

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Академия наук Республики Татарстан  
Татарская Академия Управления Инновационной Экономикой

**МАТЕРИАЛЫ**  
**ОДИННАДЦАТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**  
**"СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ**  
**ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Казань, 20 – 25 октября 2016 г.

К а з а н ь – 2 0 1 6

УДК 519.713

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ ТРЕХМЕРНОЙ  
ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

**Л.У. БАХТИЕВА<sup>1</sup>, В.М. БОГОЛЮБОВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, <sup>2</sup> Казанский национальный исследовательский  
технический университет им. А.Н.Туполева (КНИТУ-КАИ)

E-mail lbakhtie@yandex.ru

**NUMERICAL STUDY OF THE THREE-DEGREE PARAMETRICALLY EXCITED GYROSCOPIC  
SYSTEM**

**L.U. BAKHTIEVA<sup>1</sup>, V.M. BOGOLYUBOV<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Kazan Federal University, <sup>2</sup> Kazan National Research Technical Tupolev University

**Аннотация**

Построена математическая модель роторного вибрационного гироскопа, принцип действия которого основан на использовании настроенной в резонанс трехмерной колебательной системы. Параметрическое возбуждение гироскопа достигается путем модуляции угловой скорости вращения его ротора. Приведены результаты численных расчетов, позволяющих не только иллюстрировать процесс работы гироскопа, но и находить значения параметров, при которых он может быть использован в качестве прибора ориентации подвижных объектов.

**Ключевые слова:** гироскоп, резонанс, модуляция угловой скорости.

**Summary**

A mathematical model of the rotor vibratory gyroscope was constructed. The operating principle of the device based on the use of the tuned resonance of three-degree oscillating system. Parametric excitation of a gyroscope is achieved by modulating the angular velocity of rotation of the rotor. The results of numerical calculations allow not only to illustrate the process of operation of the gyroscope, but also to find the values of the parameters under which it can be used as a device of orientation of moving objects.

**Key words:** gyro, resonance, modulation of the angular velocity.

---

**Введение**

Развитие приборов инерциальной навигации связано с расширением их функциональных возможностей, повышением точности измерения угловых скоростей в условиях воздействия значительных перегрузок, а также с минимизацией их габаритно-весовых характеристик и энергопотребления. Таким требованиям в полной мере удовлетворяют роторные вибрационные гироскопы (РВГ). Ниже рассматривается случай параметрически возбуждаемого трехстепенного РВГ, кинематическая схема которого [1] приведена на рис. 1. Схема включает в себя: чувствительный элемент (несимметричный ротор) 3, закрепленный к валу 8 приводного двигателя 1 при помощи двух пар торсионов 5 и карданова подвеса 6. Амплитуда колебаний ротора РВГ преобразуется в электрический сигнал датчиком угла 4, а создание управляющих моментов, прикладываемых к ротору, осуществляется датчиком момента 7, управляемого сигналами, передаваемыми с корпуса 9, с помощью синусно-косинусного вращающегося трансформатора 2. Нетрадиционное использование гироскопа, связанное с его параметрическим возбуждением, предъявляет особые требования к динамике работы прибора. Это, в свою очередь, приводит к необходимости численного анализа соответствующей гироскопической системы на основе строгой математической модели.

**1. Математическая модель параметрически возбуждаемого РВГ**

Специфика работы модуляционного роторного вибрационного гироскопа позволяет на основе использования схмотехнических решений, без изменения конструкции механического контура, осуществить повышение чувствительности прибора к измеряемой угловой скорости путем его параметрического возбуждения [2].

---

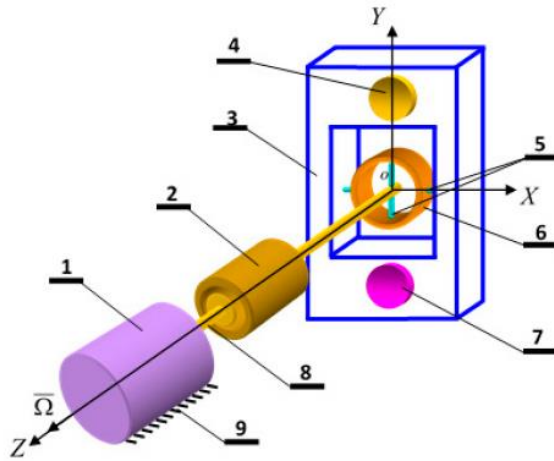


Рис. 1: Кинематическая схема трехстепенного РВГ с несимметричным ротором

Параметрическое возбуждение РВГ, как колебательной системы, является следствием модуляции динамических жесткостей торсионного подвеса и гироскопических моментов (т.е. модуляции угловой скорости вращения ротора), которая осуществляется изменением в небольших пределах частоты питающего напряжения привода (бесколлекторного электродвигателя постоянного тока или синхронного гистерезисного электродвигателя) по закону

$$\Omega_m = \Omega + \Delta\Omega \cos(\omega_m t), \quad (1)$$

где  $\Omega$  – номинальное значение частоты вращения вала двигателя, соответствующее настроенному режиму работы гироскопа,  $\Delta\Omega$  – девиация частоты,  $\omega_m$  – частота модуляции.

