

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.М. КАРЧЕВСКИЙ, М.М. КАРЧЕВСКИЙ

ЛЕКЦИИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ  
И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

КАЗАНЬ

2014

УДК 512:514  
ББК 22.14:22.151  
К 21

*Печатается по решению Редакционно-издательского  
совета ФГАОУ ВО  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»  
Заседания учебно-методической комиссии института  
вычислительной математики и информационных технологий  
Протокол №6 от 13 февраля 2014 года  
Заседания кафедры прикладной математики  
Протокол №3 от 12 февраля 2014 года*

**Научный редактор** —  
доктор физико-математических наук, профессор Н.Б. Плещинский

**Е.М. Карчевский, М.М. Карчевский**  
**К 21 Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии:** учебное пособие/Е.М. Карчевский, М.М. Карчевский — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014, 352 с.

**ISBN 978-5-00019-193-4**

Излагаются все основные вопросы, включаемые в программу университетского курса линейной алгебры и аналитической геометрии.

Книга рассчитана на студентов младших курсов, обучающихся по направлениям прикладной математики и информатики.

УДК 512:514  
ББК 22.14:22.151

**ISBN 978-5-00019-193-4**

© Карчевский Е.М.  
Карчевский М.М., 2014  
© Издательство Казанского  
университета, 2014

---

---

## Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	7
<b>ГЛАВА 1. Комплексные числа</b> . . . . .	8
§ 1. Комплексные числа, алгебраические операции над комплексными числами . . . . .	8
§ 2. Операция сопряжения, модуль комплексного числа . . . . .	11
§ 3. Тригонометрическая форма комплексного числа . . . . .	12
§ 4. Извлечение корня из комплексного числа . . . . .	15
<b>ГЛАВА 2. Многочлены</b> . . . . .	18
§ 1. Алгебраические операции над многочленами . . . . .	18
§ 2. Корни многочленов . . . . .	21
§ 3. Многочлены с действительными коэффициентами . . . . .	26
<b>ГЛАВА 3. Определители второго и третьего порядков</b> . . . . .	28
§ 1. Определители второго порядка . . . . .	28
§ 2. Определители третьего порядка . . . . .	30
§ 3. Свойства определителей третьего порядка . . . . .	34
<b>ГЛАВА 4. Введение в аналитическую геометрию</b> . . . . .	43
§ 1. Векторы. Алгебраические операции над векторами . . . . .	43
§ 2. Скалярное произведение векторов . . . . .	48
§ 3. Векторное произведение . . . . .	51
§ 4. Смешанное произведение векторов . . . . .	54
§ 5. Примеры задач, решаемых методами векторной алгебры . . . . .	56
§ 6. Различные формы уравнения прямой на плоскости . . . . .	59
§ 7. Задачи о взаимном расположении прямых и точек на плоскости . . . . .	61
§ 8. Различные формы уравнения плоскости . . . . .	63
§ 9. Уравнения прямой в пространстве . . . . .	66
§ 10. Задачи о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей . . . . .	67
<b>ГЛАВА 5. Системы линейных уравнений, матрицы, определители</b> . . . . .	72
§ 1. Перестановки . . . . .	72
§ 2. Определители произвольного порядка . . . . .	75
§ 3. Основные свойства определителей . . . . .	76
§ 4. Примеры вычисления определителей . . . . .	80
§ 5. Крамеровские системы линейных уравнений . . . . .	82
§ 6. Матрицы. Операции над матрицами . . . . .	87
§ 7. Обратная матрица . . . . .	95
§ 8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений . . . . .	99
§ 9. Определитель произведения матриц . . . . .	106
§ 10. Некоторые классы матриц . . . . .	107
§ 11. Блочные матрицы . . . . .	109

ГЛАВА 6. <b>Линейные пространства</b> . . . . .	112
§ 1. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ . . . . .	112
§ 2. Общие линейные пространства . . . . .	114
§ 3. Линейная зависимость векторов . . . . .	117
§ 4. Линейно независимые системы векторов . . . . .	119
§ 5. Ранг системы векторов . . . . .	121
§ 6. Конечномерные линейные пространства. Базисы . . . . .	122
§ 7. Замена базиса . . . . .	124
ГЛАВА 7. <b>Евклидовы пространства</b> . . . . .	127
§ 1. Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ . . . . .	127
§ 2. Общие евклидовы пространства . . . . .	129
§ 3. Неравенство Коши — Буняковского . . . . .	131
§ 4. Матрица Грама . . . . .	132
§ 5. Ортогональные системы векторов . . . . .	134
§ 6. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта . . . . .	135
§ 7. Разложение вектора по базису евклидова пространства . . . . .	138
§ 8. Вычисление скалярного произведения . . . . .	138
§ 9. Взаимный базис . . . . .	139
§ 10. Примеры ортогональных базисов . . . . .	139
ГЛАВА 8. <b>Подпространства</b> . . . . .	144
§ 1. Сумма и пересечение подпространств . . . . .	144
§ 2. Размерность суммы подпространств . . . . .	147
§ 3. Ортогональная проекция вектора на подпространство . . . . .	148
§ 4. Ортогональное разложение евклидова пространства . . . . .	153
ГЛАВА 9. <b>Линейные операторы и матрицы</b> . . . . .	155
§ 1. Линейные операторы. Действия над операторами . . . . .	155
§ 2. Обратный оператор . . . . .	157
§ 3. Оператор разложения по базису . . . . .	158
§ 4. Изоморфизм конечномерных пространств . . . . .	159
§ 5. Образ оператора. Ядро оператора . . . . .	160
§ 6. Матрица оператора . . . . .	161
§ 7. Матрица обратного оператора . . . . .	167
§ 8. Линейное пространство операторов . . . . .	167
§ 9. Ранг матрицы . . . . .	168
§ 10. Элементарный метод вычисления ранга матрицы . . . . .	171
ГЛАВА 10. <b>Линейные уравнения</b> . . . . .	174
§ 1. Общее решение линейного уравнения . . . . .	174
§ 2. Исследование разрешимости систем линейных алгебраических уравнений . . . . .	175
§ 3. Построение общего решения системы линейных алгебраических уравнений . . . . .	177
ГЛАВА 11. <b>Строение линейного оператора</b> . . . . .	181
§ 1. Инвариантные подпространства . . . . .	181
§ 2. Собственные числа и собственные векторы . . . . .	183
§ 3. Характеристический полином и характеристические числа . . . . .	185
§ 4. Признак линейной независимости собственных векторов . . . . .	186
§ 5. Геометрическая и алгебраическая кратности собственных чисел . . . . .	189

§ 6. Операторы простой структуры . . . . .	189
§ 7. Инварианты оператора . . . . .	191
§ 8. Инвариантные функции операторного аргумента . . . . .	194
§ 9. Инвариантные подпространства оператора в вещественном пространстве . . . . .	196
§ 10. Приведение матрицы оператора к треугольной форме . . . . .	198
§ 11. Нильпотентный оператор . . . . .	200
§ 12. Приведение матрицы оператора к жордановой форме . . . . .	201
§ 13. Корневые и циклические подпространства . . . . .	209
§ 14. Теорема Кэли — Гамильтона . . . . .	211
§ 15. Сходящиеся матрицы . . . . .	212
<b>ГЛАВА 12. Операторы в евклидовом пространстве . . . . .</b>	<b>215</b>
§ 1. Линейные функционалы . . . . .	215
§ 2. Сопряженный оператор . . . . .	216
§ 3. Вычисление матрицы оператора в евклидовом пространстве . . . . .	217
§ 4. Линейные уравнения в евклидовом пространстве . . . . .	218
§ 5. Псевдорешение линейного уравнения . . . . .	219
§ 6. Самосопряженный и косоэрмитов операторы . . . . .	220
§ 7. Неотрицательный и положительно определенный операторы . . . . .	222
§ 8. Унитарный оператор . . . . .	223
§ 9. Нормальный оператор . . . . .	224
§ 10. Некоторые свойства собственных чисел самосопряженного оператора . . . . .	228
§ 11. Применения вариационного описания собственных чисел . . . . .	231
§ 12. Корень из самосопряженного неотрицательного оператора . . . . .	236
§ 13. Обобщенная проблема собственных значений . . . . .	237
§ 14. Сингулярные базисы и сингулярные числа оператора . . . . .	238
§ 15. Полярное разложение оператора . . . . .	242
§ 16. Евклидово пространство операторов . . . . .	243
<b>ГЛАВА 13. Операторы в вещественном евклидовом пространстве . . . . .</b>	<b>247</b>
§ 1. Общие сведения . . . . .	247
§ 2. Вещественное евклидово пространство операторов . . . . .	248
§ 3. Структура нормального оператора . . . . .	250
§ 4. Структура ортогонального оператора . . . . .	252
§ 5. Матрицы вращения и отражения . . . . .	254
<b>ГЛАВА 14. Квадратичные формы и квадратичные функции . . . . .</b>	<b>257</b>
§ 1. Канонический вид квадратичной формы . . . . .	257
§ 2. Закон инерции квадратичных форм . . . . .	260
§ 3. Положительно определенные квадратичные формы . . . . .	263
§ 4. Квадратичная функция и ее инварианты . . . . .	264
§ 5. Приведенная форма квадратичной функции . . . . .	266
<b>ГЛАВА 15. Кривые второго порядка . . . . .</b>	<b>272</b>
§ 1. Приведение уравнения кривой к простейшему виду . . . . .	272
§ 2. Геометрические свойства кривых второго порядка . . . . .	276

ГЛАВА 16. Поверхности второго порядка . . . . .	284
§ 1. Приведение уравнения поверхности к простейшему виду . . . . .	284
§ 2. Геометрические свойства поверхностей второго порядка . . . . .	286
§ 3. Гиперповерхности второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$ и их классификация . . . . .	299
ГЛАВА 17. Итерационные методы . . . . .	302
§ 1. Итерационные методы решения систем линейных уравнений . . . . .	302
§ 2. Элементы общей теории итерационных методов . . . . .	306
§ 3. Метод Якоби решения задач на собственные значения . . . . .	312
§ 4. Исследование сходимости метода Якоби . . . . .	314
ГЛАВА 18. Нормы векторов и матриц . . . . .	316
§ 1. Основные неравенства . . . . .	316
§ 2. Нормы на пространстве $\mathbb{C}^n$ . . . . .	318
§ 3. Нормы на пространстве матриц . . . . .	322
§ 4. Элементы теории возмущений . . . . .	330
ГЛАВА 19. Неотрицательные матрицы . . . . .	335
§ 1. Простейшие свойства неотрицательных матриц . . . . .	335
§ 2. Положительные матрицы . . . . .	337
§ 3. Неотрицательные матрицы . . . . .	339
§ 4. Неразложимые неотрицательные матрицы . . . . .	340
Предметный указатель . . . . .	344
Литература . . . . .	350

---

---

## Предисловие

Книга написана на основе лекций по алгебре и геометрии, которые читаются для студентов первого курса института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики. Многие вопросы, затронутые в книге, активно обсуждались с сотрудниками кафедр прикладной и вычислительной математики КФУ. Авторы приносят им свою искреннюю признательность. Рукопись книги была прочитана Ю.А. Альпиным, Н.Б. Плещинским, Е.Л. Столовым, М.Р. Тимербаевым, Р.Р. Шагидуллиным. Авторы с благодарностью учли их замечания.

