

УДК 532.5:621.694

Багоутдинова А.Г. – кандидат технических наук

E-mail: bagoutdinova@rambler.ru

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Адрес организации: 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Вачагина Е.К. – доктор технических наук

E-mail: vachaginae@mail.ru

Казанский Научный Центр Российской Академии Наук

Адрес организации: 420111, Россия, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/3

Золотонос Я.Д. – доктор технических наук, профессор

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Казанский государственный архитектурно–строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Математическое моделирование поверхностей теплообмена пружинно-витых каналов

Аннотация

Постановка задачи. При разработке теплообменного оборудования используется достаточно широкий спектр методов интенсификации теплообмена. Одним из перспективных является метод, основанный на идее воздействия на структуру потока через искусственно созданные неоднородности давления посредством специального профилирования поверхности.

В связи с этим представляет практический интерес серия пружинно-витых каналов, обладающих высокоэнергетической эффективностью, позволяющие модернизировать и реконструировать существующий парк теплообменной аппаратуры без существенных капитальных затрат.

Результаты. В работе предложен общий метод построения теплообменных поверхностей каналов различных конфигураций. Этот метод позволяет описать и построить поверхности для произвольных образующих и направляющих кривых. Варьируя параметры, входящие в математическую модель, можно исследовать и в дальнейшем оптимизировать внутреннюю геометрию каналов.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной области состоит в том, что предлагаемые теплообменные элементы устанавливаются в инновационных теплообменных аппаратах, монтируемых в индивидуальных тепловых пунктах. Кроме того, предложенные математические модели, описывающие поверхности пружинно-витых каналов, могут быть использованы не только при разработке современной теплообменной аппаратуры, но и в строительстве при проектировании различных конструкций, а также при проектировании соединительных поверхностей участков трубопроводов разного диаметра.

Ключевые слова: моделирование, поверхность, гидромеханика, теплообменные аппараты, пружинно-витой канал.

Практически любое производство связано с процессами выделения или поглощения энергии. Поэтому от вида и конструкции теплообменников зависят производительность и работоспособность оборудования в самых различных отраслях промышленности: металлургической, химической, пищевой и других. В настоящее время в качестве теплообменного оборудования в основном используются теплообменные аппараты с гладкотрубными теплообменными элементами, отличающиеся значительными габаритами, низкими значениями коэффициентов теплопередачи, высокими показателями гидравлических потерь и удельной металлоемкости, а также существенным уровнем морального и физического износа вследствие длительных сроков их эксплуатации [1, 2].

Замена устаревшего оборудования, в частности кожухотрубных подогревателей, является на сегодняшний день назревшей проблемой. Одним из наиболее простых и эффективных путей интенсификации теплообмена является изменение формы

теплообменной поверхности и режима движения теплоносителей. В этом плане представляет интерес серия пружинно-витых каналов [3,4], на основе которых появляется возможность создания нового класса энергосберегающего высокоэффективного теплообменного оборудования, а также модернизация и реконструкция существующего парка теплообменной аппаратуры без существенных капитальных затрат.

Поверхность предложенных теплообменных элементов выполнена из проволоки в виде тугой пружины, витки которой жестко скреплены [4,5].

Рассмотрим общий метод построения поверхностей, образованных движением непрерывной замкнутой кривой ρ вдоль некоторой криволинейной направляющей γ [6].

Пусть $\gamma: \vec{r} = \vec{r}(t)$ – направляющая кривая, t – некоторый параметр кривой. Представим радиус-вектор точки поверхности в виде суммы:

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}(t) + \vec{\rho}(t, s),$$

где s – произвольный параметр в некоторой плоскости кривой γ ;

$\vec{\rho}(t, s) = \rho_1(t, s)\vec{e}_1(t) + \rho_2(t, s)\vec{e}_2(t)$ – радиус-вектор точки границы поперечного сечения в выбранной плоскости, в общем случае, зависящий от двух параметров;

$\vec{e}_1(t)$ и $\vec{e}_2(t)$ – единичные векторы, лежащие в некоторой плоскости, пересекающей направляющую кривую в каждой точке, соответствующей параметру t .

Тогда

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}(t) + \rho_1(t, s)\vec{e}_1(t) + \rho_2(t, s)\vec{e}_2(t). \quad (1)$$

В качестве плоскости, которая пересекает направляющую кривую наиболее удобно использовать плоскость нормальную к этой кривой в каждой точке, определяемой параметром t , а в качестве ортов $\vec{e}_1(t)$ и $\vec{e}_2(t)$ наиболее удобно выбирать вектор главной нормали $\vec{v}(t)$ и вектор бинормали $\vec{\beta}(t)$ направляющей кривой в точке, соответствующей значению параметра t . В этом случае радиус-вектор точки поверхности представляется в виде суммы $\vec{r}(t, s) = \vec{r}(t) + \vec{\rho}(t, s)$, где s – произвольный параметр в нормальной плоскости кривой γ ; $\vec{\rho}(t, s) = \rho_v(t, s)\vec{v}(t) + \rho_\beta(t, s)\vec{\beta}(t)$ – радиус-вектор точки границы поперечного сечения в нормальной плоскости.