Текущее значение фазы колебаний вала приводного двигателя относительно номинального значения определяется выражением

$$\varphi_m(t) = \int \Omega_m(t) dt = \Omega t + m \sin(\omega_m t), \quad (2)$$

где  $m = \Delta\Omega/\omega_m$  – индекс частотной модуляции.

Учитывая свойства функций Бесселя первого рода для значений индекса модуляции  $m \leq 0.2$ , а также узкополосность амплитудно-частотной характеристики РВГ и выражение (2), периодические функции можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_m(t)) &= \sin(\Omega t) + \frac{m}{2}(\sin(\Omega + \omega_m)t + \sin(\Omega - \omega_m)t), \\ \cos(\varphi_m(t)) &= \cos(\Omega t) - \frac{m}{2}(\cos(\Omega - \omega_m)t - \cos(\Omega + \omega_m)t). \end{aligned}$$

Для описания движения РВГ, установленного на подвижном основании, введем систему координат  $O\xi^*\eta^*\zeta^*$  с началом отсчета в центре масс ротора гироскопа и осями, направленными на неподвижные звезды.

С подвижным основанием свяжем систему координат  $Ox_{ob}y_{ob}z_{ob}$ , ось которой совпадает с осью вращения ротора РВГ (Рис. 2 а). Движение основания прибора будем считать известным, т.е. в каждое мгновение времени будет известна ориентация системы координат  $Ox_{ob}y_{ob}z_{ob}$  относительно инерциальной  $O\xi^*\eta^*\zeta^*$ , а проекции  $\dot{\Phi}_x$ ,  $\dot{\Phi}_y$ ,  $\dot{\Phi}_z$  вектора абсолютной угловой скорости основания на оси системы  $O\xi^*\eta^*\zeta^*$  являются заданными функциями времени.

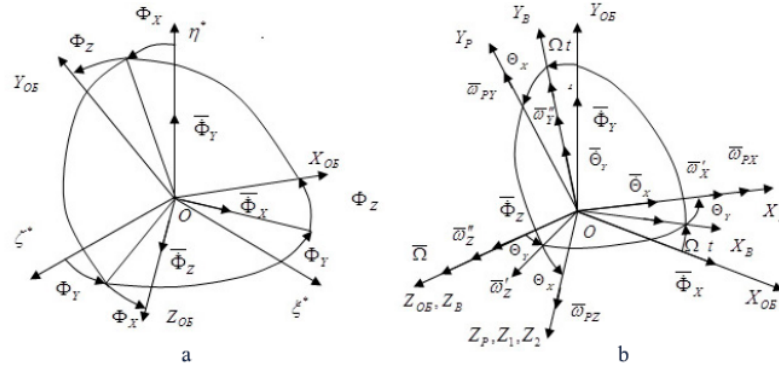


Рис. 2: Система координат

Кроме вышеупомянутых систем необходимы еще две системы осей  $OX_bY_bZ_b$ ,  $OX_pY_pZ_p$ , связанные соответственно с валом приводного двигателя и с главными осями инерции ротора (Рис. 2 б). Начало отсчета системы осей  $OX_bY_bZ_b$ ,  $OX_pY_pZ_p$  лежит в центре масс РВГ, а их положение относительно системы  $OX_{ob}Y_{ob}Z_{ob}$  задано последовательными поворотами в положительном направлении на соответствующие углы  $\Omega t$  для  $OX_bY_bZ_b$  и  $\Theta_x, \Theta_y$  для  $OX_pY_pZ_p$ .

Для вывода уравнений движения гироскопической системы воспользуемся вариационным принципом Остроградского - Гамильтона (см., например, [3]), из которого следуют уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{3}$$

где  $T$  - кинетическая энергия рассматриваемой гироскопической системы;  $q_i$  - обобщенные координаты, определяющие положение всех точек системы в пространстве;  $Q_i$  - обобщенные силы, действующие на систему;  $i$  - количество обобщенных координат, характеризующих число степеней свободы рассматриваемой электромеханической системы.

Выберем в качестве обобщенных координат углы поворота ротора

$$\theta_x = \beta(t), \quad \theta_y = \alpha(t),$$

однозначно определяющие его положение в системе координат вала, а в качестве обобщенных сил - моменты демпфирования и моменты упругости торсионов.

Дифференциальные уравнения движения для случая постоянной угловой скорости вращения основания, после выполнения процедуры факторизации [4] и последующего проведения линеаризации с помощью матрицы Якоби будут иметь вид

$$\begin{aligned} A \ddot{\beta} + \mu \dot{\beta} + (k + (C - B) \Omega (\Omega + 2 m \omega_m \cos(\omega_m t))) \beta - (A + B - C) (\Omega + \\ + m \omega_m \cos(\omega_m t)) \dot{\alpha} = (A + C - B) \Omega (\dot{\Phi}_x \sin(\Omega t) - \dot{\Phi}_y \cos(\Omega t)), \\ B \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} + (k + (C - A) \Omega (\Omega + 2 m \omega_m \cos(\omega_m t))) \alpha + (A + B - C) (\Omega + \\ + m \omega_m \cos(\omega_m t)) \dot{\beta} = (C + B - A) \Omega (\dot{\Phi}_x \cos(\Omega t) - \dot{\Phi}_y \sin(\Omega t)), \end{aligned} \tag{4}$$

где  $A, B, C$  - соответственно экваториальные и полярный моменты инерции ротора,  $\mu$  - коэффициент вязкого трения материала торсионов,  $k$  - крутильная жесткость торсионов,  $(C - A) \Omega^2$  и  $(C - B) \Omega^2$  - динамические жесткости соответствующих осей подвеса.

## 2. Численное исследование

Наличие таких периодически изменяющихся энергоемких параметров РВГ, как гироскопические моменты и динамические жесткости, входящие в состав неоднородных дифференциальных уравнений (4), обеспечивает благоприятные условия для параметрического возбуждения механического контура рассматриваемого гироскопа на частоте  $\omega_m = \Omega$  [5].

На рис. 3 приведены результаты численных расчетов, проведенных с помощью математического пакета Maple 9 при  $\dot{\Phi}_x = 0.001 \text{ c}^{-1}$ ,  $\dot{\Phi}_y = 0$ . Анализ полученных результатов показывает, что решение

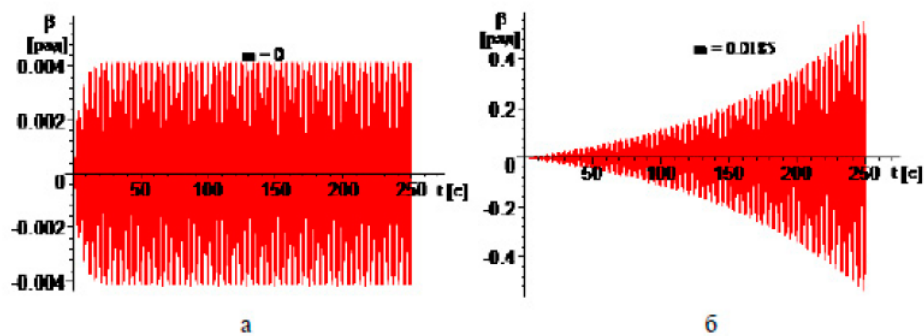


Рис. 3: Амплитуда колебаний ротора при различных значениях  $m$

уравнений (4) существенным образом зависит от значения индекса модуляции  $m$ . Если при малых значениях индекса  $m$  решение устойчиво (Рис. 3 а), то при  $m = 0.0185$  наблюдается неустойчивое поведение гироскопа (Рис. 3б). Критическое значение индекса модуляции может быть найдено как путем численных экспериментов, так и аналитически [6].

Из графика на рис. 3 б следует, что модуляция угловой скорости вращения ротора гироскопа обеспечивает повышение его чувствительности в установившемся режиме (дифференцирующем режиме гироскопа) приблизительно на один порядок по сравнению с прибором, в котором параметрическое возбуждение отсутствует (рис. 3а). Это связано с тем, что модуляция угловой скорости вращения ротора существенно снижает величину вязкого трения  $\mu$ . При этом увеличивается длительность линейного нарастания амплитуды колебаний, что соответствует работе прибора в режиме измерителя угла поворота основания (интегрирующем режиме).

Следует заметить, что в когерентном режиме ( $\omega_m = \Omega$ ) повышение чувствительности РВГ критично к величине фазового сдвига между периодически изменяющимися динамическими жесткостями торсионного подвеса, гироскопическими моментами, свойственными трехстепенному гироскопу, и внешним гироскопическим моментом, обусловленным угловой скоростью вращения основания прибора.

Проведенные исследования показали, что при использовании РВГ в качестве гирокомпы можно использовать как когерентный режим, так и некогерентный режим работы прибора, который реализуется при выполнении условия  $\omega_m \approx \Omega$ . В некогерентном случае также происходит увеличение амплитуды колебания ротора гироскопа, но форма сигнала не сохраняется и вместо гармонического колебания с одной спектральной компонентой, получается сложное колебание, состоящее из двух гармонических компонент, наблюдаемое как квазигармоническое колебание с периодически изменяемой амплитудой. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в [7].

Представленная математическая модель, описывающая динамику движения параметрически возбуждаемого трехстепенного модуляционного РВГ, позволяет не только иллюстрировать процесс работы гироскопа, но и находить значения параметров, при которых он может быть использован в качестве прибора ориентации подвижных объектов.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. **Максимов А.Г., Языков В.К., Панышин В.А.** Способ выставки датчика моментов относительно осей чувствительности модуляционного несимметричного ДНГ // Ракетная техника. Вып.3. 1990. – с. 8-12
2. **Голован А.А., Махоров Г.Н., Белугин В.Б.** Гироскоп с параметрическим усилением полезного сигнала на субгармонике вспомогательных движений чувствительного элемента // Вопросы прикладной механики. – М., 1968. – № 1. – С. 34.
3. **Бахтиева, Л. У., Тазюков, Ф. Х.** Решение задачи устойчивости тонкой оболочки при импульсном нагружении // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки. – 2014. – Т. 156, № 1 – С. 5-11
4. **Сольницын Р.И.** Вычислительные машины в судовой гироскопии. – Л.: Судостроение, 1977. – 312 с.
5. **Боголюбов В.М.** Исследование влияния модуляции динамической жесткости РВГ на его точность // Сб. тезисов докладов и сообщений VIII НТК. – Казань, 1993 – С. 60
6. **Бахтиева Л.У., Боголюбов В.М.** Динамика работы трехстепенного параметрически возбуждаемого гироскопа // Новые технологии, материалы и оборудование Российской авиакосмической отрасли: Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием: Сборник докладов. Т. 2. – Казань: Изд-во АН РТ, 2016 – С. 371–375.
7. **Боголюбов В.М., Феблина О.В.** Гироскоп на основе параметрически возбуждаемых модуляционных роторных вибрационных гироскопов // Сборник материалов XXIX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. – С.-Пб., 2014. – С. 442

**REFERENCES**

1. **Maximov A.G., Jazikov B.K., Panshin V.A.** Way to show the sensor of the moments relative to the axes of sensitivity modulation asymmetric DNG gyroscopic devices for the ballistic missiles and space objects [Способ выставки датчика моментов относительно осей чувствительности модуляционного несимметричного ДНГ // Rocket engineering. – 1990. – № 3. – P. 8–12. (in Russian)]
2. **Golovan A.A., Mahorov G.N., Belugin V.B.** Gyroscope with parametric amplification of the useful signal on the auxiliary sub-harmonic motions of the sensitive element [Гироскоп с параметрическим усилением полезного сигнала на субгармонике вспомогательных движений чувствительного элемента] // Questions of applied mechanics. – Moscow: GONTI, 1968. – № 1. – P. 34. (in Russian)
3. **Bakhtieva L.U., Tazyukov F.K.** Solution of the stability problem for a thin shell under impulsive loading // Lobachevskii journal of mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 384–389.
4. **Sol'nitceev R.I.** Computers in the ship gyroscopy [Вычислительные машины в судовой гироскопии]. – Leningrad: Sudostroenie, 1977. – 312 p. (in Russian)
5. **Bogolyubov V.M.** Investigation of the effect of modulation of dynamic stiffness RVG on its accuracy [Исследование влияния модуляции динамической жесткости РВГ на его точность] // Abstracts and communications of VIII scientific and technical conference. – Kazan, 1993. – P. 60. (in Russian)
6. **Bakhtieva L.U., Bogolyubov V.M.** Dynamics of parametrically excited three-degree-of-freedom gyro New technologies [Динамика работы трехстепенного параметрически возбуждаемого гироскопа] // New technologies, Materials and equipment of the Russian aerospace industry: all-Russian scientific-practical conference with international participation: Collection of papers. Vol. 2. – Kazan: Izd-vo AN RT, 2016 – P. 371–375. (in Russian)
7. **Bogolyubov V.M., Feklina O.V.** Gyrocompass, on the basis of parametrically excited by modulation of the rotor vibratory gyroscopes [Гироскоп на основе параметрически возбуждаемых модуляционных роторных вибрационных гироскопов] // Proceedings of the XXIX conference of the memory of the outstanding designer of gyroscopic devices N. Ostryakov. – Saint-Petersburg, SSC RF JSC "CONCERN"СRI"ELECTROPRIBOR" , 2014. – P. 442. (in Russian)