Мы благодарны всем читателям, приславшим свои отклики на первоначальный вариант книги. Особую признательность выражаем В.Б. Андрееву, А.В. Гулину, А.С. Ильинскому, Ю.Г. Смирнову, Е.Л. Столову, Е.В. Чижонкову, С.И. Соловьеву, М.Р. Тимербаеву, указавшим на ряд неточностей и недостатков, которые мы постарались устранить.

---

---

ГЛАВА 1  
Комплексные числа

**§ 1. Комплексные числа, алгебраические операции  
над комплексными числами**

1. Из школьного курса математики известно, что не всякое квадратное уравнение имеет решение. Самый простой пример — уравнение

$$x^2 + 1 = 0. \quad (1.1)$$

Очевидно, никакое вещественное  $x$  не может быть корнем этого уравнения. Ситуация меняется, если ввести в рассмотрение новое число, так называемую *мнимую единицу*. Будем обозначать ее через  $i$  и полагать, что

$$i^2 = -1.$$

Тогда уравнение (1.1) будет иметь корень  $\alpha_1 = i$ . Естественно положить, что  $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$ . Тогда и число  $\alpha_2 = -i$  является корнем уравнения (1.1), т. е. уравнение (1.1), как и аналогичное уравнение

$$x^2 - 1 = 0,$$

имеет два различных корня. Рассматривая уравнение

$$x^2 + q = 0,$$

где  $q > 0$ , естественно принять, что оно имеет два корня

$$\alpha_1 = i\sqrt{q} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -i\sqrt{q}.$$

Числа вида  $ib$ , где  $b$  — вещественное число, называют *мнимыми*.

Рассмотрим теперь общее квадратное уравнение, записывая его для удобства в приведенном виде:

$$x^2 - 2px + q = 0. \quad (1.2)$$

Элементарные преобразования дают

$$(x - p)^2 + q - p^2 = 0.$$

Будем считать, что  $q - p^2 > 0$ , т. е. дискриминант уравнения (1.2) отрицателен.



Теперь естественно положить, что корнями уравнения (1.2) являются числа

$$\alpha_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad \alpha_2 = p - i\sqrt{q - p^2}. \quad (1.3)$$

Это числа новой природы. Они имеют вид  $a + ib$ , где  $a$  и  $b$  — вещественные числа. Их называют *комплексными числами*. В частном случае, когда  $b = 0$ , считают, что комплексное число  $a + ib$  совпадает с вещественным числом  $a$ , а при  $a = 0$  — с мнимым числом  $ib$ .

Как правило, комплексное число будем обозначать буквой  $z$ :

$$z = x + iy.$$

Говорят, что  $x$  — *вещественная часть* комплексного числа  $z$ , а  $y$  — его *мнимая часть*.  $z$  Обозначим  $x$  через  $\operatorname{Re} z$ , а  $y$  — через  $\operatorname{Im} z$ . Таким образом, можно написать, что

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

По определению два комплексных числа *равны*, если совпадают соответственно их вещественные и мнимые части.

**2.** Естественно теперь попытаться проверить, что числа  $\alpha_1, \alpha_2$ , определенные в (1.3), — корни уравнения (1.2), т. е. при подстановке их в равенство (1.2) последнее обращается в тождество. Для этого надо уметь выполнять *алгебраические операции* над комплексными числами. Дадим соответствующие определения.

Под *суммой* комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  понимается комплексное число  $z = x + iy$ , где  $x = x_1 + x_2$ ,  $y = y_1 + y_2$ :

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2,$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2.$$

*Разностью* комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  называется число

$$z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Ясно, что если  $z$  — разность комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , то  $z_2 + z = z_1$ .

Например, сумма комплексных чисел  $z_1 = 1 + i2$  и  $z_2 = 3 + i4$  равна числу

$$z = (1 + i2) + (3 + i4) = (1 + 3) + i(2 + 4) = 4 + i6,$$

а их разность — числу

$$z = (1 + i2) - (3 + i4) = (1 - 3) + i(2 - 4) = -2 - i2.$$

Комплексное число вида  $0 + i0$  называется *нулевым*. Будем обозначать его символом  $0$ . Для любого комплексного числа  $z$  справедливы равенства

$$z + 0 = z, \quad 0 + z = z.$$

Определяя *произведение* комплексных чисел, будем действовать как при перемножении обычных двучленов, учитывая при этом, что  $i^2 = -1$ . Получаем, таким образом,

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

т. е. по определению

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} z_1. \quad (1.5)$$

Вычислим, например, произведение чисел  $z_1 = 1 + i2$  и  $z_2 = 3 + i4$ :

$$z_1 z_2 = (1 + i2) \cdot (3 + i4) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + i(1 \cdot 4 + 3 \cdot 2) = -5 + i10.$$

Для любого комплексного числа  $z$

$$z0 = 0z = 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Убедиться, что определенные выше операции сложения и умножения комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над вещественными числами:

1)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ,  $z_1 z_2 = z_2 z_1$  — *коммутативность*, или *перестановочность*,

2)  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ ,  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$  — *ассоциативность*, или *сочетательность*,

3)  $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$  — *дистрибутивность*, или *распределительность*.

УПРАЖНЕНИЕ. Непосредственной подстановкой показать, что формулы (1.3) дают корни уравнения (1.2).

Комплексное число  $z$  назовем *частным* от *деления* комплексного числа  $z_1$  на  $z_2$ , если

$$z z_2 = z_1. \quad (1.6)$$

Покажем, что если  $z_2 \neq 0$ , то  $z$  как решение уравнения (1.6) существует и определяется единственным образом. В самом деле, используя формулы (1.4), (1.5), запишем (1.6) более подробно:

$$xx_2 - yy_2 + i(xy_2 + x_2y) = x_1 + iy_1. \quad (1.7)$$

Приравнивая соответственно вещественные и мнимые части, получим

$$xx_2 - yy_2 = x_1, \quad (1.8)$$

$$xy_2 + yx_2 = y_1. \quad (1.9)$$

Единственно возможным решением этой системы уравнений будет

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (1.10)$$

$$y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.11)$$

Формулы (1.10), (1.11) определяют правило *деления* комплексных чисел.

Разделим, например, комплексное число  $z_1 = 1 + i2$  на  $z_2 = 3 + i4$ :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i2}{3 + i4} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2} + i \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 4}{3^2 + 4^2} = \frac{11}{25} + i \frac{2}{25}.$$

По определению  $z^n = zz \cdots z$  для натурального  $n$ , где сомножитель  $z$  повторяется  $n$  раз,  $z^0 = 1$ ,  $z^{-n} = (1/z)^n$ .

Важно подчеркнуть, что все введенные нами операции в случае, когда операнды вещественны, совпадают с соответствующими операциями над вещественными числами (проверьте!).

Таким образом, множество комплексных чисел можно считать расширением множества вещественных чисел.

## §2. Операция сопряжения, модуль комплексного числа

1. Число  $\bar{z} = x - iy$  называют *сопряженным* по отношению к комплексному числу  $z = x + iy$  (часто говорят, что числа  $z$  и  $\bar{z}$  *комплексно сопряжены*). Ясно, что

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \quad (2.1)$$

Отметим также, что

$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = i2y, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

2. Вещественное неотрицательное число  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  называется *модулем* комплексного числа  $z = x + iy$ . Очевидно, что

$$\text{если } |z| = 0, \text{ то } x = 0, y = 0, \text{ т. е. } z = 0. \quad (2.2)$$

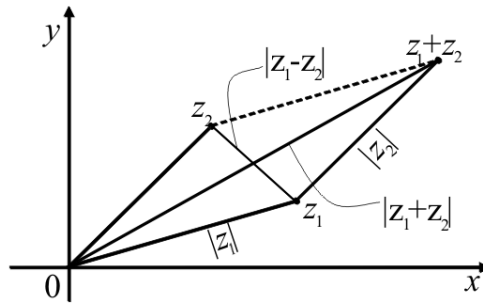


Рис. 1. К неравенствам (2.4), (2.5)

Элементарные вычисления показывают, что для любых двух комплексных чисел  $z_1, z_2$  справедливо равенство

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|. \quad (2.3)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Используя хорошо известное неравенство

$$2|xy| \leq (x^2 + y^2),$$

справедливое для любых вещественных чисел  $x, y$ , убедиться, что для любых комплексных чисел  $z_1, z_2$  справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (2.4)$$

Соотношения (2.2)–(2.4) показывают, что с модулем комплексного числа можно оперировать так же, как и с абсолютной величиной вещественного числа.

Заметим, что  $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ , следовательно,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

Точно так же

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|.$$

Таким образом,

$$||z_2| - |z_1|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (2.5)$$

### § 3. Тригонометрическая форма комплексного числа

1. Напомним, что с каждым вещественным числом  $x$  можно связать точку на числовой прямой. Аналогичная (но более сложная) геометрическая интерпретация полезна и для комплексных чисел.

Введем на плоскости декартову систему координат  $(x, y)$  и поставим в соответствие каждому комплексному числу  $z = x + iy$  точку с координатами  $(x, y)$ .

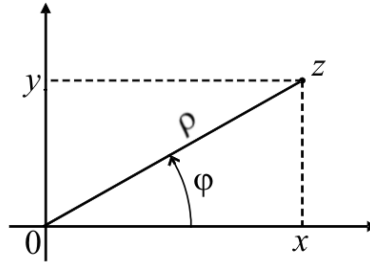


Рис. 2. К тригонометрической форме комплексного числа

При этом модуль комплексного числа — это расстояние от точки  $(x, y)$  до начала координат (сделайте рисунок!).

Взаимно сопряженные числа симметричны относительно оси  $x$  (сделайте рисунок!).

Напомним, что при сложении векторов их одноименные координаты складываются. Поэтому суммирование чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  соответствует сложению векторов  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  (сделайте рисунок!).

Неравенства (2.4), (2.5) можно интерпретировать теперь как хорошо известные неравенства для сторон треугольника (см. рис. 1).

**2.** Каждое комплексное число (кроме нуля) можно однозначно охарактеризовать двумя параметрами: модулем и углом  $\varphi$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $x$  против часовой стрелки (см. рис. 2). Угол  $\varphi$  меняется в пределах от 0 до  $2\pi$  и называется *аргументом* комплексного числа  $z$ . Часто используют обозначения  $\varphi = \arg z$ ,

$$\rho = |z|. \quad (3.1)$$

Получим явное выражение  $z$  через  $|z|$  и  $\arg z$ . Имеем

$$z = |z| \left( \frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right).$$

При этом (см. рис. 2)

$$\frac{x}{|z|} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{|z|} = \sin \varphi, \quad (3.2)$$

т. е.

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3.3)$$

Соотношения (3.1)–(3.3) дают так называемое *тригонометрическое представление* комплексного числа.

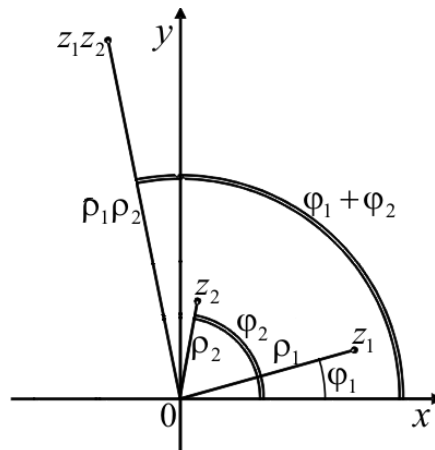


Рис. 3. К умножению комплексных чисел

**3.** Тригонометрическая запись комплексных чисел позволяет по-новому взглянуть на алгебраические операции над ними и получить ряд полезных формул.

Пусть  $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Перемножая эти числа и используя известные тригонометрические соотношения, получим

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (3.4)$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (см. рис. 3).

Вычислим, например, произведение чисел

$$z_1 = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

По формуле (3.4) имеем

$$z_1 z_2 = 6 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Здесь нужно отметить, что число  $\varphi_1 + \varphi_2$  может выйти из отрезка  $[0, 2\pi]$ , но вследствие периодичности тригонометрических функций мы можем отождествлять их аргументы, отличающиеся на величину, кратную  $2\pi$ . Это замечание дает возможность корректно определить аргумент произведения двух любых комплексных чисел. Аналогичное относится и к другим операциям над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

Запишем уравнение (1.6), используя тригонометрическое представление комплексных чисел и формулу (3.4):

$$\rho \rho_2 (\cos(\varphi + \varphi_2) + i \sin(\varphi + \varphi_2)) = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1). \quad (3.5)$$

Отсюда

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (3.6)$$

т. е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Разделим, например, комплексное число

$$z_1 = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{на} \quad z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

По формуле (3.6) имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Получим формулу для вычисления степеней комплексного числа. Используя (3.4), непосредственно получаем, что

$$z^2 = z z = \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi),$$

и, вообще, для любого целого числа  $n$  (включая нуль и отрицательные целые числа)

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (3.7)$$

Формулу (3.7) называют *формулой Муавра*<sup>1)</sup>.

Возведем, например, комплексное число

$$z = 3 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

в третью степень:

$$z^3 = \rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 27 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

#### § 4. Извлечение корня из комплексного числа

Обратимся к задаче извлечения корня степени  $n$ ,  $n \geq 1$  — целое, из комплексного числа  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , т. е. к отысканию такого числа  $\tilde{z} = \tilde{\rho}(\cos \tilde{\varphi} + i \sin \tilde{\varphi})$ , что

$$\tilde{z}^n = \tilde{\rho}^n (\cos n\tilde{\varphi} + i \sin n\tilde{\varphi}) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4.1)$$

Понятно, что поставленная задача будет решена, если положить

$$\tilde{\rho} = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\tilde{\varphi} = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

<sup>1)</sup>Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre; 1667 — 1754) — английский математик французского происхождения.

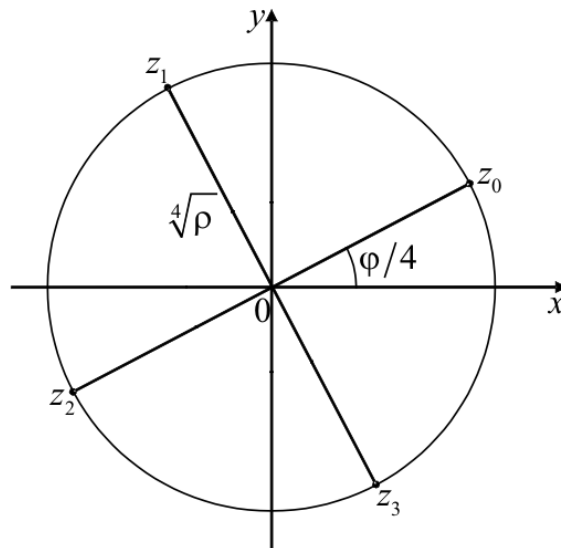


Рис. 4. К вычислению корня степени  $n$  из комплексного числа  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Здесь  $n = 4$ ,  $z_k = \sqrt[4]{\rho}(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$ ,  $\varphi_k = \varphi/4 + k\pi/2$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$

где под корнем из  $\rho$  понимается арифметическое значение корня из неотрицательного числа. Таким образом, показано, что числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.2)$$

являются *корнями* степени  $n$  из числа  $z$ . Придавая  $k$  значения, большие, чем  $n-1$ , в силу периодичности тригонометрических функций мы будем повторять циклически уже найденные значения корней.

Например, корни четвертой степени из комплексного числа

$$z = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

вычисляются по формулам

$$z_k = \sqrt[4]{3}(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\pi}{8} + k\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Итак, у любого комплексного числа (кроме нуля) существует  $n$  различных корней степени  $n \geq 1$ . Все они расположены на окружности радиуса  $\sqrt[n]{\rho}$  с центром в начале координат и делят ее на  $n$  равных частей (см. рис. 4).

Естественно поставить вопрос, можно ли указать корни из числа  $z$ , отличные от найденных. Ответ отрицательный. Чтобы убедиться в этом, надо обратиться к пункту 3, с. 24, трактуя при этом (4.1) как уравнение для отыскания корней полинома степени  $n$ .

Формулу (4.2) часто записывают в несколько иной форме. Положим

$$q_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$



Очевидно,  $q_k^n = 1$  для  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , т. е.  $q_k$  — корни степени  $n$  из единицы. Нетрудно проверить, что

$$z_k = z_0 q_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Таким образом, вычислив корень

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho} (\cos \varphi/n + i \sin \varphi/n),$$

все остальные можно получить последовательными сдвигами на угол  $2\pi/n$  по окружности.

---

---

ГЛАВА 2  
Многочлены

**§ 1. Алгебраические операции над многочленами**

1. *Многочленом (полиномом)* называют функцию вида

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n. \quad (1.1)$$

Здесь  $a_0, \dots, a_n$  — фиксированные комплексные числа, называемые *коэффициентами* многочлена. Если  $a_n$  не нуль, то целое число  $n \geq 0$  называют *порядком* или *степенью* многочлена,  $a_n$  называется *старшим коэффициентом* многочлена, переменная  $z$  может принимать любые комплексные значения.

Многочлены  $P_n(z), Q_m(z)$  равны, когда все их коэффициенты при одинаковых степенях совпадают.

Многочлен равен нулю, если все его коэффициенты — нули. Иначе говоря, это — постоянная, равная нулю. Такому многочлену нельзя приписать никакой степени. Мы будем называть его *нулевым* и обозначать символом  $0$ .

Сумма многочленов  $P_n(z) + Q_m(z)$  — многочлен, причем степень его не больше максимального из чисел  $m$  и  $n$ , или это — нулевой многочлен.

Произведение многочленов  $P_n(z)Q_m(z)$  — многочлен, степень которого есть сумма степеней, т. е.  $m + n$ .

Сложение любого многочлена с нулевым не меняет этого многочлена. Произведение двух многочленов — нулевой многочлен тогда и только тогда, когда один из сомножителей — нулевой многочлен.

Введем и исследуем операцию деления многочленов.

**2. Теорема.** *Для любых двух многочленов  $P(z)$  и  $Q(z)$  можно найти многочлены  $q(z)$  и  $r(z)$ , где  $r(z)$  имеет степень, меньшую степени многочлена  $Q(z)$ , или является нулевым многочленом, такие, что*

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z). \quad (1.2)$$

*Многочлены  $q(z)$  и  $r(z)$ , удовлетворяющие указанным условиям, определяются по многочленам  $P(z), Q(z)$  однозначно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим сначала, что  $P(z)$  — нулевой многочлен или его степень меньше степени многочлена  $Q(z)$ . В этом

случае равенство (1.2), очевидно, может быть выполнено лишь при условии, что  $q(z)$  — нулевой многочлен, а  $r(z) = P(z)$ .

Положим теперь, что многочлен  $P(z)$  имеет степень  $n$ , многочлен  $Q(z)$  имеет степень  $m$ , причем  $n \geq m$ . Для упрощения записей будем считать, что старший коэффициент многочлена  $Q$  равен единице. Случай, когда этот коэффициент — произвольное ненулевое число, требует очевидных изменений в выписываемых ниже формулах. Итак, пусть

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \\ Q(z) &= z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0, \\ q(z) &= c_{n-m} z^{n-m} + c_{n-m-1} z^{n-m-1} + \dots + c_0, \\ r(z) &= d_{m-1} z^{m-1} + d_{m-2} z^{m-2} + \dots + d_0. \end{aligned}$$

Коэффициенты многочленов  $P(z)$ ,  $Q(z)$  даны, а коэффициенты многочленов  $q(z)$ ,  $r(z)$  требуется найти. Проводя элементарные выкладки, соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в правой части (1.2) и приравняем их соответствующим коэффициентам многочлена  $P$ :

$$\begin{aligned} a_n &= c_{n-m}, \\ a_{n-1} &= c_{n-m-1} + c_{n-m} b_{m-1}, \\ a_{n-2} &= c_{n-m-2} + c_{n-m-1} b_{m-1} + c_{n-m} b_{m-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ a_m &= c_0 + c_1 b_{m-1} + c_2 b_{m-2} + \dots + c_m b_0, \\ a_{m-1} &= d_{m-1} + c_0 b_{m-1} + c_1 b_{m-2} + \dots + c_{m-1} b_0, \\ &\dots \dots \dots \\ a_0 &= d_0 + c_0 b_0. \end{aligned}$$

Полученные соотношения представляют собой систему уравнений относительно коэффициентов многочленов  $q(z)$ ,  $r(z)$ . Эта система легко решается и однозначно определяет коэффициенты искомым полиномов. Сначала находятся коэффициенты  $c_j$ , последовательно, в порядке убывания индексов:

$$\begin{aligned} c_{n-m} &= a_n, \\ c_{n-m-1} &= a_{n-1} - c_{n-m} b_{m-1}, \\ c_{n-m-2} &= a_{n-2} - c_{n-m-1} b_{m-1} - c_{n-m} b_{m-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ c_0 &= a_m - c_1 b_{m-1} - c_2 b_{m-2} - \dots - c_m b_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Затем с использованием уже найденных значений  $c_j$  вычисляются

коэффициенты  $d_j$ :

$$\begin{aligned} d_{m-1} &= a_{m-1} - c_0 b_{m-1} - c_1 b_{m-2} - \cdots - c_{m-1} b_0, \\ d_{m-2} &= a_{m-2} - c_0 b_{m-2} - c_1 b_{m-3} - \cdots - c_{m-2} b_0, \\ &\dots \dots \dots \\ d_0 &= a_0 - c_0 b_0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Заметим, что  $c_{n-m}$  не равен нулю, поскольку  $a_n$  не равен нулю, а коэффициенты полинома  $r(z)$ , вообще говоря, могут быть нулями.  $\square$

Здесь и далее символ  $\square$  обозначает конец доказательства.

Описанный в ходе доказательства теоремы способ вычисления коэффициентов многочленов  $q$ ,  $r$  называется *схемой Горнера*<sup>1)</sup>. Она широко применяется на практике.

Формула (1.2) определяет операцию *деления* многочлена  $P$  на многочлен  $Q$ ;  $q$  — *частное* от деления,  $r$  — *остаток*. В случае, когда многочлен  $r$  оказывается равным нулю, говорят, что многочлен  $P$  *делится* на многочлен  $Q$  (иногда говорят, что *делится нацело*).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формул, полученных в ходе доказательства теоремы 2, очевидно, следует, что если  $P$ ,  $Q$  являются многочленами с действительными коэффициентами, то коэффициенты многочленов  $q$ ,  $r$  — действительные числа.

ПРИМЕР. В качестве примера применения схемы Горнера разделим

$$P_4(z) = 2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 \quad \text{на} \quad Q_2(z) = z^2 - 3z + 1,$$

т. е. найдем такие многочлены

$$q_2(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \quad \text{и} \quad r(z) = d_1 z + d_0,$$

что выполняется равенство

$$P_4(z) = Q_2(z)q_2(z) + r(z).$$

В нашем примере  $n = 4$ , а  $m = 2$ . Сначала по формулам (1.3) вычислим коэффициенты  $c_2$ ,  $c_1$  и  $c_0$ :

$$\begin{aligned} c_2 &= a_4 = 2, \\ c_1 &= a_3 - c_2 b_1 = -3 - 2(-3) = 3, \\ c_0 &= a_2 - c_1 b_1 - c_2 b_0 = 4 - 3(-3) - 2 \cdot 1 = 11. \end{aligned}$$

Затем по формулам (1.4) найдем коэффициенты  $d_1$  и  $d_0$ :

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = -5 - 11(-3) - 3 \cdot 1 = 25, \\ d_0 &= a_0 - c_0 b_0 = 6 - 11 \cdot 1 = -5. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$q_2(z) = 2z^2 + 3z + 11, \quad r(z) = 25z - 5.$$

<sup>1)</sup>Уильям Джордж Горнер (William George Horner; 1786 — 1837) — английский математик.

**3.** Естественно поставить вопрос: будут ли коэффициенты полиномов  $P_n(z)$ ,  $Q_n(z)$  совпадать, если значения этих полиномов совпадают при всех  $z$ , иными словами, будут ли все коэффициенты многочлена равны нулю, если сам многочлен тождественно равен нулю. Это действительно так, но доказательство удобно будет выполнить несколько позже. Как ни странно, наиболее просто оно проводится при изучении систем линейных алгебраических уравнений (см. §5, гл. 5, с. 86).

## §2. Корни многочленов

*Корнем* многочлена  $P_n(z)$  называется такое число  $\alpha$ , вообще говоря, комплексное, что  $P_n(\alpha) = 0$ .

**1. Теорема Безу<sup>1)</sup>.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $\alpha$  — произвольное комплексное число. Тогда многочлен  $P_n(z) - P_n(\alpha)$  делится на  $z - \alpha$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2, с. 18,

$$P_n(z) - P_n(\alpha) = q_{n-1}(z)(z - \alpha) + r,$$

где  $r$  — число (многочлен нулевой степени). Полагая в этом равенстве  $z = \alpha$ , получим, что  $r = 0$ , т. е.

$$P_n(z) - P_n(\alpha) = q_{n-1}(z)(z - \alpha). \quad \square$$

Из теоремы Безу очевидным образом вытекает

**1.1. Следствие.** Многочлен  $P_n$  тогда и только тогда делится на  $z - \alpha$ , когда  $\alpha$  — корень этого многочлена.

Число  $\alpha$  называется корнем кратности  $k \geq 1$  многочлена  $P_n$ , если  $P_n(z)$  делится на  $(z - \alpha)^k$ :

$$P_n(z) = (z - \alpha)^k q_{n-k}(z),$$

а  $q_{n-k}(z)$  не делится на  $(z - \alpha)$ , т. е.  $\alpha$  не является корнем многочлена  $q_{n-k}(z)$ .

Если кратность корня равна единице, то корень называют *простым*.

<sup>1)</sup>Этьен Безу (Etienne Bezout; 1730 — 1783) — французский математик.

**2.** Исследуя свойства корней полинома, для упрощения записей обычно переходят к *приведенному* (часто говорят *нормированному*) полиному, получающемуся делением всех коэффициентов исходного полинома на его старший коэффициент.

Очевидно, что любой корень исходного полинома является корнем приведенного полинома и, наоборот, любой корень приведенного полинома — корень исходного полинома.

**2.1. Теорема (основная теорема алгебры).** *Всякий полином*

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0, \quad n \geq 1,$$

*имеет хотя бы один корень.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем обозначать декартовы координаты точек на плоскости через  $x_1, x_2$ . Пусть  $x = (x_1, x_2)$  — точка на плоскости,  $z = x_1 + ix_2$  — соответствующее ей комплексное число.

Равенство  $f(x) = |P_n(z)|$  определяет функцию  $f$  двух вещественных переменных. Эта функция неотрицательна при всех  $x$ .

Если удастся доказать, что существует точка  $x = (x_1, x_2)$  такая, что  $f(x) = 0$ , то число  $z = x_1 + ix_2$  будет корнем полинома  $P_n$ .

Докажем, прежде всего, что функция  $f$  непрерывна на всей плоскости. Для любых двух точек  $x, \tilde{x}$  вследствие (2.5), с. 12, имеем

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| = ||P_n(\tilde{z})| - |P_n(z)|| \leq |P_n(\tilde{z}) - P_n(z)|.$$

Здесь  $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2$ . Положим  $h = \tilde{z} - z$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_n(\tilde{z}) &= P_n(z + h) = \\ &= (z + h)^n + a_{n-1}(z + h)^{n-1} + \dots + a_1(z + h) + a_0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

По формуле бинома Ньютона<sup>1)</sup> для любого целого  $k \geq 1$

$$(z + h)^k = z^k + C_k^1 z^{k-1} h + \dots + C_k^{k-1} z h^{k-1} + h^k.$$

Приводя подобные в правой части (2.1), найдем, что

$$P_n(z + h) = P_n(z) + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_{n-1} h^{n-1} + h^n, \quad (2.2)$$

причем коэффициенты  $c_1, \dots, c_{n-1}$  зависят только от  $z$  и коэффициентов полинома  $P_n$ . Применяя (2.3), (2.4), с. 12, нетрудно получить, что

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| = |P_n(z + h) - P_n(z)| \leq L(|h| + |h|^2 + \dots + |h|^n), \quad (2.3)$$

<sup>1)</sup>Исаак Ньютон (Isaac Newton, 1643 — 1727) — английский физик, математик и астроном.

где  $L$  зависит только от  $|z|$  и модулей коэффициентов полинома  $P_n$ . Выбирая точку  $\tilde{x}$  достаточно близкой к  $x$ , правую часть неравенства (2.3) можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа. Это и означает непрерывность функции  $f$ .

Можно считать, что  $f(0) = |a_0| > 0$ . В противном случае нуль — корень полинома. Построим круг  $B_R$  радиуса  $R$  с центром в начале координат. Обозначим через  $S_R$  окружность, границу круга  $B_R$ . Пусть  $x \in S_R$ . Запишем  $f(x)$  в виде  $f(x) = |z^n - (-a_{n-1}z^{n-1} - \dots - a_0)|$ . Вследствие (2.5), с. 12, отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} f(x) &\geq |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_0| = R^n - |a_{n-1}|R^{n-1} - \dots - |a_0| = \\ &= R^n(1 - |a_{n-1}|R^{-1} - \dots - |a_0|R^{-n}). \end{aligned}$$

Правая часть полученного неравенства стремится к бесконечности при  $R \rightarrow \infty$ . Поэтому, выбирая  $R$  достаточно большим, можно добиться того, что

$$f(x) \geq 2f(0) \quad \forall x \in S_R. \quad (2.4)$$

По доказанному выше функция  $f$  непрерывна на всей плоскости, значит, по теореме Вейерштрасса<sup>1)</sup> она достигает минимального значения в некоторой точке  $x^1$  на замыкании круга  $B_R$ . Очевидно,  $f(x^1) \leq f(0)$ , но тогда вследствие оценки (2.4) точка  $x^1$  не может лежать на  $S_R$ , следовательно, она — внутренняя точка области  $B_R$ . Будем считать, что  $f(x^1) > 0$ . В противном случае точка  $x^1$  соответствует корню полинома  $P_n$ .

Пусть  $h = h_1 + ih_2$ . Если модуль  $h$  достаточно мал, то точка

$$x^2 = (x_1^1 + h_1, x_2^1 + h_2)$$

лежит внутри  $B_R$ . По определению  $f(x^2) = |P_n(z^1 + h)|$ . Используя (2.2), получим, что  $P_n(z^1 + h) = P_n(z^1) + c_1h + c_2h^2 + \dots + h^n$ , причем коэффициенты  $c_1, \dots, c_{n-1}$  зависят только от  $z^1$  и коэффициентов полинома  $P_n$ . По предположению  $P_n(z^1) \neq 0$ , поэтому

$$\frac{P_n(z^1 + h)}{P_n(z^1)} = 1 + d_1h + \dots + d_nh^n.$$

Среди чисел  $d_1, \dots, d_n$  хотя бы одно не нуль, по крайней мере, последнее таково. Пусть  $d_k \neq 0$ , а все числа  $d_j$  с меньшими номерами — нули. Тогда для любого  $c \neq 0$

$$\frac{P_n(z^1 + h)}{P_n(z^1)} = 1 + \frac{d_k}{c^k}(ch)^k + \frac{d_{k+1}}{c^{k+1}}(ch)^{k+1} + \dots + \frac{d_n}{c^n}(ch)^n. \quad (2.5)$$

<sup>1)</sup>См. курс математического анализа. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass; 1815 — 1897) — немецкий математик.

Выберем  $c$  так, чтобы  $c^k = -d_k$ . Положим  $v = ch$ . Тогда

$$\frac{f(x^2)}{f(x^1)} = \frac{|P_n(z^1 + h)|}{|P_n(z^1)|} = |1 - v^k + v^k b(v)|,$$

где  $b(v) = \frac{d_{k+1}}{c^{k+1}}v + \dots + \frac{d_n}{c^n}v^{n-k}$ . Выберем теперь  $h$  так, что  $v$  — вещественное положительное число, меньшее единицы, а  $|b(v)| \leq 1/2$ . При таком  $v$ , очевидно,

$$\frac{f(x^2)}{f(x^1)} \leq 1 - \frac{v^k}{2} < 1,$$

а этого быть не может, так как  $x^1$  — точка минимума функции  $f$  на замыкании  $B_R$ . Получили противоречие. Остается принять, что  $f(x^1) = 0$ , т. е.  $z^1 = x_1^1 + ix_2^1$  — корень полинома  $P_n$ .  $\square$

**3.** Пусть  $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $n \geq 1$ . По основной теореме алгебры полином  $P_n$  имеет корень. Обозначим его через  $\alpha_1$ . Пусть этот корень имеет кратность  $k_1 \geq 1$ . Тогда

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1} q_{n-k_1}(z).$$

Если  $k_1 = n$ , то, очевидно,  $q_{n-k_1} = 1$ . В противном случае полином  $q_{n-k_1}(z)$  имеет корень. Обозначим его через  $\alpha_2$ . Понятно, что  $\alpha_2$  является корнем полинома  $P_n$ , причем по построению отличным от  $\alpha_1$ . Пусть кратность  $\alpha_2$  (как корня полинома  $q_{n-k_1}$ ) равна  $k_2$ . Тогда

$$q_{n-k_1}(z) = (z - \alpha_2)^{k_2} q_{n-k_1-k_2}(z),$$

следовательно,

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1} (z - \alpha_2)^{k_2} q_{n-k_1-k_2}(z).$$

Ясно, что  $k_2$  — кратность  $\alpha_2$  как корня полинома  $P_n$ . Продолжая этот процесс, получим, что

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1} (z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_m)^{k_m}, \quad (2.6)$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_m$  — целые числа, не меньшие единицы, и такие, что  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ .

Таким образом, всякий полином степени  $n$  имеет  $n$  корней (с учетом их кратности).



**3.1. Теорема.** *Полином  $P_n$  степени  $n \geq 1$  не может иметь больше чем  $n$  корней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть  $P_n(\alpha) = 0$  и  $\alpha$  не совпадает ни с одним из чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , определенных в предыдущем пункте. По следствию из теоремы Безу имеем  $P_n(z) = (z - \alpha)q_{n-1}(z)$ , откуда на основании (2.6) получаем, что

$$(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_m)^{k_m} = (z - \alpha)q_{n-1}(z).$$

Правая часть этого равенства при  $z = \alpha$  равна нулю, а левая не равна нулю. Полученное противоречие означает, что никакое число, отличное от  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , не может быть корнем полинома  $P_n$ .  $\square$

4. Пусть  $Q_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  — произвольный полином степени  $n$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — корни полинома  $Q_n$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_m$  — их кратности, причем  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Вследствие результатов, полученных в пункте 3, полином  $Q_n$  можно представить в виде  $Q_n(z) = A(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_m)^{k_m}$ , где  $A$  — некоторая постоянная.

5. Занумеруем корни полинома  $P_n$  целыми числами от 1 до  $n$ , повторяя каждый корень столько раз, какова его кратность, и запишем (2.6) в виде  $P_n(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$ . Раскрывая скобки в правой части равенства, приводя подобные и приравнивая коэффициенты при степенях  $z$  соответствующим коэффициентам в левой части, получим формулы, выражающие коэффициенты полинома  $P_n$  через его корни:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n), \\ a_{n-2} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ &\dots \\ a_0 &= (-1)^n \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n. \end{aligned}$$

Закономерность образования этих формул очевидна: в каждой последующей строке количество сомножителей увеличивается на единицу, складываются всевозможные произведения различных сомножителей.

Полученные формулы называются *формулами Виета* (часто пишут Виета)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>Франсуа Виет (Francois Viète; 1540 — 1603) — французский математик, основоположник символической алгебры. По образованию и основной профессии — юрист.

### § 3. Многочлены с действительными коэффициентами

1. Пусть все коэффициенты полинома

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

есть вещественные числа, тогда если  $\alpha$  — корень этого полинома, то и сопряженное число  $\bar{\alpha}$  — корень полинома  $P_n$ .

Доказательство этого утверждения сразу вытекает из формулы

$$\overline{P_n(z)} = \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \dots + a_0,$$

получающейся непосредственным применением соотношений (2.1), с. 11, и того очевидного факта, что если  $P_n(\alpha) = 0$ , то и  $\overline{P_n(\alpha)} = 0$ .

Пусть теперь  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  — все вещественные корни полинома  $P_n$ . Обозначим через  $k_1, k_2, \dots, k_s$  их кратности. Положим

$$r = k_1 + k_2 + \dots + k_s, \quad Q_r(z) = (z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_s)^{k_s}.$$

Тогда

$$P_n(z) = Q_r(z)R_{n-r}(z). \quad (3.1)$$

Очевидно, что все коэффициенты многочлена  $Q_r$  вещественны, поэтому и все коэффициенты многочлена  $R_{n-r}$  вещественны (см. замечание на с. 20). По построению многочлен  $R_{n-r}$  может иметь только комплексные корни. Заметим, что при любых  $z, \alpha$

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 + pz + q,$$

где  $p = -\alpha - \bar{\alpha} = -2\operatorname{Re} \alpha$ ,  $q = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$  — вещественные числа. Поэтому, если  $\alpha$  — комплексный корень полинома  $P_n$ , а следовательно, и корень полинома  $R_{n-r}$ , то из (3.1) вытекает равенство

$$P_n(z) = Q_r(z)(z^2 + pz + q)R_{n-r-2}(z),$$

причем числа  $p, q$  вещественны, значит, полином  $R_{n-r-2}$  имеет только вещественные коэффициенты. Продолжая этот процесс, получим, что

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_s)^{k_s} (z^2 + p_1z + q_1) \dots \dots (z^2 + p_tz + q_t). \quad (3.2)$$

Здесь  $s$  — количество различных вещественных корней полинома  $P_n$ , а  $t$  — количество пар комплексно сопряженных корней этого полинома.

Из представления (3.2) сразу же вытекает, что у полинома с вещественными коэффициентами **нечетного** порядка существует по крайней мере один вещественный корень.

Полагая, что  $z$  в равенстве (3.2) — вещественное число, можно сказать, что полином с вещественными коэффициентами допускает представление в виде произведения линейных и квадратичных вещественных сомножителей.

ПРИМЕР. Нетрудно видеть, что одним из корней полинома

$$P_3(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = z^3 - 6z + 9$$

является число  $\alpha = -3$ . Разделим многочлен  $P_3(z)$  на

$$Q_1(z) = z + b_0 = z + 3,$$

т. е. найдем такой многочлен

$$q_2(z) = c_2z^2 + c_1z + c_0,$$

что выполняется равенство

$$P_3(z) = Q_1(z)q_2(z).$$

Вычисления проведем с помощью схемы Горнера. Их удобно оформить в виде таблицы:

$b_0 = 3$	$a_3 = 1$	$a_2 = 0$	$a_1 = -6$	$a_0 = 9$
		$c_2b_0 =$ $= 1 \cdot 3 = 3$	$c_1b_0 =$ $= (-3)3 = -9$	$c_0b_0 =$ $= 3 \cdot 3 = 9$
	$c_2 = a_3 =$ $= 1$	$c_1 = a_2 - c_2b_0 =$ $= -3$	$c_0 = a_1 - c_1b_0 =$ $= 3$	$r_0 = a_0 - c_0b_0 =$ $= 0$

Итак,

$$q_2(z) = z^2 - 3z + 3,$$

а остаток  $r_0$  равен нулю, поскольку многочлен  $P_3(z)$  нацело делится на  $z + 3$ :

$$P_3(z) = (z + 3)(z^2 - 3z + 3).$$

Очевидно, число  $\alpha = -3$  не является корнем полинома  $q_2(z)$ . Поэтому  $\alpha$  — простой корень полинома  $P_3(z)$ . Для того, чтобы найти оставшиеся два его корня, надо решить квадратное уравнение

$$z^2 - 3z + 3 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен  $-3$ , следовательно, оно не имеет вещественных корней. Таким образом, полином третьего порядка  $P_3(z)$  с вещественными коэффициентами мы представили в виде произведения линейного и квадратичного вещественных сомножителей.

---

---

ГЛАВА 3  
Определители второго и третьего порядков

§ 1. Определители второго порядка

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$  — заданные, вообще говоря, комплексные числа,  $x_1, x_2$  требуется найти.

Решим эту систему, используя метод исключения неизвестных. Этот метод обычно называют *методом Гаусса*<sup>1)</sup>. Поделим обе части первого уравнения на  $a_{11}$ :

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Затем умножим полученное уравнение на  $a_{21}$  и вычтем почленно это уравнение из второго уравнения системы:

$$\left( a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21} \right) x_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

Подставляя найденное выражение для  $x_2$  в первое уравнение системы (1.1), легко найти выражение для  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

Понятно, что формулы (1.2), (1.3) имеют смысл, если

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Формулы (1.2), (1.3) полезно записать в несколько ином виде. Введем соответствующие определения и обозначения.

---

<sup>1)</sup>Иоганн Карл Фридрих Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauss; 1777 — 1855) — немецкий математик, астроном и физик.

Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

называют *матрицей второго порядка*. Величину

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.5)$$

называют *определителем* матрицы  $A$ . Для определителя используют следующие обозначения:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Равенства (1.2), (1.3) теперь можно записать в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Полученные формулы называют *формулами Крамера*<sup>1)</sup>.

Формулы (1.2), (1.3) не имеют смысла, когда

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

или

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

т. е. строки определителя  $|A|$  пропорциональны. Если при этом и

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

то первое и второе уравнения системы (1.1), фактически, совпадают, и она имеет бесконечное множество решений. Если  $|A| = 0$ , но

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

то уравнения системы (1.1) противоречивы, система *несовместна*, не имеет ни одного решения.

<sup>1)</sup>Габриэль Крамер (Gabriel Cramer; 1704 – 1752) — швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры.

ПРИМЕРЫ. 1) Определитель матрицы системы

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 5, \\3x_1 + 4x_2 &= 6,\end{aligned}$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

Система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 12}{-2} = -4, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 15}{-2} = \frac{9}{2}.$$

2) Определитель матрицы системы

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 3, \\2x_1 + 4x_2 &= 6,\end{aligned}$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

При этом

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}.$$

Уравнения системы, фактически, совпадают. Система имеет бесчисленное множество решений.

3) Система

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 2, \\2x_1 + 4x_2 &= 6,\end{aligned}$$

не имеет решений, так как ее определитель равен нулю, но  $b_1/b_2 \neq a_{12}/a_{22}$ .

## § 2. Определители третьего порядка

1. Обратимся к системе трех уравнений с тремя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \quad (2.1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \quad (2.2)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \quad (2.3)$$

Из ее коэффициентов можно составить *матрицу третьего порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Получим формулы для решения системы, вновь используя метод Гаусса. Поделим обе части уравнения (2.1) на  $a_{11}$ . Полученное уравнение умножим на  $a_{21}$  и вычтем почленно из уравнения (2.2). Аналогично поступим с уравнением (2.3). В результате система (2.1)–(2.3) преобразуется к виду

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad (2.5)$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}, \quad (2.6)$$

$$\left(a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31}\right)x_3 = b_3 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{31}. \quad (2.7)$$

Теперь из уравнений (2.6), (2.7) исключим неизвестную  $x_2$  по аналогии с тем, как мы исключали неизвестную  $x_1$  из системы (1.1). После элементарных преобразований получим

$$x_3 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (2.8)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Вывести равенство (2.8).

Знаменатель полученной дроби называют *определителем* матрицы  $A$ , т. е. по определению

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Заметим, что числитель дроби в правой части (2.8) аналогичен знаменателю, а именно, множители при определителях второго порядка заменены на  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  соответственно. Формуле (2.8) поэтому можно придать вид

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (2.10)$$

Зная выражение для  $x_3$ , из уравнения (2.6) найдем выражение для  $x_2$ , а затем при помощи уравнения (2.5) — для  $x_1$ . Можно избежать этих громоздких вычислений, действуя следующим образом. Запишем систему (2.1)–(2.3) в виде

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{22}x_2 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + a_{32}x_2 &= b_3. \end{aligned}$$

Теперь, фактически, вновь используя формулу (2.10), получим

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}}. \quad (2.11)$$

Аналогично,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}}. \quad (2.12)$$

Формулы (2.10)–(2.12) имеют смысл, если определитель матрицы  $A$  не равен нулю. Полное исследование разрешимости линейных систем с тремя неизвестными в случае, когда определитель  $|A|$  равен нулю, довольно сложно. Позже мы рассмотрим этот вопрос применительно к системам с произвольным числом неизвестных.

**2.** Формулам (2.10)–(2.12) мы придадим в дальнейшем более симметричный вид, но сначала представим определитель в более удобной для дальнейших исследований форме.

Вычислим входящие в (2.9) определители второго порядка, раскроем скобки и соберем вместе слагаемые с одинаковыми знаками. Получим:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \quad (2.13)$$



Для того, чтобы подметить закономерность расстановки знаков в этой сумме, нам полезно будет ввести некоторые новые понятия и обозначения.

Три целых числа 1, 2, 3 можно расположить шестью различными способами:

$$123, 231, 312, 321, 213, 132. \quad (2.14)$$

Иначе говоря, из трех чисел, можно составить шесть различных *перестановок*.

В дальнейшем будет удобно записывать перестановки в виде  $n_1n_2n_3$ , подразумевая под  $n_i$  одно из чисел 1, 2, 3. При этом, конечно, все числа  $n_1, n_2, n_3$  считаются различными.

Рассмотрим некоторую конкретную перестановку  $n_1n_2n_3$  и составим все пары чисел  $n_in_j$ , где  $i < j$ . Понятно, что таких пар всего три:  $n_1n_2, n_1n_3$  и  $n_2n_3$ . Говорят, что пара чисел  $n_in_j$ , где  $i < j$ , образует *инверсию*, если  $n_i > n_j$ . Каждой перестановке соответствует определенное количество инверсий, а именно, 0, 1, 2, или 3. Количество инверсий в перестановке  $n_1n_2n_3$  будем обозначать через  $\sigma(n_1, n_2, n_3)$ .

Перестановку  $n_1n_2n_3$  будем называть *четной*, если ей соответствует четное количество инверсий (нуль считается четным числом). В противном случае перестановка называется *нечетной*.

Нетрудно убедиться, что первые три из перестановок (2.14) четные, а остальные нечетные.

Каждое слагаемое в выражении определителя (2.13) имеет вид

$$\pm a_{1n_1}a_{2n_2}a_{3n_3},$$

причем знак плюс ставится в том случае, когда перестановка  $n_1n_2n_3$  четная. В противном случае ставится знак минус. Равенство (2.13) с использованием введенных обозначений можно записать в виде

$$|A| = \sum_{n_1n_2n_3} (-1)^{\sigma(n_1n_2n_3)} a_{1n_1}a_{2n_2}a_{3n_3}, \quad (2.15)$$

где символ  $\sum_{n_1n_2n_3}$  означает суммирование, которое распространяется на всевозможные перестановки  $n_1n_2n_3$ .

Для запоминания способа расстановки знаков в (2.13) полезно использовать схему, представленную на рис. 1.

ПРИМЕР.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 = \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0. \end{aligned}$$

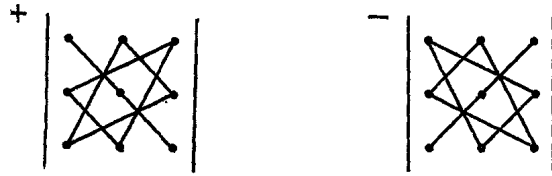


Рис. 1. Правило расстановки знаков в определителе третьего порядка

### § 3. Свойства определителей третьего порядка

#### 1. Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице  $A$ .

Матрица  $A^T$  состоит из тех же элементов, что и матрица  $A$ , но расположенных в другом порядке. Первый столбец матрицы  $A^T$  состоит из элементов первой строки матрицы  $A$ . Аналогичное справедливо и для последующих столбцов матрицы  $A^T$ .

Вычисляя по формуле (2.13) определитель матрицы  $A^T$ , получим

$$\begin{aligned} |A^T| = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Сравнивая  $|A^T|$  и  $|A|$ , легко заметить, что они различаются только порядком следования сомножителей в соответствующих слагаемых и порядком расположения этих слагаемых.

Таким образом, определитель не меняется при транспонировании матрицы.

Все дальнейшие свойства определителей формулируются в терминах их строк. По только что доказанному свойству 1 они будут справедливы и для столбцов.

**2.** Непосредственно из формулы (2.15) вытекает, что если все элементы некоторой строки определителя — нули, то определитель равен нулю.

**3.** Если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы определителей. Запишем соответствующую формулу

применительно к первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Справедливость данного свойства проверяется непосредственным использованием формулы (2.15):

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 n_2 n_3} (-1)^{\sigma(n_1 n_2 n_3)} (a_{1n_1} + b_{1n_1}) a_{2n_2} a_{3n_3} &= \sum_{n_1 n_2 n_3} (-1)^{\sigma(n_1 n_2 n_3)} a_{1n_1} a_{2n_2} a_{3n_3} + \\ &+ \sum_{n_1 n_2 n_3} (-1)^{\sigma(n_1 n_2 n_3)} b_{1n_1} a_{2n_2} a_{3n_3}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что общий множителей элементов строки можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

и, вообще,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} & \alpha a_{13} + \beta b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \\ &= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Это свойство часто формулируют так: определитель *линеен* по каждой строке.

**4.** Если в определителе две строки совпадают, то он равен нулю. Будем считать, что совпадают две первые строки. Для других пар строк выкладки полностью аналогичны. Запишем равенство (2.13), заменяя элементы второй строки на равные им элементы первой строки:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{13}a_{11}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{12}a_{31} - a_{12}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{32}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Легко заметить, что для каждого слагаемого со знаком плюс находится одно слагаемое, состоящее из тех же сомножителей, но со знаком минус, значит,  $|A| = 0$ .

**5.** Если в определителе поменять местами две строки, то знак его изменится на противоположный, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Действительно, в силу только что доказанного свойства 4 имеем, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Последовательно используя свойство 3, левую часть этого равенства можно записать в виде суммы четырех слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вследствие свойства 4 первое и последнее слагаемые этой суммы равны нулю, поэтому

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. равенство (3.3) справедливо.

Переставляя столбцы определителей, (2.11), (2.12) можно записать в виде

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (3.4)$$

Формулам, дающим решение системы (2.1) – (2.3), можно придать теперь компактный вид

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

где  $\Delta = |A|$ , а  $\Delta_i$  получается из  $|A|$  заменой  $i$ -того столбца столбцом правой части системы (2.1) – (2.3). Формулы (3.5) называют *формулами Крамера*.

Продолжим изучение свойств определителей третьего порядка.

**6.** Определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. Опять проведем доказательство, рассматривая первую и вторую строки. Используя свойство 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{21} & a_{12} + \alpha a_{22} & a_{13} + \alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель равен нулю, так как его первая и вторая строки совпадают.

**7.** Получим необходимое и достаточное условие равенства определителя  $|A|$  нулю. Будем говорить, что строки определителя *линейно зависимы*, если существуют числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , не все равные нулю, и такие, что

$$\alpha a_{1j} + \beta a_{2j} + \gamma a_{3j} = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

В дальнейшем будем для определенности считать, что  $\alpha \neq 0$ . Тогда

$$a_{1j} = c_1 a_{2j} + c_2 a_{3j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

где  $c_1 = -\beta/\alpha$ ,  $c_2 = -\gamma/\alpha$ . Говорят, что в этом случае первая строка есть *линейная комбинация* второй и третьей строк.

Покажем, что определитель  $|A|$  равен нулю тогда и только тогда, когда его строки линейно зависимы.

Пусть для строк определителя выполнено условие (3.6). Умножим вторую строку определителя на  $-c_1$  и прибавим к первой. Величина определителя не изменится. Умножим третью строку на  $-c_2$  и прибавим к первой строке преобразованного определителя. Вновь величина

определителя не изменится, но первая строка определителя, очевидно, будет содержать только нулевые элементы и потому определитель будет равен нулю.

Пусть определитель  $|A|$  равен нулю. Рассмотрим все определители второго порядка, получающиеся из  $|A|$  вычеркиванием одного столбца и одной строки, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Если не все элементы определителя  $|A|$  равны нулю (в такой ситуации доказываемое утверждение выполняется тривиальным образом), то возможны два случая: 1) все эти определители второго порядка равны нулю, 2) хотя бы один из них отличен от нуля.

Рассмотрим второй случай. Первый рассматривается аналогично, причем рассуждения оказываются более простыми. Будем считать, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, что не снижает общности рассуждений, так как этого всегда можно добиться, переставляя строки и столбцы и не меняя при этом величины определителя  $A$ . Действительно, такие перестановки могут изменить лишь знак определителя, а он, как мы полагаем, равен нулю.

Воспользовавшись формулой (2.9), отсюда получим, что

$$a_{13} = c_1 a_{23} + c_2 a_{33}, \quad (3.7)$$

где

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}, \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}.$$

Далее, определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

равен нулю, так как у него два последних столбца совпадают. Записывая этот определитель по формуле (2.9), получим как и раньше, что

$$a_{12} = c_1 a_{22} + c_2 a_{32}. \quad (3.8)$$

Наконец, рассматривая нулевой определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix},$$

получим, что

$$a_{11} = c_1 a_{21} + c_2 a_{31}. \quad (3.9)$$

Равенства (3.7) – (3.9) означают, что первая строка определителя есть линейная комбинация второй и третьей строк.

**8.** Получим так называемую формулу разложения определителя по строке. Используя свойство 3, запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначив через  $A_{1j}$  множители при соответствующих элементах первой строки определителя  $|A|$ , можем написать

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (3.10)$$

Преобразуем определители  $A_{1j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Умножим первую строку  $A_{11}$  на  $a_{21}$  и вычтем из второй, затем умножим первую строку на  $a_{31}$  и вычтем из третьей. Получим в результате

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично,

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

Определитель  $A_{1j}$  называется *алгебраическим дополнением* элемента  $a_{1j}$ .

Определитель  $M_{1j}$  второго порядка, получающийся из  $A_{1j}$  вычеркиванием первой строки и  $j$ -того столбца, называется *минором*, соответствующим элементу  $a_{1j}$  определителя  $|A|$ .

Вообще, алгебраическое дополнение  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  определителя  $|A|$  получается заменой в  $|A|$  элемента  $a_{ij}$  единицей, всех остальных элементов  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца — нулями.

Минор  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  определителя  $|A|$  — определитель второго порядка, получающийся из  $|A|$  вычеркиванием  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца.

Установим связь между алгебраическими дополнениями и минорами. Меняя местами первый и второй столбец, получим, что

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Аналогично, выполняя две перестановки столбцов и потому не меняя знака, получим, что

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Теперь понятно, что достаточно научиться вычислять определитель  $A_{11}$ . Используя формулу (2.13), получим

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11}.$$

Вследствие (3.11), (3.12) будем иметь, что  $A_{12} = -M_{12}$ ,  $A_{13} = M_{13}$ . Формуле (3.10) можно придать вид

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Нетрудно сообразить, что справедливы общие формулы

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad (3.13)$$

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3} \quad (3.14)$$

разложения определителя по  $i$ -той строке, где  $i = 1, 2, 3$ .

Можно написать и аналогичную формулу разложения определителя по столбцу

$$|A| = a_{1i}(-1)^{i+1}M_{1i} + a_{2i}(-1)^{i+2}M_{2i} + a_{3i}(-1)^{i+3}M_{3i}, \quad (3.15)$$

где  $i = 1, 2, 3$ .



Подчеркнем, что знаки в формулах (3.14), (3.15) определяются количеством перестановок строк и столбцов в алгебраическом дополнении  $A_{ij}$ , необходимых для того, чтобы переместить единицу на позицию первого элемента первой строки.

ПРИМЕР. Вычислим определитель разложением по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 - 4(-6) + 7(-3) = 0.$$

Тот же определитель вычислим разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -4(-6) + 5(-12) - 6(-6) = 0.$$

Используем теперь свойство 6) для вычисления того же определителя. Умножим сначала первый столбец на два и вычтем из второго столбца. Придем к равенству

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & -6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Затем умножим первый столбец на три и вычтем из третьего столбца. Получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & -6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по первой строке, найдем его значение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

Отметим, что на формулу (2.9) можно смотреть теперь как на разложение определителя по третьему столбцу.

9. Пусть  $i \neq k$ . Тогда

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0. \quad (3.16)$$

Действительно, выражение в левой части (3.16) можно интерпретировать как разложение определителя по  $k$ -той строке, которая состоит из элементов  $i$ -той строки. Определитель с двумя равными строками равен нулю.

Соотношениям (3.13), (3.16) полезно придать общую форму

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (3.17)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \quad (3.18)$$

так называемый *символ Кронекера*<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup>Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker; 1823 — 1891) — немецкий математик.

---

---

## ГЛАВА 4

# Введение в аналитическую геометрию

### § 1. Векторы. Алгебраические операции над векторами

1. В этой главе мы будем использовать только вещественные числа. Рассматривается трехмерное евклидово<sup>1)</sup> пространство. Вводится *декартова*<sup>2)</sup> *система координат*. Это означает следующее. Фиксируется некоторая точка пространства (в дальнейшем она всегда будет обозначаться символом  $0$  (ноль)). Она называется *началом системы координат*. Задаются три попарно ортогональные прямые, проходящие через точку  $0$ . Задается единица длины и направление отсчета от точки  $0$  на каждой прямой.

Положение точек на этих прямых будем определять вещественными числами  $x_1, x_2, x_3$  (т. е. будем интерпретировать эти прямые как вещественные оси). Будем называть их в дальнейшем *осями координат*.

Понятно, что теперь положение каждой точки в пространстве взаимно однозначно определяется заданием трех чисел  $x_1, x_2, x_3$ , называемых *координатами точки* (геометрический смысл координат поясняется на рис. 1, а).

Точки пространства будем обозначать малыми латинскими буквами:  $x, y, z, \dots$ . Будут использоваться и обозначения с явным указанием координат, например  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Иногда нам придется нумеровать различные точки пространства. В этом случае номер (индекс) будем писать сверху, например,  $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ .

Как обычно, направленные отрезки будем называть *векторами*. На рисунках (при необходимости) направление вектора будем указывать стрелкой. Векторы, имеющие равные длины и одинаковые направления, считаются *равными* (см. рис. 2, а). С каждой точкой  $x$  пространства взаимно однозначно связан вектор, соединяющий ее с началом координат (см. рис. 1, б). Концом этого вектора считается точка  $x$ .

Вектор, соответствующий точке  $0$ , будем называть *нулевым*.

---

<sup>1)</sup>Евклид или Эвклид (ок. 300 г. до н. э.) — древнегреческий математик. Мировую известность приобрел благодаря сочинению по основам математики «Начала».

<sup>2)</sup>Рене Декарт (Rene Descartes; лат. Renatus Cartesius — Картезий; 1596 — 1650) — французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

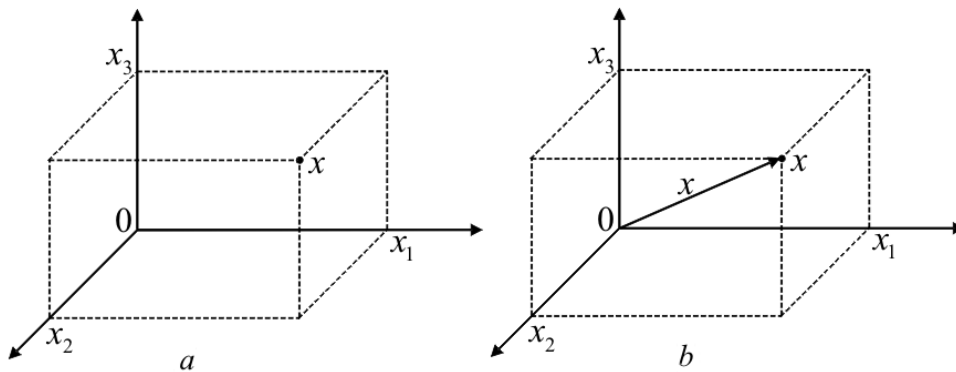


Рис. 1. Декартовы координаты точки  $x = (x_1, x_2, x_3)$  (a). Вектор  $x$  (b)

Векторы будем обозначать теми же символами, что и соответствующие им точки пространства.

Координаты точки  $x$  будем называть *декартовыми координатами вектора  $x$* . Геометрический смысл декартовых координат вектора очевиден. Это длины проекций вектора  $x$  (с учетом знака) на соответствующие оси координат.

Длину вектора  $x$  часто называют *модулем* и обозначают через  $|x|$ . Лишь один вектор имеет нулевую длину. Это вектор  $0$ . Из теоремы Пифагора сразу же вытекает, что для любого вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

**2.** Определим теперь так называемые *алгебраические операции над векторами*. Будем опираться при этом на знакомые из школьного курса физики правила действия с силами, приложенными к материальной точке.

1) *Умножение вектора на число*. Пусть заданы вещественное число  $\alpha$  и вектор  $x$ . Вектор  $y$  называется произведением  $\alpha$  и  $x$  (пишет-

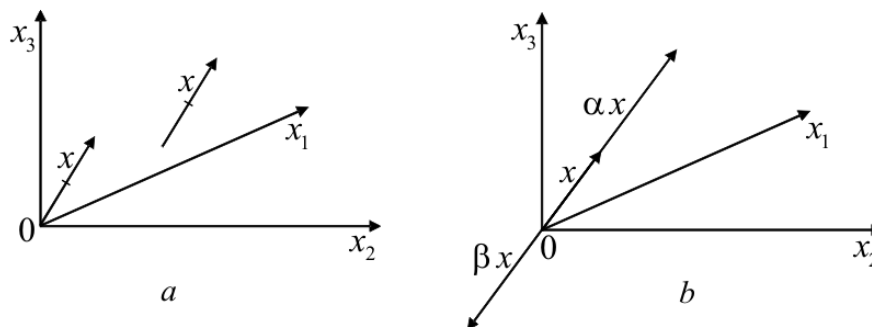


Рис. 2. Равные векторы (a). Коллинеарные векторы,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  (b)

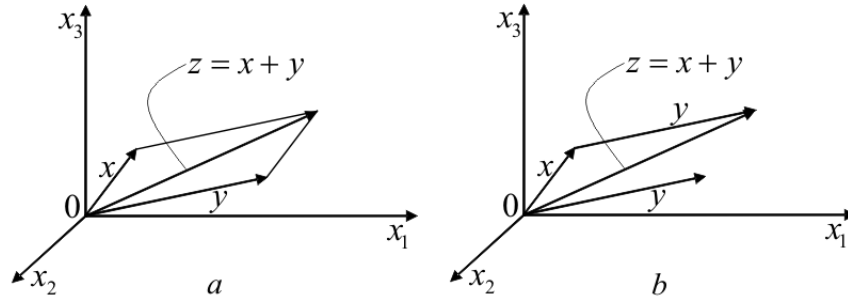


Рис. 3. Сложение векторов. Правило параллелограмма (a) и правило треугольника (b)

ся  $y = \alpha x$ ), если  $|y| = |\alpha||x|$ , а направление  $y$  совпадает с направлением вектора  $x$  при положительном  $\alpha$  и противоположно направлению  $x$  при отрицательном  $\alpha$ .

Поясним, что умножение любого вектора на нуль дает нулевой вектор, умножение любого числа на нулевой вектор также дает нулевой вектор.

Векторы, лежащие на одной прямой, называют *коллинеарными* (см. рис. 2, b). Понятно, при любых  $\alpha$  и  $x$  векторы  $y = \alpha x$  и  $x$  коллинеарны. Наоборот, если векторы  $x, y$  коллинеарны, и хотя бы один из них не нуль (например,  $x$ ), то найдется такое число  $\alpha$ , что  $y = \alpha x$ .

2) *Сложение векторов.* Вектор  $z$  называется суммой векторов  $x$  и  $y$  (пишется  $z = x + y$ ), если он образует диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $x, y$  (см. рис. 3, a).

Нетрудно видеть, что  $x + y = y + x$ , т. е., как говорят, операция сложения векторов *коммутативна* (*перестановочна*).

УПРАЖНЕНИЕ. Интерпретируйте правило сложения векторов в предельном случае, когда слагаемые коллинеарны.

Иногда удобнее описывать то же самое правило сложения век-

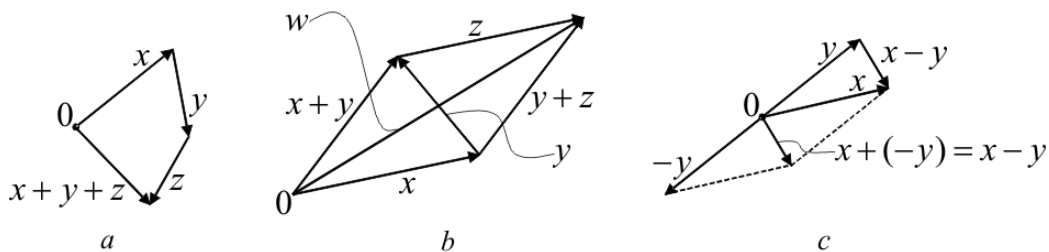


Рис. 4. Сложение векторов: (a) сумма трех векторов; (b) к правилу ассоциативности  $w = x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$ ; (c) вычитание векторов,  $x + (-y) = x - y$ ,  $x = y + (x - y)$

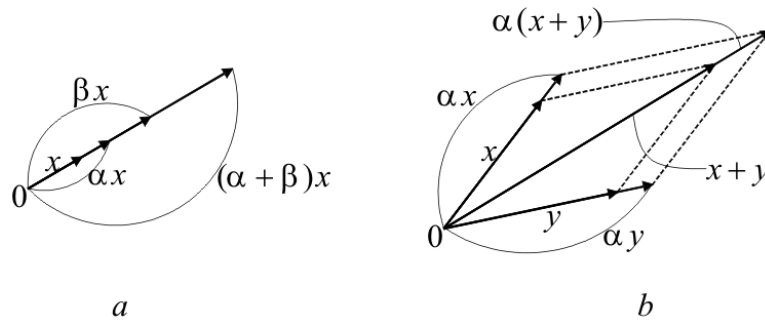


Рис. 5. К дистрибутивности умножения на скаляр (a) и по сложению векторов (b)

торов иначе: от конца вектора  $x$  откладывается вектор  $y$ , вектор  $z$  замыкает треугольник (см. рис. 3, b).

Аналогично можно описать правило сложения нескольких векторов (см. рис. 4, a).

Нетрудно видеть, что операция сложения векторов *ассоциативна* (см. рис. 4, b), т. е.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .

Вектор  $z$  называется *разностью* векторов  $x$  и  $y$  (см. рис. 4, c), если  $x = z + y$ . Понятно, что  $z = x + (-1)y = x + (-y)$ .

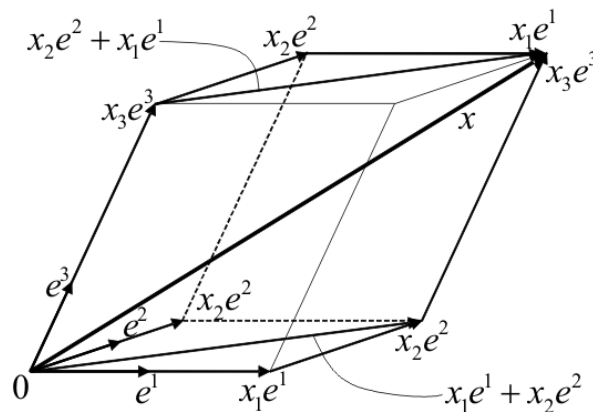
Из рис. 5 сразу усматриваются следующие свойства, связывающие операции сложения векторов и умножения вектора на число:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Эти свойства называют свойствами *дистрибутивности (распределительности)*.

**3. Базис. Разложение вектора по базису.** Будем говорить, что векторы *компланарны*, если они лежат в одной плоскости. Фиксируем

Рис. 6. Разложение вектора по базису,  $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$

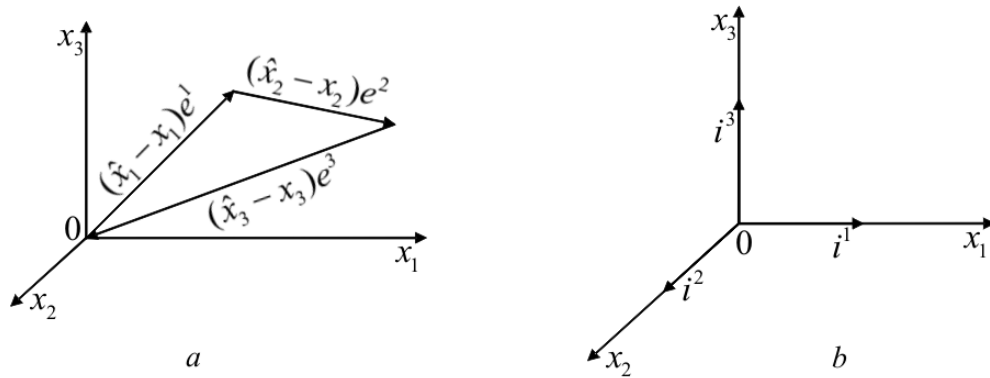


Рис. 7. К доказательству единственности разложения вектора по неортогональному базису (а). Декартов базис (b)

произвольным образом три некопланарных вектора. Обозначим их через  $e^1, e^2, e^3$ . Очевидно, что любой вектор  $x$  можно представить в виде (см. рис. 6)

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3.$$

Будем писать также  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Говорят, что векторы  $e^1, e^2, e^3$  образуют *базис* пространства. Числа  $x_1, x_2, x_3$  называют *координатами вектора* в этом базисе. Они однозначно определяются вектором  $x$  (если базис фиксирован). Действительно, если предположить, что возможно еще одно разложение

$$x = \hat{x}_1 e^1 + \hat{x}_2 e^2 + \hat{x}_3 e^3,$$

то

$$(\hat{x}_1 - x_1)e^1 + (\hat{x}_2 - x_2)e^2 + (\hat{x}_3 - x_3)e^3 = 0.$$

Следовательно, векторы  $(\hat{x}_1 - x_1)e^1, (\hat{x}_2 - x_2)e^2, (\hat{x}_3 - x_3)e^3$  образуют треугольник и, значит, лежат в одной плоскости (см. рис. 7, а), чего не может быть, так как по условию векторы  $e^1, e^2, e^3$  некопланарны.

Особую роль играет базис, составленный из трех попарно ортогональных векторов единичной длины (см. рис. 7, б). Они образуют так называемый *декартов базис*. Мы будем обозначать его через  $i^1, i^2, i^3$ . Координаты вектора в этом базисе есть его декартовы координаты.

Базис, составленный из трех произвольных некопланарных векторов, иногда называют *обобщенным декартовым базисом*.

Далее в этом параграфе под координатами вектора понимаются обобщенные декартовы координаты. Случаи, когда используются декартовы координаты, оговариваются особо.

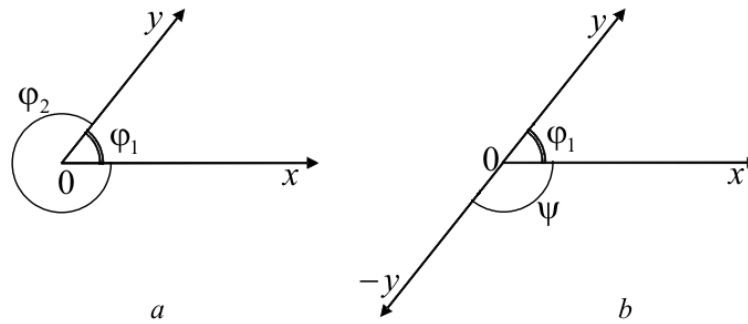


Рис. 8. Угол  $\varphi_1$  между векторами  $x$  и  $y$  (а). Угол  $\psi = \pi - \varphi_1$  между векторами  $x$  и  $-y$  (б)

**4.** Представление алгебраических операций через координаты. Пусть  $\alpha$  — произвольное число. Используя свойство дистрибутивности, получим

$$\alpha x = (\alpha x_1)e^1 + (\alpha x_2)e^2 + (\alpha x_3)e^3,$$

т. е. при умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число. Будем также писать

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

Далее, пусть  $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$ ,  $y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3$ . Тогда, опираясь на свойства ассоциативности и дистрибутивности, получим

$$x + y = (x_1 + y_1)e^1 + (x_2 + y_2)e^2 + (x_3 + y_3)e^3,$$

т. е. при сложении векторов их компоненты складываются.

Будем также писать

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

и, вообще,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Например, даны векторы  $x = (1, 2, 4)$ ,  $y = (5, 6, 7)$ . Вычислим координаты вектора  $z = 2x - y$ . Получим  $z = (2 - 5, 4 - 6, 8 - 7) = (-3, -2, 1)$ .

## § 2. Скалярное произведение векторов

**1.** Скалярным произведением векторов  $x$  и  $y$  называется число

$$(x, y) = |x||y| \cos(x, y).$$

Здесь  $\cos(x, y)$  — косинус угла между векторами  $x$ ,  $y$ . Под углом между двумя векторами подразумевают тот угол, который не превосходит  $\pi$  (см. рис. 8, а).



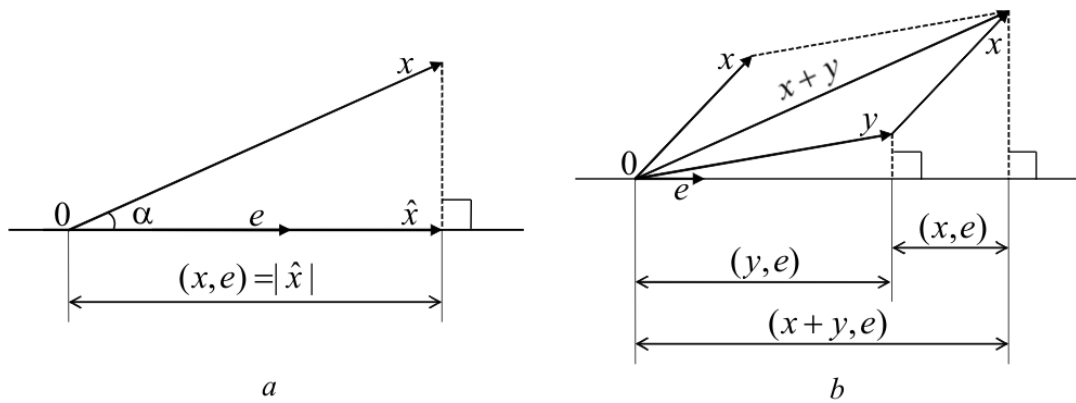


Рис. 9. Проекция вектора (а). К доказательству аддитивности скалярного произведения (б)

Понятие скалярного произведения векторов возникает, например, в физике при проектировании силы на заданное направление.

Длина *проекции* (с учетом знака) вектора  $x$  на прямую, параллельную вектору  $e$  единичной длины, равна скалярному произведению  $(x, e)$  (см. рис. 9, а):

$$(x, e) = |x||e| \cos(x, e) = |x||e| \cos \alpha = |x| \cos \alpha.$$

Очевидно, что для *ортогональности* двух ненулевых векторов необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

Если один из сомножителей — нуль, то и скалярное произведение равно нулю.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- 1)  $(x, y) = (y, x)$  для любых векторов  $x, y$  — *симметрия*,
- 2)  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$  для любых векторов  $x, y$  и для любого вещественного числа  $\alpha$  — *однородность*,
- 3)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$  для любых векторов  $x, y, z$  — *аддитивность*,
- 4)  $(x, x) = |x|^2 \geq 0$  для любого вектора  $x$ , и если  $(x, x) = 0$ , то  $x = 0$  — *положительная определенность*.

Заметим, что из свойств 2), 3) вытекает, что

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

для любых векторов  $x, y, z$  и для любых вещественных чисел  $\alpha, \beta$ . Это свойство часто называют свойством *линейности* скалярного произведения векторов по первому аргументу.

Убедимся в справедливости свойств 1)–4).

Свойство 1) — непосредственное следствие определения.

Свойство 2) при  $\alpha \geq 0$  очевидно, а при  $\alpha < 0$  надо заметить, что умножение одного вектора на отрицательное число превращает угол между векторами в дополнительный до  $\pi$  и, стало быть, меняет знак косинуса угла (см. рис. 8, *b*).

Если  $z = 0$ , то свойство 3), очевидно, выполняется для любых  $x$  и  $y$ . Если  $z \neq 0$ , то, используя свойство 2), получим

$$(x + y, z) = |z|(x + y, e),$$

где  $e = |z|^{-1}z$ , причем, очевидно,  $|e| = 1$ . Теперь достаточно доказать равенство

$$(x + y, e) = (x, e) + (y, e).$$

Слева в этом равенстве — проекция вектора  $x + y$  на прямую, параллельную вектору  $e$ , а справа — сумма проекций векторов  $x$  и  $y$  на эту же прямую (см. рис. 9, *b*). Понятно, что две эти величины совпадают.

Свойство 4) выполняется очевидным образом.

Отметим еще, что для любых  $x, y$  справедливо неравенство

$$|(x, y)| \leq |x||y|.$$

Это неравенство называют *неравенством Коши*<sup>1)</sup>. Очевидно также, что для любых  $x, y$  справедливо неравенство

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

называемое *неравенством треугольника* (см. рис. 3, *b*).

**2.** Укажем формулу вычисления скалярного произведения векторов  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  через их координаты. