УДК 519.642

Ожегова А.В., Сурай Л.А.

СХОДИМОСТЬ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1. Введение. *Исследуется двумерное сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши. Введены пары весовых пространств, являющиеся сужением пространства суммируемых функций. Доказана корректность рассматриваемого уравнения. Установлены достаточные условия сходимости метода ортогональных многочленов в интегральной метрике.*

Ключевые слова: *Сингулярное интегральное уравнение перворго рода, метод ортогональных многочленов, аппроксимация.*

При решении прикладных задач электродинамики широко используется метод интегральных уравнений [1], который представляет собой метод расчета магнитных и электрических полей, основанный на введении вторичных источников и состоящий в сведении задачи к интегральным уравнениям и последующем их численном решении. Существует большой класс краевых задач электродинамики, а именно задачи дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих незамкнутых поверхностях, которые сводятся к сингулярным интегральным уравнениям первого рода с ядром Коши [2]. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (с. и. у.) вида

$$K\varphi \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\sigma,\tau)}{(\sigma-s)(\tau-t)}d\sigma\, d\tau + \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(s,t,\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau = y(s,t), \qquad (1)$$

где $|s|<1, |t|<1$, $g(s,t,\sigma,\tau), y(s,t)$ - известные функции в своих областях определения, $x(s,t)$ - искомая функция, а сингулярный интеграл

$$I\varphi = I(\varphi; s,t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\sigma,\tau)}{(\sigma-s)(\tau-t)}d\sigma\, d\tau$$

понимается в смысле главного значения по Коши.

Вопросы точного и численного решения многомерных интегральных уравнений первого рода исследованы в гораздо меньшей степени по сравнению с тем что сделано для одномерных уравнений. Актуальной на сегодняшний момент является задача исследования сходимости приближенных решений уравнения (1) при минимальных требованиях к исходным данным $h(s, t, \sigma, \tau)$ и $y(s, t)$.

2. Корректность задачи. К настоящему времени разработано достаточно много аппроксимативных методов решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. При этом их обоснование проводится, как правило, в классах гельдеровских функций, что вполне естественно, исходя из теории таких уравнений [3, 4]. Сложность теоретического обоснования аппроксимативных методов связана как с наличием особенности в ядре, так и с некорректностью постановки задачи решения уравнения (1) на многих парах известных функциональных пространств. Тем не менее, исследования последних лет [5, 6, 7] показали , что возможна корректная постановка задачи путем специального подбора пространств искомых элементов и правых частей, а следовательно и обоснованное применение численных методов.

Как известно [2, 3, 4], решение уравнения (1) может принадлежать девяти классам. В данной работе исследуем один из них, а именно класс решений ограниченных на двух смежных сторонах квадрата $[-1,1]^2$ и неограниченных на двух других. В этом случае функция $\varphi(\sigma, \tau)$ представима в виде $\varphi(\sigma, \tau) = \rho(\sigma, \tau)\, x(\sigma, \tau)$, где $x(\sigma, \tau)$ – новая искомая функция, а

$$\rho \equiv \rho(\sigma,\tau) = \sqrt{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}.$$

Если в качестве пространств искомых элементов и правых частей брать пространство суммируемых функций $L = L[-1,1]^2$ с нормой

$$\|x\|_L = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|x(\sigma,\tau)|\,d\tau\, d\tau,$$

то рассматриваемая задача на этой паре пространств будет некорректно поставленной, что делает невозможным применение приближенных методов решения уравнения (1).

В связи с этим, используя подходы, предложенные в [5, 6, 7], вводится пара пространств, являющихся некоторыми сужениями пространства суммируемых функций, в которых задача решения уравнения (1) является корректно поставленной.

Пусть X – пространство суммируемых на $[-1,1]^2$ функций $x(s, t)$, для которых сингулярный интеграл $\sqrt{(1-s)(1-t)}\, I(\rho x; s,t)$ является также суммируемой на $[-1,1]^2$ функцией.

В качестве Y введем пространство суммируемых на $\left[-1,1\right]^2$ функций $y(s,\ t)$, для которых сингулярный интеграл $\sqrt{(1+s)(1+t)}\,I(q\,y;s,t)$ является также суммируемой на $\left[-1,1\right]^2$ функцией, где

$$q(s,t)=\frac{1}{\rho(s,t)}.$$

Нормы во введенных пространствах определим соответственно следующим образом:

$$\|x\|_X=\left\|\sqrt{(1+s)(1+t)}\,x\right\|_L+\left\|\sqrt{(1-s)(1-t)}\,I(\rho x)\right\|_L,\ x\in X; \tag{2}$$

$$\|y\|_Y=\left\|\sqrt{(1-s)(1-t)}\,y\right\|_L+\left\|\sqrt{(1+s)(1+t)}\,I(q\,y)\right\|_L,\ y\in Y. \tag{3}$$

Представим исходное с.и.у. (1) в операторном виде

$$Kx\equiv Sx+Gx=y\quad \left(x\in X,\,y\in Y\right), \tag{4}$$

где

$$Sx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\rho(\sigma,\tau)x(\sigma,\tau)}{(\sigma-s)(\tau-t)}d\sigma\,d\tau;\quad Gx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\rho(\sigma,\tau)\,g(s,t,\sigma,\tau)\,x(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau. \tag{5}$$

Следуя методике, предложенной в [8], и используя теорию двойных рядов по многочленам Чебышева третьего и четвертого родов, получим следующую лемму.

Лемма 1. *Характеристическое уравнение*

$$Sx\equiv\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\rho(\sigma,\tau)x(\sigma,\tau)}{(\sigma-s)(\tau-t)}d\sigma\,d\tau=y(s,t) \tag{6}$$

имеет единственное решение $x^*(s,t)\in X$ *при любой правой части* $y(s,t)\in Y$*, причем*

$$S^{-1}y=x^*(\sigma,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}c_{kj}^{QQ}(y)\,R_k(\sigma)\,R_j(\tau),\quad -1<\sigma,\tau<1,$$

где

$$c_{kj}^{QQ}(y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\,y(\sigma,\tau)\,Q_k(\sigma)\,Q_j(\tau)\,d\sigma\,d\tau,$$

а $R_k(\tau)$ *и* $Q_j(\tau)$ *- многочлены порядка k и j из системы полиномов, ортогональных на отрезке* [-1, 1] *с весами соответственно* $\sqrt{\dfrac{1+\tau}{1-\tau}}$ *и* $\sqrt{\dfrac{1-\tau}{1+\tau}}$.

Справедлива

Лемма 2. *Сингулярный оператор* $S : X \to Y$ *непрерывно обратим, и справедливы равенства*

$$\|S\|_{X \to Y} = 1, \quad \left\|S^{-1}\right\|_{Y \to X} = 1.$$

Доказательство. Используя формулу обращения двумерного сингулярного интегрального уравнения

$$I(\rho I(qy)) = y$$

и определение норм (2) и (3), имеем

$$\|Sx\|_Y = \left\|\sqrt{(1-s)(1-t)}\, Sx\right\|_L + \left\|\sqrt{(1+s)(1+t}\, I(qSx)\right\|_L =$$

$$= \left\|\sqrt{(1-s)(1-t}\, I(\rho x)\right\|_L + \left\|\sqrt{(1+s)(1+t}\, I(qI(\rho x))\right\|_L =$$

$$\left\|\sqrt{(1-s)(1-t}\, I(\rho x)\right\|_L + \left\|\sqrt{(1+s)(1+t}\, x\right\|_L = \|x\|_X .$$

Откуда $\|S\|_{X \to Y} = 1$. Аналогично доказывается второе равенство.

Из леммы 2 и теории Рисса-Шаудера для уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода, следует теорема.

Теорема 1. *Пусть ядро* $h(s,\ t,\ \sigma,\ \tau)$ *таково, что оператор* $G : X \to Y$ *вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению* (1), *имеет только нулевое решение, то оператор* $K : X \to Y$ *непрерывно обратим.*

Теорема 1 означает, что на паре введенных пространств задача решения уравнения (1) корректно поставлена, и, следовательно, можно применять для его решения численные методы.

3. Метод ортогональных многочленов. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения (1) будем искать в виде

$$x_{nm}(t) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj}\, R_k(\sigma)\, R_j(\tau)\,, \tag{7}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_{kj},\ k = \overline{0,n},\ j = \overline{0,m}$ определим из системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_{rl} + \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{kj}\gamma_{kjrl} = y_{rl}\,,\ r = \overline{0,n},\ l = \overline{0,m}\,,$$

$$\gamma_{kjrl} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} q(s,t)\, G(R_k R_j;\, t,\, s)\, Q_r(s) Q_l(t)\, ds\, dt\,, \tag{8}$$

$$y_{rl} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} q(s,t)\, y(s,t)\, Q_r(s)\, Q_l(t)\, ds\, dt \,.$$

Система линейных алгебраических уравнений (8) может быть представлена в виде операторного уравнения

$$K_{nm} x_{nm} \equiv S\, x_{nm} + \Phi_{nm}^{QQ} G\, x_{nm} = \Phi_{nm}^{QQ} y, \quad (x_{nm}, \Phi_{nm}^{QQ} y \in H_{nm}),$$

где H_{nm} - множество всех алгебраических многочленов степени не выше (n, m), а Φ_{nm}^{QQ} - оператор Фурье, ставящий в соответствие любой функции $\varphi(s,t) \in L[-1,1]^2$ ее отрезок ряда Фурье

$$\Phi_{nm}^{QQ} \varphi = \Phi_{nm}^{QQ}(\varphi; s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj}^{QQ}(\varphi)\, Q_k(s)\, Q_j(t)\,,$$

где

$$c_{kj}^{QQ}(\varphi) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\, \varphi(\sigma,\tau)\, Q_k(\sigma)\, Q_j(\tau)\, d\sigma\, d\tau$$

- коэффициенты Фурье – Чебышева.

Пусть $H_{\omega_1 \omega_2}$ - класс функций $\varphi(s,\ t)$ суммируемых на $[-1,1]^2$, интегральный модуль непрерывности которых по первой переменной не превосходит интегральный модуль непрерывности $\omega_1(\delta)_L$, а по второй переменной не превосходит интегральный модуль непрерывности $\omega_2(\delta)_L$.

После несложных, но громоздких выкладок с помощью результатов [7] получаем следующие оценки:

$$\left\| \Phi_{nm}^{QQ} \varphi \right\|_Y = \mathrm{O}(\ln n \ln m) \| \varphi \|_L \,.$$

$$\| \varphi - \Phi_{nm} \varphi \|_Y = \mathrm{O}\left(\ln n \ln m \left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)_L + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)_L \right] \right).$$

Полученные оценки и Теорема 7 главы 1 монографии [9] позволили доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

а) с.и.у. (1) *однозначно разрешимо в пространстве X при любой правой части* $y(s,\ t)$ из Y;

б) правая часть $y(s,t)\in H_{\omega_1\omega_2}$, а *ядро* $g(s,t,\sigma,\tau)\in H_{\omega_1\omega_2}$ *по переменной s* и *t* *равномерно относительно* σ, τ.

Тогда, начиная с $n,m\in N$, *таких, что* $\ln n\ln m\left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)_L+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)_L\right]\to 0, n,m\to\infty$ *система линейных алгебраических уравнений* (8) *имеет единственное решение* $\left\{\overset{*}{\alpha}_{kj}\right\}, k=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m}$, *и для погрешности приближенного решения справедлива оценка*

$$\left\|\sqrt{(1+s)(1+t)}(x^*-\overset{*}{x}_{nm})\right\|_L=O\left(\ln n\ln m\left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)_L+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)_L\right]\right),$$

где

$$\overset{*}{x}_{nm}(s,t)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\overset{*}{\alpha}_{kj}\ R_k(s)\ R_j(t)$$

Источники

1. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. - М.: Высш. школа, 1991.- 224 с.

2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.

3. Мусхелишвили Н.И. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 638 с.

5. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 285 с.

6. Валиуллова Л.Э., Ожегова А.В. Равномерные приближения решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядром Коши на отрезке// Изв. Вузов. Математика. – 2006. №9.-С.17 – 22.

7. Ожегова А.В. Сходимость в интегральной метрике общего проекционного метода решения сингулярного интегрального уравнения певого рода с ядром Коши // Изв. Вузов. Математика. – 2008. №10.-С.39 – 47.

8. Валиева Р.Т., Габдулхаев Б.Г. Об обращении многомерных сингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. Вузов. Математика. – 2003. №10.-С.13 – 25.

9. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во КГУ, 1980. – 232 с.