

то функция $f(\mathbf{x})$ выпукла.

Заметим, что в [3, теорема 10.1, с. 93] достаточное условие выпуклости функции доказано без условия непрерывности, однако при более сильном предположении: в формуле (1) вместо квантора существования $\exists$ стоит квантор общности $\forall$. Сам Иенсен исходил из (1) при $\lambda = \frac{1}{2}$ (также в предположении непрерывности функции).

Критерий линейности позволил решить (в классе непрерывных функций нескольких переменных) функциональные уравнения:

Иенсена:	$J. \quad f\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right) = \frac{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}{2},$
	$K_I. \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}),$
	$K_{II}. \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}),$
Коши	$K_{III}. \quad f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}),$
	$K_{IV}. \quad f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}),$
Лобачевского:	$L. \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})^2$

и ряд других. Хотя для аддитивного и экспоненциального уравнений Коши и Иенсена известны обобщения на случай функций многих переменных [4], но нами они решены принципиально другим способом. Приведённые уравнения решены и для отображений.

Литература

1. Стрекаловский А. С. *Введение в выпуклый анализ*. – Иркутск, 2009. – 84 с.
2. Поликанова И. В. *Straightness criteria* // Классическая и современная геометрия: материалы Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения Л. С. Атанасяна. (Москва, 1-4 ноября 2021 г.)/ под ред. А. В. Царёва. – Москва: МПГУ, 2021. – С. 26.
3. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества*. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
4. Ацель Я., Домбр Ж. *Функциональные уравнения с несколькими переменными*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.

A NEW CRITERION FOR CONVEXITY OF A SET AND ITS APPLICATIONS

I.V. Polikanova

The paper presents a new criterion for convexity of a closed set in an affine space. With its help, sufficient conditions for convexity and linearity of continuous functions of several variables are obtained. The linearity criterion made it possible to solve the functional equations of Cauchy (4 types), Jensen, Lobachevsky and others for functions of several variables.

Keywords: criteria for convexity of a set, Jensen's inequality, Jensen's functional equation, Cauchy's functional equations, Lobachevsky's equation, functional equations for functions of several variables.

UDC 514.822

GHOST-FREE $F(R, \mathcal{G})$ GRAVITY

A.A. Popov¹

¹ *apopov@kpfu.ru*; Kazan Federal University

This paper discusses the problem of ghost degrees of freedom in $F(R, \mathcal{G})$ gravity ($\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ the Gauss–Bonnet term). These ghosts occur due to the presence of higher than two derivatives in the field equations. Motivated by the importance of $F(\mathcal{G})$ gravity for providing viable inflationary and dark energy phenomenologies, in this work we shall provide a technique that can render $F(R, \mathcal{G})$ gravity theories free from ghost degrees of freedom. This will be done by introducing two auxiliary scalar fields, and by employing the Lagrange multiplier technique, the theory is ghost free in the Einstein frame. Also the framework can be viewed as a reconstruction technique and can be used as a method in order to realize several cosmological evolutions of interest. We demonstrate how we can realize several cosmologically interesting phenomenologies by using the reconstruction technique.

