е. $|f^{-1}(tw_1)| \le r$. Но $tw_1 \in B$,

так что $tw_1 = f(z_0)$, $|z_0|<1$; подставляя это в предыдущее неравенство, получаем $|z_0|<r$, т.е. $tw_1 \in B_r$. Это и доказывает, что область B_r звездообразна относительно $w=0$.

Упражнение «на историографию». Приведенное обоснование заимствовано из [6], с. 202 (см. также [23], с. 42-43). Возможно, оно было восстановлено по доказательству Радо [13] для выпуклых функций (см. раздел B). А может быть, наоборот, оно вдохновило Радо на публикацию [13]. Задание состоит в том, чтобы определить авторство приведенного выше доказательства леммы о наследовании звездности.

Для формулировки основных результатов нам понадобится еще одно определение, а для их доказательства – еще одна теорема.

Определение 7. Класс Каратеодори $\boldsymbol{C}$ состоит в точности из всех функций f, регулярных в E с условиями $\operatorname{Re} f(z)>0$, $z \in E$ и $f(0)=1$.

Функции класса $\boldsymbol{C}$ еще появятся ниже в главе II.

Теорема, которая нам понадобится – это известный *принцип соответствия границ,* доказываемый с помощью принципа аргумента. Напомним две его формулировки; первую, традиционную, перепишем из обзора [47], где она приведена со ссылкой на [35]:

Принцип соответствия границ. *Пусть регулярная функция* $w=f(z)$, *непрерывная в замкнутой области* $\bar{d}$, *где* d *– внутренность жордановой кривой* l, *взаимно однозначно отображает* l *на некоторую замкнутую жорданову кривую* L. *Тогда* $f(z)$ *отображает область* d *на внутренность* D *кривой* L *и является однолистной в области* $\bar{d}$.

Формулировку, которую мы будем использовать, дает нам «верный Титчмарш». Поэтому назовем теорему 6.45 из [7] (с. 229)

Теорема Титчмарша. *Пусть* C *– простой замкнутый контур, ограничивающий некоторую область* D. *Пусть* $w=f(z)$ *– аналитическая функция, регулярная в* D *и на* C *и принимающая каждое свое значение на* C *только один раз. Тогда функция* $f(z)$ *однолистна в* D.

Замечание. Читатель, наверное, давно уже «расправился» с такими свойствами кривых, как простота, жордановость и т.д.

Перейдем к основным результатам. Следующее утверждение восходит к работе Р. Неванлинны [11].

Теорема 1. *Пусть функция* f *регулярна в* E *и* $f(0)=f'(0)-1=0$. *Тогда* $f\in S^*$, *если и только если функция* $zf'(z)/f(z)$ *принадлежит классу Каратеодори* $\boldsymbol{C}$.

Доказательство. Пусть $f\in S^*$. Тогда по лемме о наследовании звездности f отображает каждый круг E_r, $0<r<1$, на область, звездообразную относительно начала координат. Согласно принципу звездообразности отсюда следует, что при движении по окружности $|z|=r$, $0<r<1$, в определенном направлении $\arg f(z)$ изменяется в том же направлении. Это эквивалентно тому, что

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial \varphi}=\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \qquad (12)$$

для $z=re^{i\varphi}$, $0<r<1$, $0\le\varphi<2\pi$, т.е. для $z\in E$. При этом, по принципу максимума модуля гармонических функций, знака равенства в (12) быть не может.

Обратно, пусть f – нормированная регулярная функция со свойством $zf'/f\in\boldsymbol{C}$. Выполняющееся в этом случае неравенство (12) означает, что для любого $r\in(0,1)$ при движении z вдоль $|z|=r$ по часовой стрелке точка $f(z)$ пробегает линию уровня $L_r=f(|z|=r)$ с возрастающим аргументом. В силу $zf'/f\in\boldsymbol{C}$ внутри каждой окружности $|z|=r$, $0<r<1$, функция f имеет в точности один нуль ($z=0$). Принцип аргумента (см. выше формулу (3)) утверждает, что тогда L_r обходит начало координат в точности один раз. Коль скоро такой обход совершается с возрастающим аргументом, L_r не может иметь самопересечений. Таким образом, L_r есть простая замкнутая (аналитическая) кривая, ограничивающая в силу (12) звездообразную относительно $w=0$ область B_r. Кроме того, функция f принимает каждое свое значение на $|z|=r$ только один раз. По теореме Титчмарша f однолистна в E_r, а в силу произвольности r – в E.

Обоснование теоремы 1 проведено по схеме [23], с. 41-42, но доказательство необходимости опирается на [6], с. 202.

Упражнения. 1. Покажите, что из $f\in S^*$ следует регулярность функции $zf'(z)/f(z)$, а из $f\in S^0$ – регулярность $1+zf''(z)/f'(z)$.

2. Восстановите аналог предложения 1 для звездообразного случая. Покажите, в частности, что звездообразность $f \in S$ в каждом E_r влечет за собой $f \in S^*$.

3. Почему в конце доказательства теоремы 1 «функция f принимает каждое свое значение на $|z|=r$ только один раз»?

Настала пора вернуться к выпуклости и завершить начатое в разделе B. В качестве основы вновь используем [23] (с. 42-43). Справедлива такая «версия» теоремы Каратеодори:

Теорема 2. *Пусть функция f регулярна в E и $f(0)=f'(0)-1=0$. Тогда $f \in S^0$, если и только если $1+zf''(z)/f'(z) \in \boldsymbol{C}$.*

Доказательство. Пусть $f \in S^0$. По теореме Радо f отображает каждый круг E_r, $0<r<1$, на выпуклую область. По принципу выпуклости и предложению 1 в единичном круге будет выполняться строгое неравенство (11).

Обратно, пусть f – нормированная регулярная в E функция с условием $1+zf''/f' \in \boldsymbol{C}$. Строгое неравенство (11) означает, что угол наклона касательной к любой кривой L_r, $0<r<1$, монотонно возрастает (см. доказательство п. 1 предложения 1). Но при полном обходе кривой L_r полное изменение аргумента касательного вектора равно

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \arg\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} f(re^{i\varphi}) \right) d\varphi = 2\pi \left(1 + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz \right) = 2\pi, \; z = re^{i\varphi},$$

по принципу аргумента, примененному к функции f', не имеющей нулей в E. Это показывает, что кривая L_r обходит начало координат в точности один раз и не имеет самопересечений. Значит, f принимает каждое свое значение на $|z|=r$, $0<r<1$, только один раз. Как и в доказательстве теоремы 1, применяя теорему Титчмарша, заключаем, что f однолистна в E. Тогда п. 4 предложения 1 устанавливает, что f (однолистно) отображает E на выпуклую область, т.е. $f \in S^0$.

Упражнения. 1. Дайте подробное доказательство следующего утверждения. Если при полном обходе L_r аргумент касательного вектора имеет полное изменение = 2π, то L_r не имеет самопересечений и обходит $w=0$ только один раз.

2. Докажите теорему Александера.

Теоремы 1 и 2 позволяют ввести следующее

Определение 8. Класс S^0 представляет собой совокупность всех регулярных в E функций f, удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>0,\ z\in E, \tag{13}$$

и называется классом выпуклых функций.

Класс S^* состоит в точности из всех регулярных в E функций f с условиями $f(0)=f'(0)-1=0$ и

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}>0,\ z\in E, \tag{14}$$

и называется классом звездообразных функций.

Определение 8 позволяет задавать классы S^0 и S^* чисто аналитически, ограничиваясь краткими комментариями по поводу геометрического смысла определяющих условий. Такой подход используется, например, в обзоре [48] (с. 8-9), где, однако, S^0 и S^* вводятся с помощью нестрогих версий неравенств (13) и (14). Впрочем, как показано выше (принцип максимума для гармонических функций), нестрогие версии сводятся к строгим, и определение из [48] эквивалентно определению 8.

Разумеется, аналитический подход к определению выпуклых и звездообразных функций полезен в тех случаях, когда требуется экономия «текстового пространства» или нужно избежать встречи с «тенями прошлого». Тем не менее, проработка темы выпуклости в рамках «геометрического подхода» (см. предложение 1 и теорему Радо) позволяет распознать в ней ряд будущих (в смысле Future in the Past) направлений комплексной теории функций. К их числу можно отнести изучение геометрии линий уровня однолистной функции ([12], [50],...) или вычисление геометрических радиусов типа радиуса выпуклости ([32], [47], [54], [59], [60], [67],...). Исследование областей значений аналитических функционалов на S^0 и S^* связано с построением новых классов однолистных функций.

Д. Теорема Маркса-Штрохеккера.

«Героиней» нашей книги является следующая

Основная теорема. *Если* $f \in S^0$, *то*

1) $\operatorname{Re}\dfrac{f(z)}{z} > \dfrac{1}{2}$, $z \in E$;

2) $\operatorname{Re} z\dfrac{f'(z)}{f(z)} > \dfrac{1}{2}$, $z \in E$.

Данный результат независимо друг от друга установили два немецких математика – Арнольд Маркс в работе «Исследования однолистных отображений» [1] и Эрих Штрохеккер в статье «К теории однолистных функций» [2]. Всюду далее мы ссылаемся на этот результат как на *теорему Маркса-Штрохеккера,* или *Основную теорему.*

Мысль обратиться к ней, чтобы еще раз пройти «по избранным местам» теории функций, не оставляла автора этих строк с того памятного дня 13 сентября 1984 г., когда он впервые услышал об этой теореме (см. предисловие). Казалось, что заряд вдохновения, полученный тогда, позволит «вытащить» любую тему. То было доказательство Штрохеккера – «прямое, как стрела», но чтобы «замахнуться» на Маркса, требовалось еще набраться духу. «Второе дыхание» пришло благодаря книге Дюрена [23]: подтверждение гипотезы Полиа-Шёнберга ([23], гл. 8), происходившее с участием *Основной теоремы*, обогатило последнюю еще несколькими доказательствами.

Вообще, при работе над пособием его автору необычайно везло: возникало ощущение, что чуть ли не в каждом источнике, попадавшемся под руку, обнаруживался след нашей «героини». Так был «открыт» Г.М. Голузин, работам которого посвящена третья глава. Выходит, что-то глубинное затронули авторы [1], [2], раз сам наш «отец-основатель» [3]–[6] пересек их «фарватер». Но поиск скользил дальше словно вниз по реке...

Down by the riverside

Строчки из песен – попытка (наверное, тщетная) пробиться сквозь время и пристать к проплывающему мимо берегу...

Оглядываясь назад, к истокам, видишь, как наша «река времени» теряется в каскаде глобальных потрясений. Работы [1], [2] были свидетелями последних лет и даже месяцев существования Веймарской

республики – первой (после 1848-го) немецкой демократии – когда, казалось, еще можно было что-то изменить... Составителю данного пособия с трудом удалось преодолеть искушение добавить к его названию подзаголовок «марксистское наследие». Но в контексте «веймарской эсхатологии» игра слов улетучивается, и упоминание фамилии Маркс становится символом навсегда исчезнувшей во тьме 30-х немецкой цивилизации XIX века...

Почему же эти работы привлекли такое внимание почти через сорок лет, на рубеже 60-х и 70-х? Шейл-Смолл – 1969, Саффридж – 1970, Рушевей и Шейл-Смолл – 1973. Время «смены вех»: на западе Вилли Брандт заставил потускнеть образы адэнауэровской готики, на востоке Хонеккер сменил Ульбрихта, в СССР вышли «Семнадцать мгновений весны». Германия вновь стала модной. Был ли это «безобидный» Веймарский ренессанс или первые шаги к уже не такому далекому, но казавшемуся тогда совершенно невозможным объединению?.. А уж эти легенды о несостоявшемся в 30-е годы «англо-германском альянсе»!..

Все это чужая история. Автор этих строк был хорошо знаком с людьми, для которых само существование Германии не было не то, что аксиомой или хотя бы теоремой, – оно вызывало у них живейшее недоумение и чувство незавершенности некоей работы... Знал он и людей, положивших целую жизнь на доказательство этой теоремы... Знаменитый памятник в Трептов-парке – пожалуй, единственное, что примиряло тех и других...

Составитель старательно переписывал в свое пособие эти формулы начала 30-х, проговаривая про себя громоздкие немецкие фразы, которые до сих пор напоминают о *нашествии,* и думал: неужели все воспоминания России о двадцатом веке ведут в Германию?..

Подумайте об этом и Вы, уважаемый читатель!

Какие же ценности провозглашает данная книга и кому она может быть полезна? Прежде всего, ее автор всегда придерживался той простой мысли, что математика «антропоцентрична» не в меньшей степени, чем любая гуманитарная наука (чуть не написал: «любая другая»). Людям никогда не будет безразлично, *кто* доказывает теоремы и *каким* идеалам они служат. Выше составитель «ушел» от темы «математика и нацизм», но сейчас обращение к ней вполне уместно. Рассмотрим один пример, который, чтобы не тратить время на поиск источников, представим как гипотезу.

Гипотеза состоит в том, что реабилитация (важного для ссылок) *имени* ученого, работавшего *в дискредитирующем окружении,* либо сделавшего *предосудительный выбор*, следует определенным схемам. Подобная схема может предполагать наличие «буферной» группы посредников – ученых, призванных «отмыть» нужные результаты уже своими *именами.*

«Проверим» эту гипотезу на общеизвестном примере О. Тейхмюллера – автора «прорывных» результатов, которые привели к построению знаменитой теории, носящей его имя. И одновременно с этим убежденного нациста, нашедшего гибель на Курской дуге.

Так вот в случае с Теймюллером такую «буферную» группу возглавил Л. Альфорс, деятельность которого в родной Суоми до 1945 г. и отношение к происходившему тогда в мире скрылись в тени его «филдсовского статуса номер один». В *Потсдамскую эпоху* Финляндию удобно было представлять «буферным» государством *Оси*[5] – по-видимому, этот образ перешел и на Альфорса. Рабочий отчет [49] – показательный пример «баланса интересов при наличии институциональных ограничений». И научная, и гуманитарная[6] составляющие данного проекта сформировали в представлениях последующих поколений математиков своего рода эталон достаточного знания о Тейхмюллере: преодоленное научное *наследие,* дозированное обсуждение вклада самого *ученого* и «осколки» информации о *человеке.*

Мы ничего не знаем (интернет насыщается медленно) о судьбе А. Маркса и Э. Штрохеккера в постигшей Германию гуманитарной катастрофе. Сгинули ли они в концлагерях, а если выжили, то как приспособились... В предположении, что высказанная выше гипотеза верна, посмотрим, как ссылались на их работы последователи.

Шейл-Смолл [26] и Саффридж [28] при ссылке на *Основную теорему* упоминают только Штрохеккера, в статье [25] вообще не упоминается ни тот, ни другой, а оценка 2) указанной теоремы идентифицируется как условие звездообразности порядка ½. Дюрен [23], с. 251, утверждает, что неравенство 2) открыл Штрохеккер, а условие 1) – Маркс. И только Шобер [27] признает обоих равноправными авторами *Основной теоремы.*

---

[5] В советской части этого мира такое представление обычно связывалось с формируемыми «официальной идеологией» положительными образами орденоносцев Ю.К. Паасикиви и У.К. Кекконена. На их фоне «вывод» Финляндии из «пространства непрощенной войны» осуществлялся уже такими «адресными» средствами, как х/ф «Посол Советского Союза» (1969 г.). В этом фильме Финляндия приобретает «шведское лицо»: «образ врага» вытесняется и замещается «образом посредника».

[6] Образец «допустимой полемики» см., напр., в [69], с. 5-6.

По-видимому, первой работой со ссылкой на [1], [2] была статья М. Робертсона [14], «закрепившая» неравенство 2) *Основной теоремы* за Штрохеккером. Что же касается оценки 1), то, во-первых, в [14] (с. 381) *отмечена возможность* получения неравенства

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{2},\ z \in E, \tag{15}$$

для звездообразных функций вида $f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk+1} z^{nk+1}$, $n \in \mathbf{N}$, и *указан путь* его обоснования при $n = 1$; случай $n = 2$, отвечающий оценке 1), не рассматривается. Напомним, что доказательство (15) для более общей ситуации $f(z) = z + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots \in S^*$, $n \in \mathbf{N}$, дал Г.М. Голузин в [5]. Во-вторых, в [14] (с. 392) оценка 1) доказана, но только для регулярных в круге E функций с вещественными коэффициентами, выпуклых в направлении мнимой оси.

Ссылок на Маркса в [14] две. Прежде всего (с. 389), упомянут его результат о подчиненностях $z/f(z) \prec 1+z$ и $f(z)/z \prec 1/(1+z)$ в классе S^0. Далее (с. 392) говорится о получающейся «по теореме А. Маркса» оценке $\operatorname{Re} f(z)/z \geq 1/(1+|z|)$, $z \in E$, для выпуклой функции f специального вида. Можно сделать вывод, что в [14] игнорируется не столько Маркс, сколько оценка 1).

Итог: в «пространстве внимания» к *Основной теореме,* формируемом авторами, которые участвуют в настоящем пособии, лидирует Эрих Штрохеккер. Однако делать какие-либо выводы пока преждевременно, ведь существует еще *гипотеза А. Маркса* из [1] – предположение о том, что для каждой функции $f \in S^*$ имеет место подчиненность $f'(z) \prec k'(z)$, $z \in E$, где $k(z) = z/(1-z)^2$ – функция Кебе. Не вдаваясь в существо дела, отметим, что первым исследованием указанной гипотезы была, по-видимому, большая статья Р. Робинсона [68] 1947 г. Затем было несколько работ шестидесятых, а по 70-м гг. удалось «с лету» обнаружить восемь статей, только в названиях которых уже фигурирует «гипотеза А. Маркса».

Таким образом, «скользящий» поиск по литературе обнаруживает следующее. Если не считать статьи [14] 1936 г., то первая ссылка на Маркса относится к 1947 г., а на Штрохеккера – только к 1969 г. При этом «всплеск» ссылок по обеим работам приходится на первую

половину 70-х гг. XX в. В нескольких важных источниках по *Основной теореме* нет ссылок на [1]. Тем не менее, по общему числу ссылок и по «степени равномерности» их распределения во времени с большим отрывом лидирует [1].

Разумеется, «полученные данные» довольно поверхностны. Но если более глубокий поиск их подтвердит, то «под подозрением» в рамках нашей исходной гипотезы окажется разве что Штрохеккер, так как «относительный всплеск» упоминаний о нем пока приходится на первую половину 70-х гг., а это, как уже упоминалось выше, годы привыкания мира к образу «другой Германии». Но скорее всего, дело было так. Первый из нашей «экспертной выборки», Шейл-Смолл, опирающийся на статью [14], обнаружил в ней в связи с *Основной теоремой*, как мы теперь знаем, не Маркса, а именно Штрохеккера, вот и сослался на него.

И напоследок: если считать авторов [25], [26] и [28] той самой «буферной» группой посредников, то интересно отметить, что у одного из участников «германо-британского альянса» [25] – Стефана Рушевея – научным руководителем диссертационной работы (1969 г.) был не кто иной, как уже встречавшийся нам на этих страницах Эрнст Пешль...[7]

Так или иначе, но в результате успешно осуществленного «проекта [25]-[26]-[28]» как сами работы [1], [2], так и «видимые части» их «авторских реквизитов» прошли своеобразную «санобработку» – очищение от следов послевеймаровского двенадцатилетия. Но прошли они ее все-таки на Западе...

Проведенный «исторический экскурс», если взглянуть на него из российской глубинки, служит хорошей иллюстрацией к одной старой проблеме, сформулированной еще Н.А. Бердяевым в «Русской идее». Речь идет об *оправдании культуры* – проблеме, которую XX век обогатил новым содержанием. Ясно, что «правду-истину» бывает трудно соединить с «правдой-справедливостью», но если они разойдутся слишком далеко, то, как показывает опыт, платить приходится долго.

И дело давно уже не в отказе от творчества во имя священной миссии или высоких целей. Отказ от творчества давно стоит перед лицом выбора: из чьих рук мы получаем научное наследие, чью традицию продлеваем, к чьим ценностям возводим свою генеалогию.

---

[7] http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=21269 (Mathematics Genealogy Project – Stephan Ruscheweyh)

"Even you are not rich enough, Sir Robert, to buy back your past. No man is", – сказала когда-то одна международная авантюристка одному аристократу с подмоченной репутацией.[8] Эта крылатая фраза помогает перевести ситуацию в «прагматический» контекст.

Чтобы не создавать конкурентные преимущества своим противникам, которые всегда выглядят неуязвимыми для твоей собственной этики, нужно уметь преодолевать зоны отчуждения, созданные прошлым, в том числе и в науке. Прежде всего, чтобы сохранять целостность культурной среды – базы для любой конкуренции. Это очень трудная задача: урок «проекта [49]» состоит в том, что суд истории бывает, как правило, очень жестоким. Потому, что ведется всегда от лица принесенных в жертву. Четыре последних пятилетки мало что изменили в отношении людей к потрясениям XX века. Оно остается актуальным. Значит, надо просто развивать навигацию вдоль *реки времени*…

"Time is money", – сказал другой классик. Поэтому больше не будем отвлекать читателя и поговорим о нем самом. Для кого же написана эта книга? Ее автор надеется, что люди постарше найдут в ней что-то созвучное своей молодости, даже в некотором бурчании, стилизованном «под» стариковское. Людям помоложе небесполезно будет вспомнить о хорошо забытой пословице «повторенье – мать ученья». Составитель давно мечтал написать пособие в форме «теоремы об осьми доказательствах», да не каких-нибудь вымученных, а исторически обусловленных. Рай для «повторенья»!

Далее, в будущее отношение читателя к настоящему пособию закладываются два принципа, заимствованные составителем из книги [77], которую он считает лучшим наставлением для преподавателей. «Я не мог бы обучать алгебре – как взялся один мой знакомый – девушку, страдающую религиозной манией; она тайком носила власяницу и колола себя гвоздями...»[9] Нет, это еще не совсем принцип, вот принцип:

«*Учение не в тягость тогда, когда оно сопрягается с внутренней жизнью ученика*».

Проще говоря, не надо читать это пособие, если душа не лежит. Попробуйте выстроить *свою* концепцию математического текста – на

---

[8] *Oscar Wilde*. An Ideal Husband.

[9] Эту и две следующие цитаты можно обнаружить на с. 194 и 197 журнала «Иностранная литература», № 7 за 1976 год, где напечатана вторая часть романа [77].

примере какой-нибудь близкой Вам темы. Только помните о текстовой упаковке времени: «линейные» курсы – это «благородный самообман лектора», в котором его не хотят разубеждать студенты. Эпоху линейных инноваций как раз и завершил 1945-й год. К 1969-му это стало ясно даже тогдашним ретроградам (остальным в 1968-м, но это совсем уж печальная история)...

А теперь приведу второй принцип:

«*Но прослежу, чтобы время от времени читатель получал удовольствие за свои деньги*».

Здесь в «утрированной форме» подразумевается *самостоятельная работа читателя*, а отнюдь не бизнес-план. К сожалению, «по нонешним временам» такие вещи нужно оговаривать, а то еще, чего доброго, читатель подумает про составителя что-нибудь уже совсем экзотическое. Нет, смысл этого принципа в том, что, как учили автора этих строк старшие товарищи, не нужно слишком подробно все «разжевывать». Читатель должен получать удовольствие за счет *своих* усилий, ему нужно хорошенько потрудиться *самому* – над разбором приводимых доказательств, решением упражнений, изучением источников...

Введение осталось бы неполным, если бы мы не затронули такую важную составляющую лекционной работы, как *саундтрек.* Речь идет не только о песенных строчках в эпиграфах к главам и разделам. Лекционный саундтрек – это проговаривание прямо на лекции различных тем, возникающих и развивающихся по ходу ее чтения в ассоциациях, импровизациях, ответах на вопросы и даже дискуссиях...

Мы любим всё – и жар холодных чисел,
И дар божественных видений...

Всплески от «холода» к «жару» и обратно вызывают «видения» – так, словно сам собой, начинает звучать саундтрек. В настоящем пособии он присутствует с самого начала (образ «дамской науки») и достигает кульминации в данном разделе (тема «XX век»). И хотя *острый галльский смысл* искушает нас поговорить о дискурсивных практиках, но... Нам предстоит, укрепившись духом, последовать туда, куда уже давно зовет нас *сумрачный германский гений*...

I. Эрих Штрохеккер: Айзлинген[10], 1933

Für dich, Rio Rita,
Klingt meine Serenada in der Nacht

Как представишь, что этот *Paso doble* «крутили» по обе стороны линии фронта... И ведь никаких «буферных» групп не требовалось...

Названия нынешней и следующих глав оформляются как в детективах или (титрами во весь экран) в фильмах-катастрофах – для нагнетания пущей напряженности. Начнем с доказательства Штрохеккера – в память о «той лекции» Е.А. Широковой из предисловия. Кроме того, штрохеккеровское доказательство прозрачнее марксовского: оно поступательно и, если так можно выразиться, имеет «стреловидную» структуру.

Содержание настоящей главы составляет первый параграф части I из [2]; его название – «Вещественные части $f(z)/z$ и $zf'(z)/f(z)$ для функций класса S^0». Постараемся сохранить изложение в неприкосновенности – вплоть до «трехэтажных» формул и громоздких формулировок. Путь Штрохеккера к *Основной теореме* начинается со следующего свойства функций класса Каратеодори (см. определение 7).

Лемма 1.1. *Пусть функция* $w=g(z)$ *регулярна в круге* $|z|<1$, *причем* $g(0)=1$ *и* $\operatorname{Re} g(z)\geq 0$ *в* $|z|<1$. *Тогда если* $|z_0|\leq r<1$, *то* $g(z_0)$ *лежит в замкнутом круге плоскости* w, *диаметр которого представляет собой отрезок* $[(1-r)/(1+r),(1+r)/(1-r)]$ *вещественной оси.*

Доказательство. Построим функцию

$$w_1=g_1(z)=\frac{g(z)-1}{g(z)+1},$$

модуль которой в $|z|<1$ ограничен единицей:

$$|g_1(z)|\leq 1.$$

Так как $g_1(0)=0$, то $g_1(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца, согласно которой $g_1(z_0)$ лежит в $|w_1|\leq r$. С помощью функции

[10] Современная транскрипция названия Eislingen. В Атласе мира 1977 г. [70], с. 25, этот город обозначен как Эйслинген. Работа Э. Штрохеккера [2] поступила в журнал 18 марта 1932 г.

$$w=\frac{1+w_1}{1-w_1}\quad\left(w_1=\frac{w-1}{w+1}\right)$$

круг $|w_1|\le r$ однолистно отображается на круг, отмеченный в условии настоящей леммы. Возвращаясь с этой функцией обратно в плоскость w, получим утверждение леммы.

Следующее утверждение выражает свойство, которое через тридцать с небольшим лет получит название линейной инвариантности класса нормированных выпуклых функций [65].

Лемма 1.2. *Пусть функция* $w=f(z)=z+\ldots$ *принадлежит классу* S^0. *Тогда классу* S^0 *принадлежит и функция*

$$w=h(z)=\frac{f(z_0)-f\left(\dfrac{z_0-z}{1-\bar{z}_0 z}\right)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}. \tag{1.1}$$

При этом z_0 *– произвольная фиксированная точка с* $|z_0|<1$.