Тогда

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}(t) + \rho_v(t, s)\vec{v}(t) + \rho_\beta(t, s)\vec{\beta}(t). \quad (2)$$

Наиболее часто в качестве параметра s выбирается полярный угол φ в нормальной плоскости кривой γ , отсчитываемый от главной нормали по направлению к бинормали; $\vec{\rho}(t, \varphi)$ – соответствующий «полярный радиус» (рис.1).

Тогда

$$\vec{r}(t, \varphi) = \vec{r}(t) + \rho(t, \varphi)\cos\varphi\vec{v}(t) + \rho(t, \varphi)\sin\varphi\vec{\beta}(t), \quad (3)$$

где $\rho(t, \varphi)$ – переменный, в общем случае по двум параметрам, радиус границы поперечного сечения канала.

Единичные векторы касательной $\vec{\tau}$, нормали \vec{v} и бинормали $\vec{\beta}$ образуют подвижный ортогональный базис, перемещающийся вдоль кривой γ , и вычисляются по формулам:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{\tau}/dt}{|d\vec{\tau}/dt|}, \quad \vec{\beta} = [\vec{\tau} \times \vec{v}], \quad (4)$$

или по формулам:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}, \quad \vec{\beta} = \frac{[d\vec{r}/dt \times d^2\vec{r}/dt^2]}{|[d\vec{r}/dt \times d^2\vec{r}/dt^2]|}, \quad \vec{v} = [\vec{\beta} \times \vec{\tau}]. \quad (5)$$

$$\vec{\beta} = \frac{1}{m_{\beta}(t)} \begin{pmatrix} b(M_2 \sin t - 2btg\psi \cos t) \\ -b(M_1 \cos t + 2btg\psi \sin t) \\ M_1M_2 + 2b^2tg^2\psi - b(M_1 - M_2) \cos t \sin t \end{pmatrix},$$

где

$$m_{\tau}^2(t) = (btg\psi \cos t - M_1 \sin t)^2 + (btg\psi \sin t + M_2 \cos t)^2 + b^2, \\ m_{\beta}^2(t) = b^2(M_2 \sin t - 2btg\psi \cos t)^2 + b^2(M_1 \cos t + 2btg\psi \sin t)^2 + \\ + (M_1M_2 + 2b^2tg^2\psi - b(M_1 - M_2) \cos t \sin t)^2.$$

2. Винтовая линия, лежащая на круговом конусе:

$$\gamma: x = (r_0 + btg\psi) \cos t, y = (r_0 + btg\psi) \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq \pi n.$$

Тогда, вводя обозначения $M_0(t) = (r_0 + btg\psi)$, получим:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} M_0(t) \cos t \\ M_0(t) \sin t \\ bt \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi n; \quad \vec{\tau} = \frac{1}{m_{\tau}(t)} \begin{pmatrix} -M_0(t) \sin t + btg\psi \cos t \\ M_0(t) \cos t + btg\psi \sin t \\ b \end{pmatrix}; \\ \vec{v} = \frac{1}{m_{\tau}(t)m_{\beta}(t)} \times \begin{pmatrix} -btg\psi(M_0^2 + 2b^2(1 + tg^2\psi)) \sin t - M_0(M_0^2 + b^2(1 + 2tg^2\psi)) \cos t \\ btg\psi(M_0^2 + 2b^2(1 + tg^2\psi)) \cos t - M_0(M_0^2 + b^2(1 + 2tg^2\psi)) \sin t \\ -b^2M_0tg\psi \end{pmatrix}; \quad (6) \\ \vec{\beta} = \frac{1}{m_{\beta}(t)} \begin{pmatrix} b(M_0 \sin t - 2btg\psi \cos t) \\ -b(M_0 \cos t + 2btg\psi \sin t) \\ M_0^2 + 2b^2tg^2\psi \end{pmatrix},$$

где

$$m_{\tau}^2(t) = b^2tg^2\psi + M_0^2 + b^2, \quad m_{\beta}^2(t) = b^2M_0^2 + 4b^4tg^2\psi + (M_0^2 + 2b^2tg^2\psi)^2.$$

3. Винтовая линия, лежащая на эллиптическом цилиндре:

$$\gamma: x = r_1 \cos t, y = r_2 \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq \pi n \quad \text{или} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1 \cos t \\ r_2 \sin t \\ bt \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi n.$$

$$d\vec{r}(t)/dt = \begin{pmatrix} -r_1 \sin t \\ r_2 \cos t \\ b \end{pmatrix}; \quad d^2\vec{r}(t)/dt^2 = \begin{pmatrix} -r_1 \cos t \\ -r_2 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [d\vec{r}/dt \times d^2\vec{r}/dt^2] = \begin{pmatrix} r_2b \sin t \\ -r_1b \cos t \\ r_1r_2 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы касательной, нормали и бинормали согласно (5) можно записать в виде:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{m_{\tau}(t)} \begin{pmatrix} -r_1 \sin t \\ r_2 \cos t \\ b \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \frac{1}{m_{\tau}(t)m_{\beta}(t)} \begin{pmatrix} -r_1(r_2^2 + b^2) \cos t \\ -r_2(r_1^2 + b^2) \sin t \\ (r_2^2 - r_1^2)b \sin t \cos t \end{pmatrix}; \quad \vec{\beta} = \frac{1}{m_{\beta}(t)} \begin{pmatrix} r_2b \sin t \\ -r_1b \cos t \\ r_1r_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$m_{\tau}^2(t) = r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t + b^2, \quad m_{\beta}^2(t) = r_2^2b^2 \sin^2 t + r_1^2b^2 \cos^2 t + r_1^2r_2^2.$$

4. Винтовая линия, лежащая на круговом цилиндре:

$$\gamma: x = r_0 \cos t, y = r_0 \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq \pi n \quad \text{или} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_0 \cos t \\ r_0 \sin t \\ bt \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi n.$$

Тогда

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -r_0 \sin t \\ r_0 \cos t \\ b \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ r_0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В качестве образующих кривых, расположенных в нормальной плоскости рассмотрим эллипс и окружность.