Keywords: gravity, modified theory, ghost degrees of freedom

Modified gravity plays a prominent role towards the complete understanding of how the Universe evolves, due to the fact that Einstein-Hilbert gravity seems to be unable to describe the late-time acceleration era. Apart from the dark energy description, modified gravity can provide a viable and perhaps necessary description for the early time acceleration dubbed inflation. Single scalar field descriptions of inflation for the moment are quite popular, but these models provide an inflationary era with specific characteristics and there is not much freedom in model building in these theories. Specifically, single scalar field models lead to a Gaussian power spectrum which can be compatible with the latest Planck data, however the tensor spectral index is red-tilted and obeys the consistency relation, a fact that restricts too much the tensor spectrum. If in the upcoming observational data of the LISA mission in about fifteen years from now, primordial gravitational waves signal will be found, single scalar field inflation will be instantly unable to provide a description for the early time era evolution of our Universe. This is due to the fact that currently the single scalar field prediction for the power spectrum of the primordial gravitational waves is way lower compared to the LISA sensitivity curve. Thus if a signal of primordial tensor spectrum is discovered, single scalar field cannot be the one generating this spectrum, unless the scalar field is a tachyon, which is quite problematic scenario. These issues render modified gravity a quite timely and appealing candidate for the unified description of inflation and dark energy simultaneously. Two of the most appealing characteristic modified gravities are $f(R)$ and Gauss-Bonnet gravity and higher order extensions of the above two. In this work we consider $F(R, \mathcal{G})$ gravity theories, and we consider the problem of having ghost degrees of freedom in these theories. It is known that $F(R, \mathcal{G})$ gravity theories are plagued with ghost degrees of freedom which can occur at many levels in the theory, even as perturbative propagating modes when cosmological perturbations are considered. We aim to demonstrate how these ghost degrees of freedom are generated and we will provide a theoretical framework for $F(R, \mathcal{G})$ which can yield a ghost-free framework. We also use the provided theoretical framework as a reconstruction technique in order to realize several cosmological evolutions of interest.

СВОБОДНАЯ ОТ ДУХОВ $F(R, \mathcal{G})$ ГРАВИТАЦИЯ

А.А. Попов

В этом докладе рассматривается проблема духовых степеней свободы в $F(R, \mathcal{G})$ гравитации

($\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ член Гаусса-Бонне). Эти духи возникают из-за наличия в уравнениях гравитации производных более высокого порядка чем второй. Мотивированные важностью $F(R, \mathcal{G})$ гравитации для обеспечения жизнеспособных феноменологий инфляции и темной энергии, в этой работе мы представим метод, который может сделать $F(R, \mathcal{G})$ теорию гравитации свободной от духовых степеней свободы. Это будет сделано путем введения двух вспомогательных скалярных полей и использования метода множителя Лагранжа, освобождающих теорию от духов в системе Эйнштейна. Этот подход можно рассматривать как метод реконструкции и можно использовать в качестве метода для реализации нескольких представляющих интерес космологических эволюций. Мы демонстрируем, как мы можем реализовать несколько космологически интересных феноменологий, используя технику реконструкции.

Ключевые слова: теория гравитации, модифицированная теория, духовые степени свободы

УДК 514.764.2

О ЗАМКНУТОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ ПОДГРУППЫ В ГРУППЕ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В.А. Попов¹

¹ vlaporov@co; Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

Рассматривается алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности, ее стационарная подалгебра $\mathfrak{h}$, группа Ли G , соответствующая алгебре $\mathfrak{g}$ и ее подгруппа H , соответствующая подалгебре $\mathfrak{h}$. Рассматривается центр $\mathfrak{z}$ и коммутант $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ алгебры $\mathfrak{g}$. Доказывается следующий критерий замкнутости подгруппы H в группе G .

Если $\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, то H замкнута в G .

Для доказательства для произвольной группы G , рассматриваемой как группа преобразований множества левых смежных классов G/H по ее произвольной подгруппе H . Выводится разложение группы G в прямое произведение коммутативной подгруппы $\tilde{N}_0 \subset G$ "правых" умножений и подгруппы $G_0 \subset G$ "левых" умножений. Доказывается, что в случае аффинных преобразований "правые" умножения существуют.

Ключевые слова: аффинная связность, группы и алгебры Ли, стационарные подалгебры и подгруппы.

Литература

1. Popov V. A. On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Groups. Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 38, №4, 2017, p. 724 – 729.
2. Popov V. A. Analytic extension of Riemannian analytic Manifolds. Mathematics. Vol. 8, №118, 2020, p. 1 – 17.

ON CLOSENESS OF STATIONARY SUBGROUP OF AFFINE TRANSFORMATIONS GROUP

V.A. Popov

We study the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of all infinitesimal affine transformations of the affine space, its stationary subalgebra $\mathfrak{h}$, the Lie group G corresponding to the algebra $\mathfrak{g}$, and its subgroup H corresponding to