Доказательство. Дробно-линейная функция

$$z=\frac{z_0-z}{1-\bar{z}_0 z}$$

отображает круг $|z|<1$ на $|z|<1$ так, что точка $z=z_0$ переходит в $z=0$. При этом $z=0$ переходит в $z=z_0$. Функция

$$w_1=f(z)=f\left(\frac{z_0-z}{1-\bar{z}_0 z}\right)$$

отображает $|z|<1$ на ту же самую область G, которая является образом $|z|<1$ под действием $w=f(z)$, только теперь точка $z=0$ переходит в $w_1=f(z_0)$. Для функции $w=h(z)$ имеем $h(0)=0$. Ее производная равна

$$h'(z)=\frac{f'\left(\dfrac{z_0-z}{1-\bar{z}_0 z}\right)}{f'(z_0)(1-\bar{z}_0 z)^2}. \qquad (1.2)$$

Легко проверить, что $h'(0)=1$. Наконец, образ круга $|z|<1$ при отображении $w=h(z)$, получающийся из G сдвигом и растяжением с поворотом, будет, таким образом, однолистным и выпуклым вместе с G. Следовательно, $h(z)$ принадлежит классу S^0.

Включение $S^0 \subset S^*$ и теорема 1 из раздела Г Введения устанавливают неравенство (14). Посмотрим, как это делает Штрохеккер.

Лемма 1.3. *Пусть функция* $w=f(z)=z+\ldots$ *принадлежит классу* S^0. *Тогда в круге* $|z|<1$ *будет*

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}\geq 0 .$$

Доказательство. По теореме Штуди[11] в круге $|z|<1$ имеем

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\geq 0. \qquad (1.3)$$

Кривая C, возникающая как образ окружности $|z|=r<1$ при отображении $w=f(z)$, имеет, согласно указанной теореме, такое свойство: касательная к ней вращается постоянно в одном и том же направлении. Внутренность C является, таким образом, выпуклой областью, звездообразной относительно нулевой точки. Отсюда, как говаривали в старину, «с необходимостью следует, что» $\arg f(z)$ – монотонно возрастающая функция от $\varphi=\arg z$ на $|z|=r>0$. «В скобках» отметим: $0\leq\varphi<2\pi$, $0\leq\arg f(r)<2\pi$, $\arg f(r)\leq\arg f(z)<\arg f(r)+2\pi$.[12] Так как функция $\arg f(z)$ дифференцируема, то

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f(z)\geq 0,$$

или

[11] Здесь Штрохеккер дает ссылку на § 13 книги [16] и на статью [13] (см. выше Введение).
[12] В оригинале эти три неравенства действительно даны в скобках отдельным предложением без слов.

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im}(\log f(z)) = \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \log f(z)}{\partial \varphi} \right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)} iz \right) = \operatorname{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Основу итерационного процесса в *Основной теореме* составит

Лемма 1.4. *Пусть для любой функции* $w = f(z) = z + \ldots$ *класса* S^0 *установлено:*

$$\operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} \geq a \text{ при } |z| < 1 \quad (0 \leq a \leq \frac{1}{2}).$$

Тогда в круге $|z| < 1$ *для функций класса* S^0 *выполняются и неравенства*

$$1)\ \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} \geq \frac{1}{4(1-a)} \geq a, \quad 2)\ \operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} \geq \frac{1}{4(1-a)}.$$

Доказательство. 1. Пусть $f(z)$ – произвольная функция класса S^0, z_0 – произвольная, но фиксированная точка из $|z| < 1$, пусть, кроме того, $|z_0| = r < 1$. Вместе с $f(z)$ рассмотрим функцию $h(z)$, определенную формулой (1.1). Для $z = z_0$ из (1.1) и (1.2) получим

$$h(z_0) = \frac{f(z_0)}{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}, \tag{1.4}$$

$$h'(z_0) = \frac{1}{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)^2}. \tag{1.5}$$

Так как $h(z)$, согласно лемме 1.2, есть функция класса S^0, то по условию в $|z| < 1$ имеем

$$\operatorname{Re} z \frac{h'(z)}{h(z)} \geq a.$$

Следовательно, функция

$$g(z)=\frac{1}{1-a}\left(z\frac{h'(z)}{h(z)}-a\right)$$

удовлетворяет условиям леммы 1.1: $g(0)=1$ и $\operatorname{Re} g(z)\geq 0$ в $|z|<1$. Тогда, согласно ее заключению, $g(z_0)$ лежит в круге, построенном на отрезке

$$\left[\frac{1-r}{1+r},\frac{1+r}{1-r}\right]$$

как на диаметре. Поэтому $z_0\dfrac{h'(z_0)}{h(z_0)}$ лежит в круге, диаметр которого есть отрезок

$$\left[(1-a)\frac{1-r}{1+r}+a,\,(1-a)\frac{1+r}{1-r}+a\right]$$

вещественной оси. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_0\dfrac{h'(z_0)}{h(z_0)}}\right)\geq\frac{1}{(1-a)\dfrac{1+r}{1-r}+a}. \tag{1.6}$$

Теперь уже из (1.4) и (1.5) получается

$$\frac{f(z_0)}{z_0}=\frac{1}{1-|z_0|^2}\cdot\frac{1}{z_0\dfrac{h'(z_0)}{h(z_0)}} \tag{1.7}$$

и, таким образом, из (1.6) и (1.7) имеем

$$\operatorname{Re}\frac{f(z_0)}{z_0}=\frac{1}{1-r^2}\operatorname{Re}\frac{1}{z_0\dfrac{h'(z_0)}{h(z_0)}}\geq$$

$$\geq \frac{1}{1-r^2}\frac{1}{(1-a)\frac{1+r}{1-r}+a}=\frac{1}{(1-a)(1+r)^2+a(1-r^2)},$$

и, окончательно,

$$\operatorname{Re}\frac{f(z_0)}{z_0}\geq\frac{1}{1+r(2-2a)+r^2(1-2a)}. \qquad (1.8)$$

Положим

$$F(r)=1+r(2-2a)+r^2(1-2a),$$

так что

$$F'(r)=(2-2a)+2r(1-2a)>0$$

для $0\leq r\leq 1$ и $0\leq a\leq 1/2$. Поэтому

$$F(r)\leq F(1) \text{ при } 0\leq r\leq 1.$$

Таким образом, из (1.8) следует, что

$$\operatorname{Re}\frac{f(z_0)}{z_0}\geq\frac{1}{1+(2-2a)+(1-2a)}=\frac{1}{4(1-a)}\geq a.$$

Последняя оценка равносильна неравенству

$$4a(1-a)\leq 1,$$

которое, как известно, выполняется для всех вещественных a. Так как z_0 – произвольная точка из $|z|<1$, то тем самым первое утверждение доказано.

2. Пусть вновь z_0 – произвольная фиксированная точка из $|z|<1$, и пусть $|z_0|=r<1$. Вместе с произвольной функцией $f(z)$ класса S^0 рассматриваем функцию $w=h(z)$ из (1.1). Так как она принадлежит классу S^0 по лемме 1.2, то теперь можно воспользоваться только что доказанным в п. **1**: имеем

$$\operatorname{Re}\frac{h(z)}{z}\geq a \quad \text{в} \quad |z|<1.$$

Образуем функцию

$$g_1(z)=\frac{1}{1-a}\left(\frac{h(z)}{z}-a\right),$$

так что $\operatorname{Re} g_1(z)\geq 0$ в $|z|<1$ и $g_1(0)=1$; значит, $g_1(z)$ удовлетворяет условиям леммы 1.1. На основании этого заключаем – совершенно аналогично п. **1** – что $\dfrac{h(z_0)}{z_0}$ лежит в замкнутом круге, построенном на отрезке

$$\left[(1-a)\frac{1-r}{1+r}+a,\,(1-a)\frac{1+r}{1-r}+a\right]$$

вещественной оси как на диаметре. Следовательно,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\dfrac{h(z_0)}{z_0}}\right)\geq\frac{1}{(1-a)\dfrac{1+r}{1-r}+a}. \tag{1.9}$$

Теперь из (1.4) следует

$$z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}=\frac{1}{1-|z_0|^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{h(z_0)}{z_0}}. \tag{1.10}$$

Из (1.9) и (1.10) получится, что тогда

$$\operatorname{Re} z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\geq\frac{1}{1-r^2}\frac{1}{(1-a)\dfrac{1+r}{1-r}+a}\geq\frac{1}{4(1-a)},$$

как уже установлено в п. **1**. Так как z_0 – произвольная точка из $|z|<1$, то этим доказано и второе утверждение настоящей леммы.

И вот, наконец,

Основная теорема. *Пусть функция* $w=f(z)=z+\ldots$ *принадлежит классу* S^0. *Тогда в круге* $|z|<1$

$$1)\ \operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}\geq\frac{1}{2},\ \ 2)\ \operatorname{Re}z\frac{f'(z)}{f(z)}\geq\frac{1}{2}.$$

При этом в обоих утверждениях постоянную $\frac{1}{2}$ *увеличить нельзя.*

Доказательство. Построим числовую последовательность

$$a_1=0;\ a_2=\frac{1}{4(1-a_1)}=\frac{1}{4};\ a_3=\frac{1}{4(1-a_2)}=\frac{1}{3};\ \ldots,$$

в которой n-й член вычисляется с помощью $(n-1)$-го посредством рекуррентного соотношения

$$a_n=\frac{1}{4(1-a_{n-1})}. \tag{1.11}$$

Согласно лемме 1.4, в условиях настоящей теоремы неравенства

$$1)\ \operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}\geq a_n,\ \ 2)\ \operatorname{Re}z\frac{f'(z)}{f(z)}\geq a_n\ \ \text{в}\ |z|<1$$

выполняются в том случае, если доказано, что

$$\text{I)}\ 0\leq a_{n-1}\leq\frac{1}{2},\ \text{II)}\ \operatorname{Re}z\frac{f'(z)}{f(z)}\geq a_{n-1}\ \ \text{в}\ |z|<1.$$

При $n=2$ неравенства I) и II) доказаны в лемме 1.3:

$$\text{I)}\ 0\leq a_1\leq\frac{1}{2},\ \ \text{II)}\ \operatorname{Re}z\frac{f'(z)}{f(z)}\geq a_1\ \ \text{в}\ |z|<1.$$

Таким образом, основная теорема будет доказана, если мы покажем:

$$\text{A. } 0 \le a_n \le \frac{1}{2} \text{ при } n = 2,3,\ldots, \quad \text{B. } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Оба эти утверждения будут доказаны, если мы покажем[13]:

$$a_k = \frac{k-1}{2k} \quad (k = 1,2,\ldots) \tag{1.12}$$

Это уже доказано для $k = 1$. Предположим, что доказано для $k = n$:

$$a_n = \frac{n-1}{2n}.$$

Тогда, согласно (1.11),

$$a_{n+1} = \frac{1}{4\left(1 - \frac{n-1}{2n}\right)} = \frac{(n+1)-1}{2\cdot(n+1)}.$$

Итак, (1.12) имеет место всюду, и, таким образом, *Основная теорема* доказана.

На самом деле нужно еще доказать неулучшаемость «половинок» в правых частях 1) и 2) *ее* формулировки. Герр Штрохеккер выносит это доказательство в первое из следующих замечаний.

Замечания. 1. Граница $1/2$ точна и достигается функцией

$$w = f(z) \equiv \frac{z}{1+z} = z + \ldots,$$

отображающей круг $|z| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 1/2$. Для указанной функции имеем

$$w_1 = \frac{f(z)}{z} \equiv z\frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1}{1+z},$$

[13] В оригинале тоже два раза "wenn wir zeigen" – до и после формул A и B.

и при отображении $w_1 = \dfrac{1}{1+z}$ образ круга $|z|<1$ есть в точности $\operatorname{Re} w_1 > 1/2$.

2. Условия 1) и 2) из основной теоремы не будут достаточными для принадлежности $f(z)$ классу S^0, хотя бы и в дополнительном предположении, что $f(z) = z + \ldots$ регулярна и однолистна в $|z|<1$. Вот пример:

$$w = f(z) \equiv z + \frac{z^3}{3}.$$

Данная функция регулярна и однолистна в $|z|<1$. Действительно, предположение $f(z_1) = f(z_2)$ с $z_1 \neq z_2$ приводит к условию $z_1 + z_2 = -3$, которое не может выполняться при $|z_1|<1$ и $|z_2|<1$. Кроме того,

а) $\dfrac{f(z)}{z} \equiv 1 + \dfrac{z}{3}$, значит, $\operatorname{Re}\dfrac{f(z)}{z} > \dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$ в $|z|<1$,

б) $z\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \left(1 + \dfrac{2}{3}z\right) \Big/ \left(1 + \dfrac{1}{3}z\right)$,

т.е. для $|z|<1$ величина $z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ лежит внутри круга, построенного на отрезке $[1/2, 5/4]$ вещественной оси как на диаметре, значит, условие 2) основной теоремы также выполняется. Несмотря на это, функция $f(z)$ не принадлежит классу S^0. Убедиться в этом можно, воспользовавшись тем, что для такой принадлежности необходимо выполнение неравенства (1.3). В рассматриваемом примере

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \equiv \left(1 + \frac{4}{3}z\right) \Big/ \left(1 + \frac{2}{3}z\right).$$

При $z = -1$ имеем

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 = -1,$$

т.е. неравенство (1.3) выполняется не во всех точках круга $|z|<1$.

II. Арнольд Маркс: Шпецгарт близ Юберлингена, 1932[14]

Dort unter'm Fliederbaum…

...Танго «Куст сирени». Шлягер не менее известный, чем «Рио Рита», за авторство которой (по крайней мере, в интернете) спорят «семь рапсодов». И хотя, в отличие от блистательного пасодобля у «нашего» танго с авторством все в порядке, нигде не удается обнаружить слова. А они должны быть – уж слишком гладко «ложится» название на первую музыкальную строчку. Более того, «Куст сирени» звучал в немецкой комедии "Kyritz-Pyritz"[15] (русскую транскрипцию приводить не рискуем), сюжет которой[16] предполагает исполнение известного количества песен. Через пару месяцев после премьеры фильма Арнольд Маркс «из предместья замка Шпецгарт» отправил в «Математические анналы» свою работу [1].

Доказательство *Основной теоремы,* искусно вплетенное в текст [1], гладко «струится» по ветвям *Fliederbaum*'а... Из «довоенной дымки» похрустывает для нас «запись 1931 г.»

……

«Старина Арни» увязывает доказательство основной теоремы, точнее, ее первого неравенства (второе сводится к нему элементарно) с задачей эффективного описания множества значений некоторого функционала на классе S^0. Вот как он это делает.

Напомним, что буквой S в геометрической теории функций обозначается класс регулярных и однолистных в единичном круге, т.е. в $E=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$, функций $f(z)$ с нормировкой $f(0)=f'(0)-1=0$. Часто для краткости вместо указанной нормировки пишут начало тейлоровского разложения $f(z)$ в окрестности $z=0$: $f(z)=z+\ldots$, с которого эта нормировка и «считывается».

Через S^* обозначается подкласс класса S, состоящий из всех функций $f(z)$, отображающих E на области, звездообразные относительно начала координат. Со временем название укоротилось до класса S^* всех нормированных звездообразных в E функций $f(z)$, т.е. функций $f(z)=z+\ldots$, удовлетворяющих условию

[14] Arnold Marx in Spetzgart bei Überlingen (Bodensee). Редакцией статья получена 27 ноября 1931 г.
[15] http://grammophon-platten.de/page.php?267.9
[16] По рецензии из «Нью-Йорк Таймс» от 9 августа 1932 г.

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}>0,\ z\in E$$

(см. лемму 1.3). Однолистность функций $f\in S^*$ давно уже превратилось в «общее место», т.е. в хорошее упражнение по начальным главам геометрической ТФКП или, лучше сказать, по ее «классической историографии». Что касается класса S^0 нормированных выпуклых функций в E, то он (как мы надеемся) достаточно освоен выше и «к настоящему времени» состоит из всех регулярных в E функций $f(z)=z+\ldots$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>0,\ z\in E.$$

Упомянутое выше упражнение расширяется до обоснования включений $S^0\subset S^*\subset S$ (см. Введение, раздел Г).

А. Маркс вводит множество $G_S(r)$, определяя его как наименьшее множество в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, содержащее весь запас значений функций $u(z)=\dfrac{z}{f(z)}$ при $|z|\le r<1$, когда r фиксировано, а $f(z)$ пробегает все функции класса S.

Используя обозначения $E_r=\{z\in\mathbf{C}:|z|<r\}$ и $\bar{E}_r=\{z\in\mathbf{C}:|z|\le r\}$, можно записать

$$G_S(r)=\bigcup_{f\in S}u(\bar{E}_r).$$

Вводится также множество

$$G_S=\bigcup_{0<r<1}G_S(r).$$

Аналогично $G_S(r)$ определяются и множества

$$G_{S^*}(r)=\bigcup_{f\in S^*}u(\bar{E}_r)\ \text{ и }\ G_{S^0}(r)=\bigcup_{f\in S^0}u(\bar{E}_r).$$

Приведем сводку результатов из [1], касающихся только что введенных множеств.

Теорема A. 1. $G_S = \{u \in \mathbf{C} : 0 < |u| < 4\}$.

2. *Множество* $G_S(r)$ *целиком лежит в замыкании внутренности кривой*

$$u = (1 + \rho e^{i\varphi})^2 \quad (0 \le \varphi < 2\pi),$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{r}{2} \log \frac{1+r}{1-r}}.$$

Очевидно, эквивалентная формулировка п. 2 теоремы A имеет вид

$$G_S(r) \subset \left\{ u \in \mathbf{C} : |\sqrt{u} - 1|^2 \le \frac{r}{2} \log \frac{1+r}{1-r} \right\}.$$

Теорема B. *Множество* $G_{S^*}(r)$ *совпадает с замыканием внутренности кривой*

$$u = (1 + re^{i\varphi})^2 \quad (0 \le \varphi < 2\pi).$$

Другими словами,

$$G_{S^*}(r) = \{u \in \mathbf{C} : |\sqrt{u} - 1| \le r\}. \tag{2.1}$$

Теорема C. *Множество* $G_{S0}(r)$ *совпадает с замыканием внутренности кривой*

$$u = 1 + re^{i\varphi} \quad (0 \le \varphi < 2\pi).$$

Иначе говоря,

$$G_{S0}(r) = \{u \in \mathbf{C} : |u - 1| \le r\}.$$

Следующее утверждение демонстрирует, что доказать теорему C означает установить оценку п. 1) *Основной теоремы*, т.е. обосновать неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}, \; z \in E. \tag{2.2}$$

Предложение 2.1. *Пусть* $f(z)=z+\ldots$ *– функция, регулярная в* E, *и* $u(z)=z/f(z)$. *Тогда условие* (2.2) *равносильно тому, что для любого* $r\in(0,1)$ *имеет место включение* $u(\bar{E}_r)\subset\{u\in\mathbf{C}:|u-1|\le r\}$.

Доказательство. Неравенство (2.2) эквивалентно представлению

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{1-\varphi(z)},$$

где $\varphi(z)$ – функция, удовлетворяющая условиям леммы Шварца, т.е. регулярная в E функция с условиями $\varphi(0)=0$ и $|\varphi(z)|\le|z|$, $z\in E$. Тогда $u(z)=1+\varphi(z)$ и лемма Шварца дает $|u(z)-1|\le|z|$, $z\in E$. Отсюда следует, что если $|z|\le r$, то и $|u(z)-1|\le r$.

Обратно, фиксируем произвольное $r\in(0,1)$. Тогда включение $u(\bar{E}_r)\subset\{u\in\mathbf{C}:|u-1|\le r\}$ означает, что при $|z|\le r$ будет $|z/f(z)-1|\le r$; в частности, отсюда следует, что функция $f(z)$ не имеет в E других нулей, кроме $z=0$. Поэтому имеем

$$\left|1-\frac{f(z)}{z}\right|\le r\frac{f(z)}{z},\ z\in E.$$

Возводя в квадрат обе части данного неравенства и раскрывая выражение слева, получим

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-r^2)\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2,\ z\in E,$$

откуда, в силу $f(z)/z\ne0$ в E, немедленно следует неравенство (2.2).

Предложение доказано.

Упражнение. Если сравнить с (2.2) условие 1) из *Основной теоремы*, то сразу привлекает внимание различие в знаках неравенства: в условии 1) оно нестрогое, в (2.2) становится строгим. В чем здесь дело, каким должно быть неравенство и принципиально ли это? Таких неравенств по ТФКП разбросано немало. Вопрос об их строгости или нестрогости имеет единую природу, или в каждом случае надо искать свою причину?

Замечание. Равенство $G_{S0}(r)=\{u\in \mathbf{C}:|u-1|\le r\}$, составляющее содержание теоремы С, можно переписать в виде

$$G_{S0}(r)=u_\varepsilon(\bar{E}_r),$$

где $u_\varepsilon(z)=1+\varepsilon z$; вместо произвольного ε с $|\varepsilon|=1$ можно взять $\varepsilon=1$.

Теперь вернемся к нашей главной задаче – установить неравенство (2.2). Поскольку обоснование теоремы С основано на доказательстве теоремы В, то с последнего и начнем.

Доказательство теоремы В.

Тиха вода бжеги рве…

Следующее утверждение получено в [15][17].

Теорема Рогозинского. *Пусть функция*

$$g(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots \tag{2.3}$$

регулярна в круге E *и*

$$\operatorname{Re} g(z)>-1. \tag{2.4}$$

Тогда $g(z)$ *в круге* $|z|\le r<1$ *принимает только те значения, которые лежат в замыкании внутренности кривой*

$$u_r(\varphi)=\log\frac{1}{(1-re^{i\varphi})^2},\ 0\le\varphi<2\pi.$$

Указанные границы достигаются (*удовлетворяющими вышеназванным предположениям*) *функциями*

$$g(z)=\log\frac{1}{(1-\varepsilon z)^2},\ |\varepsilon|=1, \tag{2.5}$$

и только ими.

[17] Werner Rogosinski in Breslau. В 1937 г. сумел перебраться в Соединенное Королевство. "Cicha woda brzegi rwie" – несмотря на легкомысленную окраску, песня исполнена глубокой житейской мудрости.

Из приведенной формулировки, сохраняющей не только структуру, но и классический дух оригинала [15], в дополнительном разъяснении нуждается только последнее предложение. Обозначим

$$U_\varepsilon(z)=\log\frac{1}{(1-\varepsilon z)^2},\ |\varepsilon|=1.$$

Ясно, что при любом $r\in(0,1)$ образ $U_\varepsilon(\bar{E}_r)$ один и тот же для всех ε с $|\varepsilon|=1$. Утверждение «указанные границы достигаются только... функциями (2.5)», означает, что если $g(\bar{E}_r)=U_1(\bar{E}_r)$, то $g=U_\varepsilon$, $|\varepsilon|=1$ (см. [15], с. 261-262).

Доказательство теоремы Рогозинского не приводим; докажем на ее основе теорему B.

Пусть $f(z)$ – произвольная функция класса S^*. Тогда функция

$$g(z)=\log\frac{f(z)}{z} \tag{2.6}$$

голоморфна в E с разложением (2.3) и удовлетворяет условию (2.4) в силу

$$1+zg'(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

и звездообразности $f(z)$ (см. лемму 1.3). Тогда по теореме Рогозинского будем иметь

$$g(\bar{E}_r)\subset U_1(\bar{E}_r),\ 0<r<1, \tag{2.7}$$

а что касается последнего утверждения этой теоремы о «достижении границ», то нам хватит и достаточности: если $g=U_\varepsilon$ (т.е. имеет место соотношение (2.5)), то

$$g(\bar{E}_r)=U_1(\bar{E}_r),\ 0<r<1. \tag{2.8}$$

Теперь нужно избавиться от $\log$. Введем обозначения

$$T=\{w\in\mathbf{C}:|\operatorname{Im}w|<\pi\},\ V_\varepsilon(z)=1/(1-\varepsilon z)^2$$

и заметим, что $U_1(\bar{E}_r)\subset T$, $0<r<1$. При этом функция log однолистна в $V_1(\bar{E})$ с $\log V_1(\bar{E}_r)=U_1(\bar{E}_r)$ для $0<r<1$, а функция exp – на T. Это позволяет убрать в (2.7), (2.8) логарифм с учетом (2.6):

$$(1/u)(\bar{E}_r)\subset V_1(\bar{E}_r),\ V_\varepsilon(\bar{E}_r)=V_1(\bar{E}_r),\ 0<r<1.$$

Наконец, вводя обозначение $W_\varepsilon(z)=(1-\varepsilon z)^2$, окончательно имеем

$$u(\bar{E}_r)\subset W_1(\bar{E}_r),\ W_\varepsilon(\bar{E}_r)=W_1(\bar{E}_r),\ 0<r<1.$$

Отсюда следует, что $G_{S^*}(r)=W_1(\bar{E}_r)$, $0<r<1$, и теорема B доказана.

Упражнения. **1.** Покажите, что $G_{S^*}(r)=W_1(\bar{E}_r)$, $0<r<1$, – переформулировка теоремы B. (Вспомните замечание перед доказательством теоремы B.)

2. Прокомментируйте переход от $(1/u)(\bar{E}_r)\subset V_1(\bar{E}_r)$ к включению $u(\bar{E}_r)\subset W_1(\bar{E}_r)$ $(0<r<1)$. Это – «юрисдикция» теории множеств или здесь существенна «комплексная» специфика?

3. Почему $U_1(\bar{E}_r)\subset T$, $0<r<1$? Выполняется ли данное включение при $r=1$?

4. Вспомните начальные главы ТФКП и докажите, что функция log однолистна на $V_1(\bar{E})$ с $\log V_1(\bar{E}_r)=U_1(\bar{E}_r)$, $0<r<1$, а функция exp – на T. Каким образом это позволяет избавиться от логарифма и зачем это нужно? Почему, кстати, log, а не ln?

5. Что значит, «нам хватит и достаточности»? Какая достаточность имеется в виду?

6. Корректно ли определение (2.6)? В чем здесь может быть некорректность?

7*. Разберите доказательство теоремы Рогозинского по статье [15]. Начните с прояснения его структуры.

Замечание. Начнем подготовку к изложению основной части марксовского подхода. Напомним, что $u_\varepsilon(z)=1+\varepsilon z$, $u(z)=z/f(z)$ и утверждение теоремы C эквивалентно оценке (2.2):

$$\forall r \in (0,1)\ \ G_{S^0}(r) = u_1(\bar{E}_r) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall r \in (0,1)\ \bigcup_{f \in S^0} u(\bar{E}_r) = u_1(\bar{E}_r)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ \forall r \in (0,1)\ \ \forall f \in S^0\ \ u(\bar{E}_r) \subset u_1(\bar{E}_r)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall f \in S^0\ \ \mathrm{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2},\ z \in E.$$

Таким образом, А. Маркс доказывает теорему С на основе оценки (2.2). Тем не менее, вырывать эту оценку из контекста [1] нецелесообразно. Почему? Подумайте в качестве упражнения.

Доказательство теоремы С.

Come to the Cabaret...[18]

Вначале – еще одна старинная эквивалентность, давно ставшая «фольклорной» (узнаёте?). Запишем ее в виде цепочки:

$$F \in S^0 \Leftrightarrow\ \mathrm{Re}\frac{(zF'(z))'}{F(z)} = \mathrm{Re}\left(1 + z\frac{F'(z)}{F(z)}\right) > 0,\ z \in E,\ \Leftrightarrow zF' \in S^*.$$

Отметим, что А. Маркс использует обозначение F вместо f – видимо, чтобы подчеркнуть важность момента, но не только.

Итак, из $F \in S^0$ следует $zF' \in S^*$. Тогда по теореме В, примененной к функции $f = zF'$ с $u = z/zF'$, имеем

$$\left|\sqrt{\frac{z}{zF'(z)}} - 1\right| \le r \ \text{ при } |z| \le r,$$

значит,

$$\left|\sqrt{\frac{1}{F'(z)}} - 1\right| < 1 \text{ при } z \in E.$$

Поступая, как в доказательстве предложения 2.1, устанавливаем оценку

[18] Напомним, что действие фильма «Кабаре» происходит в Берлине 1931 года.

$$\operatorname{Re}\sqrt{F'(z)} > \frac{1}{2},\ z \in E.$$

Представляя ее в терминах $\Phi(z) := 2\sqrt{F'(z)} - 1$, получим неравенство $\operatorname{Re}\Phi(z) > 0$, $z \in E$; кроме того, $\Phi(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ Два последних соотношения в точности означают, что функция Φ – из класса Каратеодори $\boldsymbol{C}$ (см. определение 7). Выразим F через Φ:

$$F(z) = \int_0^z \left(\frac{\Phi(\zeta) + 1}{2} \right)^2 d\zeta.$$

Функцию $\Phi(z)$ можно представить как предельную функцию для последовательности рациональных функций вида

$$\Phi^*(z) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \frac{1 + \varepsilon_\nu z}{1 - \varepsilon_\nu z},\ g_\nu > 0,\ \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu = 1,\ |\varepsilon_\nu| = 1, \qquad (2.9)$$

равномерно сходящейся в каждом круге $|z| \le r$, $r < 1$. В качестве доказательства удобно встраивается текстовый фрагмент из книги [30] (с. 158) предваряющий теорему Рисса-Герглотца. На последней упомянутое доказательство и основано.

Итак, рассмотрим класс $\mathrm{M}[0, 2\pi]$, состоящий из всех монотонно неубывающих на $[0, 2\pi]$ функций $\mu(t)$ с единичной вариацией на $[0, 2\pi]$: $\operatorname{Var}\{\mu(t); 0, 2\pi\} = 1$.

Теорема Рисса-Герглотца. *Пусть* $\Phi \in \boldsymbol{C}$. *Тогда существует функция* $\mu(t) \in \mathrm{M}[0, 2\pi]$ *такая, что* Φ *представима формулой*

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} P(e^{-it} z)\, d\mu(t),\ z \in E, \qquad (2.10)$$

где $P(e^{-it} z)$ *– ядро Шварца,* $0 \le t \le 2\pi$, $P(z) = (1 + z)/(1 - z)$.

Приведенную теорему доказывать не будем (доказательство доступно: см. [30], с. 158-159, [23], § 1.9), как и теорему Рогозинского, считаем ее элементом нашего *underlying landscape*, или, лучше ска-

зать, «мирового эфира», откуда мы берем опоры для наших конструкций и куда потом выбрасываем оказавшиеся лишними детали...

Продолжим [30]. «Так как $\mu(t)$ – функция ограниченной вариации на $[0,2\pi]$ и функция $P(e^{-it}z)$ непрерывна по t при $z\in E$, то интеграл в правой части (2.10) существует. При этом (вот оно!)

$$\Phi(z)=\lim_{k\to\infty}\Phi_k(z),$$

где

$$\Phi_k(z)=\sum_{\nu=1}^{n}P(e^{-i\tau_k})[\mu(t_{\nu+1})-\mu(t_\nu)], \qquad (2.11)$$

$n\in\square$, $0=t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}=2\pi$, $\tau_\nu\in[t_\nu,t_{\nu+1}]$, $\nu=1,\ldots,n$. Из равномерной ограниченности последовательности $\{\Phi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ внутри E и теоремы Витали вытекает *равномерная сходимость* $\{\Phi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ внутри E, откуда по теореме Вейерштрасса следует голоморфность $\Phi(z)$ в E»... Впрочем, это уже не нужно, как и то, что «непосредственно из (2.10) видим, что $\mathrm{Re}\Phi(z)>0$ в E, $\Phi(0)=1$. Значит, $\Phi\in\boldsymbol{C}$.»

Закавыченный отрезок текста представляет собой обоснование импликации: если $\mu(t)\in\mathrm{M}[0,2\pi]$, то функция $\Phi(z)$ с представлением (2.10) принадлежит классу $\boldsymbol{C}$. Упомянутый выше текстовый фрагмент заканчивается перед упоминанием теоремы Вейерштрасса, но обрубить концовку рука не поднялась, вот и пришли вроде бы к тому, с чего начали: $\Phi\in\boldsymbol{C}$.

Чтобы завершить доказательство того, что нам нужно, а именно равномерной сходимости к $\Phi(z)$ последовательности вида (2.9), остается только провести сопоставление конструкций (2.9) и (2.11). Действительно, Φ_k и Φ^* идентичны, если принять во внимание отождествления $\varepsilon_\nu=e^{-i\tau_\nu}$ и $g_\nu=\mu(t_{\nu+1})-\mu(t_\nu)$, $\nu=1,\ldots,n$.

Итак, мы доказали, что любая функция $\Phi\in\boldsymbol{C}$ равномерно внутри E (т.е. на компактных подмножествах E) приближается функциями вида (2.9). Эта равномерная сходимость сохраняется при переходе от Φ и Φ^* к F и

$$F^*(z)=\int_0^z\left(\frac{\Phi^*(\zeta)+1}{2}\right)^2 d\zeta: \qquad (2.12)$$

наша исходная функция F является равномерным пределом внутри E последовательности функций вида (2.12), в котором функция Φ^* имеет представление (2.9). Тогда, очевидно, требуемое неравенство $\operatorname{Re} F(z)/z > 1/2$, $z \in E$, наследуется функцией F у равномерно приближающей ее последовательности функций вида (2.12).

Упражнение («по горячим следам»). Как известно ещё из I курса, предельный переход делает из строгих неравенств (вообще говоря) нестрогое. Почему же в только что рассмотренном случае итоговое неравенство будет обязательно строгим?

Продолжим доказательство и посмотрим, как получается оценка $\operatorname{Re} F^*(z)/z > 1/2$, $z \in E$. Из (2.9) и (2.12) имеем

$$F^*(z) = \int_0^z \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{g_\nu}{1-\varepsilon_\nu \zeta} \right)^2 d\zeta = \int_0^z \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{g_\nu g_\mu}{(1-\varepsilon_\nu \zeta)(1-\varepsilon_\mu \zeta)} d\zeta ,$$

Так что нам достаточно доказать $\operatorname{Re} F(z)/z > 1/2$, $z \in E$, для специального выбора

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\varepsilon_\nu \zeta)(1-\varepsilon_\mu \zeta)} ,$$

т.е.

$$F(z) = \frac{1}{\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu} \log \frac{1-\varepsilon_\mu z}{1-\varepsilon_\nu z} , \ \varepsilon_\nu \neq \varepsilon_\mu , \ F(z) = \frac{z}{1-\varepsilon_\nu z} , \ \ \varepsilon_\nu = \varepsilon_\mu .$$

Во втором случае ($\varepsilon_\nu = \varepsilon_\mu$) требуемое неравенство очевидно. Значит, нам остается доказать, что

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(\varepsilon - \eta) z} \log \frac{1-\eta z}{1-\mu z} > \frac{1}{2} , \ |\varepsilon| = |\eta| = 1, \ \varepsilon \neq \eta , \ |z| < 1. \qquad (2.13)$$

Подстановка $z = \overline{\varepsilon \eta}^{\frac{1}{2}} z'$ дает

$$\frac{1}{(\varepsilon - \eta) z} \log \frac{1-\eta z}{1-\varepsilon z} = \frac{1}{(\bar{\eta}\varepsilon)^{\frac{1}{2}} - (\eta \bar{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{z'} \log \frac{1-(\eta \bar{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} z'}{1-(\bar{\eta}\varepsilon)^{\frac{1}{2}} z'} .$$

Следующей подстановкой будет $(\eta\bar{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} = e^{i\varphi}$, при этом $0<\varphi<\pi$ благодаря степени $1/2$...

Упражнения. **1.** Почему ситуации $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ невозможны?

2. Прокомментируйте следующее замечание на с. 60 статьи [1]: «При доказательстве (2.13) мы можем позволить себе ограничиться рассмотрением z-значений модуля 1, для которых логарифм регулярен». Именно поэтому:

...полагаем $z' = e^{i\vartheta}$, $-\pi < \vartheta \le \pi$. Тогда

$$\frac{1}{(\varepsilon-\eta)z}\log\frac{1-\eta z}{1-\varepsilon z} = \frac{e^{-i\vartheta}}{e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}}\log\frac{1-e^{i(\vartheta+\varphi)}}{1-e^{i(\vartheta-\varphi)}},$$

и неравенство, которое предстоит доказать, приобретает вид

$$p(\varphi,\vartheta) := \operatorname{Re}\frac{e^{-i\vartheta}}{e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}}\log\frac{1-e^{i(\vartheta+\varphi)}}{1-e^{i(\vartheta-\varphi)}} =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)}}{2\sin\varphi}\log\frac{1-e^{i(\vartheta+\varphi)}}{1-e^{i(\vartheta-\varphi)}} > \frac{1}{2},\ \vartheta \ne \varphi,\ \vartheta \ne -\varphi \tag{2.14}$$

Функция

$$w = \frac{1-e^{i\varphi}z'}{1-e^{-i\varphi}z'}$$

отображает круг $|z'| \le 1$ на полуплоскость H, содержащую точку $w=1$ в своей внутренности и с граничной прямой, проходящей через точку $w=0$. Наклон этой прямой легко получается при подстановке $\vartheta = -\pi + \varphi$. В самом деле, тогда

$$w = \frac{1-e^{i(-\pi+2\varphi)}}{1-e^{-i\pi}} = \frac{1+e^{i2\varphi}}{2} = \cos\varphi\cdot e^{i\varphi},$$

и это точка лежит на ∂H. Значит, аргумент точки границы полуплоскости H есть φ или $\varphi-\pi$ (помним, что $0<\varphi<\pi$).

Так как при отображении $|z'|\le 1$ на H точка $z'=e^{-i\varphi}$ переходит в начало координат $w=0$, а $z'=e^{i\varphi}$ – в $w=\infty$, и направление обхода (границ) сохраняется, то аргумент α_ϑ граничной точки H есть в точности

$$\alpha_\vartheta=\begin{cases}\varphi & \text{для } |\vartheta|>\varphi,\\ \varphi-\pi & \text{для } |\vartheta|<\varphi.\end{cases} \tag{2.15}$$

Отметим, что на ∂E положительное направление обхода – от $e^{-i\varphi}$ к $e^{i\varphi}$ (E слева), на ∂H направление обхода восстанавливается по H, которая содержит $w=1$ и должна оставаться слева. Это означает, что точка обходит ∂H в положительном направлении, когда «спускается» из верхней полуплоскости в нижнюю. При этом верхняя «половина» ∂H соответствует дуге $|\vartheta|>\varphi$, нижняя – дуге $|\vartheta|<\varphi$.

Здесь нас вновь «выручает» условие $0<\varphi<\pi$, вносящее определенность и для ∂E, и в случае ∂H.

Таким образом, неравенство (2.14) приобретает вид

$$p(\varphi,\vartheta)=\operatorname{Re}\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)}}{2\sin\varphi}\left\{\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-e^{i(\vartheta+\varphi)}}{1-e^{i(\vartheta-\varphi)}}\right|^2+\alpha_\vartheta\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\sin\varphi}\left\{\sin\vartheta\log\frac{1-\cos(\vartheta+\varphi)}{1-\cos(\vartheta-\varphi)}-2\alpha_\vartheta\cos\vartheta\right\}>\frac{1}{2}.$$

Функция $p(\varphi,\vartheta)$ – четная по ϑ, так что достаточно рассматривать ее на интервалах

$$0\le\vartheta<\varphi,\ \varphi<\vartheta\le\pi.$$

Покажем, что при $0\le\vartheta<\varphi$ абсолютный минимум $p(\varphi,\vartheta)$ как функции от ϑ достигается в точке $\vartheta=0$, а при $\varphi<\vartheta\le\pi$ – в точке $\vartheta=\pi$. Это будет следовать из того, что

$$4\sin\varphi\frac{\partial p(\varphi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\begin{cases}\ge 0 \text{ при } 0\le\vartheta<\varphi,\\ \le 0 \text{ при } \varphi<\vartheta\le\pi.\end{cases} \tag{2.16}$$

Докажем (2.16). Имеем

$$4\sin\varphi\frac{\partial p(\varphi,\vartheta)}{\partial\vartheta}=\cos\vartheta\log\frac{1-\cos(\vartheta+\varphi)}{1-\cos(\vartheta-\varphi)}+$$

$$+\frac{2\sin\vartheta\sin\varphi}{\cos\vartheta-\cos\varphi}+2\alpha_{\vartheta}\sin\vartheta \tag{2.17}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(4\sin\varphi\frac{\partial p(\varphi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)=\frac{2\sin\vartheta(\cos^2\varphi-1)}{(\cos\vartheta-\cos\varphi)^2}\le 0.$$

Поэтому соотношение (2.16) выполняется для всех φ, $0<\varphi<\pi$, если оно имеет место

$$\text{при } \vartheta<\varphi \text{ в точке } \varphi=\pi,$$
$$\text{при } \vartheta>\varphi \text{ в точке } \varphi=0.$$

Но это действительно так: в обеих точках $\varphi=0,\pi$ на основе (2.17) и (2.15) будет

$$4\sin\varphi\frac{\partial p(\varphi,\vartheta)}{\partial\vartheta}=0.$$

Мы доказали, что

$$p(\varphi,\vartheta)\ge p(\varphi,0),\ \text{если } 0\le\vartheta<\varphi,$$

$$p(\varphi,\vartheta)\ge p(\varphi,\pi),\ \text{если } \varphi<\vartheta\le\pi.$$

Осталось оценить $p(\varphi,0)$ и $p(\varphi,\pi)$. Так как при $0<\varphi<\pi$ выполняются известные неравенства

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi}>1 \quad \text{и} \quad \frac{\pi-\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\pi-\varphi}{\sin(\pi-\varphi)}>1,$$

то

$$p(\varphi,0)=\frac{\pi-\varphi}{2\sin\varphi}>\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad p(\varphi,\pi)=\frac{\varphi}{2\sin\varphi}>\frac{1}{2}.$$

Итак, неравенство $\operatorname{Re} F(z)/z > 1/2$, $z \in E$, а с ним и теорема С доказаны. Впрочем, для А.Маркса важно завершить доказательство так.

Для функции

$$F(z) = \frac{z}{1-\varepsilon z} \quad (|\varepsilon| = 1) \tag{2.18}$$

соответствие

$$w = \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{1-\varepsilon z}$$

отображает круг E на всю полуплоскость $\operatorname{Re} w > \frac{1}{2}$. Таким образом, для таких F достигаются утверждаемые теоремой «границы» для F/z и z/F на классе S^0. Таким образом, теорема С полностью доказана.

Теперь займемся обоснованием оценки

$$\operatorname{Re} z \frac{F'(z)}{F(z)} > \frac{1}{2}, \; z \in E. \tag{2.19}$$

Для этого достаточно уже готовых конструкций из [2], но мы хотим все сделать, «не выходя из» статьи [1], тем более, что последняя вышла раньше. Другое дело, что упомянутые «конструкции» – формулы (1.1), (1.4), (1.5), (1.7) и (1.10) из главы I – есть и у Маркса, и понадобится нам только последняя из них, в форме

$$z_0 \frac{F'(z_0)}{F(z_0)} = \frac{1}{1-|z_0|^2} \cdot \frac{z_0}{f(z_0)}, \tag{2.20}$$

где F и f связаны первой из них:

$$f(z) = -\frac{F\left(\dfrac{z_0 - z}{1-\bar{z}_0 z}\right) - F(z_0)}{F'(z_0)(1-|z_0|^2)},$$

где z_0 – произвольная фиксированная точка из круга E.

Итак, пусть $F \in S^0$. Значит, и $f \in S^0$ (по лемме 1.2). Воспользуемся представлением для функции $u(z) = z/f(z)$ из предложения 2.1: $u(z) = 1 + \varphi(z), z \in E$. Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому при $|z| = r < 1$ будем иметь неравенство $\operatorname{Re} u(z) \geq 1 - r$. Тогда в силу (2.20) по теореме С получаем

$$\operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} \geq \frac{1}{1-r^2}(1-r) = \frac{1}{1+r} > \frac{1}{2}, \ |z| = r < 1,$$

что и требовалось. Остается отметить, что для функций (2.18) выполняется равенство

$$z\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{1-\varepsilon z} \quad (|\varepsilon| = 1),$$

поэтому «граница» $1/2$ в оценке (2.19) достигается.

Таким образом, мы доказали *Основную теорему* методом А. Маркса, который оказался более сложным, чем метод Э. Штрохеккера.

Упражнения.

1. Как связаны теорема B и теорема VI из [2] (с. 369)?

2. Проверьте равенства (2.1) и $G_{S^0}(r) = \{u \in \mathbf{C} : |u - 1| \leq r\}$.

3. Покажите, что неравенство (2.2) эквивалентно представлению

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{1-\varphi(z)},$$

где $\varphi(z)$ – функция, удовлетворяющая условиям леммы Шварца.

4. Убедитесь в том, что

1) из $|z/f(z) - 1| \leq r$ при $|z| \leq r$ следует, что функция $f(z)$ не имеет в E других нулей, кроме $z = 0$;

2) то же самое заключение следует из неравенства (2.2).

5. Покажите, что равенство $G_{S^0}(r) = \{u \in \mathbf{C} : |u - 1| \leq r\}$, составляющее содержание теоремы С, можно переписать в виде $G_{S^0}(r) = u_\varepsilon(\bar{E}_r)$, где $u_\varepsilon(z) = 1 + \varepsilon z$; вместо произвольного ε с $|\varepsilon| = 1$ можно взять $\varepsilon = 1$.

Как будет выглядеть аналог этого утверждения для S^*? Докажите его.

6. «Расшифруйте» следующее утверждение из обоснования теоремы B: «что касается последнего утверждения этой теоремы <Рогозинского> о «достижении границ», то нам хватит и достаточности: если $g = U_\varepsilon$ (т.е. имеет место соотношение (2.5)), то $g(\bar{E}_r) = U_1(\bar{E}_r)$, $0 < r < 1$».

7. Проследите цепочку эквивалентностей из замечания перед началом доказательства теоремы C.

8. Напишите определение класса Каратеодори.

9. Почему функция $\Phi(z) := 2\sqrt{F'(z)} - 1$ имеет разложение вида $\Phi(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$?

10. С использованием книги [30] продумайте оптимальное изложение свойств класса Каратеодори, чтобы доказательство равномерной сходимости $\Phi(z) = \lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(z)$ не требовало бы «вырезания текстовых фрагментов», как это было сделано выше. Проделанную работу оформите как конспект лекции.

11. Прокомментируйте фразу «Из равномерной ограниченности последовательности $\{\Phi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ внутри E и теоремы Витали вытекает *равномерная сходимость* $\{\Phi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ внутри E, откуда по теореме Вейерштрасса следует голоморфность $\Phi(z)$ в E».

12. Интеграл в (2.10) – это интеграл Римана-Стилтьеса или Лебега-Стилтьеса?

13. Разберите свойства функции

$$w = \frac{1 - e^{i\varphi} z'}{1 - e^{-i\varphi} z'}.$$

14. Внимательно проследите весь процесс определения абсолютных минимумов функции $p(\varphi, \vartheta)$. Проведите необходимые вычисления.

15. Зачем нам дополнительное исследование функции (2.18)? Где оно уже учтено выше?

III. Геннадий Голузин: Ленинград, 1929 – 1935 – 1938

Слушай, Ленинград, я тебе спою…

Сведения о Г.М. Голузине чрезвычайно скудны: все, что было положено знать о нем в советское время, исчерпывалось некрологом В.И. Смирнова и А.Ф. Берманта в УМН[19] и предисловием В.И. Смирнова к [6]. Годы жизни, начало научной деятельности, успехи, Сталинская премия, направления исследований и достижения. Все. Сухо и деловито. Ну, вот только в конце некролога чуть-чуть дрогнет голос...

По-видимому, первой «живой» биографией Голузина является написанная Г.В. Кузьминой статья [20]. Взгляд тут же выхватывает обрывки строчек: «пережил в Ленинграде тяжелую блокадную зиму» (это, значит, 1941/42 годов...), «после возвращения в 1944 году из Казани»... Вот это да! Он, оказывается, был здесь в эвакуации. Никогда не слышал об этом от наших «стариков». Интересно, проводились у нас Голузинские чтения? У него три работы 43-его года и одна 45-го – не в Казани ли готовились?..

И еще вот это: «Хорошо помню, как в начале лета 1951 года, перед студенческими каникулами, Геннадий Михайлович, будучи уже тяжело больным, пригласил нас к себе домой, чтобы заранее дать нам темы дипломных работ. «Вы ведь будете работать летом, правда?» – сказал нам на прощание Геннадий Михайлович, явно с надеждой на положительный ответ».

Будем, Геннадь Михалыч!

Наш паровоз, вперед лети…

Это лучший эпиграф к творчеству Голузина. А лучший памятник ему – книга [6]. Голузинские тексты поражают какой-то вулканической изобильностью, неудержимостью и целеустремленностью. Как будто курьерский поезд, не ведая тупиков и боковых веток, летит вперед и только вперед, обгоняя сам себя и вращая колесами землю...

Как он мог догадаться, что его сегодняшняя теорема так удачно впишется в послезавтра?.. Как он додумался, что такая теорема вообще может существовать?.. Да чего там – смотрите сами...

---

[19] Смирнов В.И., Бермант А.Ф. Геннадий Михайлович Голузин (некролог) // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7. – Вып. 3. – С. 97-103.

3.1. О некоторых оценках, относящихся к функциям, совершающим однолистное конформное преобразование круга.

Заводы вставайте! Шеренги смыкайте!
На битву шагайте, шагайте, шагайте!..

«Наш лозунг – Всемирный Советский Союз». Волнующие строки «Гимна Коминтерна» опоздали – начался «год великого перелома», и «кировско-тельмановская реальность», следы которой так бережно сохранил для нас знаменитый фильм Алексея Германа, была обречена...

Мы не знаем и теперь уже, наверное, никогда не узнаем об отношении Г.М. Голузина к страстям окружавшей его эпохи... В недрах интернета можно найти снимок его последнего приюта на Богословском кладбище Санкт-Петербурга – мраморный обелиск, увенчанный крестом... Но мы точно знаем, что сама эпоха «прошивалась стальными стежками» науки – без них она просто рухнула бы, и голузинские «нити» еще долго будут освещать нам один из самых драматичных периодов нашей истории...

Итак, двадцать девятый год. Первая работа. «Математический сборник». Доказана

Теорема 3.1. *Пусть функция* $f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots$ *регулярна в круге* E *и удовлетворяет там условию*

$$|zf'(z)-rN(r)|\le rM(r),\ r=|z|,\ z\in E, \tag{3.1}$$

где $M(r)$ *и* $N(r)$*, или, короче,* M *и* N*, – заданные функции от* r*, непрерывные в* $0\le r<1$*,* $M>0$*, а* N *может быть комплексной. Тогда имеем в* E *при любом комплексном постоянном* C *неравенство:*

$$\int_0^r\left[\operatorname{Re}CN-\sqrt{|CM|^2-(\operatorname{Im}CN)^2}\right]dr\le\operatorname{Re}Cf(z)\le$$
$$\le\int_0^r\left[\operatorname{Re}CN+\sqrt{|CM|^2-(\operatorname{Im}CN)^2}\right]dr. \tag{3.2}$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $C\ne 0$ и f не совпадает тождественно с нулем. Если $C=0$, то (3.2) стано-

вится равенством нулей, а если $f(z)\equiv 0$, то выполнение (3.2) следует из (3.1).

Множим обе части неравенства (3.1) на $|C_1|$, где C_1 – любая комплексная величина, и заменяем затем в левой части так полученного неравенства модуль комплексной величины ее вещественной частью; тогда приходим к неравенству

$$r\,\mathrm{Re}\,C_1N - r|C_1M| \le \mathrm{Re}\,C_1zf'(z) \le r\,\mathrm{Re}\,C_1N + r|C_1M|. \qquad (3.3)$$

Для получения (3.2) ставится задача «найти возможно точные границы для выражения $\mathrm{Re}\,Cf(z)$», причем так, чтобы эти границы, завися от $r=|z|$ и C, не зависели от $\arg z$.

Переходим теперь к отысканию упомянутых выше границ в заданной точке $\zeta=\rho e^{i\psi}$ из E.

Рассматривая $z=re^{i\varphi}$ переменным, допустим, что $\varphi=\varphi(r)$, «где $\varphi(r)$ допускает $\varphi'(r)$, интегрируемую в $0\le r<1$»; тогда имеем

$$\frac{d}{dr}\mathrm{Re}\,Cf(z)=\mathrm{Re}\left(C\left(\frac{1}{r}+i\varphi'\right)zf'(z)\right).$$

Применяя к последнему выражению неравенство (3.3) при

$$C_1=C\left(\frac{1}{r}+i\varphi'\right),$$

получим

$$\frac{d}{dr}\mathrm{Re}\,Cf(z)\le \mathrm{Re}\;C(1+i\varphi' r)N\;+|C|\sqrt{1+r^2\varphi'^2}M\,,$$

откуда интегрированием по r от r_1 до ρ, где $0<r_1<\rho$, находим

$$\mathrm{Re}\,Cf(z)\Big|_{r_1}^{\rho}\le\int_{r_1}^{\rho}\left[\mathrm{Re}\;C(1+i\varphi' r)N\;+|C|\sqrt{1+r^2\varphi'^2}M\right]dr\,. \qquad (3.4)$$

Отметим, что мы «закавычиваем» гораздо меньше, чем цитируем. Это происходит тогда, когда мы хотим выделить стиль, как выше, либо проанализировать логику, как в следующем отрывке:

«Теперь заметим, что левая часть последнего неравенства зависит только от $\varphi(r_1)$ и $\varphi(\rho)$ и в остальном не зависит от вида функции для $r_1 < r < \rho$. Воспользовавшись этим обстоятельством, выберем $\varphi(r)$ в $r_1 < r < \rho$ так, чтобы правая часть была возможно меньшей. Для этого возьмем за $\varphi'(r)$ такое значение, при котором подынтегральная функция интеграла, входящего в неравенство (3.4), достигает минимального значения относительно φ'. Такое значение удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}(iCrN) + \frac{r^2\varphi'}{\sqrt{1+r^2\varphi'^2}}|CM| = 0, \tag{3.5}$$

откуда

$$\varphi'(r) = \frac{\mathrm{Im}\,CN}{r\sqrt{|CM|^2 - (\mathrm{Im}\,CN)^2}}$$

и

$$\varphi(r) = -\int_r^{\rho} \frac{\mathrm{Im}\,CN}{r\sqrt{|CM|^2 - (\mathrm{Im}\,CN)^2}}\,dr + \varphi(\rho)\text{»}. \tag{3.6}$$

Если подынтегральную функцию в (3.4) обозначить через F, то условие (3.5) есть в точности $F_{\varphi'} = 0$. Таким образом, может создаться впечатление, что последнее условие понимается здесь как необходимое для экстремума интеграла в (3.4), в то время как, «согласно канону» (Эйлер-Лагранж), оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} F_{\varphi'} = 0, \tag{3.7}$$

поскольку F не зависит от φ; см., напр., [58], [51] (просто Эльсгольца «под рукой» не оказалось).

Можно предложить следующее истолкование сложившейся ситуации. Пусть выполняется условие (3.5). Тогда, с одной стороны, отсюда получается явный вид (3.6) функции $\varphi(r)$, для которого уравнение (3.5) обратится в тождество. С другой стороны, дифференцируя данное тождество по r, получим, что указанная φ удовлетворяет

условию Эйлера-Лагранжа для так называемой неполной функции ([51], с. 47-48), т.е. (3.7).

Воистину, «если нам удастся доказать, что какая-то подозрительная кривая действительно доставляет искомый минимум, то уже неважно, сколь шаткими были первоначальные основания для подозрения» [58], с. 19.

Но ведь ниоткуда не следует, что (3.6) действительно доставляет минимум интегралу в (3.4): ведь условие (3.7) – необходимое. Но и здесь мы можем легко «ускользнуть от ответственности»: нам нужно установить неравенства (3.2), а при выборе $\varphi(r)$ в форме (3.6) они как раз и устанавливаются. Оставшаяся часть доказательства этому и посвящена. Продолжим голузинский текст.

Взяв в (3.6) $\varphi(\rho)=\psi$, получим, что найденная кривая $\varphi=\varphi(r)$ будет соединять заданную точку $\zeta=\rho e^{i\psi}$ с некоторой точкой на $|z|=r_1$.

При найденном значении $\varphi(r)$ неравенство (3.4) переходит в такое:

$$\operatorname{Re} Cf(z)\Big|_{r_1}^{\rho} \le \int_{r_1}^{\rho}\left[\operatorname{Re}\ CN\ +\sqrt{|CM|^2-(\operatorname{Im} CN)^2}\right]dr. \qquad (3.8)$$

Так как это неравенство имеет место при любом r_1, удовлетворяющем условию $0<r_1<\rho$ и так как пределы обеих частей при $r_1\to 0$ конечны, то, переходя к пределу $r_1\to 0$ и заменяя затем $\zeta=\rho e^{i\psi}$ на $z=re^{i\varphi}$, получаем окончательное неравенство

$$\operatorname{Re} Cf(z)\le \int_0^r\left[\operatorname{Re} CN+\sqrt{|CM|^2-(\operatorname{Im} CN)^2}\right]dr, \qquad (3.9)$$

которое будет иметь место в любой точке из E.

Чтобы получить нижнюю границу выражения $\operatorname{Re} Cf(z)$, достаточно в (3.9) вместо C написать $-C$; так получаем неравенство

$$\operatorname{Re} Cf(z)\ge \int_0^r\left[\operatorname{Re} CN-\sqrt{|CM|^2-(\operatorname{Im} CN)^2}\right]dr,$$

которое имеет место в любой точке из E.

Соединяя два последних неравенства вместе, получим (3.2).

Теорема доказана.

Упражнения. **1.** Установите (3.2) в случае $f(z)\equiv 0$.

2. Проследите доказательство формулы (3.4).

3. Почему значение, при котором подынтегральная функция интеграла, входящего в неравенство (3.4), достигает минимального значения относительно φ', удовлетворяет условию (3.5)?

4. Проверьте справедливость формулы (3.8).

5. Почему пределы обеих частей (3.8) при $r_1\to 0$ конечны?

3.2. К теории однолистных конформных преобразований.

Нас утро встречает прохладой…

Упоминавшийся в предыдущем разделе «Иван Лапшин» – это, «судя по всему», как раз тридцать пятый год: портрет Кирова перенесен с площади в кабинет, где кажется гигантским. Другим фильмом, вошедшим в духовное завещание С.М. Кирова, стал «Встречный», вышедший на экраны кинотеатров в 1932 г. «Героическая атмосфера первой пятилетки», «ленинградский турбинный», «встречный план». Знаменитая «Песня о встречном» может служить моделью нашей книги: слово «встречный» в каждом куплете, оправленное в стихи...

Лемма 3.1. *Пусть функция* $f(z)=a_n z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots$ *регулярна в* E *и удовлетворяет там условию* $\operatorname{Re} f(z)\ge -M$, *где* $n>0$, *а* $M>0$ – *постоянная. Тогда имеем в* $|z|\le r$:

$$\left| f(z)-\frac{2r^{2n}}{1-r^{2n}}M\right|\le\frac{2r^n}{1-r^{2n}}M\,. \qquad (3.10)$$

Доказательство. Слегка подкорректируем его по сравнению с [4]. Условие $\operatorname{Re} f(z)\ge -M$, $z\in E$, стандартным образом переписывается в терминах функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей условиям леммы Шварца:

$$f(z)=\frac{2M\varphi(z)}{1-\varphi(z)},\ z\in E, \qquad (3.11)$$

где в силу разложения $f(z)=a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ имеет место неравенство $|\varphi(z)| \leq |\zeta|^n$, $z \in E$. Тогда образ круга $|z| \leq r$ при отображении $w = f(z)$ будет лежать в замкнутом круге, построенном на отрезке

$$\left[-\frac{2Mr^n}{1+r^n}, \frac{2Mr^n}{1-r^n} \right]$$

как на диаметре. Вычисляя его центр и радиус, получаем (3.10).

Упражнения. **1.** Как неравенство $\operatorname{Re} f(z) \geq -M$, $z \in E$, приводится к эквивалентной форме (3.11).

2. Как разложение функции $f(z)$ в окрестности начала позволяет заключить, что $|\varphi(z)| \leq |\zeta|^n$, $z \in E$?

3. Вычислите центр и радиус круга, содержащего $f(\bar{E}_r)$ по лемме Шварца.

4. Проведите сравнительный анализ только что изложенного обоснования и оригинального доказательства из [4].

Мы мирные люди, но наш бронепоезд
Стоит на запасном пути…

«Песня о Каховке» из фильма «Три товарища» 1935 года...

Теорема 3.2. *Пусть функция* $f_n(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots$ *регулярна и выпукла в* E. *Тогда в* E *имеем*:

$$\frac{2}{n} \int_0^{r^n} \frac{Ar - \sqrt{A^2 + B^2 - B^2 r^2}}{1 - r^2} dr \leq A \log |f_n'(z)| +$$

$$+ B \arg f_n'(z) \leq \frac{2}{n} \int_0^{r^n} \frac{Ar + \sqrt{A^2 + B^2 - B^2 r^2}}{1 - r^2} dr, \tag{3.12}$$

где $r = |z|$, A *и* B *– произвольные вещественные постоянные. Даваемые этими неравенствами оценки для* $A \log |f_n'(z)| + B \arg f_n'(z)$ *суть точные.*

Доказательство. Так как $f_n(z)$ выпукла, то имеем в $|z| < 1$:

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f_n''(z)}{f_n'(z)} \right) > -1,$$

и, следовательно, по лемме 3.1 это дает в E:

$$\left| z\frac{f_n''(z)}{f_n'(z)} - \frac{2r^{2n}}{1-r^{2n}} \right| \le \frac{2r^n}{1-r^{2n}}, \; r = |z|.$$

Если применим к этому неравенству оценки (3.2) из теоремы 3.1 при $C = A - iB$ и $f = \log f_n'$, то и получим (3.12).

С другой стороны, вычисления показывают, что для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{dz}{(1-e^{i\alpha}z^n)^{\frac{2}{n}}} = z + \alpha_{n+1}z^{n+1} + \ldots,$$

которая в E регулярна и выпукла, имеем:

$$\max_\alpha \operatorname{Re}((A-iB)\log f_0'(z)) = \frac{2}{n}\int_0^{r^n} \frac{Ar + \sqrt{A^2+B^2-B^2r^2}}{1-r^2}\,dr,$$

$$\min_\alpha \operatorname{Re}((A-iB)\log f_0'(z)) = \frac{2}{n}\int_0^{r^n} \frac{Ar - \sqrt{A^2+B^2-B^2r^2}}{1-r^2}\,dr.$$

Этим теорема доказана.

Упражнения. **1.** Как «подключается» к только что проведенному доказательству «вышедоказанная лемма»? Чему равны $M(r)$ *и* $N(r)$?

2. Проделайте переход от (3.2) к (3.12). Покажите, что

$$\operatorname{Re} CN \pm \sqrt{|CM|^2 - (\operatorname{Im} CN)^2}\,dr = \frac{2}{n}\frac{Ar^n \pm \sqrt{A^2+B^2-B^2r^{2n}}}{1-r^{2n}}\,d(r^n)$$

3. Установите регулярность и выпуклость в E функции $f_0(z)$.

4. Проверьте формулы для максимума и минимума величины $\operatorname{Re}((A-iB)\log f_0'(z))$.

3.3. Некоторые оценки коэффициентов однолистных функций.

Нам нет преград
Ни в море, ни на суше

Как и в двух предыдущих разделах, в заглавие настоящего вынесено название соответствующей статьи Г.М. Голузина. Теоремой 3.3 «наш паровоз» пролетает по землям Швабии (родины [1] и [2]). Затем он замедляет ход, чтобы мы могли «соскочить» в следствия, и уходит вдаль к своим очередным высотам...

Теорема 3.3. *Если функция*

$$f(z)=z(1+a_n z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots) \tag{3.13}$$

отображает круг E *на звездообразную область, то в* E *имеем*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{n}{2}}\geq\frac{1}{2}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Функция $f_1(z)=z(1+b_n z^n+\ldots)$, определенная соотношением $f(z)=zf_1'(z)$, отображает E на выпуклую область. Следовательно, для нее будет иметь место в E следующее неравенство, доказанное в теореме 3.2:

$$A\log|f_1'(z)|+B\arg f_1'(z)\geq\frac{2}{n}\int_0^{r^n}\frac{Ar-\sqrt{A^2+B^2-B^2r^2}}{1-r^2}dr,$$

где $r=|z|$, а A и B – любые вещественные числа. Следовательно, для $f(z)$ будем иметь в E:

$$A\log\left|\frac{f(z)}{z}\right|+B\arg\frac{f(z)}{z}\geq\frac{2}{n}\int_0^{r^n}\frac{Ar-\sqrt{A^2+B^2-B^2r^2}}{1-r^2}dr, \tag{3.15}$$

и, в частности ($A=0$, $B=-1$),

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{2}{n}\arcsin r^n. \qquad (3.16)$$

Вместо $f(z)$ рассмотрим теперь функцию

$$f_2(z)=\frac{1}{\rho}f(\rho z)=z(1+a_n\rho^n z^n+\ldots),\ \rho<1,$$

которая также отображает E на звездообразную область и для которой, следовательно, по (3.16), имеем в $|z|\le 1$:

$$\left|\arg\frac{f_2(z)}{z}\right|\le\frac{2}{n}\arcsin\rho<\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{n}. \qquad (3.17)$$

Применяя к $f_2(z)$ неравенство (3.15) при $|z|=1$ и $A=1$ и вычисляя интеграл справа, получим

$$A\log\left|\frac{f(z)}{z}\right|+B\arg\frac{f(z)}{z}\ge\frac{2}{n}\int_0^1\frac{r-\sqrt{1+B^2-B^2r^2}}{1-r^2}dr=$$

$$=\frac{2}{n}\left(-\log\ r-\sqrt{1+B^2-B^2r^2}\ -B\arcsin\frac{Br}{\sqrt{1+B^2}}\right)\Bigg|_0^1= \qquad (3.18)$$

$$=\frac{2}{n}\left(\log\frac{\sqrt{1+B^2}}{2}-B\arcsin\frac{B}{\sqrt{1+B^2}}\right).$$

При фиксировании z на $|z|=1$ выбираем здесь конечное B так, чтобы

$$-\frac{2}{n}\arcsin\frac{B}{\sqrt{1+B^2}}=\arg\frac{f_2(z)}{z}, \qquad (3.19)$$

что по (3.17) возможно, причем тогда

$$\cos\arg\left[\frac{f_2(z)}{z}\right]^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+B^2}}. \qquad (3.20)$$

При таком выборе B в (3.18) пропадают члены с аргументами, и получаем, освобождаясь от логарифмов,

$$\left|\frac{f_2(z)}{z}\right|^{\frac{n}{2}} \cos\arg\left[\frac{f_2(z)}{z}\right]^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{2},$$

т.е.

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f_2(z)}{z}\right]^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{2}, \qquad (3.21)$$

причем это неравенство, доказанное для $|z|=1$, будет иметь место и в $|z|<1$. Переходя в нем к пределу при $\rho \to 1$, получаем (3.14).

Упражнения. **1.** Выведите оценку (3.16) из (3.15) и оценку (3.17) из (3.16).

2. Проверьте справедливость цепочки равенств в (3.18).

3. Почему при фиксированном $z \in \partial E$ можно выбрать конечное B так, чтобы имело место равенство (3.19)? Как этому способствует оценка (3.17)? Покажите, что в этом случае имеет место (3.20). Каким образом при таком выборе B в (3.18) пропадают члены с аргументами?

4. Почему неравенство (3.21), доказанное для $|z|=1$, будет иметь место и в $|z|<1$?

5. Докажите корректность перехода к пределу при $\rho \to 1$ в неравенстве (3.21).

6. Сравните оценки (3.16) (и (3.17)) с неравенством (38) из [1], с. 50, и неравенством из теоремы III, п. А, [2], с. 364. Сравните также их доказательства.

7. Докажите следующее утверждение. Пусть функция с разложением $f(z) = z(1+a_n z^n + \ldots)$ отображает круг E на звездообразную область. Тогда функция $f_1(z) = z + \ldots$, определяемая из $f(z) = z f_1'(z)$, отображает E на выпуклую область. При этом $f_1(z) = z(1+b_n z^n + \ldots)$.

Встречалось ли нам данное утверждение раньше?

3.4. В это время во внешности единичного круга...

Но сурово брови мы насупим…

...И почитаем еще немного «из Голузина» [5] – сразу после доказательства теоремы 3.3 (у Голузина это теорема 5).

Сначала немного «потормозим». Теорема 3.2 интересна тем, что неравенство

$$\operatorname{Re} w^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{2} \tag{3.22}$$

определяет точную мажорантную область для семейства рассматриваемых функций, т.е. наименьшую область, в которой содержатся все значения, принимаемые в $|z|<1$ функциями вида (3.13), отображающими $|z|<1$ на звездообразные области. Действительно, (3.22) можно определить неравенством

$$\left|\frac{1}{w^{n/2}}-1\right| \leq 1, \tag{3.23}$$

и, следовательно, любая точка области (3.22) может быть представлена в виде

$$w_0 = \frac{1}{(1+\rho e^{i\alpha})^{\frac{2}{n}}}, \ \rho<1.$$

Это значение w_0 принимает функция $\dfrac{z}{(1+\rho e^{i\alpha} z^n)^{\frac{2}{n}}}$, принадлежащая к рассматриваемому классу, в точке $z=1$. Сопоставляя (3.14) и (3.23) и применяя лемму Шварца, получим также, что наименьшая мажорантная область, в которой содержатся все значения, принимаемые в заданной точке z_0 из $|z|<1$ функциями того же класса, определяется неравенством

$$\left|\frac{1}{w^{n/2}}-1\right| \leq |z_0|^n.$$

При $n=2$ это будет круг.

Переходя от функций (3.13) к функциям $1/f(1/\zeta)$, получаем аналогичные результаты для функций, заданных во внешности единичного круга. В частности, при $n=2$ получаем:

Теорема 3.4. *Пусть функция*

$$F(\zeta)=\zeta+\frac{\alpha_2}{\zeta}+\frac{\alpha_3}{\zeta^2}+\ldots$$

регулярна во внешности $|\zeta|>1$ *единичного круга, кроме полюса* $\zeta=\infty$, *и однолистно отображает* $|\zeta|>1$ *на звездообразную область. Тогда*

$$|F(\zeta)-\zeta|\le\frac{1}{|\zeta|}\ , \tag{3.24}$$

причем это неравенство определяет и мажорантную область для $F(\zeta)$, *которая есть круг.*

Чтобы доказать эту теорему, нам понадобится такое

Следствие 3.1. *Если* $f\in S^*$ *и* $f''(0)=0$, *то*

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}\ge\frac{1}{2},\ z\in E. \tag{3.25}$$

Оно получается из теоремы 3.3 при $n=2$. Таким образом, методом Г.М. Голузина *Теорема Маркса-Штрохеккера* устанавливается при дополнительном ограничении $f''(0)=0$.

Доказательство теоремы 3.4. Введем функцию

$$f(z)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{z}{1+\alpha_2z^2+\alpha_3z^3+\ldots}=z-\alpha_2z^3-\alpha_3z^4-\ldots, \tag{3.26}$$

регулярную в единичном круге E. Отметим, что условие $f''(0)=0$ получается благодаря тому, что разложение для $F(\zeta)$ не содержит свободный член. Подвергнув функциональное соотношение между f и F логарифмическому дифференцированию, получим

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=\zeta\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}.$$

Таким образом, $f\in S^*$. Тогда установленное выше следствие 3.1 немедленно дает неравенство (3.25). Из доказательства предложения 2.1 следует, что

$$\left|\frac{z}{f(z)}-1\right|\le 1,\ z\in E, \tag{3.27}$$

откуда по лемме Шварца с использованием разложения

$$\frac{z}{f(z)}=1+\alpha_2 z^2+\ldots$$

получаем

$$\left|\frac{z}{f(z)}-1\right|\le |z|^2,\ z\in E.$$

Переписывая последнее неравенство в терминах $F(\zeta)$, $|\zeta|>1$, устанавливаем оценку (3.24). Теорема 3.4 доказана.

Упражнения. **1.** Убедитесь в том, что неравенство (3.24) определяет мажорантную область для $F(\zeta)$, которая есть круг.

2. Прокомментируйте использование леммы Шварца в заключительной части доказательства теоремы 3.4.

3. Докажите неравенство (3.27).

4. Покажите, что функция $f(\zeta)$ из (3.26) действительно регулярна в E и имеет указанное в (3.26) разложение.

5. На основе чего устанавливается принадлежность $f\in S^*$? Как аналитически записать условие звездообразности функции вида

$$F(\zeta)=\zeta+\alpha_1+\frac{\alpha_2}{\zeta}+\frac{\alpha_3}{\zeta^2}+\ldots,$$

заданной во внешности $|\zeta|>1$ единичного круга? Где она должна быть регулярной и что будет при $\zeta=\infty$? Придется ли для ответа на эти вопросы «переводить» все Введение на «язык» внешности круга?

3.5. Классы Σ, Σ^* и Σ^0.

Согласно [6] (с. 110) через Σ обозначается класс функций

$$F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\ldots, \tag{3.28}$$

мероморфных (с полюсом в ∞) и однолистных в $|\zeta|>1$. Вместо «мероморфных в $|\zeta|>1$» можно говорить «регулярных в $1<|\zeta|<\infty$», так как в силу однолистности функции $F(\zeta)$ у нее будет только один полюс ($\zeta=\infty$).

Далее (см. [6], с. 512), через Σ^* обозначается класс функций вида (3.28), регулярных в области $|\zeta|>1$, исключая полюс $\zeta=\infty$, и отображающих $|\zeta|>1$ на области с дополнением, звездообразным относительно $\zeta=0$.

Если в определении Σ^*«звездообразным относительно $\zeta=0$» заменить на «выпуклым», то получится определение класса Σ^0 – подкласса функций из Σ, отображающих $|\zeta|>1$ на области с выпуклым дополнением.

Упражнение. Разберитесь с определениями Σ^0, Σ^* и Σ, а также с их иерархией, свойствами и эквивалентными определениями в терминах функционалов $\zeta F'(\zeta)/F(\zeta)$ и $1+\zeta F''(\zeta)/F'(\zeta)$. Проследите связи между Σ^0, Σ^*, Σ и S^0, S^*, S и аналогии между их свойствами.

Теперь докажем такое

Следствие 3.2 [17]**.** *Если* $F\in\Sigma^0$, *то*

$$|F'(\zeta)-1|<1\ ,\ |\zeta|>1. \tag{3.29}$$

Доказательство. Если функция $F(\zeta)$ вида (3.28) принадлежит классу Σ^0, то функция

$$\zeta F'(\zeta)=\zeta-\frac{\alpha_1}{\zeta}-\ldots$$

(без свободного члена в разложении) принадлежит классу Σ^*. Подставляя ее в неравенство (3.24), после очевидных преобразований получаем (3.29). «Надежда – наш компас земной...»

Представляет интерес и такое дополнение к следствию 3.2.

Следствие 3.3. *Если* $f(z)=z+a_3z^3+\ldots\in S^0$, *то*

$$\operatorname{Re} f'(z)>\frac{1}{2},\ z\in E. \tag{3.30}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(\zeta)$, задаваемую во внешности $E^-=\{\zeta\in\mathbf{C}:|\zeta|>1\}$[20] единичного круга соотношением

$$F'(\zeta)=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\ ; \tag{3.31}$$

при этом условие $f''(0)=0$, получающееся из разложения f в начале координат, обеспечивает отсутствие в разложении для F члена с логарифмом, так что

$$F(\zeta)=\zeta+\frac{3a_1}{\zeta}+\ldots$$

(наличие свободного члена не исключается). Так как $f\in S^0$ и при $z=1/\zeta\in E$ справедливо равенство

$$1+\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)},$$

то F принадлежит классу Σ^0, в котором, согласно следствию из теоремы 6, имеет место оценка (3.29). Переписывая ее как в предложении после формулировки теоремы С, получим (3.30).

Упражнения. **1.** Как соотношение (3.31) связывает разложения функций $F(\zeta)$ и $f(z)$ в окрестностях $\zeta=\infty$ и $z=0$, соответственно? Каким образом условие $f''(0)=0$ обеспечивает отсутствие в разложении для F члена с логарифмом?

2. Докажите эквивалентность $f\in S^0\Leftrightarrow F\in\Sigma^0$ при выполнении (3.31).

---

[20] Данное обозначение являлось традиционным для семинара по геометрической теории функций в Казанском университете; см., например, [48].

3.6. Теорема В методом Г.М. Голузина.

Мы наш, мы новый мир построим…

Прежде всего – фактически доказанное в [1] (см. (2.1))

Следствие 3.4. *Если* $f \in S^*$, *то*

$$\operatorname{Re}\sqrt{\frac{f(z)}{z}} \geq \frac{1}{2},\ z \in E. \tag{3.32}$$

Это – голузинская оценка (3.14) при $n=1$. Таким образом, в отличие от следствия 3.1, никаких дополнительных ограничений на коэффициенты f – таких, как $f''(0)=0$ – здесь не возникает. Теперь приведем важное

Следствие 3.5. *Если* $f \in S^*$, *то*

$$\left|\sqrt{\frac{z}{f(z)}}-1\right| \leq |z|,\ z \in E. \tag{3.33}$$

Равенство в (3.33) *достигается только для функций вида*

$$f(z)=\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2},\ |\varepsilon|=1.$$

Доказательство. Поступая, как в доказательстве предложения после формулировки теоремы С, получаем из (3.32):

$$\left|\sqrt{\frac{z}{f(z)}}-1\right| \leq 1,\ z \in E. \tag{3.34}$$

Функцию, стоящую под модулем в (3.34), обозначим $-\varphi(z)$. Тогда $f(z)=z/(1-\varphi(z))^2$ и $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому из (3.34) следует (3.33). При этом первая степень $|z|$ в правой части неравенства (3.33) будет иметь место благодаря разложению $f(z)=z(1+a_1z+a_2z^2+\ldots)$.

Что касается равенства в (3.33), то мы не ограничиваемся случаем $z \neq 0$, как это иногда делается, и «следуем в фарватере» теоремы 4 из [6] (с. 323), т.е. под равенством в лемме Шварца при $z = 0$ понимаем $|\varphi'(0)| = 1$, или, что то же самое, $|\varphi(z)/z|_{z=0} = 1$.

Упражнения. **1.** Как связана степень $|z|$ из правой части (3.33) с разложением $f(z) = z(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)$?

2. Почему для функции под модулем (3.34) мы выбираем обозначение $-\varphi(z)$, а не $\varphi(z)$? Что изменится, если взять $\varphi(z)$?

3. Разберите случай равенства в лемме Шварца. Какие «подводные камни» можно при этом обнаружить?

Перейдем к обоснованию теоремы B. Напомним, что теорема B утверждает равенство (2.1), т.е. $G_{S^*}(r) = \{u \in \mathbf{C} : |\sqrt{u} - 1| \leq r\}$. Для доказательства удобнее переформулировать теорему B с помощью функции $v(z) = (1+z)^2$.

Теорема B. *Имеет место равенство*

$$G_{S^*}(r) = v(\bar{E}_r), \; 0 < r < 1. \tag{3.35}$$

Доказательство. Пусть $f \in S^*$ и $u(z) = z/f(z)$. Тогда оценка (3.33) перепишется в виде

$$\left|\sqrt{u(z)} - 1\right| \leq |z|, \; z \in E.$$

Отсюда следует, что если $|z| \leq r$, то и $\left|\sqrt{u(z)} - 1\right| \leq r$ $(0 < r < 1)$. Другими словами, $u(\bar{E}_r) \subset v(\bar{E}_r)$, $0 < r < 1$. В силу произвольности $f \in S^*$ имеем

$$G_{S^*}(r) = \bigcup_{f \in S^*} u(\bar{E}_r) \subset v(\bar{E}_r), \; 0 < r < 1. \tag{3.36}$$

Но $v(z) = z/f(z)$ для функции $f(z) = z/(1+z)^2$, которая также принадлежит S^*. Значит, образ $v(\bar{E}_r)$ также присутствует в объединении, участвующем во включении (3.36). Последнее, таким образом, становится равенством, а именно (3.35), которое и требовалось обосновать.

Теорема B доказана.

Итак, теперь теорема В покоится на безупречном фундаменте, обеспечиваемом теоремой Г.М. Голузина, которая тем самым сменила «на боевом дежурстве» теорему В. Рогозинского – ее мы в свое время доказывать не стали. Тем не менее, составителю пособия очень не хотелось бы, чтобы у читателя осталось даже малейшее ощущение «дискриминации» в отношении последней. Дело в том, что «старый добрый Вернер»[21] подвергся дискриминации, оставившей самый глубокий след в истории европейской цивилизации XX века – нацистской дискриминации евреев. Как еще в концлагерь не загремел! Англичане спасли – легендарные Харди и Литтльвуд. Возможно, воспользовавшись политической обстановкой в Соединенном Королевстве, сложившейся в 1936 году. А может быть, как раз благодаря ее судьбоносному изменению в декабре тридцать шестого[22]...

Как бы то ни было, продолжим творческую ветвь «старины Rogo» (так, согласно биографии, звали его друзья и близкие) в следующем упражнении, которое можно развить до исследования по истории математики. Или очередного пособия.

Упражнение. Тема: Сравнительные характеристики методов Рогозинского и Голузина доказательства теоремы В.

1) Есть ли между указанными методами связи на «более ранних этапах» их развертывания? При условии, разумеется, что оно осуществляется «в направлении» теоремы В.

2) Сводятся ли эти методы один к другому?

3) Аналогия между условием (2.4) и неравенством $\operatorname{Re} f(z) \geq -M$ из леммы 3.1 – чисто внешняя, или здесь скрывается что-то более глубокое?

4) Какова связь между концепциями "Bildschranken" и «мажорантных областей» из соответствующих работ В. Рогозинского и Г.М. Голузина?

Замечания. 1. Обоснование следствия 3.5 – это «парафраз» на тему формул (3.22), (3.23) и их окружения при $n = 2$.

2. Следствие 3.5 было доказано Г.М. Голузиным другим методом в [6] (с. 510).

---

[21] Читатель, наверное, помнит, что одного из самых трогательных персонажей «Семнадцати мгновений весны» – профессора Плейшнера тоже звали Вернер. Где-то на периферии сознания мелькают лермонтовский доктор Вернер, а также инспектор Вернер из «Науки и жизни». Какие-то струны задевает это имя в русской душе...

[22] См. х/ф "The King's Speech" (2010).

3.7. Последний вальс.

Если завтра война, если завтра в поход –
Будь сегодня к походу готов

«Если завтра война» (СССР, 1938) и «Унесенные ветром» (США, 1939) – два совершенно разных «мобилизационных плана»... Но как же не хотелось никому этой войны...

One day when we were young
That wonderful morning in May
You told me you loved me
When we were young one day[23]

Повальсируем напоследок...

Теорема 3.3 и следствие 3.1 из нее были инструментами обоснования следующего утверждения, венчающего работу [5].

Теорема 3.5. *Если функция* $f(z)=z(1+a_2z^2+a_3z^3+\ldots)$ *отображает* $|z|<1$ *на звездообразную область, то*

$$|a_k|\le 1,\ k=2,3,\ldots \qquad (3.37)$$

Условие $f''(0)=0$ требуется только для того, чтобы из $f\in S^*$ с помощью следствия 3.1 получить неравенство (3.25), поэтому теорема 3.5 тривиально опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.2. *Если регулярная в* E *функция* $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ *удовлетворяет условию* (3.25)*, то имеют место оценки* (3.37).

Доказательство. Из неравенства (3.25) следует, что функция $2f(z)/z-1$ принадлежит классу Каратеодори $\boldsymbol{C}$, с которым мы уже встречались выше в доказательстве теоремы С. Как известно (вернемся к этому ниже), коэффициенты функций данного класса по модулю не превосходят двух. Поэтому коэффициенты $2f(z)/z-1$, а значит, и $2f(z)/z$ по модулю не превосходят двух. Ясно, что тогда коэффициенты $f(z)/z$, а значит, и функции $f(z)$ по модулю не превосходят единицы, что и требовалось.

[23] Из к/ф «Большой вальс» (1938).

Теперь нам нужно доказать, что коэффициенты функций класса $\boldsymbol{C}$ по модулю не превосходят двух. Это можно сделать двумя способами. Первый из них использует уже знакомое нам представление Рисса-Герглотца (2.10); изложение следует [23], с. 41.

Лемма Каратеодори. *Если* $\varphi \in \boldsymbol{C}$ *и*

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n ,$$

то $|c_n| \le 2$, $n = 1, 2, \ldots$ *Неравенство точное для каждого* n.

Доказательство. В силу

$$P(e^{-it} z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n$$

представление (2.10) дает

$$c_n = 2\int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t), \; n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, $|c_n| \le 2$ с равенством тогда и только тогда, когда e^{-int} имеет постоянный знак на носителе меры $d\mu$. В частности, равенство достигается для всех n для функции

$$P(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n .$$

Лемма доказана.

В отличие от только что использованного (см. также [27], с. 11) второй способ хочется назвать «эвристическим». Найти его можно в [6] – это лемма 2 на с. 199-200. Перепишем ее сюда в первозданном виде.

Лемма 3.3. *Если функция* $f(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots$ *регулярна в круге* $|z| < 1$ *и удовлетворяет в* $|z| < 1$ *условию* $\operatorname{Re} f(z) \ge 0$, *то* $|\alpha_n| \le 2$ *при любом* $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Условие $\operatorname{Re} f(z) \ge 0$ равносильно неравенству $|1 + f(z)| \ge |1 - f(z)|$, из которого следует, что функция

$$g(z)=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}=\frac{\alpha_1}{2}z+\ldots$$

регулярна в $|z|<1$ и удовлетворяет в $|z|<1$ условию $|g(z)|\le 1$. По лемме Шварца отсюда следует $|\alpha_1|\le 2$. Далее, если обозначить через η_k, $k=1,\ldots,n$ все корни n-ой степени из единицы, то имеем

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k z^{\frac{1}{n}})\right)\ge 0$$

и, следовательно, функция

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k z^{\frac{1}{n}})=1+\alpha_n z+\ldots$$

также удовлетворяет условиям леммы. Отсюда $|\alpha_n|\le 2$ при всех $n=1,2,\ldots$ Лемма доказана.

Замечание. В лекциях [27] на с. 2 изложено почти то же самое, но посмотрите, как. Роль леммы Шварца играет следующая

Теорема 3.6. *Если* $f\in\boldsymbol{C}$, *то* $(1-|z|)/(1+|z|)\le|f(z)|\le(1+|z|)/(1-|z|)$ *и* $|f'(0)|\le 2$. *Равенство выполняется тогда и только тогда, когда* $f(z)=(1+\eta z)/(1-\eta z)$.

Доказательство. $f\prec(1+z)/(1-z)$.

Теперь – теорема коэффициентов:

Теорема 3.7. *Пусть* $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n\in\boldsymbol{C}$. *Тогда* $|c_n|\le 2$ *для всех* n.

Доказательство. Функция

$$g(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(e^{2\pi ik/n}z)=1+\sum_{j=1}^{\infty}c_j z^j\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi ikj/n}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_{\nu n}z^{\nu n}$$

принадлежит $\boldsymbol{C}$, так же, как и функция $G(z)=g(z^{1/n})=1+c_n z+\ldots$ Осталось применить к G теорему 3.6.

Совсем другая расстановка акцентов, другое «пространственное решение» и, если угодно, другая «гравитация»: теоремы 3.6 и 3.7 просто «разрывают на части» лемму 3.3! Пример «тривиализации вдохновения»! Лемма Голузина «скрыта в зарослях» § 9 гл. IV среди оценок коэффициентов, а теоремы Шобера подаются как почти тривиальное начало исследования замкнутых выпуклых оболочек подклассов однолистных функций. Налицо две совершенно различных «аранжировки» одной и той же темы. Составителю представляется, что в упомянутых выше «зарослях» лемма 3.3 выглядит как награда, тем не менее, шоберовское доказательство позволяет не отвлекаться на поиски определения корней из единицы: $\eta_k = e^{2\pi ik/n}$, $k = 1, \ldots, n$.

Возвращаясь к нашей исходной теме, констатируем, что теорема 3.5 почти очевидна, если за основу берется следствие 3.1...

Но остался надолго этот вальс из кино…
Это было недавно, это было давно…

Упражнения. **1.** Убедитесь в справедливости тождеств

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi ik}{n} j} = \begin{cases} 0, & j = \overline{1,n}, \\ n, & j = n, \end{cases}$$

на которых основаны доказательства леммы 3.3 и теоремы 3.7.

2. Покажите, что условие $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ равносильно неравенству $|1 + f(z)| \geq |1 - f(z)|$. Выделите первый член тейлоровского разложения функции g из леммы 3.3 и проследите применение леммы Шварца для получения необходимого результата.

3. Восстановите доказательство теоремы 3.6.

4. «Пройдитесь» по первой главе [27], а потом найдите лемму 3.3 в [6] и осмотритесь в ее окружении. Какая «текстовая среда» Вам более комфортна и почему?

……

Итак, «довоенная часть» настоящего пособия подходит к концу. Перенесемся почти на сорок лет вперед и посмотрим, что произошло с результатами Маркса-Штрохеккера чуть более сорока лет назад...

IV. Теренс Шейл-Смолл: Йоркский университет, 1969[24]

In an octopus' garden with you

Помните фильм «Однажды в Америке», когда Лапша возвращается «искать вчерашний снег» под музыку «Битлз»? Вот сейчас у нас у всех должно быть примерно такое же ощущение прожитых лет...

Изложение следует первому разделу статьи [26].

Теорема 4.1. *Пусть функция* $g(z)$ *выпукла в* $|z|<1$. *Если* $|z_1|<1$ *и* $|z_2|<1$, *то*

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{2z_1 g'(z_1)}{g(z_1)-g(z_2)}-\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right\}>0. \qquad (4.1)$$

Замечания. 1. При $z_1 \to z_2$

$$\frac{2z_1 g'(z_1)}{g(z_1)-g(z_2)}-\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\to 1+\frac{zg''(z_2)}{g'(z_2)}, \qquad (4.2)$$

так что выражение из левой части соотношения (4.2) при $z_1=z_2$ понимается равным выражению из его правой части.

2. Полагая в (4.1) $z_2=0$, мы получаем второе неравенство *Основной теоремы*

$$\mathrm{Re}\frac{z_1 g'(z_1)}{g(z_1)}>\frac{1}{2} \qquad (4.3)$$

(при этом Шейл-Смолл ссылается на только на Штрохеккера [2]). Очень важный момент: незадолго до отправки статьи [26] в журнал, т.е. до 14 августа 1968 года, ее автор получил письмо от Дж. Клуни (J. Clunie) с простым и элегантным доказательством неравенства (4.3). Что характерно, Шейл-Смолл называет это письмо «неопубликованным» ("an unpublished letter").

[24] В интернете мало сведений об этом авторе. Известно, что Теренс (Терри) Шейл-Смолл родился в 1937 г., что он professor emeritus университета в Йорке и автор книги «Комплексные полиномы»; на одном из сайтов приводится его фото. К сожалению, как это часто бывает в интернете, ниоткуда не следует, что всё перечисленное относится к одному и тому же человеку.

3. В неравенстве (4.1) мы можем поменять ролями z_1 и z_2; складывая результат с (4.1), получим

$$\operatorname{Re}\frac{z_1 g'(z_1)-z_2 g'(z_2)}{g(z_1)-g(z_2)}>0.$$

Этот результат также известен: см. [66].

Доказательство теоремы 4.1. Выберем число $R<1$, такое что $|z_1|<R$ и $|z_2|<R$. Пусть z_0 – точка, удовлетворяющая $|z_0|=R$. Теперь $w=g(z)$ отображает окружность $|z|=R$ на выпуклую кривую C_R. Если $w\in C_R$ и $w\neq w_0=g(z_0)$, то мы можем определить «хордальный угол» $\arg(w-w_0)$ следующим образом. Пусть $z_0=Re^{i\theta_0}$ и $w=g(z)$, где $z=Re^{i\theta}$ и $\theta_0<\theta<\theta_0+2\pi$. Тогда, в силу

$$\frac{z-z_0}{\sqrt{zz_0}}=2i\sin\frac{\theta-\theta_0}{2},$$

указанный угол задается выражением

$$\arg\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\theta+\theta_0), \tag{4.4}$$

где в силу однолистности g мы можем определить однозначную ветвь функции

$$\arg\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \tag{4.5}$$

для всех z и z_0 из круга, выбирая для определения аргумента главное значение $\arg g'(0)$.

Более общо, принимая во внимание непрерывное изменение хордального угла, за исключением скачков величины π в точке w_0, имеем

$$\arg(g(Re^{i\theta})-g(Re^{i\theta_0}))=\arg\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}+n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\theta+\theta_0) \tag{4.6}$$

для $\theta_0+2n\pi<\theta<\theta_0+(2n+2)\pi$ и каждого целого n. Так как кривая C_R выпукла, то этот хордальный угол возрастает вместе с θ, так что если $\theta_0<\theta_1<\theta_2<\theta_0+2\pi$, то мы заключаем, что

$$\arg\frac{g(Re^{i\theta_2})-g(Re^{i\theta_0})}{Re^{i\theta_2}-Re^{i\theta_0}}-$$

$$-\arg\frac{g(Re^{i\theta_1})-g(Re^{i\theta_0})}{Re^{i\theta_1}-Re^{i\theta_0}}+\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)>0, \tag{4.7}$$

т.е.

$$\arg Re^{i\theta_2}\left(\frac{g(Re^{i\theta_2})-g(Re^{i\theta_0})}{Re^{i\theta_2}-Re^{i\theta_0}}\right)^2-$$

$$-\arg Re^{i\theta_1}\left(\frac{g(Re^{i\theta_1})-g(Re^{i\theta_0})}{Re^{i\theta_1}-Re^{i\theta_0}}\right)^2>0. \tag{4.8}$$

Нетрудно доказать это для всех $\theta_2>\theta_1$, откуда следует, что функция

$$F(z;z_0)=z\left(\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\right)^2$$

звездообразна в круге $|z|\le R$. Это влечет за собой

$$\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}>0,\ |z|\le R, \tag{4.9}$$

т.е.

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{2zg'(z)}{g(z)-g(z_0)}-\frac{2z}{z-z_0}\right\}>0,\ |z|\le R. \tag{4.10}$$

В частности,

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{2z_1g'(z_1)}{g(z_1)-g(z_0)}-\frac{2z_1}{z_1-z_0}\right\}>0. \tag{4.11}$$

Последнее неравенство выполняется во всех точках z_0 на $|z|=R$, а функция из его левой части – гармоническая по z_0. Поэтому данное неравенство остается справедливым при замене z_0 на z_2. Теорема доказана.

Замечание 4. Теорема 4.1 эквивалентна утверждению о том, что для каждого z_0, $|z_0|<1$, функция

$$F(z;z_0)=z\left(\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\right)^2$$

однолистна и *звездообразна* в $|z|<1$, вообще говоря, *без нормировки в нуле*! Такая функция удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F(z)}{zF'(0)}\right\}^{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}, \tag{4.12}$$

см. [14] (с. 381, 389; в главе III мы уже встречались с этим условием, правда, с нормировкой). Таким образом, имеем

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\cdot\frac{z_0}{g(z_0)}\right\}>\frac{1}{2}. \tag{4.13}$$

Если $g'(0)=1$, то, полагая $z_0=0$ в (4.13), получаем первое неравенство *Основной теоремы*

$$\mathrm{Re}\frac{g(z)}{z}>\frac{1}{2},\ |z|<1.$$

(«благородный Теренций» дает ссылку на [14], а не на [1] или [2], что несколько обескураживает)

Дальнейшее изложение [26] выходит за рамки нашей темы, поэтому остановимся и переведем дух.

Упражнения. **1.** В замечании 2 содержится неявный вызов: восстановить «простое и элегантное доказательство неравенства (4.3)», полученное Дж. Клуни. Составитель данного пособия далек от того, чтобы предлагать читателю ответить на этот вызов, но если кому-то все-таки интересно, то можно выделить три подхода к ответу. Пер-

вый – поиск доказательства в работах самого Клуни, начиная с приснопамятного 1968 г. Но поскольку в разделах монографии [23], посвященных теореме Маркса-Штрохеккера (с. 72-73, 250-251), – а это уже 1983 г. – ссылок на метод Клуни нет, то поиск доказательства в его работах усложняется до поиска идей, а это уже второй подход. Третий предполагает «изучение переписки», т.е. работ авторов, формировавших пространство внимания к указанной теореме.

2. Прокомментируйте, что значит определить однозначную ветвь функции (4.5) для всех z и z_0 из круга $|z|<1$, выбирая для определения аргумента главное значение $\arg g'(0)$. Какова при этом роль однолистности функции g?

3. Выражение (4.4) для «хордального угла» получается формальным вычитанием и прибавлением к $\arg(w-w_0)$ аргумента $\arg(z-z_0)$, равного величине $(\pi+\theta+\theta_0)/2$ при $\theta_0<\theta<\theta_0+2\pi$. Эта процедура нужна, чтобы в выражении (4.4) появилась функция (4.5) с «хорошими» свойствами. Задание состоит в том, чтобы корректно провести указанную процедуру, ответив при этом на вопрос: чем выражение (4.5) «лучше» $\arg(g(z)-g(z_0))$?

4. Выражения (4.4) и (4.6) для $\arg(g(z)-g(z_0))$ разбиваются на регулярную часть (4.5) и остаток, содержащий $(\pi+\theta+\theta_0)/2$. Чем объяснить «накрутку» $n\pi$ при переходе от (4.4) к (4.6) и как поможет этому объяснению «непрерывное изменение хордального угла, за исключением скачков величины π в точке w_0»?

5. Почему если кривая C_R выпукла, то «хордальный угол» возрастает вместе с θ?

6. Обоснуйте переход от (4.7) к (4.8). Докажите (4.8) для всех $\theta_2>\theta_1$. Можно ли доказать (4.7) для всех $\theta_2>\theta_1$?

7. Докажите утверждение замечания 4. Дайте определение звездообразной функции F, не принадлежащей классу S^*.

8. Проверьте, что из (4.9) следует (4.10).

9. Зачем нужна гармоничность по z_0 функции из левой части неравенства (4.11)? Почему оно остается справедливым при замене z_0 на z_2 с условием $|z_2|<R$?

Замечание. «По всему видать», что Терри Шейл-Смолл далеко не прост – так же, как и его доказательство. Фактически оценка

$$\operatorname{Re}\sqrt{\frac{f(z)}{z}} \geq \frac{1}{2},\ z \in E. \qquad (3.32)$$

из главы III содержится еще в работе Маркса [1] (это «сфера влияния» теоремы B). Однако, «чувствуется», что д-р Терри – как и его предшественник – Малькольм Ирвинг Слингсби Робертсон – особо не спешит ссылаться на немцев. Робинсон [14] вообще провозглашает автором неравенства

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} \geq \frac{1}{2},\ |z|<1,$$

одного Штрохеккера (с. 387), то же самое делает и Шейл-Смолл (который на Маркса вообще не ссылается). Что же касается «вклада Маркса в общее дело», то на с. 389 в [14] отмечается, что «А. Маркс показал, что $z/f(z)$ подчинено $1+z$, а $f(z)/z$ подчинено $(1+z)^{-1}$», а на с. 392 – что «по теореме А.Маркса имеем

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} \geq \frac{1}{1+r},\ |z|=r».$$

Робертсону «вторит» Дюрен ([23], с. 251), который первое неравенство основной теоремы (с $f(z)/z$) приписывает Марксу, а второе – Штрохеккеру, по существу, отказывая каждому из них в авторстве обоих неравенств. Что стоит за такими оценками творчества последних «труверов» Веймарской эпохи – отношение к «историческим конкурентам» или отношение к «немцам 30-х» – трудно сказать без дополнительного исследования. Хорошо, что они вообще названы. А возможно, Шейл-Смолл просто пытается формировать историческую традицию, «опрокидывая в прошлое» что-то ему современное.

Слава Богу, у нас был Голузин!

В заключение отметим, что «игра с аргументами», на которой строит свое доказательство Шейл-Смолл, – метод в теории функций хоть и привычный, но «простым и элегантным» его не назовешь. Может быть, именно поэтому в дело вступили новые «игроки».

V. Тед Дж. Саффридж: университет Кентукки, 1970[25]

Raindrops keep falling on my head…

Предлагаемый в [28] метод основан на изучении свойств функции

$$F(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\dfrac{\zeta}{z-\zeta}, & \text{если } z\neq\zeta,\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}+1, & \text{если } z=\zeta,\end{cases} \tag{5.1}$$

где $z,\zeta\in E$, родственной функции в неравенстве (4.1) из [26]. Основу составляет следующая

Теорема 5.1. *Пусть функция* $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ *регулярна в* E. *Тогда* $f\in S^0$ *если, и только если*

$$\operatorname{Re}F(z,\zeta)\geq\frac{1}{2},\ z,\zeta\in E, \tag{5.2}$$

где $F(z,\zeta)$ *задается посредством* (5.1).

Доказательство. Прежде всего, заметим, что функция $F(z,\zeta)$ непрерывна и поэтому регулярна по z и ζ. Ясно, что из (5.2) следует $\operatorname{Re}(zf''/f'+1)\geq 0$, $z\in E$. Таким образом, теорема доказана «в одну сторону»: неравенство (5.2) влечет за собой $f\in S^0$.

Пусть теперь $f\in S^0$. Покажем вначале, что (5.2) выполняется при $|z|=|\zeta|<1$. Действительно, если $z=\zeta$, то $F(z,\zeta)=\frac{1}{2}(z\frac{f''}{f'}+1)+\frac{1}{2}$, и оценка (5.2) очевидна. Если же $z\neq\zeta$, но $|z|=|\zeta|$, то

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\geq 0 \tag{5.3}$$

и

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta}{z-\zeta}=-\frac{1}{2}, \tag{5.4}$$

[25] На Маркса ссылки нет – только на Штрохеккера.

т.е. вновь получается (5.2). При этом (5.4) вычисляется непосредственно с использованием $|z|=|\zeta|$, а неравенство (5.3), справедливое для любых $z \neq \zeta$, следует из того, что выпуклая область звездообразна относительно любой своей точки.

Наконец, функция $\operatorname{Re} F(z,\zeta)$ – гармоническая по z при фиксированном ζ, когда $|z| \leq |\zeta| < 1$. Применяя к ней принцип максимума, с учетом полученного выше будем иметь (5.2) при $|z|<|\zeta|$. Обоснование (5.2) при $|\zeta|<|z|$ аналогично. Теорема 5.1 доказана.

Теперь докажем *Основную теорему.*

Следствие 5.1. *Если* $f \in S^0$, *то в* E *выполняются неравенства*

$$1)\ \operatorname{Re} z\frac{f'}{f} \geq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 2)\ \operatorname{Re}\frac{f}{z} > \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Первое неравенство – это (5.2) при $\zeta = 0$. Докажем второе. Раскладывая $F(z,\zeta)$ по степеням z, имеем

$$F(z,\zeta) = 1 + \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{f(\zeta)}\right) z + \ldots \tag{5.5}$$

Так как $\operatorname{Re} F(z,\zeta) \geq \frac{1}{2}$, то (вспоминая оценки коэффициентов функций класса Каратеодори) из разложения (5.5) получаем $|1/\zeta - 1/f| \leq 1$, следовательно, $|1-\zeta/f| \leq |\zeta| < 1$. Переход отсюда ко второму неравенству уже проводился выше. Следствие 5.1 доказано.

Упражнения. **1.** Почему из непрерывности функции $F(z,\zeta)$ следует ее регулярность по z и ζ? И еще: это все «в совокупности переменных» или по каждой переменной в отдельности? Угадывающийся призрак теоремы Хартогса обретет-таки реальные очертания или достаточно старой доброй теоремы об устранимой особенности?

2. Докажите соотношения (5.3) и (5.4). Покажите, что выпуклая область звездообразна относительно каждой своей точки.

3. К функции $\operatorname{Re} F(z,\zeta)$ применяется принцип максимума или принцип минимума?

4. Как получается разложение (5.5)?

VI. Малькольм И.С. Робертсон: Принстонский университет, 1936

I've gone to try on my long white robe
Down by the riverside

Все-таки, великая вещь – сила привычки. Два коротких очерка после трех больших глав – и нам уже неуютно, уже кажется, что мы обманываем ожидания читателя, и что полчища критических стрел уже устремились за нами в погоню... Однако вспомним О. Генри:

«Когда мы обращались к классикам, зоилы с радостью изобличали нас в плагиате. Когда мы пытались изобразить действительность, они упрекали нас в подражании Генри Джорджу, Джорджу Вашингтону, Вашингтону Ирвингу и Ирвингу...»[26]

...И Ирвингу Робертсону, – радостно перебьем мы классика, благодаря его за подсказку. Вернемся в «знаковый» тридцать шестой и полистаем немного работу Малькольма И.С. Робертсона [14]. Вот это «И.С.» в серединке – оно такое родное... Да и вот Терри тоже – в позапрошлой главе... И вообще, автору этих строк кажется, что Робертсон – неиссякаемый оптимист. Давайте убедимся в этом вместе...

Сделаем несколько выписок, перекликающихся с «нашей» темой. Вначале – теорема об аппроксимации полигональными функциями.

Теорема 6.1. *Пусть* $f \in S$ *и число* $\varepsilon > 0$ *– сколь угодно малое. Тогда можно найти последовательность полигональных функций вида*

$$f_n(z) = \int_0^z \prod_{s=1}^{n} \left(1 - \frac{t}{z_s}\right)^{-\alpha_s} dt, \qquad (6.1)$$

где $|z_s| = 1 - \varepsilon/2$, $-1 < \alpha_s < 1$, $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s = 2$, *такую, что* $f_n(z)$ *равномерно сходится к* $f(z)$ *при* $|z| \le 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Задавая $\varepsilon > 0$ произвольно малым, получим, что окружность $|z| = 1 - \varepsilon/2$ отображается посредством $w = f(z)$... Впрочем, переведите, пожалуйста, сами:

"...the circle $|z| = 1 - \varepsilon/2$ is mapped by $w = f(z)$ into a bounded simply connected region R in the w-plane whose contour C is a closed Jordan curve..."

[26] Из новеллы О. Генри «Сила привычки», с. 360-366 в [75] (перевод Н. Дарузес).

Получается, окружность отображается ***в*** область, ограниченную жордановой кривой. Как связан образ окружности с этой кривой? Вот-те Робертсон! И что теперь делать?

Будем считать, что это у него такой «сленг» и что окружность $|z|=1-\varepsilon/2$ отображается посредством $w=f(z)$ ***на*** замкнутую жорданову кривую C, которая ограничивает конечную односвязную область R в плоскости w. В современных руководствах обязательно добавили бы, что кривая C – аналитическая, будучи голоморфным образом аналитической кривой, а область R – образ при отображении $w=f(z)$ круга радиуса $1-\varepsilon/2$. Но вот открытого или замкнутого? Сейчас открытость закладывается в определение области, а тогда? Будем смотреть по контексту – «может, и не пригодится»...

Итак, $f(|z|=1-\varepsilon/2)=C$. Выберем n точек на C и соединим соседние точки отрезками прямых, в результате получим простой замкнутый многоугольник (полигон) C_n с n сторонами, аппроксимирующий замкнутую кривую C. Мы можем приблизить C равномерно полигонами C_n настолько близко, насколько требуется, за счет выбора номеров n достаточно большими.[27]

Существует единственная функция $\phi_n(z)$, которая отображает окружность $|z|=1-\varepsilon/2$ на многоугольник[28] (вот опять: "into the polygon") C_n так, что начало координат $z=0$ переходит в $w=0$, и так, что $\phi_n'(0)>0$. Действительно, $\phi_n(z)$ есть полигональная функция

$$\phi_n(z)=A_n\int_0^z\prod_{s=1}^{n}\left(1-\frac{t}{z_s}\right)^{-\alpha_s}dt\,,$$

где A_n – подходящая положительная постоянная; z_s – точка, лежащая на окружности $|z|=1-\varepsilon/2$ и соответствующая одной из вершин многоугольника; α_s измеряет в долях π внешний угол, который образуют две соседние стороны полигона (углы измеряются против часовой стрелки, что считается положительным направлением), причем

[27] Здесь Робертсон ссылается на "Cours D'Analyse" К. Жордана, т. 1, с. 97. Со своей стороны составитель может предложить читателю посмотреть книги [44] и [46] – просто чтобы почувствовать соответствующий контекст.

[28] Под многоугольником здесь понимается не область, ограниченная замкнутой ломаной, а сама такая ломаная.

$$-1<\alpha_s<1,\ \sum_{s=1}^{n}\alpha_s=2.$$

Пусть R_n обозначает замкнутую область, границей которой является C_n. Так как область $R-$ ограниченная и последовательность областей R_n сходится к R, то все граничные точки R_n находятся от $w=0$ на расстоянии, меньшем фиксированного расстояния d. Области R_n односвязны. Таким образом, функции $\phi_n(z)$ сходятся равномерно внутри и на

$$|z|=1-\varepsilon<1-\varepsilon/2$$

к предельной функции $\phi(z)$, и эта предельная функция отображает $|z|=1-\varepsilon/2$ на C.[29]

Так как $\phi'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}A_n>0$, $\phi(0)=0$, $f'(0)=1$, $f(0)=0$, то должно быть $\phi(z)\equiv f(z)$, поскольку имеется только одна функция с указанными свойствами, которая осуществляет рассматриваемое отображение.

В силу $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(z)=f(z)$ и $f'(0)=1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}A_n=1.$$

Полагая

$$f_n(z)\equiv\frac{\phi_n(z)}{A_n},$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_n(z)}{A_n}=f(z)$$

равномерно внутри и на $|z|=1-\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Упражнения. **1.** Почему замкнутую кривую C можно равномерно приближать полигонами C_n настолько близко, насколько требуется, за счет выбора номера n достаточно большим?

2. Докажите интегральное представление для $\phi_n(z)$. Как здесь используется формула Кристоффеля-Шварца?

---

[29] Здесь Робертсон ссылается на с. 73-76 книги К. Каратеодори "Conformal Representation". Составитель предлагает начать с соответствующих глав [6].

3. Как связаны внешний и внутренний углы при вершине многоугольника и почему $-1<\alpha_s<1$, $\sum_{s=1}^{n}\alpha_s=2$?

4. Что понимается под сходимостью R_n к R? Будет ли это сходимость к ядру в смысле Каратеодори? Почему все граничные точки R_n находятся от $w=0$ на расстоянии, меньшем фиксированного расстояния d? Односвязность R_n очевидна или нужно подбирать надлежащие слова?

5. Почему функции $\phi_n(z)$ сходятся равномерно внутри и на окружности $|z|=1-\varepsilon<1-\varepsilon/2$, а предельная функция отображает уже $|z|=1-\varepsilon/2$ на C?

На с. 378 в [14] дано такое

Замечание. В случае, когда функция $f(z)$ не только однолистна, но и выпукла в единичном круге, аппроксимирующие полигоны C_n из теоремы 6.1 также являются выпуклыми. В этом случае числа α_s будут положительными.

Упражнение. Докажите последнее утверждение.

Выпуклость по М. Робертсону.

Робертсон дает еще одну версию определения выпуклости (ср. Введение, раздел В). Под выпуклой функцией в [14] понимается аналитическая функция

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,$$

однолистная внутри единичного круга и отображающая любую окружность $|z|=r<1$ на *выпуклую кривую*, т.е. *кривую, которую любая прямая пересекает не более чем в двух точках*. Робертсон работает с такими функциями, называя их *выпуклыми и однолистными* и обозначая состоящий из них класс через С...

Образно выражаясь, получается своеобразный «микс» в результате «взбалтывания» принципа выпуклости из Введения.

...К обозначению S^0 переходить еще рано, так как в рамках представлений, сформировавшихся к концу XX века, данное обозначение устойчиво связывается с неравенством (6.2) ниже, которое *здесь* еще *предстоит доказать*.

Упражнение. Покажите, что приведенное только что определение выпуклости по Робертсону эквивалентно определениям, фигурирующим в формулировке принципа выпуклости.

Теперь посмотрим, как работает теорема 6.1. Продемонстрируем это на примере следующего утверждения; Робертсон определяет его как теорему Э. Штуди. Отметим, что оно слабее теоремы 2 из Введения (раздел Г), хотя по формулировке этого сразу и не скажешь. Дело в том, что в теореме 2 однолистность входит в одну из сторон эквивалентности, а в теореме 6.2 – в обе, т.е. «ставится над схваткой».

Теорема 6.2. *Условием, необходимым и достаточным для того, чтобы однолистная функция* $f(z)$ *отображала круг* $|z|\le r$ *на выпуклую область, является выполнение неравенства*

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\ge 0 \qquad (6.2)$$

в каждой точке z *модуля* $\le r$.

Доказательство. Без ограничения общности предполагаем, что $f(z)$ однолистна и выпукла в единичном круге, и что $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Аппроксимируем ее полигональными функциями $f_n(z)$ как в теореме 6.1 с *положительными* α_s. Получаем

$$1+\frac{zf_n''(z)}{f_n'(z)}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha_s}{z_s-z}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\alpha_s=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\frac{z_s+z}{z_s-z}. \qquad (6.3)$$

Если $|z|\le|z_s|=1-\varepsilon/2$, то $\operatorname{Re}\dfrac{z_s+z}{z_s-z}\ge 0$. Так как $\alpha_s>0$, то имеем

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf_n''(z)}{f_n'(z)}\right]\ge 0 \text{ при } |z|\le 1-\varepsilon .$$

Устремляя $n\to\infty$, получим

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\ge 0 \text{ при } |z|\le 1-\varepsilon ,$$

и ε можно взять настолько малым, насколько нам требуется. Таким образом, условие (6.2) – необходимое.

Чтобы показать, что оно является еще и достаточным, предположим только, что $f(z)$ однолистна и что

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\geq 0 \text{ при } |z|<1.$$

Тогда, задавая $\delta>0$, мы можем найти число $N(\delta)$, не зависящее от z и такое, что

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf_n''(z)}{f_n'(z)}\right]>-\delta \tag{6.4}$$

для $n\geq N(\delta)$ и для $|z|\leq 1-\varepsilon$. Следовательно, если мы возьмем $z=\rho z_s$, $0<\rho\leq 1$, для любого s из «ранжира» $s=1,2,\ldots,n$, то будем иметь

$$\frac{1}{2}(1-\rho)\cdot\operatorname{Re}\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n}\alpha_k\cdot\frac{z_k+\rho z_s}{z_k-\rho z_s}+\frac{1}{2}(1-\rho)\cdot\alpha_s\frac{1+\rho}{1-\rho}>-\delta(1-\rho). \tag{6.5}$$

Мы предполагаем точки z_k различными, так что $z_k\neq z_s$, и, устремляя $\rho\to 1$, получим $\alpha_s>0$. Значит, $f(z)$ есть предел выпуклых функций и, таким образом, также выпукла при $|z|\leq 1-\varepsilon$ для каждого ε. Это и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что теорема 6.2 сформулирована для $|z|\leq r$, а доказывается для $|z|<1$.

Упражнения. **1.** Выведите (6.3) из (6.1).

2. Какое свойство используется при обосновании $\operatorname{Re}\frac{z_s+z}{z_s-z}\geq 0$ – $|z|\leq|z_s|$ или $|z_s|=1-\varepsilon/2$?

3. Почему после устремления $n\to\infty$ можно позволить себе взять число ε «настолько малым, насколько нам требуется»? Когда на самом деле происходит выбор ε?

4. Докажите неравенство (6.4) для $n\geq N(\delta)$ и $|z|\leq 1-\varepsilon$, а затем – неравенство (6.5).

5. Каким образом предельный переход $\rho \to 1$ устанавливает *положительность* чисел α_s?

6. Дайте обоснование решающего шага финальной части доказательства теоремы 6.2: равномерный (по теореме 6.1) предел $f(z)$ последовательности выпуклых функций $f_n(z)$ есть выпуклая функция (по Робертсону).

Отметим, что теорема 6.2 сформулирована для $|z| \le r$, а доказывается для $|z|<1$. Такой «скачок» пробуждает старые сомнения относительно того, что́ различные авторы понимают под теоремой Штуди – теорему об эквивалентном условии выпуклости (6.2) или теорему о наследовании выпуклости линиями уровня. Следующее утверждение эти сомнения развеивает, по крайней мере, в отношении автора [14].

Теорема 6.3. *Если функция*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

регулярна, однолистна и выпукла в единичном круге, то $f(z)$ *однолистна и выпукла в каждом круге, лежащем внутри единичной окружности.*

Замечание. В каждом, а не только в концентрическом! Ср. [10], [12].

Доказательство теоремы 6.3. Возьмем любую точку z_0 внутри единичной окружности. Имеем

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)} = z - z_0 + b_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Данная функция будет выпуклой и однолистной в круге радиуса $R \le 1 - |z_0|$ с центром в точке z_0 при условии, что

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(z - z_0) f''(z)}{f'(z)} + 1\right] \ge 0 \text{ при } |z - z_0| \le 1 - |z_0|.$$

Мы можем записать

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{1}{2\pi}\int\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}\,d\alpha(\theta)\ ,$$

где функция $\alpha(\theta)$ монотонно возрастает в $(0,2\pi)$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int d\alpha(\theta)=1.$$

Окончательно имеем

$$\mathrm{Re}\left[1+\frac{(z-z_0)f''(z)}{f'(z)}\right]=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{Re}\left\{\frac{1+\dfrac{(z-z_0)e^{i\theta}}{1-z_0e^{i\theta}}}{1-\dfrac{(z-z_0)e^{i\theta}}{1-z_0e^{i\theta}}}\right\}d\alpha(\theta)\geq 0$$

при условии, что

$$|(z-z_0)e^{i\theta}|\leq|1-z_0e^{i\theta}|,$$

или при $|z-z_0|\leq 1-|z_0|$, чем и завершается доказательство.

Упражнение. Обоснуйте все три узловых момента доказательства: условие выпуклости в круге с центром в z_0, интегральное представление с $\alpha(\theta)$ и завершающее громоздкое соотношение.

Порядки выпуклости и звездообразности.

По-видимому, Робертсон был именно тем исследователем, который ввел в обиход указанные порядки (в [14] это с. 383 и 385).

Вначале «сэр Ирвинг» констатирует, что, как мы видели выше, необходимым и достаточным условием выпуклости функции $f(z)$ в единичном круге является неравенство

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right]>0 \text{ при } |z|<1.$$

Определение 6.1. Будем говорить, что $f(z)$ есть *выпуклая функция порядка* ρ в единичном круге, если $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f(z)$ регулярна и такова, что

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right]\geq\rho\geq 0 \text{ при } |z|<1,\ 0\leq\rho<1,$$

и если для каждого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует $z=z_0$, $|z_0|<1$, для которого

$$\mathrm{Re}\left[\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}+1\right]<\rho+\varepsilon.$$

Определение 6.2. Будем говорить, что $f(z)$ есть *звездообразная функция порядка* ρ в единичном круге, если $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f(z)$ регулярна и такова, что

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\geq\rho\geq 0 \text{ при } |z|<1,\ 0\leq\rho<1,$$

и если для каждого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует $z=z_0$, $|z_0|<1$, для которого

$$\mathrm{Re}\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}<\rho+\varepsilon.$$

Собственно, ради последнего определения мы и затеяли знакомство читателя с Малькольмом Робертсоном. Тем не менее, значение его работы "On the theory of univalent functions", выдержки из которой приведены в данном разделе, гораздо шире. В указанной работе производится «эшелонирование» позиций, «завоеванных» ранее Марксом и Штрохеккером. При этом работа становится *программной,* закладывающей основы западной (или даже заокеанской) традиции однолистности, особенно если смотреть на нее с высоты "Future in the Past". Вообще, очень интересно сравнивать ауру исследуемых в настоящем пособии текстов: немцам, как и всегда, присуща тотальность, русским – неудержимость, а американцы пытаются остаться «над схваткой». Словно (тогда еще) будущая война бросает отсвет на всю «цивилизацию тридцатых»... После войны *результаты* стали превращаться в *теорию.*

VII. Питер Л. Дюрен: Мичиганский университет, 1983. Некоторые итоги

Старинные часы еще идут…

7.1. Доказательство *Теоремы Маркса-Штрохеккера*.

Начнем со следующего утверждения из [23], с. 250, которое «по существу принадлежит Рушевею и Шейл-Смоллу» [25].

Предложение 7.1. *Если* $f \in S^0$, *то для всех* z, ζ и w из E

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z}{z-\zeta}\frac{\zeta-w}{z-w}\frac{f(z)-f(w)}{f(\zeta)-f(w)}-\frac{\zeta}{z-\zeta}\right\}>\frac{1}{2}. \qquad (7.1)$$

Доказательство (ср. [27], с.10). Функция

$$F(z,\zeta,w)=\frac{2z}{z-\zeta}\frac{\zeta-w}{z-w}\frac{f(z)-f(w)}{f(\zeta)-f(w)}-\frac{2\zeta}{z-\zeta}-1 \qquad (7.2)$$

голоморфна в поликруге

$$E^3=\{(z,\zeta,w):|z|<1,|\zeta|<1,|w|<1\}.$$

Для несовпадающих постоянных $\alpha=e^{ia}$, $\beta=e^{ib}$, $0<a,b<2\pi$, имеем

$$\operatorname{Re}F(\alpha w,\beta w,w)=\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a}{2}}\operatorname{Im}\left\{\frac{f(\alpha w)-f(w)}{f(\beta w)-f(w)}\right\}. \qquad (7.3)$$

Но так как образ каждого круга $|w|\le\rho<1$ при отображении f будет выпуклым, то

$$\arg\frac{f(\alpha w)-f(w)}{f(\beta w)-f(w)}\in\begin{cases}(0,\pi), & 0<a<b<2\pi,\\ (-\pi,0), & 0<b<a<2\pi.\end{cases} \qquad (7.4)$$

Значит, $\sin[(a-b)/2]$ и $\operatorname{Im}\{\cdot\}$ имеют совпадающие знаки, и, таким образом,

$$\operatorname{Re} F(\alpha w, \beta w, w) > 0 .$$

Но $\operatorname{Re} F(z, \zeta, w)$ достигает своего минимума на остове

$$T^3 = \{(z, \zeta, w) : |z| = |\zeta| = |w| = 1\}$$

поликруга E^3, так что $\operatorname{Re} F(z, \zeta, w) > 0$ всюду в E^3 и предложение доказано.

Два варианта предельного перехода в (7.1) – (a) $w \to z$, $\zeta \to 0$ и (b) $w \to 0$, $\zeta \to 0$ – устанавливают соответствующие неравенства из *Основной теоремы* (Дюрен меняет их местами):

Следствие 7.1. *Если* $f \in S^0$, *то*

(a) $\operatorname{Re} z \dfrac{f'(z)}{f(z)} \geq \dfrac{1}{2}$, $|z| < 1$;

(b) $\operatorname{Re} \dfrac{f(z)}{z} \geq \dfrac{1}{2}$, $|z| < 1$.

Далее приводим дословно: «часть (a) была впервые открыта Штрохеккером [2], часть (b) – Марксом [1]». Недоумение по этому поводу было отмечено выше – в главе IV, и еще раньше – во Введении.

Отметим, что приведенное доказательство предложения имеется в книге [27] (с.10) со ссылкой на [25]. Последняя часть этого доказательства в версии Шобера изложена более подробно. Приведем ее – начиная с того места, где $\sin[(a-b)/2]$ и $\operatorname{Im}\{\cdot\}$ имеют совпадающие знаки, так что $\operatorname{Re} F(\alpha w, \beta w, w) > 0$, только у Шобера неравенство пока нестрогое.

«По непрерывности $\operatorname{Re} F(z, \zeta, w) \geq 0$ как только $|z| = |\zeta| = |w|$. Так как $\operatorname{Re} F(z, \zeta, w)$ – гармоническая функция от всех трех переменных, то принцип минимума влечет за собой $\operatorname{Re} F \geq 0$ для всех $z, \zeta, w \in E$. На самом деле $\operatorname{Re} F > 0$, так как $F(0,0,0) = 1$. (Чтобы применить принцип минимума, можно заметить, что $\{|z| = r\}^3$ есть остов поликруга $\{|z| < r\}^3$, или, иначе, можно применить его последовательно к переменным z, ζ, w отдельно, чтобы получить $\operatorname{Re} F > 0$ сначала для $|z| \leq |\zeta| = |w|$, затем для $|z|, |\zeta| \leq |w|$, и, наконец, для $|z|, |\zeta|, |w| < 1$.)»

Упражнения. **1.** Докажите голоморфность функции (7.2) в поликруге E^3.

2. Проверьте вычисления, приводящие к представлению (7.3).

3. Покажите, что из выпуклости образа $f(\bar{E}_\rho)$ при любом $\rho<1$ следует соотношение (7.4).

4. Почему $\operatorname{Re} F(z,\zeta,w)$ достигает своего минимума на множестве T^3, где $\operatorname{Re} F(z,\zeta,w)\geq 0$. Разберите обе версии приложения принципа минимума, указанные в шоберовском варианте последней части доказательства предложения.

Еще два упражнения поставлены в самой работе [25]:

5. Рассмотрите величину (7.4) в рамках концепции хордального угла Шейл-Смолла.

6. Вспомним замечание 4 из главы IV. Будет ли условие звездообразности функции

$$F(z;z_0)=z\left(\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\right)^2$$

достаточным для выпуклости функции $g(z)$?

7.2. Структурные неравенства для звездообразных и выпуклых функций.

Building your dream
Has to start now…

Название заимствовано у первого раздела работы [25], демонстрирующей, сколь блистательным может быть германо-британский альянс. Результатам данной работы посвящен §8.3 книги [23], где, в частности, содержится приведенное выше предложение 7.1. Ряд следствий и упражнений, которыми Дюрен сопровождает его ([23], с. 251, 273, 72-73), указывает на наличие нескольких «конструктов», обеспечивающих *Теорему Маркса-Штрохеккера* «естественной средой обитания». Такую «среду» и разворачивает перед нами работа [25], охватывающая с единых позиций изложенные выше результаты Шейл-Смолла и Саффриджа и опирающаяся на них. Предложение 7.1 венчает «структурную теорию» [25], которой мы сейчас и займемся.

Вначале – следующий результат, впервые прозвучавший выше в замечании 4 главы IV, однако Рушевей и Шейл-Смолл «подстраивают» к нему доказательство из [28].

Теорема 7.1. *Если* $\varphi(z)$ *выпукла в* $|z|<1$, *т.е.*

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)>0 \ \ (|z|<1)$$

и $\varphi'(0)\neq 0$, *то для каждого* z_0 $(|z_0|<1)$ *функция*

$$z\left(\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}\right)^2 \tag{7.5}$$

звездообразна.

Отметим, что Рушевей и Шейл-Смолл работают с версией звездообразности $f(z)$, определяемой условиями $f(z)=\sum_1^\infty a_n z^n$, $a_1\neq 0$, и

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0,\ |z|<1.$$

Таким образом, определения выпуклости и звездообразности даются в рамках аналитического подхода (см. Введение). При этом строгая нормировка $f'(0)=1$ заменяется нестрогой вида $a_1\neq 0$ или $f'(0)\neq 0$.

Доказательство теоремы 7.1. Образ D функции $\varphi(z)$ является выпуклой областью, в частности, звездообразной относительно точки $\varphi(z_0)$, и поэтому если $|z|>|z_0|$, то

$$\mathrm{Re}\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)}>0 \tag{7.6}$$

(ср. (5.3) главы V). Обозначая теперь через $h(z)$ функцию (7.5), будем иметь

$$\frac{2z\varphi'(z)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)}-\frac{z+z_0}{z-z_0}=\frac{zh'(z)}{h(z)}, \tag{7.7}$$

и это выражение аналитично по z и z_0. Благодаря (7.6) оно имеет неотрицательную вещественную часть при $|z|=|z_0|$. Принцип максимума немедленно влечет за собой, что (7.7) имеет положительную вещественную часть для каждых z и z_0, и теорема доказана.

Упражнения. **1.** Сравните приведенное доказательство с обоснованием теоремы 5.1 главы V. Какое изложение представляется предпочтительным и почему?

2. Зачем нужна аналитичность по z и z_0?

3. Почему (7.7) имеет всего лишь неотрицательную вещественную часть, если выполняется (7.6)? И как потом снова «восстанавливается» положительность вещественной части (7.7)?

4. Используется ли в обосновании теоремы 7.1 условие $\varphi(0)=0$?

Теперь вернемся к определению звездообразности порядка ½. Напомним принадлежащее М. Робертсону определение 6.2:

Определение [14]**.** Будем говорить, что $f(z)$ есть *звездообразная функция порядка* ρ в единичном круге, если $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f(z)$ регулярна и такова, что

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\geq\rho\geq 0 \text{ при } |z|<1,\ 0\leq\rho<1,$$

и если для каждого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует $z=z_0$, $|z_0|<1$, для которого

$$\operatorname{Re}\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}<\rho+\varepsilon. \tag{7.8}$$

Теперь приведем версию Рушевея и Шейл-Смолла:

Определение [25]**.** Функция $f(z)=\sum_1^\infty a_n z^n$ $(a_1\neq 0)$ называется звездообразной порядка ½, если

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\frac{1}{2}\ (|z|<1). \tag{7.9}$$

Ясно, что от «половинки» здесь можно перейти к «общему» ρ. Поэтому «ограничение» при переходе ко второму определению носит

чисто утилитарный характер – Рушевею и Шейл-Смоллу просто не нужен общий случай. Столь же несущественной является и отмена нормировок в нуле.

По-настоящему принципиальным является отказ от условия (7.8). Он разрешает включать в класс функций, звездообразных порядка ρ, функции, звездообразные порядков $\rho' > \rho$. Таким образом, порядки звездообразности $\rho \in [0,1)$ задают классы функций с условием

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \rho, \ |z|<1;$$

данные классы образуют ρ-параметрическое семейство, расширяющееся с убыванием ρ. При этом класс функций, звездообразных порядка ρ в смысле определения [14] можно интерпретировать как границу класса функций, звездообразных порядка ρ в смысле определения [25]. Остается отметить только, что при добавлении нормировок $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ получающиеся классы обозначаются через $S^*(\rho)$, $\rho \in [0,1)$. Тем не менее, игнорирование указанных нормировок в данном разделе существенно, и в определении порядка звездообразности мы следуем [25].

Важная лемма. *Функция $g(z)$ звездообразна тогда и только тогда, когда функция $f(z) = z\sqrt{g(z)/z}$ звездообразна порядка ½.*

Доказательство – *упражнение.*

Важное следствие. *Если $\varphi(z)$ выпукла в $|z|<1$, то для каждого z_0 ($|z_0|<1$) функция*

$$z\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} \tag{7.10}$$

звездообразна порядка ½.

Доказательство. Фиксируем произвольное z_0 и обозначим через $g(z)$ функцию (7.5), а через $f(z)$ – функцию (7.10). Данные обозначения высвечивают то обстоятельство, что указанные функции связаны соотношением из *Важной леммы*. «Подстраивая» к последней утверждение теоремы 7.1, мы и получим требуемое.

Упражнение. Прокомментируйте работу с ветвями квадратного корня при подстановке в соотношение $f(z)=z\sqrt{g(z)/z}$ обращающих его в тождество функций (7.10) и (7.5).

Следующее утверждение, обобщающее условие (7.9) и имеющее прототип в [26], опирающийся в свою очередь на неравенство маарка-Робертсона-Голузина (см. замечание 4 главы IV), является второй составляющей в «структурной теории» [25].

Теорема 7.2. *Функция* $f(z)$ *звездообразна порядка ½ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_2}{f(z_2)}\right)>\frac{1}{2} \tag{7.11}$$

при $|z_1|<1$, $|z_2|<1$.

Доказательство. Достаточность ясна при $z_1=z_2$. Для обоснования необходимости положим $g(z)=(f(z))^2/z$, так что $g(z)$ звездообразна (см. *Важную лемму*). Рассмотрим главную ветвь $\arg(1-\sigma)$ при $|\sigma|<1$ и заметим, что она непрерывно продолжается на $|\sigma|=1$, $\sigma\neq 1$. Это позволяет нам получить

$$\arg(1-e^{i\varphi})=-\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\quad(0<\varphi<2\pi). \tag{7.12}$$

Записывая $z=re^{i\varphi}$, имеем

$$\arg\left\{(1-e^{i\varphi})\frac{f(ze^{i\varphi})}{ze^{i\varphi}}\cdot\frac{z}{f(z)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\pi+\varphi+\arg\frac{g(re^{i(\theta+\varphi)})}{re^{i(\theta+\varphi)}}-\arg\frac{g(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\ -\pi+\arg g(re^{i(\theta+\varphi)})-\arg g(re^{i\theta})\ ,$$

а так как g звездообразна, то это выражение по абсолютной величине не превосходит $\pi/2$, если $0<\varphi<2\pi$. Таким образом,

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\sigma)\frac{f(z\sigma)}{z\sigma}\cdot\frac{z}{f(z)}\right\}>0 \quad (|z|<1) \tag{7.13}$$

при $|\sigma|=1$, $\sigma\neq 1$. Рассмотрим теперь $|z_1|=|z_2|<1$ и $z_1\neq z_2$, так что для некоторого σ, удовлетворяющего $|\sigma|=1$, $\sigma\neq 1$, имеем $z_2=z_1\sigma$. Тогда получим

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_2}{f(z_2)}\right)=-\operatorname{Re}\frac{\sigma}{1-\sigma}+\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\sigma}\frac{z_1\sigma}{f(z_1\sigma)}\cdot\frac{f(z_1)}{z_1}\right)>$$

$$>-\operatorname{Re}\frac{\sigma}{1-\sigma}=\frac{1}{2},$$

используя (7.13). Доказательство теперь завершается применением принципа максимума.

Упражнения. **1.** Докажите достаточность условия (7.11) для звездообразности функции $f(z)$ порядка ½.

2. Что такое главная ветвь аргумента $\arg(1-\sigma)$ при $|\sigma|<1$ и почему она непрерывно продолжается на $|\sigma|=1$, $\sigma\neq 1$?

3. Проверьте соотношение (7.12).

4. Проведите пошаговую проверку доказательства неравенства (7.13) при $|\sigma|=1$, $\sigma\neq 1$.

5. Посмотрите, что получается при $|z_1|=|z_2|<1$ и $z_1\neq z_2$. Как используется принцип максимума, чтобы получить отсюда неравенство (7.11) для всех z_1, z_2 из единичного круга? (Подобная процедура уже проводилась выше.)

6. На всем протяжении развиваемой в настоящем пособии темы все настойчивей звучит мотив, восходящий к Марксу и связанный с применением функции $\arg$. Задание состоит в том, чтобы ответить на вопрос, является ли этот «мотив» сквозным, или составляющие его «фразы» никак друг с другом не связаны. Будет ли он основополагающим, или на каждое доказательство с участием $\arg$ найдется его «безаргументный аналог»?

Последнее упражнение относится к вопросам, которые математики снисходительно называют «философскими». Действительно, что еще нужно, когда все уже доказано? Однако составителя не оставляет мысль об «антропоцентричности» математики, причем в данном случае – именно в той постановке, которая называет ТФКП «дамской наукой» (см. Предисловие).

Быть «дамской наукой», значит, выстраивать теорию функций так, чтобы темы, идущие, в частности, от римановых поверхностей и связанные с пугающей неоднозначностью корней, логарифмов и аргументов, в ней просто не возникали. Удалось ли Штрохеккеру «дамское» обоснование теоремы Маркса? И не является ли нежелание англосаксов ссылаться на работу [1] демонстрацией их приверженности ценностям скрытофеминистского «Дивного нового мира» О. Хаксли, где главным героем (в некотором смысле *отсутствующей структурой*) был человек по фамилии Маркс?[30]

Возможно ли вообще вывести все стыки комплексной теории функций со смежными дисциплинами – «инженерные коммуникации Дома ТФКП» – в раз и навсегда определенные «узлы», чтобы спрятать их в «стены» этого «дома» и развивать, скажем, теорию однолистности, исходя из «его внутренней планировки»? Вот вопрос, всегда представлявшийся актуальным перед кандидатскими экзаменами...

А сейчас мы возвращаемся к теореме 7.2 и докладываем, что все готово для «альтернативного» доказательства предложения 7.1 из самого начала настоящей главы: в классе выпуклых функций справедлива оценка (7.1). Рушевей и Шейл-Смолл в явном виде ее не приводят, ограничиваясь лишь указанием, как ее получить, а именно применить теорему 7.2 к *Важному следствию*. В [25] оценка (7.1) приведена в форме «трехточечного условия», составляющего звено в цепи утверждений, приводящих к верификации гипотезы Полиа-Шёнберга (что, собственно, и явилось главной целью [25]). Эквивалентность (7.1) и указанного «трехточечного условия» проверяется в [23] (с. 252).

Сформулируем указанное выше «предложение Шобера-Дюрена» – предложение 7.1 – в слегка измененных обозначениях и без нормировки функции в нуле.

---

[30] Роман Олдоса Хаксли «О дивный новый мир» вышел в том же 1932-м году, что и работа [1]. Упомянутый главный герой добровольно выбирает изгнание из этого «мира». Другой «аллюзией» может служить образ мужчины во главе женской цивилизации из фильма «Новые амазонки».

Теорема 7.3. *Если функция* $\varphi(z)$ *выпукла в* E, *то для всех* z_0, z_1 *и* z_2 *из* E *имеет место оценка*

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z_1}{z_1-z_2}\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_0)}{\varphi(z_2)-\varphi(z_0)}-\frac{z_2}{z_1-z_2}\right\}>\frac{1}{2}. \qquad (7.14)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(z)$ выпукла в E. Тогда, согласно *Важному следствию*, для всякого $z_0 \in E$ функция

$$f(z)=z\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}$$

звездообразна порядка ½, а значит, по теореме 7.2, удовлетворяет неравенству (7.11) с любыми z_1 и z_2 из E. Подставляя в это неравенство выражение для функции $f(z)$, т.е. (7.10), после незначительных упрощений получаем итоговую оценку (7.14), что и доказывает теорему.

Получилось доказательство настолько простое, что его можно назвать «почти арифметическим». Однако ценой такого упрощения стала теорема 7.1.

Упражнение. Какой подход к теореме Маркса-Штрохеккера представляется Вам более предпочтительным – [23] или [25]?

7.3. «Трехточечный консеквент» выпуклости.

Справедлива следующая

Теорема 7.3'. *Если* $\varphi(z)$ *выпукла в* E, *то для всех комплексных чисел* σ_1, σ_2 *и* σ_3, *удовлетворяющих* $|\sigma_k|\le 1$ $(k=1,2,3)$, *имеет место оценка*

$$\operatorname{Re}\frac{\varphi(z)*z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}(1-\sigma_3 z)^{-1}}{\varphi(z)*z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}}>\frac{1}{2} \quad (|z|<1). \qquad (7.14')$$

Вначале – о том, что такое звездочка, $*$; в ее определении и изложении свойств следуем [23], с. 216, 247 и 252; берем только самое необходимое.

Свертка, или *произведение Адамара* двух степенных рядов

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{и} \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n ,$$

сходящихся в $|z|<1$, есть функция $h=f*g$ со степенным рядом

$$h(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n , \ |z|<1.$$

Из свойств свертки нам понадобятся только два следующих.

Свойство 1. *Для любой функции* f, *регулярной в* E, *имеет место равенство* $f*l=f$, *где*

$$l(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n=\frac{z}{1-z}.$$

Свойство 2. *Для любой функции* f, *регулярной в* E, *и любых комплексных чисел* α, β *и* γ, *таких, что* $|\alpha|\le 1$, $|\beta|\le 1$ *и* $|\gamma|\le 1$, *выполняются равенства*

$$f(z)*\frac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}=f(z)*\left\{\frac{1}{1-\alpha z}-\frac{1}{1-\beta z}\right\}=\frac{f(\alpha z)-f(\beta z)}{\alpha-\beta} .$$

Обоснования оставляем читателю в качестве ***упражнений***.

Доказательство теоремы 7.3'. Подставим $z_1=\sigma_1 z$, $z_2=\sigma_2 z$ и $z_0=\sigma_3 z$ в неравенство (7.14). После очевидных преобразований получившегося выражения с помощью свойства 2 мы приходим к требуемой оценке (7.14') .

Совершенно аналогично из теоремы 7.2 получаем

Предложение 7.2'. *Если* $f(z)$ *звездообразна порядка ½, то для любой пары* σ_1, σ_2, *удовлетворяющей* $|\sigma_1|\le 1$, $|\sigma_2|\le 1$, *имеет место оценка*

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)*z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}}{f(z)*z(1-\sigma_1 z)^{-1}}>\frac{1}{2} \quad (|z|<1). \qquad (7.11')$$

Переход от (7.11') к (7.14') на языке сверток изображает переход от (7.11) к (7.14), проявляя скрытую итеративность последнего. Это напоминает нам об итерациях Штрохеккера, с которых мы начали повествование, а значит, нам пора закругляться.

Упражнение. 1. Можно ли провести переход от (7.11') к (7.14'), не выходя за рамки «языка сверток», т.е. без теоремы 7.3.

2. Докажите предложение 7.2'.

7.4. Подведение итогов.

В каком же месте своей статьи [25] Рушевей и Шейл-Смолл доказали теорему 7.3? Вот это место, на с. 122, самое начало п. (1.6): «Если $\varphi(z)$ выпукла, то функция (7.10) звездообразна порядка ½ и, значит, мы можем применить теорему 7.2 и получить трехточечное условие выпуклости, которое для наших целей удобно выразить в следующей форме». (Это и была форма (7.14').)

Таким образом, подстановка в неравенство (7.11) выражения (7.10), чтобы получить (7.14), фактически осуществлена в [25]. Расшифровал все это Дюрен, а первым указал Шобер.

Сейчас мы хотим посмотреть, что «должно остаться, когда все выученное забудется». Вначале дадим «исчисление Рушевея – Шейл-Смолла». Проделаем это в форме «шести условий Сталина»:

I. *Важная лемма* устанавливает эквивалентность условий

I.1. $\forall \zeta \in E \;\; h = z\left(\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)^2$ звездообразна по z в E и

I.2. $\forall \zeta \in E \;\; g = z\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$ звездообразна порядка ½ по z в E.

II. Теорема 7.1 утверждает импликацию: f выпукла в E $\Rightarrow$ выполняется условие I.1.

III. *Важное следствие* устанавливает импликацию: f выпукла в E $\Rightarrow$ выполняется условие I.2.

IV. Теорема 7.2 утверждает эквивалентность следующих условий:

IV.1. g звездообразна порядка ½ в E;

IV.2. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\dfrac{\zeta}{g(\zeta)}\right) > \dfrac{1}{2}$ при $z,\zeta \in E$.

V. Если

$$g = g_w(z) = z\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$$

и

$$H(g;z,\zeta) = \frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\frac{\zeta}{f(\zeta)}$$

(см. I.2 и IV.2), то подстановка g в H дает

$$H(g_w(z);z,\zeta) = \frac{z}{z-\zeta}\frac{\zeta-w}{z-w}\frac{f(z)-f(w)}{f(\zeta)-f(w)} - \frac{\zeta}{z-\zeta}.$$

Обозначим

$$G(z,\zeta,w) = H(g_w(z);z,\zeta).$$

VI. Условия III, I.2, IV и V устанавливают теорему 7.3: если f выпукла в E, то $\operatorname{Re}G(z,\zeta,w) > \frac{1}{2}$ при $z,\zeta,w \in E$.

Если попытаться представить последнюю, «шестую заповедь» в форме «шпаргалки», то получится схема, связывающая в единое целое все условия I –VI:

$$\begin{tikzcd}
f \text{ выпукла в } E \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{II}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{III}"'] & \mathrm{I.1} \arrow[d, Leftrightarrow, "\mathrm{I}"] & \\
& \mathrm{I.2} \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{V}"] & \\
\mathrm{IV.1} \arrow[r, Leftrightarrow, "\mathrm{IV}"] & \mathrm{IV.2} \arrow[r, Rightarrow] & \operatorname{Re}G(z,\zeta,w) > \frac{1}{2},\ z,\zeta,w \in E
\end{tikzcd}$$

Теперь – «арифметика Рушевея – Шейл-Смолла», основанная на решающей подстановке V.

Обозначим $F(z,\zeta,w) := 2G(z,\zeta,w) - 1$. Это есть в точности функция (7.2). При $w \to z$ получаем:

$$F(z,\zeta,w) \to F(z,\zeta,z) = \frac{2z\varphi'(z)}{\varphi(z)-\varphi(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}$$

– функция Шейл-Смолла, см. (4.1), (7.7);

$$G(z,\zeta,w)\to G(z,\zeta,z)=\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}-\frac{\zeta}{z-\zeta}$$

– функция Саффриджа, см. (5.1). При этом

$$F(z,\zeta,z)=\frac{zh'(z)}{h(z)},\ h=z\left(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)^2,$$

$$G(z,\zeta,z)=\frac{zg'(z)}{g(z)},\ g=z\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Аналогично п. V введем обозначение

$$h=h_\zeta(z)=h(z,\zeta)=z\left(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)^2$$

и «с высоты занятых позиций» рассмотрим замечание 4 главы IV. Его «ландшафт» выглядит так:

1. f выпукла в E $\Rightarrow$ $\operatorname{Re}F(z,\zeta,z)>0$, $z,\zeta\in E$

$$\Updownarrow$$

(I.1) $\forall\zeta\in E$ $h=h_\zeta(z)$ звездообразна по по z в E;

2. Неравенство Маркса-Голузина-Робертсона:

$$h \text{ звездообразна в } E \ \Rightarrow\ \operatorname{Re}\left(\frac{h(z)}{zh'(0)}\right)^{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2},\ z\in E;$$

3. При $z,\zeta\in E$ справедлива импликация

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{h(z,\zeta)}{zh'(0,\zeta)}\right\}^{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \text{(IV.2)}\ \operatorname{Re}\left(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\frac{\zeta}{g(\zeta)}\right)>\frac{1}{2}.$$

Упражнение. Постройте «ландшафт импликаций» для глав II и III. В центр его поместите неравенство (3.32), эквивалентное теореме B. Покажите, как оно следует из результатов Маркса, а как – из результатов Голузина. Доказано ли это неравенство в [14] или только анонсировано?

VIII. Лемма Жака: разгадка тайны Клуни.

Forever and ever

Почему «лемма Жака», а не «лемма Джека» – ведь, «судя по всему», он англичанин? «По всему» – значит, по скудной информации из самой статьи. I.S. Jack (опять «И.С.»!), Йоркский университет, статья отправлена в журнал 2 сентября 1969 г. (вторично в феврале 70-го). Возможно, аспирант Т. Шейл-Смолла, возможно, псевдоним... Ссылается и на Маркса, и на Штрохеккера!

В свое время название «лемма Жака» было весьма популярным на семинаре по геометрической теории функций в Казанском университете; см., напр., [48], с. 10. Лемма Жака вызывала у своих знатоков безотчетную радость благодаря неожиданно простой формулировке (в стиле «как же это я сам не догадался?»), классическому доказательству (с единственной ссылкой на Валирона) и большому числу цитирований (прежде всего, в работах румынских математиков). Наверное, именно поэтому статья [24] долго воспринималась как «статья с леммой Жака», а основной результат – новое доказательство *Основной теоремы* – оставался в тени.

«Заглянуть за» лемму Жака автору этих строк помог опыт знаменитого Огюста Дюпена[31]. Перелистывая недавно («в сто первый раз») статью [24], составитель настоящего пособия, видимо, уже «нацеленный» на *Основную теорему,* «вдруг» заметил на самом видном месте и часть этой теоремы, и Маркса, и Штрохеккера (а потом и другую часть)! Это пример того самого везения, о котором говорилось во Введении (раздел Д). Итак,

Лемма Жака. *Пусть функция* $w(z)$ *регулярна в единичном круге и* $w(0)=0$. *Тогда если* $|w|$ *достигает своего максимального значения на окружности* $|z|=r$ *в точке* z_1, *то*

$$z_1 w'(z_1) = k w(z_1),$$

где k *вещественно и* $k \geq 1$.

Доказательство. Обозначим через $M(r,w)$ максимальное значение $|w(z)|$ на $|z|=r$. Известно, что $\log M(r,w)$ есть непрерывная, вы-

[31] Эдгар По, «Похищенное письмо», см. [76].

пуклая и (так как $w(0)=0$) возрастающая функция от $\log r$. (См., например, [45], с. 20)[32].

В любой точке окружности $|z|=r$, в которой $|w(z)|=M(r,w)$, мы должны, очевидно, иметь

$$\frac{\partial R}{\partial \theta}=0,$$

где $z=re^{i\theta}$ и $w(z)=Re^{i\phi}$. Тогда для $R\neq 0$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}=0=\frac{\partial}{\partial \theta}(\log R)=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}(\log w)\right\}=-\mathrm{Im}\left\{\frac{re^{i\theta}w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right\}.$$

Значит, мы должны иметь

$$\frac{z_1 w'(z_1)}{w(z_1)}=k(|z_1|),$$

где k вещественно, а z_1 – любая из точек на окружности $|z|=r$, в которых $w(z)$ достигает своего максимального значения.

В точке $z=0$ мы имеем $k=n$, где n – номер первого коэффициента в тейлоровском разложении функции $w(z)$ в окрестности $z=0$, отличного от нуля. Условие $w(0)=0$ показывает, что нулевой коэффициент (свободный член) разложения равен нулю, поэтому $n\geq 1$. Теперь осталось показать, что $k(r)=k(|z_1|)$ есть возрастающая функция от r.

Так как $\log M(r,w)$ – возрастающая выпуклая функция от $\log r$, то функция

$$\frac{d\log M(r,w)}{d\log r}=\frac{rM'(r,w)}{M(r,w)}$$

также возрастает по $\log r$ и, следовательно, по r, в тех точках, в которых существует

$$d\log M(r,w)/d\log r.$$

Что касается точек, в которых эта производная не существует, то мы знаем ([45], с. 21), что в них, по крайней мере, существуют левосто-

[32] И.С. Жак дает ссылку на английский перевод 1949 г., а не на французский оригинал 1923 г.

ронняя и правосторонняя производные, и что левосторонняя производная не превосходит правосторонней. Следовательно, в любом случае, $rM'(r,w)/M(r,w)$ является возрастающей, хотя и не обязательно непрерывной функцией от r. Но

$$k(r)=\frac{z_1w'(z_1)}{w(z_1)}=\mathrm{Re}\left\{\frac{z_1w'(z_1)}{w(z_1)}\right\}=r\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(\log w)\Big|_{z=z_1}\right\}=$$

$$=r\frac{\partial\log R}{\partial r}\Big|_{z=z_1}=r\frac{\partial R/\partial r}{R}\Big|_{z=z_1},$$

и лемма теперь верна, так как $R|_{z=z_1}=M(r,w)$.

Приведенное доказательство следует оригиналу [24], однако сверялось еще и с копией перевода леммы Жака, сделанного еще в 80-е или даже 70-е гг. на казанском семинаре по геометрической теории функций. С большой долей уверенности можно высказать предположение, что, скорее всего, указанный перевод выполнен Е.А. Широковой.

Теперь нам нужно вспомнить о порядках выпуклости и звездообразности. В их определении Жак придерживается версии [14] (а не [25]). Поскольку определение порядков выпуклости и звездообразности по Робертсону дано выше в главе VI, то мы их здесь приводить не будем. Свойство функции $f(z)$ быть звездообразной порядка α обозначается $f(z)\in S^*(\alpha)$, выпуклой порядка α – принадлежностью $f(z)\in S^0(\alpha)$ (в [24] им соответствуют обозначения $S(\alpha)$ и $C(\alpha)$).

Упражнение. Существенна ли в статье [24] именно версия [14] или достаточно определений звездообразности и выпуклости в смысле [25]?[33]

Для доказательства своего основного результата Жак «использует метод, принадлежащий профессору Клуни».

Теорема Жака-Клуни. *Если регулярная в E функция* $f(z)$ *выпукла порядка* $(\alpha^2+3\alpha)/[2(\alpha+1)]$, $0\le\alpha\le1$, *то она будет звездообразной порядка, не меньшего* $(\alpha+1)/2$.

[33] Следует напомнить, что в [25] определен только порядок звездообразности ½, и отметить, что порядок выпуклости вообще не определялся. Как уже отмечалось в разделе 7.2, это не мешает восстановить «версию [25]» в полном объеме.

Доказательство. Представим утверждение теоремы в форме импликации. Имеем

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>\frac{\alpha^2+3\alpha}{2(\alpha+1)},\ z\in E,\ \Rightarrow\ \operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}>\frac{\alpha+1}{2},\ z\in E.$$

Последнее неравенство эквивалентно представлению

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}, \tag{8.1}$$

где $w(z)$ – функция из леммы Шварца, т.е. регулярная в E функция с условиями $w(0)=0$ и $|w(z)|\le 1,\ z\in E$. Обозначая множество всех таких функций $w(z)$ через *Sch*, перепишем приведенную импликацию в следующем виде:

$$f\in S^0\left(\frac{\alpha^2+3\alpha}{2(\alpha+1)}\right)\ \Rightarrow\ z\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)},\ z\in E,\ w\in Sch. \tag{8.2}$$

Профессору Клуни пришла в голову блестящая мысль посмотреть на импликацию (8.2) под другим углом зрения. Его идея состоит в том, чтобы работать не с условием, а с заключением (8.2). А именно, записывая представление (8.1), доказать, что $w\in Sch$. Таким образом, утверждение теоремы можно переписать в виде

$$f\in S^0\left(\frac{\alpha^2+3\alpha}{2(\alpha+1)}\right),\ z\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)},\ z\in E,\ \Rightarrow\ |w(z)|<1,\ z\in E.$$

Обозначая через $h(z)$ левую часть (8.1), имеем $h(z)f(z)=zf'(z)$. Дифференцирование этого уравнения дает

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=h(z)+z\frac{h'(z)}{h(z)}=$$

$$=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}-\frac{\alpha zw'(z)}{1-\alpha w(z)}+\frac{zw'(z)}{1-w(z)}.$$

В точке окружности $|z|=r$, в которой $|w(z)|$ достигает своего максимального значения, мы можем использовать лемму Жака, так что в этой точке

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}-\frac{k\alpha w(z)}{1-\alpha w(z)}+\frac{kw(z)}{1-w(z)}, \qquad (8.3)$$

где $k\geq 1$. Теперь предположим, что возможность $M(r,w)=1$ реализуется для некоторого $r<1$. В точке $w(z)$, для которой это выполняется, мы должны иметь $|w|=1$ (ясно, что $w\neq 1$). Тогда

$$\mathrm{Re}\frac{1-\alpha w}{1-w}=\frac{\alpha+1}{2},\ \mathrm{Re}\frac{kw}{1-w}=-\frac{k}{2},$$

$$\mathrm{Re}\frac{k\alpha w}{1-\alpha w}=-\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\mathrm{Re}\frac{1+\alpha w}{1-\alpha w}\geq -\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

В результате из (8.3) имеем

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\leq\frac{1+\alpha}{2}-\frac{k}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\leq$$

$$\leq\frac{1+\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}=\frac{\alpha^2+3\alpha}{2(\alpha+1)}.$$

Но это противоречит условию

$$f\in S^0\left(\frac{\alpha^2+3\alpha}{2(\alpha+1)}\right),$$

так что мы не можем иметь $M(r,w)=1$. Поскольку это справедливо для каждого $r<1$ и поскольку $M(0,w)=0$, то ясно, что мы должны иметь $M(r,w)<1$, и, значит, $|w(z)|<1$ при $|z|<1$. Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 8.1. *При* $\alpha=0$ *теорема Жака-Клуни приводит к импликации* $f(z)\in S^0(0)\Rightarrow f(z)\in S^*(1/2)$, *означающей выполнение второй оценки в Основной теореме.*

Получающаяся при $\alpha = 1$ импликация $f \in S^0(1) \Rightarrow f \in S^*(1)$ тривиальна, так как участвующие в ней классы содержат единственную функцию $f(z) = z$. Ясно, что в отмеченных концевых точках отрезка изменения α теорема Жака-Клуни будет точной.

Теперь перейдем к обоснованию первого неравенства *Основной теоремы.*

Теорема 8.1. *Пусть* $f(z) \in S^*(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$. *Тогда*

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{1/[2(1-\alpha)]} > \frac{1}{2}\ ,\ |z|<1.$$

Доказательство. Запишем

$$f(z) = \frac{z}{[1-w(z)]^{2(1-\alpha)}}.$$

Тогда

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + 2(1-\alpha)\frac{zw'(z)}{1-w(z)}.$$

Как только на окружности $|z| = r$ достигается максимум $|w(z)|$, мы сразу же можем применить лемму Жака и записать

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + 2k(1-\alpha)\frac{w}{1-w},$$

где $k \ge 1$. Тогда если $|w| = 1$ (но $w \ne 1$), то мы имеем

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = 1 - k(1-\alpha) \le 1 - (1-\alpha) = \alpha.$$

Получившееся противоречие (с условием теоремы) показывает, как и выше, что мы должны иметь $|w(z)| < 1$ всюду в E, значит,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{1/[2(1-\alpha)]} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-w(z)}\right\} > \frac{1}{2}.$$

Теорема является точной, что можно продемонстрировать с помощью функций $z/[(1-z)^{2(1-\alpha)}]$.

Следствие 8.2. *При* $\alpha=0$ *теорема* 8.1 *устанавливает неравенство Маркса-Голузина-Робертсона* (3.32) для $f\in S^*$. *При* $\alpha=1/2$ *она утверждает, что из второго неравенства Основной теоремы следует первое.*

С помощью следствия 8.1 второе утверждение следствия 8.2 удостоверяет выполнение первого неравенства *Основной теоремы* для $f\in S^0$. Сравним три сюжета в духе раздела 7.4.

Результаты Жака-Клуни:

$$f(z)\in S^0 \Rightarrow f(z)\in S^*(1/2) \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\frac{f(z)}{z}\ge\frac{1}{2},\; z\in E.$$

Следствие из результатов Голузина (следствие 3.1):

$$f\in S^*,\; f''(0)=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\frac{f(z)}{z}\ge\frac{1}{2},\; z\in E.$$

Путь Маркса (глава II):

$$\mathrm{Re}\frac{f(z)}{z}\ge\frac{1}{2},\; z\in E,\; \Rightarrow\; f(z)\in S^*(1/2).$$

Еще один сюжет из [1] продолжает такое

Следствие 8.3. *Если* $f(z)\in S^0(\alpha)$, $0\le\alpha\le 1$, *то*

$$\mathrm{Re}\;\; f'(z)^{\;1/[2(1-\alpha)]}>\frac{1}{2},\; z\in E.$$

Доказательство. Ясно, что если $f(z)\in S^0(\alpha)$, то $zf'(z)\in S^*(\alpha)$. Остается применить теорему 8.1.

При $\alpha=0$ отсюда получается оценка Маркса

$$\mathrm{Re}\sqrt{f'(z)}>\frac{1}{2},\; z\in E,$$

в классе S^0 из доказательства теоремы C (глава II), при $\alpha = 1/2$ – неравенство

$$\operatorname{Re} f'(z) > \frac{1}{2},\ z \in E. \tag{3.30}$$

для $f \in S^0(1/2)$, установленное в следствии 3.3 для $f \in S^0$ с $f''(0) = 0$.

Отметим интересную аналогию. Первое неравенство *Основной теоремы* следует либо из $f \in S^*(1/2)$, либо из $f \in S^*$, $f''(0) = 0$. Оценка (3.30) следует либо из $f \in S^0(1/2)$, либо из $f \in S^0$, $f''(0) = 0$.

Упражнение. Как связана указанная аналогия с теоремой Александера (см. Введение).

В заключение приведем

Замечание, завершающее [24]. Как указал Жаку рецензент его статьи, теорема 8.1 может быть доказана с использованием двух утверждений. Первое – это принадлежащая Штрохеккеру теорема V из [2], § 3, с. 365; назовем ее

Теорема 8.2. *Пусть* $w = \phi(z) = z + \ldots \in S^0$ *и* $|z_0| \le r < 1$. *Тогда значение* $\phi'(z_0)$ *лежит в области, получающейся из* $|z| \le r$ *с помощью отображения* $s = 1/(1-z)^2$.

Второе состоит в том, что функция

$$\phi(z) = \int_0^z \left\{ \frac{f(z)}{z} \right\}^{1/(1-\alpha)} dz$$

выпукла при условии $f(z) \in S^*(\alpha)$.

Упражнения. **1.** Докажите последнее замечание.

2. Вернемся к доказательству теоремы Жака-Клуни – в то место, где мы перешли от (8.2) к импликации

$$f \in S^0\left(\frac{\alpha^2 + 3\alpha}{2(\alpha+1)}\right),\ (8.1) \Rightarrow |w(z)| < 1,\ z \in E.$$

Почему справа записано именно *строгое* равенство, а не соотношения $w(0) = 0$ и $|w(z)| \le 1$, $z \in E$, определяющие множество *Sch*?

3. Что такое *точность* доказанных выше теорем?

Эпилог. Валентин Зморович: Киевский политех, 70-е

Як тебе не любити,
Києве мій!

...Не хотелось бы создавать у читателя впечатление, будто автор этих строк испытывает судьбу, но сейчас, когда пособие почти уже закончено, он вдруг подумал еще о нескольких вещах. Если тематика Маркса-Штрохеккера «пересеклась» с голузинской уже на исходном этапе своего развития, то какой отклик в советской теории функций вызвал ее «ренессанс» начала 70-х? Составитель припоминает, как еще будучи аспирантом, переписывал большой перечень публикаций по классам однолистных функций – там были и порядки звездообразности... А не встречался ли ему на тогдашних «тропах научного туризма» кто-нибудь из тех, кто такие «порядки» исследовал?..

Давно уже «быльем поросли» эти тропы. Только и осталось, что «рыться» в старых записях... Да, вот он, этот список: «исследования В.А. Зморовича в области геометрической теории функций» [21].

Валентин Анатольевич Зморович, 1909-1994, выдающийся советский, украинский математик. В обзоре [21] отмечены только 55 из его «свыше 120 научных работ, содержащих глубокие результаты теории экстремальных задач в специальных классах аналитических функций и в других областях математики». Это еще 1979 год!

Читаем список... Вот: «О *порядке звездности* выпуклых функций порядка α», 1977 год, совместно с И.К. Коробковой. Нет, не доступно – ни Докладов, ни Доповідей[34] за те годы нет ни в интернете, ни в нашей библиотеке... А вот это есть – Украинский математический журнал, «Об α-выпуклых функциях при $\alpha < 0$», работа 1979 г., совместно с В.А. Похилевичем... Есть и целый цикл работ по гипотезе А. Маркса...

Об И.К. Коробковой известно только то, что она – ученица В.А. Зморовича, в 60-е годы работала на возглавляемой им кафедре высшей математики Киевского политехнического института. Что же касается В.А. Похилевича – тоже ученика В.А. Зморовича – то здесь интернет не нужен. С Всеволодом Алексеевичем мы по крайней мере дважды «пересекались» на Кубанских школах-конференциях – в 1989 и 1991 гг. Имея строгий, почти аскетичный облик, человеком он ока-

[34] Имеются в виду Доклады АН УССР и Доповіді АН УРСР.

зался на редкость дружелюбным и хлебосольным. Выражаясь романтически, можно сказать, что на импровизированных «посиделках у Похилевича» прошлое засиживалось допоздна, и настоящее могло узнать много интересного. Вот только составитель тогда с удовольствием отвлекался на искушения молодости и Черноморского побережья. Бархатный сезон, знаете ли...

К сожалению, записи докладов В.А. Похилевича не сохранились, а их названия не исключают возможности «переключения» их автора на другую тематику.[35] Поэтому основное утверждение данного раздела сформируем из результатов статей [18] и [19], посвященных классам α-выпуклых функций в E.

Напомним, что классом α-выпуклых функций, $\alpha \in \mathbf{R}$, называется класс M_α регулярных в E функций f с нормировками $f(0)=0$, $f'(0)=1$, удовлетворяющих в E условиям $f(z)f'(z)/z \neq 0$ и

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right\}>0.$$

В работе [63] показано, что все α-выпуклые функции однолистны и звездообразны – факт, вынесенный в ее название и сделавший ее резонансной в теории однолистных функций 70-х и даже 80-х гг. Можно предположить, что В.А. Зморович и его ученики подошли к тематике, связанной с порядками звездообразности, как раз «со стороны» α-выпуклости. Итак,

Теорема Зморовича-Коробковой-Похилевича. *Порядок звездообразности $\beta(\alpha)$ класса M_α при $\alpha<0$ равен нулю, а в случае $\alpha \geq 0$ задается величиной*

$$\beta(\alpha)=\left\{2^{2/\alpha}\int_0^1\frac{dt}{(1+t^\alpha)^{2/\alpha}}\right\}^{-1}.$$

Очевидно, $M_1=S^0$. Приведенное выражение для $\beta(\alpha)$ позволяет легко подсчитать $\beta(1)=1/2$. Тем самым получается новое доказательство второй оценки *Основной теоремы*. Воистину, она просто неисчерпаема!

[35] «О подклассах регулярных и однолистных функций с фиксированными коэффициентами» (1989) и «Области значений некоторых функционалов на подклассах регулярных и однолистных функций и свойства дуг линий уровня» (1991).

Однако обоснование сформулированной выше теоремы приводить не будем – это еще страниц десять текста с разбором совершенно нового метода. «Жесть!» – как говорит современная молодежь. Ни читатель, ни тем более составитель этого уже не выдержат. Да и вообще, работы В.А. Зморовича нужно изучать специально...

Вернемся ненадолго в конец восьмидесятых и еще немного погуляем по берегу *Черного моря*.

У самого Черного моря…

Вдохновителем и организатором Кубанских школ-конференций по геометрической теории функций был, пожалуй, самый известный ученик В.А. Зморовича – Игорь Петрович Митюк (1928-1995), выдающийся советский, российский математик, основатель Кубанской школы теории функций. Киевлянин – так он называл себя в кругу друзей. Пусть автора этих строк упрекают в банальности, но хочется сказать простыми известными словами: спасибо Игорю Петровичу и его коллегам за наше счастливое научное детство! Думаю, к этим словам присоединятся многие тогдашние аспиранты (и не только), участвовавшие в набегах на виноградники и «дикие» пляжи романтичных и легендарных южных окраин *Скифии* и Тмутаракани...

А с Игорем Петровичем случился у меня один казус. Профессор И.П. Митюк был моим оппонентом на защите кандидатской, в которой, среди прочего, исследовался так называемый «видоизмененный внутренний радиус», возникший за несколько лет до этого «в стенах» нашего казанского семинара. В отношении Игоря Петровича к этому «радиусу» было что-то *гомерическое* – он словно едва сдерживал хохот и всячески «прикалывал несчастного диссертанта»... В чем было дело, «несчастный» понял не сразу и только после защиты. В одном из писем И.П. Митюк порекомендовал ему одну свою статью, для изучения которой потребовались и другие. Так составитель добрался до работы [22], где и был введен тот самый «радиус», только назывался он *обобщенный приведенный модуль* и к концу 80-х стал уже классическим. Статья [22] вышла в 1964 году в *казанском* журнале...

А ведь кто другой мог и диссертацию «зарубить»...

Мне открыл тайну старый капитан,
Что у меня есть каравелла...

«Давно мы дома не были...»
(Вместо заключения)

Слова знаменитой песни вынесены в название: для эпиграфа это слишком большая ответственность. Мало осталось тех, за кем самой *Историей* признано право исполнять эту песню от своего имени...

Читатель, наверное, уже заметил, что эмоциональный ландшафт данной книги подобен Черноморскому побережью Кавказа: с горних высей метаистории XX века мы соскальзываем к золотым пескам и бронзовому загару «дамской науки», которая врачует старые раны. Здесь мы и задерживаемся, откладывая на потом погружение в темные глубины психоанализа...

Шита рита, тита дрита!
Шивандаза, шиванда!
Мы родного Айболита
Не покинем никогда![36]

– часто напевала на лекциях Е.А. Широкова[37], пока выписывала для нас на доске пару каких-нибудь заковыристых формул... Саундтрек! И в чем-то даже провиденциально... Жизнь показала, что мы исповедуем «разные школы», но прямое цитирование О. Генри, в конечном счете, приведет разве лишь к тому, чтобы «успеть добежать до канадской границы»...

Вообще, соотношение мужского и женского начал в любой сфере деятельности, не говоря уже о науке, это предмет отдельного интересного разговора. К «сущностно мужской» области ответственности всегда относились проблемы выбора (ветви) и защиты границ – как в смысле выхода на «другие листы», так и в смежные дисциплины. XX век все изменил и здесь, знаковый фильм «Солдат Джейн» просто увенчал «вершину айсберга». Всем известны имена женщин – математиков, в том числе и в Казанском университете, – успешно занимавшихся *граничными* задачами на *римановых поверхностях.* И выходивших в смежные дисциплины – как, например, в [56].

Пусть новый день обгонит день вчерашний
Своим веселым, радостным трудом![38]

---

[36] Из к/ф «Доктор Айболит» (1938, композитор А.В. Варламов). Уточнено по [80], с. 216-217.
[37] Спросите у нее сами, если не верите!
[38] Василий Лебедев-Кумач, музыка Исаака Дунаевского.

На семинаре по геометрической теории функций в Казанском университете всегда «так получалось» (и подмечалось), что «хрупкие женские руки» первыми «атакуют» самые сложные задачи. В полной мере это относится к работе [55], где впервые в истории данного научного направления были получены условия единственности решения внешней обратной краевой задачи в терминах исходных данных!

А если «в терминах» déjà vu, то с Е.А. Широковой по поводу работы [55] у меня произошел казус. Результаты [55] докладывались на отчетной научной конференции КГУ (по-моему, это был конец 80-х). Для «оживления» ее работы руководитель семинара профессор Л.А. Аксентьев каждому докладчику назначил своего «критика», который должен был выступить с краткой рецензией доклада. Елене Александровне «достался» составитель настоящего пособия...

...Ну, меня и «понесло»! Вот только не туда: вместо того, чтобы отметить несомненные достоинства работы, ее пионерский характер и изобретательность, автор этих строк «просто-таки напросто-таки» обрушился на бедную докладчицу с беспощадной критикой и «бичеванием недостатков». Тут и «громоздкие формулы», и «ограниченность постановки», и «слишком много условий». «Нет того, нет этого». Одному Богу известно, что там еще звучало...

До сих пор сожалею, что не проявил тогда самостоятельность суждений. В результате работа [55], что называется, «зависла» без продолжения, осталась неоцененной. Может быть, именно из-за моего «выступления» Е.А. отправила статью не в «Известия вузов» или «Труды семинара», а в «Конструктивную теорию функций». Вот так, очень часто взаимонепонимание возникает только потому, что сказаны ненужные слова, а нужные слова не прозвучали...

Составитель настоящего пособия выражает надежду на то, что оно хотя бы в какой-то мере искупит ту непродуманную критику более чем двадцатилетней давности... Эстетика широковских лекций по теории однолистности оказалась столь вдохновенной, что привела к написанию данной книги...

……

Вопросы искупления и долга уже возникали в ней. Как показывает опыт послевоенного развития, чтобы изучать наследие различных эпох, иногда приходится работать в перчатках. Вопрос в том, с какого времени они становятся ненужными. И становятся ли...

Как уже отмечалось, название нынешнего, последнего раздела – это строчка (и название) легендарной военной песни.[39] Есть в этой песне и другая строчка – «В Германии, в Германии, в *проклятой* стороне». Довольно быстро «проклятая» стала «далекой», что вызывало впечатляющее возмущение наших фронтовиков... Нет, речь не о возвращении к эмоциональному восприятию Германии первой половины сороковых. Речь идет о том, что *граждане* Советского Союза – прежде всего и именно *люди* – были в 1945-м году лишены самой возможности сказать то, что они думают о войне, о своем руководстве, о своих жертвах и о своем враге. Выставить *свой* счет. Аргуметированно, веско и жестко, как могли бы сделать сейчас...

...Представьте, что Верховный Совет СССР в 1945-м состоял бы из нынешних депутатов, с их искушенностью, умением *говорить* и *выставлять счета*. Представьте, как Жириновский орет на Сталина и Тимошенко: «вы до чего армию довели к сорок первому» – и матом их... Анахронизм, скажете? Сослагательное наклонение? А по-моему, неплохой мысленный эксперимент.

Вынужденное многое замалчивать, сталинское руководство стало «играть» по довоенным «правилам игры». А они просто не распознавали наш «кровавый всплеск» – их «уравнения» его не улавливали. «Целая страна с населением в 27 миллионов человек», стертая с лица земли, стала принудительно «сглаживаться» в умах оставшихся – наверное, «чтобы не нарушать международные договоренности»...

Все, что мог сказать простой человек – «Враги сожгли родную хату».[40] Вот сейчас прочитал в интернете, что эта песня *была запрещена все двадцать послевоенных лет!* В 60-м запрет был фактически взломан – ее исполнил Марк Бернес, а в 65-м окончательно уничтожен – это сделал герой Сталинграда маршал Василий Чуйков. Об *официальной* отмене запрета информации не обнаружено.

Вдумайтесь: в университетах страны изучают теоремы нацистов Бибербаха и Бляшке, а народный Реквием Войны – под запретом!!!

Кто объяснит это солдату, который «три державы покорил»? Кто ему воздаст? Кто скажет ему: теперь *ты решай,* как *мы все* жить будем? Кто спросит его: что мы тебе должны и что тебе должны *они*?

Ответов нет до сих пор...

---

[39] Василий Соловьев-Седой и Алексей Фатьянов. «Давно мы дома не были». 1945 г.
[40] Матвей Блантер и Михаил Исаковский, 1945-1946 гг.

ЛИТЕРАТУРА

Основоположники

1. Marx A. Untersuchungen über schlichte Abbildungen // Mathematische Annalen. – 1932. – Bd. 107. – S. 40-67.

2. Strohhäcker E. Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen // Mathematische Zeitschrift. – 1933. – Bd. 37. – S. 356-380.

Классики

3. Голузин Г.М. О некоторых оценках, относящихся к функциям, совершающим однолистное конформное преобразование круга // Математический сборник. – 1929. – Т. 36. – № 2. – С. 152-172.

4. Голузин Г.М. К теории однолистных конформных преобразований // Математический сборник. – 1935. – Т. 42. – № 2. – С. 169-190.

5. Голузин Г.М. Некоторые оценки коэффициентов однолистных функций // Математический сборник. – 1938. – Т. 3 (45). – № 2. – С. 321-330.

6. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

7. Титчмарш Е. Теория функций / Пер. с англ. В.А. Рохлина. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 508 с.

8. Alexander J.W. *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions* // Ann. of Math., 2nd ser. – 1915. – V. 17. – N. 1. – P. 12-22.

9. Carathéodory C. Sur la representation conforme des polygones convexes // Annales de la Société scientifique de Bruxelles. – 1913. – T. XXXVII. – 2nde partie. – P. 1-10.

10. Carathéodory C. Über die Studysche Rundungsschranke // Math. Ann. – 1919. – Bd. 79. – H. 4. – S. 402.

11. Nevanlinna R. Über die konforme Abbildung von Sterngebieten// Översikt av Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. – 1920-1921. – Bd. LXIII. – Adv. A. – № 6. – 21 s.

12. Peschl E. Über die Krümmung von Niveakurven bei der konformen Abbildung einfachzusammenhängender Gebiete auf das Innere

eines Kreises (Eine Verallgemeinerung eines Satzes von E. Study) // Math. Ann. – 1932. – Bd. 106. – S. 574-594.

13. Rado T. Bemerkung uber die konformen Abbildungen konvexer Gebiete // Math. Ann. – 1930. – Bd. 102. – S. 428-429.

14. Robertson M.S. On the theory of univalent functions // Ann. of Math. – 2nd ser. – 1936. – V. 37. – No 2. – P. 374-408.

15. Rogosinski W. Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten // Math. Zeitschr. – 1923. – Bd. 17. – S. 260-276.

16. Study E. Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. – H.2: Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche (unter Mitwirkung von W. Blaschke). – Leipzig und Berlin: B.G. Teubner, 1913. – vi+142 s.

Современники

17. Аксентьев Л.А., Авхадиев Ф.Г. Об одном классе однолистных функций // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 10. – С. 12-20.

18. Зморович В.А., Коробкова И.К. О порядке звездности некоторых подклассов α-выпуклых функций при $\alpha \geq 0$ // Укр. мат. журн. – 1978. – Т. 30. – № 4. – С. 536-539.

19. Зморович В.А., Похилевич В.А. Об α-выпуклых функциях при $\alpha < 0$ // Укр. мат. журн. – 1979. – Т. 31. – № 4. – С. 431-433.

20. Кузьмина Г.В. Памяти Геннадия Михайловича Голузина (1906-1952) // Записки научных семинаров ПОМИ. – 1997. – С. 5-10.

21. Митропольский Ю.А., Тамразов П.М., Гудзь Л.А. Исследования В.А. Зморовича в области геометрической теории функций // Укр. мат. журн. – 1979. – Т. 31. – № 6. – С. 756-760.

22. Митюк И.П. Обобщенный приведенный модуль и некоторые его применения // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 2. – С. 110-119.

23. Duren P.L. Univalent functions. – New York: Springer-Verlag, 1983. – xiv+383 p.

24. Jack I.S. Functions starlike and convex of order α // J. London Math. Soc. – 2nd ser. – 1971. – V. 3. – No 3. – P. 469-474.

25. Ruscheweyh St., Sheil-Small T. Hadamard products of schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture // Comment. Math. Helv. – 1973. – V. 48. – P. 119-136.

26. Sheil-Small T. On convex univalent functions // J. London Math. Soc. – 2nd ser. – 1969. – V. 1. – No 3. – P. 483-492.

27. Schober G. Univalent functions – selected topics // Lect. Notes Math. – 1975. – V. 478. – v+200 p.

28. Suffridge T.J. Some remarks on convex maps of the unit disk / Duke Math. Journal. – 1970. – V. 37. – No 4. – P. 775-777.

Учебники по ТФКП и однолистным функциям

29. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. – Томск: Томский государственный университет, 2001. – 220 с.

30. Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высш. шк., 1984. – 192 с.

31. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного: Учебник для вузов. – 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

32. Валирон Ж. Аналитические функции / Пер. с фр. В.С. Виденского. Под ред. С.Я. Хавинсона и А.Т. Цветкова. – М.: Гостехиздат, 1957. – 236 с.

33. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1965. – 424 с. с илл.

34. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – 3-е изд., исправл. – М.: Наука, 1965. – 716 с. с илл.

35. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 704 с. с илл.

36. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520 с. (Сер.: Математика в техническом университете; Вып. X.)[41]

37. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. – 3-е изд. – Ч. I. / Пер. с нем. Д.А. Райкова. – М.: Наука, 1978. – 392 с. с илл.

38. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – 10-е изд. – М.: Физматгиз, 1960. – 444 с. с илл.

39. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 304 с. с илл.

[41] http://alexandr4784.narod.ru/b10.html

40. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982. – 488 с.

41. Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного. Многозначные аналитические функции. – М.: МФТИ. – 68 с. (http://window.edu.ru/resource/125/39125/files/mipt072.pdf)

42. Форстер О. Римановы поверхности / Пер. с нем. Е.М. Чирки. – М.: Мир, 1980. – 248 с. с илл.

43. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с. с илл.

44. Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1992. – x+300 p.

45. Valiron G. Lectures on the general theory of integral functions / Transl. by E.F. Collingwood with a preface by W.H. Young. – N.Y.: Chelsea Pub. Co., 1949. – xii+208 p.

46. Whyburn G.T. Analytic topology. – N.Y.: AMS, 1942. – x+278 p. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., V. 28).

Вспомогательные источники.

47. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30. – Вып. 4. – С. 3-60.

48. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М. Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // «Математический анализ». Т. 25 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – М.: ВИНИТИ, 1987. – С. 3-120.

49. Альфорс Л., Берс Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения / Пер. с англ. В.А. Зорича и А.А. Кириллова. Под ред. Б.В. Шабата. – М.: Изд. иностр. лит., 1961. – 180 с.

50. Базилевич И.Е., Корицкий Г.В. О некоторых свойствах однолистных конформных отображений // Мат. сборник. – 1953. – Т. 32 (74). – №1. – С. 209-218.

51. Коша А. Вариационное исчисление / Пер. с венгер. Д. Валовича; Под ред. проф. Ш.А. Алимова. – М.: "Высшая школа", 1983. – 279 с., ил.

52. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / Пер. с нем. В.А. Залгаллера и Т.В. Хачатуровой. Под ред. В.А. Залгаллера. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

53. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1988. – 496 с.

54. Прохоров Д.В. Об областях значений систем функционалов и интегрировании однолистных функций // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 10. – С. 33-39.

55. Широкова Е.А. Получение достаточных условий единственности решения внешней обратной краевой задачи в виде ограничений на исходные данные / В сб.: Конструктивная теория функций и функциональный анализ. – Казань: Изд-во КГУ, 1990. – С. 95-102.

56. Широкова Е.А. Применение краевых задач для аналитических функций в механике сплошных сред: Методическое пособие. – Казань: Казанский государственный университет, 2006. – 100 с.

57. Энгелькинг Р. Общая топология / Пер. с англ. М.Я. Антоновского и А.В. Архангельского. – М.: «Мир», 1986. – 752 с.

58. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Пер. с англ. М.Г. Элуашвили; Под ред. В.М. Алексеева. – М.: "Мир", 1974. – 488 с., ил.

59. Campbell D.M. A survey of properties of the convex convolution of univalent functions // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – V. 5. – N. 4. – P. 475-492.

60. Finch S. Radii in geometric function theory // Article edition: 2004.01.13 (http://www.people.fas.harvard.edu/~sfinch/csolve/gft.pdf)

61. Hille E. Remarks on a paper by Zeev Nehari // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55. – P. 552-553.

62. Lygeros N. Etude de l'article de C. Carathéodory "Sur la representation conforme des polygones convexes" // http://www.lygeros. org/2163-fr.php

63. Miller S.S., Mocanu P., Reade M.O. All α-convex functions are univalent and starlike // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 37. – No 2. – P. 553-554.

64. Minda D. The Schwarzian derivative and univalence criteria // Contemporary Math. – 1985. – V. 38. – P. 43-52.

65. Pommerenke Ch. Linear-invariante Familien analytischer Funktionen, I // Math. Ann. – 1964. – Bd. 155. – S. 108-154.

66. Pommerenke Ch. On close-to-convex analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 114. No 1. – P. 176-186.

67. Prokhorov D.V., Szynal J. On the radius of univalence for the integral of $f'(z)^{\alpha}$ // Ann. UMCS. – 1979. – A 33. – P. 157-163.

68. Robinson R.M. Univalent majorants // Trans. Amer. Math. Soc. – 1947. – V. 61. – No 1. – P. 1-35.

69. Schappacher N., Scholz E. How to Write about Teichmüller. Letter to the Editor // Math. Intelligencer. – 1996. – V. 18. – N. 1. – P. 5-6.

Группы художественной и технической поддержки.

70. Атлас мира. Западная Европа / Под ред. М.И. Свинаренко, С.И. Сергеева, Ю.И. Иванова. – М.: ГУГК, 1977. – 95 с.

71. Бердяев Н.А. Русская идея. Основные проблемы русской мысли XIX века и начала XX века. – В кн.: Бердяев Н.А. Русская идея / Сост., вступ. ст. и примеч. М.А. Блюменкранца; Худож.-оформитель Б.Ф. Бублик. – Харьков: Фолио; М.: ООО «Изд-во АСТ», 2002. – 624 с. – (Вершины человеческой мысли). – С. 11-248.

72. Блок А.А. Скифы. – В кн.: Блок А.А. Стихотворения и поэмы / Сост. и примеч. Вл. Орлова. – М.: Худож. лит., 1983. – 206 с., ил. (Классики и современники. Поэтическая биб-ка). – С. 178-180.

73. Гарсиа Маркес Г. Сто лет одиночества: Роман. Повести и рассказы / Предисл. Л. Осповата. Пер. с исп. Под ред. Л. Борисевича, И. Заславской. – М.: Прогресс, 1979. – 588 с. (Серия «Мастера современной прозы». Колумбия).

74. Люстерник Л.А. Молодость Московской математической школы. – Ч. 3 // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22. – Вып. 4. – С. 147-185.

75. О. Генри. Избранные произведения в двух томах / Пер. с англ. под ред. М.Ф. Лорие. – Т. 2. – М.: Гослитиздат, 1954. – 584 с.

76. По Э. Похищенное письмо / Пер. с англ. И. Гуровой. – В кн. По Э. «Золотой жук» – Казань: Таткнигоиздат, 1993. – С. 269-288.

77. Уайлдер Т. Теофил Норт. Роман / Пер. с англ. В. Голышева // «Иностранная литература». – 1976. – № 6. – С. 76-123, № 7. – С. 141-216, № 8. – С. 51-147.

78. Фуко М. Воля к истине: по ту сторону знания, власти и сексуальности. Работы разных лет / Сост., пер. с фр., коммент. и послесл. С. Табачниковой. – М.: Касталь, 1996. – 448 с.

79. Хаксли О. О дивный новый мир: Роман. – В кн.: Е. Замятин. Мы: Роман. – М.: Худож. лит., 1989. – С. 163-350.

80. Чуковский К.И. Доктор Айболит (по Гью Лофтингу). – В кн. Чуковский К. Приключения Бибигона: Стихи, сказки, загадки: Для дошк. и мл. шк. возраста / Худож. Н. Сустова. – Минск: Юнацтва, 1991. – С. 166-240. (Серия «Золотой ключик»).

81. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию / Пер. с нем. А.П. Широкова. Под ред. А.П. Нордена. – М.: Гостехиздат, 1957. – 223 с. с черт.

Фильмы, участвовавшие в формировании атмосферы книги

"The Great Waltz" 1938
"Die Frau meiner Träume" 1944
«Люди и звери» 1962
«Игра без правил» 1965
«Друзья и годы» 1965
"Stawka większa niż życie" 1965-1968
"Sellö a pecsétgyürün" 1966
«Королевская регата» 1966
«Майор Вихрь» 1967
«Щит и меч» 1968
«Мертвый сезон» 1968
«Семь стариков и одна девушка» 1968
«Рокировка в длинную сторону» 1969
«Посол Советского Союза» 1969
«На пути в Берлин» 1969
"Cabaret" 1971
«Последнее дело комиссара Берлаха» 1972
«Бой после победы» 1972
«Семнадцать мгновений весны» 1973
«Открытая книга» 1973
«Помни имя свое» 1974
«Формула памяти» 1982
«Европейская история» 1984
«Мой друг Иван Лапшин» 1984
«Зеркало для героя» 1987

Содержание

Предисловие 3

Введение 4
А. Теорема Руше и локальная однолистность 4
Б. Принцип максимума и лемма Шварца 15
В. «Сто лет одиночества» 20
Г. Классы S, S^0 и S^* 26
Д. Теорема Маркса-Штрохеккера 32

I. Эрих Штрохеккер: Айзлинген, 1933 39

II. Арнольд Маркс: Шпецгарт близ Юберлингена, 1932 49
Доказательство теоремы B 53
Доказательство теоремы C 59

III. Геннадий Голузин: Ленинград, 1929 – 1935 – 1938 66
3.1. О некоторых оценках, относящихся к функциям, совершающим однолистное конформное преобразование круга 67
3.2. К теории однолистных конформных преобразований 71
3.3. Некоторые оценки коэффициентов однолистных функций 74
3.4. В это время во внешности единичного круга... 77
3.5. Классы Σ, Σ^* и Σ^0 80
3.6. Теорема B методом Г.М. Голузина 82
3.7. Последний вальс 85

IV. Теренс Шейл-Смолл: Йоркский университет, 1969 89

V. Тед Дж. Саффридж: университет Кентукки, 1970 95

VI. Малькольм И.С. Робертсон: Принстонский университет, 1936 97
Выпуклость по М. Робертсону 100
Порядки выпуклости и звездообразности 104

VII. Питер Л. Дюрен: Мичиганский университет, 1983.
Некоторые итоги 106
7.1. Доказательство *Теоремы Маркса-Штрохеккера* 106
7.2. Структурные неравенства для звездообразных и выпуклых функций 108
7.3. «Трехточечный консеквент» выпуклости 115
7.4. Подведение итогов 117

VIII. Лемма Жака: разгадка тайны Клуни 120

Эпилог. Валентин Зморович: Киевский политех, 70-е 128

«Давно мы дома не были...» *(Вместо заключения)* 131

Литература 134

Содержание 141