Уравнение эллипса с полуосями c и d можно записать в форме, соответствующей уравнению (1):

$$\rho: \rho_v(t, s) = c \cos s, \rho_\beta(t, s) = d \sin s. \quad (9)$$

Тогда

$$\rho: \vec{\rho}(t, s) = c \cos s \vec{v}(t) + d \sin s \vec{\beta}(t). \quad (10)$$

Уравнение эллипса с полуосями c и d можно записать в форме, соответствующей уравнению (2):

$$\rho: \rho(t, \varphi) = \frac{cd}{\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Тогда

$$\rho: \vec{\rho}(t, \varphi) = \frac{cd}{\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} (\cos \varphi \vec{v}(t) + \sin \varphi \vec{\beta}(t)). \quad (11)$$

Уравнение круга с радиусом c удобнее записать в форме, соответствующей уравнению (2):

$$\rho: \rho(t, \varphi) = c.$$

Тогда

$$\vec{\rho}(t, \varphi) = c (\cos \varphi \vec{v}(t) + \sin \varphi \vec{\beta}(t)). \quad (12)$$

Запишем уравнение поверхности прямолинейного пружинно-витого канала, образованного путем намотки проволоки эллиптического и круглого сечений на эллиптический цилиндр.

В качестве направляющей кривой выберем винтовую линию, расположенную на поверхности эллиптического цилиндра. В качестве образующей – эллипс с полуосями c и d .

При использовании уравнения эллипса в виде (11) получим параметрическое уравнение заматающей поверхности в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_1 \cos t \\ r_2 \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{cd \cos \varphi}{m_\tau(t) m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} -r_1(r_2^2 + b^2) \cos t \\ -r_2(r_1^2 + b^2) \sin t \\ (r_2^2 - r_1^2) b \sin t \cos t \end{pmatrix} + \frac{cd \sin \varphi}{m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} r_2 b \sin t \\ -r_1 b \cos t \\ r_1 r_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

При использовании уравнения эллипса в виде (10) получим параметрическое уравнение заматающей поверхности в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_1 \cos t \\ r_2 \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{c \cos s}{m_\tau(t) m_\beta(t)} \begin{pmatrix} -r_1(r_2^2 + b^2) \cos t \\ -r_2(r_1^2 + b^2) \sin t \\ (r_2^2 - r_1^2) b \sin t \cos t \end{pmatrix} + \frac{d \sin s}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} r_2 b \sin t \\ -r_1 b \cos t \\ r_1 r_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $b \approx d / \pi$, что обеспечивает плотное прилегание витков проволоки.

При использовании круглой проволоки оба уравнения (13) и (14) запишутся как:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_1 \cos t \\ r_2 \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{c \cos \varphi}{m_r(t) m_\beta(t)} \begin{pmatrix} -r_1 (r_2^2 + b^2) \cos t \\ -r_2 (r_1^2 + b^2) \sin t \\ (r_2^2 - r_1^2) b \sin t \cos t \end{pmatrix} + \frac{c \sin \varphi}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} r_2 b \sin t \\ -r_1 b \cos t \\ r_1 r_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_1 \cos t \\ r_2 \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{c \cos s}{m_r(t) m_\beta(t)} \begin{pmatrix} -r_1 (r_2^2 + b^2) \cos t \\ -r_2 (r_1^2 + b^2) \sin t \\ (r_2^2 - r_1^2) b \sin t \cos t \end{pmatrix} + \frac{c \sin s}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} r_2 b \sin t \\ -r_1 b \cos t \\ r_1 r_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $b \approx c / \pi$, что обеспечивает плотное прилегание витков проволоки.

На рис. 2 представлен пружинно-витой канал, образованный путем намотки проволоки круглого сечения на эллиптический цилиндр.

Запишем уравнение поверхности пружинно-витого канала, образованного путем намотки проволоки эллиптического и круглого сечений на круговой цилиндр [7].

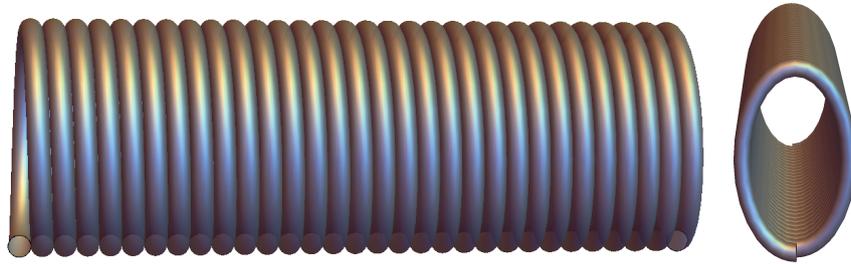


Рис. 2. Пружинно-витой канал, образованный путем намотки проволоки круглого сечения на эллиптический цилиндр

Очевидно, что параметрические уравнения поверхности пружинно-витого канала, образованного путем намотки проволоки эллиптического сечения на круговой цилиндр получаются из формул (13) и (14) при $r_1 = r_0, r_2 = r_0$.

При использовании уравнения (11) получим параметрическое уравнение заметающей поверхности в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos t \\ r_0 \sin t \\ bt \end{pmatrix} - \frac{cd \cos \varphi}{\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{cd \sin \varphi}{\sqrt{r_0^2 + b^2} \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

При использовании уравнения (12) получим параметрическое уравнение заметающей поверхности в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos t \\ r_0 \sin t \\ bt \end{pmatrix} - c \cos s \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d \sin s}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ r_0 \end{pmatrix}, \text{ где } b \approx d / \pi.$$

При использовании круглой проволоки уравнения (13) и (14) примут вид:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos t \\ r_0 \sin t \\ bt \end{pmatrix} - c \cos \varphi \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c \sin \varphi}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ r_0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos t \\ r_0 \sin t \\ bt \end{pmatrix} - c \cos s \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c \sin s}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ r_0 \end{pmatrix}, \text{ где } b \approx c / \pi.$$

На рис. 3 представлен пружинно-витой канал, образованный путем намотки проволоки эллиптического сечения на круговой цилиндр.

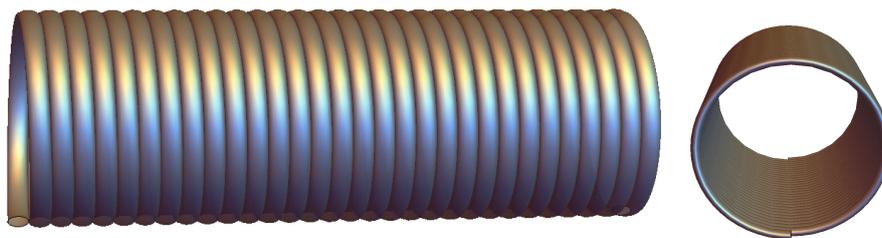


Рис. 3. Пружинно-витой канал, образованный путем намотки проволоки эллиптического сечения на круговой цилиндр

Запишем уравнение поверхности пружинно-витого канала, образованного путем намотки проволоки эллиптического и круглого сечения на эллиптический конус.

В качестве направляющей кривой выберем винтовую линию, расположенную на поверхности эллиптического конуса. В качестве образующей – эллипс с полуосями c и d .

При использовании уравнения (11) получим параметрическое уравнение замотающей поверхности в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M_1(t) \cos t \\ M_2(t) \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{cd \cos \varphi}{m_\tau(t) m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -btg\psi (M_1 M_2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \sin t + b(M_1 - M_2) M_2 tg\psi \cos^2 t \sin t + \\ -(M_1 M_2^2 + b^2 (M_1 + 2M_2 tg^2 \psi)) \cos t + b^2 (M_1 - M_2) tg^2 \psi \cos t \sin^2 t \\ btg\psi (M_1 M_2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \cos t - b^2 (M_1 - M_2) tg^2 \psi \cos^2 t \sin t + \\ -(M_1^2 M_2 + b^2 (M_2 + 2M_1 tg^2 \psi)) \sin t + bM_1 (M_1 - M_2) tg\psi \cos t \sin^2 t \\ 0, 5b (3b (M_1 - M_2) tg\psi \cos 2t - (M_1 + M_2) (btg\psi + (M_1 - M_2) \sin 2t)) \end{pmatrix} + \quad (16)$$

$$+ \frac{cd \sin \varphi}{m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} b(M_2 \sin t - 2btg\psi \cos t) \\ -b(M_1 \cos t + 2btg\psi \sin t) \\ M_1 M_2 + 2b^2 tg^2 \psi - b(M_1 - M_2) \cos t \sin t \end{pmatrix},$$

где $b \approx cd / (\sqrt{c^2 + d^2} tg\psi \pi)$, что обеспечивает плотное прилегание витков проволоки.

При использовании уравнения (12) получим параметрическое уравнение замотающей поверхности в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M_1(t) \cos t \\ M_2(t) \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{c \cos s}{m_\tau(t) m_\beta(t)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -btg\psi (M_1 M_2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \sin t + b(M_1 - M_2) M_2 tg\psi \cos^2 t \sin t + \\ -(M_1 M_2^2 + b^2 (M_1 + 2M_2 tg^2 \psi)) \cos t + b^2 (M_1 - M_2) tg^2 \psi \cos t \sin^2 t \\ btg\psi (M_1 M_2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \cos t - b^2 (M_1 - M_2) tg^2 \psi \cos^2 t \sin t + \\ -(M_1^2 M_2 + b^2 (M_2 + 2M_1 tg^2 \psi)) \sin t + bM_1 (M_1 - M_2) tg\psi \cos t \sin^2 t \\ 0, 5b (3b (M_1 - M_2) tg\psi \cos 2t - (M_1 + M_2) (btg\psi + (M_1 - M_2) \sin 2t)) \end{pmatrix} + \quad (17)$$

$$+ \frac{d \sin s}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} b(M_2 \sin t - 2btg\psi \cos t) \\ -b(M_1 \cos t + 2btg\psi \sin t) \\ M_1M_2 + 2b^2tg^2\psi - b(M_1 - M_2) \cos t \sin t \end{pmatrix}.$$

При использовании круглой проволоки уравнения (16) и (17) примут вид:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M_1(t) \cos t \\ M_2(t) \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{c \sin \varphi}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} b(M_2 \sin t - 2btg\psi \cos t) \\ -b(M_1 \cos t + 2btg\psi \sin t) \\ M_1M_2 + 2b^2tg^2\psi - b(M_1 - M_2) \cos t \sin t \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{c \cos \varphi}{m_\tau(t)m_\beta(t)} \times \begin{pmatrix} -btg\psi(M_1M_2 + 2b^2(1 + tg^2\psi)) \sin t + b(M_1 - M_2)M_2tg\psi \cos^2 t \sin t + \\ -(M_1M_2^2 + b^2(M_1 + 2M_2tg^2\psi)) \cos t + b^2(M_1 - M_2)tg^2\psi \cos t \sin^2 t \\ btg\psi(M_1M_2 + 2b^2(1 + tg^2\psi)) \cos t - b^2(M_1 - M_2)tg^2\psi \cos^2 t \sin t + \\ -(M_1^2M_2 + b^2(M_2 + 2M_1tg^2\psi)) \sin t + bM_1(M_1 - M_2)tg\psi \cos t \sin^2 t \\ 0,5b(3b(M_1 - M_2)tg\psi \cos 2t - (M_1 + M_2)(btg\psi + (M_1 - M_2)\sin 2t)) \end{pmatrix},$$

где $b \approx c / \left(\sqrt{1 + tg^2\psi} \right)$, что обеспечивает плотное прилегание витков проволоки.

На рис. 4 представлен пружинно-витой канал, образованный путем намотки проволоки эллиптического сечения на эллиптический конус.

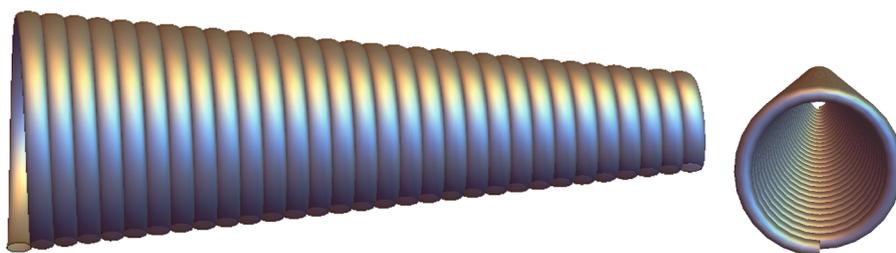


Рис. 4. Пружинно-витой канал, образованный путем намотки проволоки эллиптического сечения на эллиптический конус

Запишем уравнение поверхности пружинно-витого канала типа «конфузор-диффузор», образованного путем намотки проволоки эллиптического и круглого сечения на круговой конус.

В качестве направляющей кривой выберем винтовую линию, расположенную на поверхности кругового конуса. В качестве образующей – эллипс с полуосями c и d .

Тогда при использовании уравнения эллипса (11) получим параметрическое уравнение замотающей поверхности в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M_0(t) \cos t \\ M_0(t) \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{cd \cos \varphi}{m_\tau(t)m_\beta(t)\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \times$$

$$\begin{pmatrix} -btg\psi(M_0^2 + 2b^2(1 + tg^2\psi)) \sin t - M_0(M_0^2 + b^2(1 + 2tg^2\psi)) \cos t \\ btg\psi(M_0^2 + 2b^2(1 + tg^2\psi)) \cos t - M_0(M_0^2 + b^2(1 + 2tg^2\psi)) \sin t \\ -b^2M_0tg\psi \end{pmatrix} + \quad (18)$$

$$+ \frac{cd \sin \varphi}{m_\beta(t)\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} b(M_0 \sin t - 2btg\psi \cos t) \\ -b(M_0 \cos t + 2btg\psi \sin t) \\ M_0^2 + 2b^2tg^2\psi \end{pmatrix}.$$

При использовании уравнения (12) получим уравнение в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M_1(t) \cos t \\ M_2(t) \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{d \sin s}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} b(M_0 \sin t - 2btg \psi \cos t) \\ -b(M_0 \cos t + 2btg \psi \sin t) \\ M_0^2 + 2b^2 tg^2 \psi \end{pmatrix} + \frac{c \cos s}{m_\tau(t) m_\beta(t)} \times \begin{pmatrix} -btg \psi (M_0^2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \sin t - M_0 (M_0^2 + b^2 (1 + 2tg^2 \psi)) \cos t \\ btg \psi (M_0^2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \cos t - M_0 (M_0^2 + b^2 (1 + 2tg^2 \psi)) \sin t \\ -b^2 M_0 tg \psi \end{pmatrix}. \quad (19)$$

При использовании круглой проволоки уравнения (18) и (19) примут вид:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M_0(t) \cos t \\ M_0(t) \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{c \sin \varphi}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} b(M_0 \sin t - 2btg \psi \cos t) \\ -b(M_0 \cos t + 2btg \psi \sin t) \\ M_0^2 + 2b^2 tg^2 \psi \end{pmatrix} + \frac{c \cos \varphi}{m_\tau(t) m_\beta(t)} \times \begin{pmatrix} -btg \psi (M_0^2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \sin t - M_0 (M_0^2 + b^2 (1 + 2tg^2 \psi)) \cos t \\ btg \psi (M_0^2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \cos t - M_0 (M_0^2 + b^2 (1 + 2tg^2 \psi)) \sin t \\ -b^2 M_0 tg \psi \end{pmatrix}. \quad (20)$$

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M_0(t) \cos t \\ M_0(t) \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{c \sin s}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} b(M_0 \sin t - 2btg \psi \cos t) \\ -b(M_0 \cos t + 2btg \psi \sin t) \\ M_0^2 + 2b^2 tg^2 \psi \end{pmatrix} + \frac{c \cos s}{m_\tau(t) m_\beta(t)} \times \begin{pmatrix} -btg \psi (M_0^2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \sin t - M_0 (M_0^2 + b^2 (1 + 2tg^2 \psi)) \cos t \\ btg \psi (M_0^2 + 2b^2 (1 + tg^2 \psi)) \cos t - M_0 (M_0^2 + b^2 (1 + 2tg^2 \psi)) \sin t \\ -b^2 M_0 tg \psi \end{pmatrix}. \quad (21)$$

На рис. 5 представлен пружинно-витой канал, образованный путем намотки проволоки круглого сечения на круговой конус.

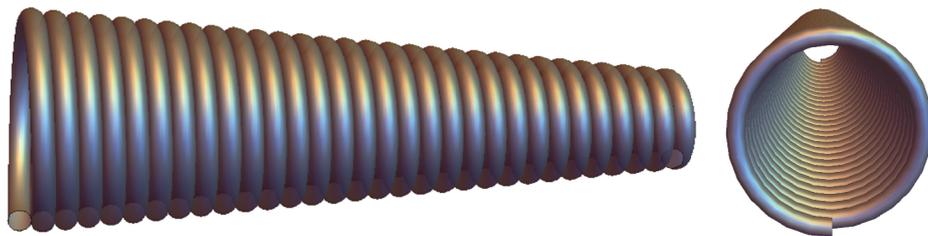


Рис. 5. Пружинно-витой канал, образованный путем намотки проволоки круглого сечения на круговой конус

Запишем уравнение поверхности многозаходного пружинно-витого канала, образованного путем намотки нескольких проволок круглого сечения на цилиндр [9].

В качестве нескольких направляющих кривых выберем m винтовых линий, расположенных на поверхности кругового цилиндра:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t + \phi_m(i)) \\ r_0 \sin(t + \phi_m(i)) \\ bt \end{pmatrix}, \quad \phi_m(i) = \frac{2\pi i}{n} \quad (i=0, \dots, m-1), \quad 0 \leq t \leq \pi n, \quad b = cn / \pi.$$

Единичные векторы касательной, нормали и бинормали:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -r_0 \sin(t + \phi_m(i)) \\ r_0 \cos(t + \phi_m(i)) \\ b \end{pmatrix}, \vec{\nu} = \begin{pmatrix} -\cos(t + \phi_m(i)) \\ -\sin(t + \phi_m(i)) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin(t + \phi_m(i)) \\ -b \cos(t + \phi_m(i)) \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

При использовании уравнения (12) получим уравнение поверхности в виде

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t + \phi_m(i)) \\ r_0 \sin(t + \phi_m(i)) \\ bt \end{pmatrix} - c \cos \varphi \begin{pmatrix} \cos(t + \phi_m(i)) \\ \sin(t + \phi_m(i)) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c \sin \varphi}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin(t + \phi_m(i)) \\ -b \cos(t + \phi_m(i)) \\ r_0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

На рис. 6 представлен пружинно-витой канал, образованный путем намотки нескольких (восьми) проволок круглого сечения на круговой цилиндр.

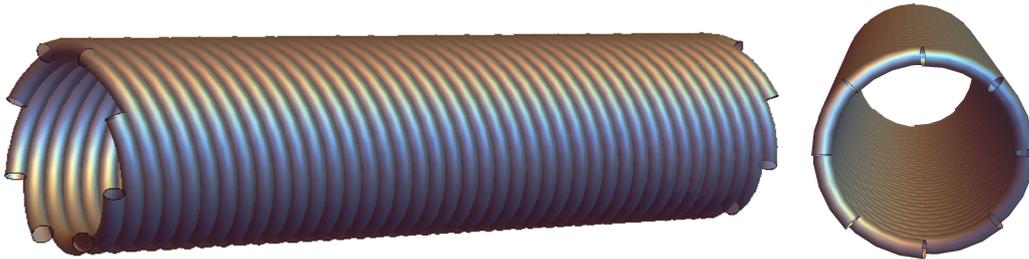


Рис. 6. Многозаходный пружинно-витой канал, образованный намоткой восьми проволок круглого сечения на круговой цилиндр

Для описания поверхности пружинно-витого канала типа «конфузор-диффузор» направляющей кривой является винтовая линия, расположенная на поверхности кругового конуса:

$$\gamma : x = (r_0 + btg\psi) \cos t, y = (r_0 + btg\psi) \sin t, z = bt,$$

где для диффузора $\psi = \psi_d$, $r_0 = r_{0d}$, для конфузора $\psi = \psi_k$, $r_0 = r_{0k}$, а образующей – эллипс с полуосями c и d .

Тогда

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} (r_0 + btg\psi) \cos t \\ (r_0 + btg\psi) \sin t \\ bt \end{pmatrix}, \rho(t, \varphi) = \frac{cd}{\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$d\vec{r}/dt = \begin{pmatrix} -M \sin t + btg\psi \cos t \\ M \cos t + btg\psi \sin t \\ b \end{pmatrix}, d^2\vec{r}/dt^2 = \begin{pmatrix} -M \cos t - 2btg\psi \sin t \\ -M \sin t + 2btg\psi \cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[d\vec{r}/dt \times d^2\vec{r}/dt^2] = \begin{pmatrix} (M \sin t - 2btg\psi \cos t)b \\ -(M \cos t + 2btg\psi \sin t)b \\ M^2 + 2b^2tg^2\psi \end{pmatrix},$$

$$\vec{\tau} = \frac{1}{m_\tau} \begin{pmatrix} -M \sin t + btg\psi \cos t \\ M \cos t + btg\psi \sin t \\ b \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \frac{1}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} (M \sin t - 2btg\psi \cos t)b \\ -(M \cos t + 2btg\psi \sin t)b \\ M^2 + 2b^2tg^2\psi \end{pmatrix},$$

$$\vec{\nu} = \frac{1}{m_\tau(t)m_\beta(t)} \begin{pmatrix} -(M^2 + b^2 + 2b^2tg^2\psi)M \cos t - (M^2 + 2b^2 + 2b^2tg^2\psi)btg\psi \sin t \\ -(M^2 + b^2 + 2b^2tg^2\psi)M \sin t + (M^2 + 2b^2 + 2b^2tg^2\psi)btg\psi \cos t \\ -Mb^2tg\psi \end{pmatrix}.$$

Здесь $M(t) = r_0 + btg\psi$, $m_\tau^2 = M^2 + b^2(1 + tg^2\psi)$, $m_\beta^2 = M^2b^2 + 4b^4tg^2\psi + (M^2 + 2b^2tg^2\psi)^2$.

Параметрическое уравнение поверхности пружинно-витого канала типа «конфузор-диффузор» записывается в виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M \cos t \\ M \sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{cd}{\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \times$$

$$\times \frac{\cos \varphi}{m_\tau(t) m_\beta(t)} \begin{pmatrix} -(M^2 + b^2 + 2b^2 \operatorname{tg}^2 \psi) M \cos t - (M^2 + 2b^2 + 2b^2 \operatorname{tg}^2 \psi) bt \operatorname{tg} \psi \sin t \\ -(M^2 + b^2 + 2b^2 \operatorname{tg}^2 \psi) M \sin t + (M^2 + 2b^2 + 2b^2 \operatorname{tg}^2 \psi) bt \operatorname{tg} \psi \cos t \\ -Mb^2 \operatorname{tg} \psi \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{cd}{\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \frac{\sin \varphi}{m_\beta(t)} \begin{pmatrix} (M \sin t - 2bt \operatorname{tg} \psi \cos t) b \\ -(M \cos t + 2bt \operatorname{tg} \psi \sin t) b \\ M^2 + 2b^2 \operatorname{tg}^2 \psi \end{pmatrix},$$

или в матричном виде:

$$\vec{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} M \cos t - \frac{cd \cos \varphi (M_1 \cos t + M_2 \sin t)}{m_\tau(t) m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{cd \sin \varphi (M \sin t - 2bt \operatorname{tg} \psi \cos t) b}{m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \\ M \sin t - \frac{cd \cos \varphi (M_1 \sin t - M_2 \cos t)}{m_\tau(t) m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{cd \sin \varphi (M \cos t + 2bt \operatorname{tg} \psi \sin t) b}{m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \\ bt + \frac{cd}{m_\beta(t) \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi}} \left(\sin \varphi (M^2 + 2b^2 \operatorname{tg}^2 \psi) - \frac{\cos \varphi Mb^2 \operatorname{tg} \psi}{m_\tau(t)} \right) \end{pmatrix}.$$

На рис. 7 представлен пружинно-витой канал типа «конфузор-диффузор».

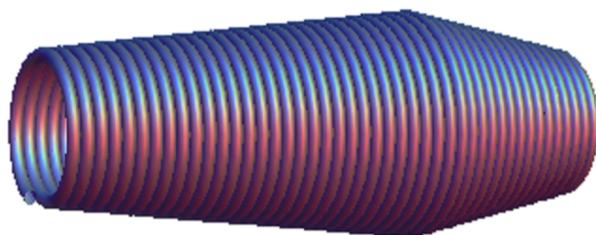


Рис. 7. Пружинно-витой канал типа «конфузор-диффузор»

Если угол конусности ψ элементов «конфузор-диффузор» принять равным нулю, то данная модель может быть использована для построения прямых пружинно-витых каналов.

Предложенные математические модели, описывающие поверхности пружинно-витых каналов, могут быть использованы не только при разработке теплообменных элементов современной теплообменной аппаратуры, но и в строительстве при проектировании различных конструкций, а также при проектировании соединительных поверхностей участков трубопроводов разного диаметра.

Список библиографических ссылок

1. Касаткин А. Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М. : Химия, 2004. 783 с.
2. Исаев С. Е., Сорокин О. Г., Низин А. Н. Обзор конструктивных особенностей теплообменного оборудования для промышленности // Главный энергетик. 2008. № 6. С. 38–41.
3. Багоутдинова А. Г. Энергоэффективные теплообменные аппараты на базе пружинно-витых каналов и труб типа «конфузор-диффузор» / Багоутдинова А. Г.,

Золотонос Я. Д., Мустакимова С. А. – М., 2013. Рукопись деп. В ВИНТИ РАН № 353-B2013. 103 с.

4. Багоутдинова А. Г., Золотонос Я. Д., Посохин В. Н. Конструкции эффективных теплообменных элементов для скоростных теплообменников // Сантехника. Отопление. Кондиционирование. 2014. № 7. С. 72–75.

5. Багоутдинова А. Г., Золотонос Я. Д. Змеевиковые теплообменники. Моделирование. Расчет. Казань, 2016. 245 с.

6. Багоутдинова А. Г., Золотонос Я. Д., Мустакимова С. А. Геометрическое моделирование сложных поверхностей пружинно-витых каналов теплообменных устройств // Известия КГАСУ. 2011. № 4(18). С. 185–192.

7. Теплообменный элемент: пат. 62694 Рос. Федерация. № 2006143517 ; заявл. 7.12.06 ; опубл. 27.04.07. Бюл. № 12.

8. Теплообменный элемент: пат. 64750 Рос. Федерация. № 2007107173 ; заявл. 28.02.07 ; опубл. 10.07.07. Бюл. № 19.

9. Теплообменный элемент: пат. 170207 Рос. Федерация. № 2016133786 ; заявл. 17.08.16 ; опубл. 18.04.17. Бюл. № 11.

10. Теплообменный элемент: пат. 164319 Рос. Федерация. № 2015134595 ; заявл. 17.08.15 ; опубл. 27.08.16. Бюл. № 24.

Bagoutdinova A.G. – candidate of technical sciences

E-mail: bagoutdinova@rambler.ru

Kazan (Volga region) Federal University

The organization address: 420008, Russia, Kazan, Kremlevskaya st., 18

Vachagina E.K. – doctor of technical sciences

E-mail: vachagina@mail.ru

Kazan Scientific Center Russian Academy of Sciences

The organization address: 420111, Russia, Kazan, Lobachevsky st., 2/3

E-mail: vachagina@mail.ru

Zolotonosov Ya.D. – doctor of technical sciences, professor

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Mathematical modeling of heat transfer surfaces of spring-twisted channels

Abstract

Problem statement. When developing the heatexchange equipment many methods of an intensification of heat exchange are used. One of perspective is the method when the form of a heatexchange surface changes.

In this regard the class of spring and twisted canals which have high power efficiency is interesting, allow to modernize and reconstruct the existing heatexchange devices without essential capital expenditure.

Results. In work the general method of creation of heatexchange surfaces of channels of various configurations is offered. This method allows to describe and construct surfaces for any forming and directing curves. Varying the parameters entering mathematical model it is possible to investigate and further to optimize internal geometry of channels.

The offered method is illustrated on several examples. Surfaces from a guide in the form of the screw line with round and elliptic section are constructed.

Conclusions. The significance of the obtained results for the construction area is that the proposed heat exchange elements are installed in innovative heat exchangers installed in individual heat points. In addition, the proposed mathematical models describing the surfaces of spring-twisted channels can be used not only in the development of modern heat exchange equipment, but also in construction in the design of various structures, as well as in the design of connecting surfaces of sections of pipelines of different diameters.

Keywords: surface, hydromechanics, heat exchange equipment, spring-cyrl channel.

References

1. Kasatkin A. G. Main processes and devices of chemical technology. M. : Chimiya, 2004. 783 p.
2. Isaev S. E., Sorokin O. G., Review of design features of the heatexchange equipment for the industry // Chief power engineer. 2008. № 6. P. 38–41.
3. Bagoutdinova A. G. Energy-efficient heat exchangers based on spring-twisted channels and pipes of the «confuser-diffuser» type / Bagoutdinova A. G., Zolotonosov Ya. D., Mustakimova S. A. – M., 2013. Manuscript dep . VINITI RAN № 353-B2013. 103 p.
4. Bagoutdinova A. G., Zolotonosov Ya. D., Posokhin V. N. Designs of effective heatexchange elements for high-speed heat exchangers // Santehnika. Otoplenie. Conditionirovanie. 2014. № 7. P. 72–75.
5. Bagoutdinova A. G., Zolotonosov Ya. D. Coil heat exchangers. Modeling. Calculation. Kazan, 2016. 245 p.
6. Bagoutdinova A. G., Zolotonosov Ya. D., Mustakimova S. A. Geometric modeling of composite surfaces spring-twisted channels of heat-exchange devices // Izvestiya KGASU. 2011. № 4 (18). P. 185 – 193.
7. Heatexchange element: patent 62694 of the Rus. Federation. № 2006143517 ; decl. 7.12.06 ; publ. 27.04.07. Bull. in № 12.
8. Heatexchange element: patent 64750 of the Rus. Federation. № 2007107173 ; decl. 28.02.07 ; publ. 10.07.07. Bull. in № 19.
9. Heatexchange element: patent 170207 of the Rus. Federation. № 2016133786; decl. 17.08.16 ; publ. 18.04.17. Bull. in № 11.
10. Heatexchange element: patent 164319 of the Rus. Federation. № 2015134595 ; decl. 17.08.15 ; publ. 27.08.16. Bull. in № 24.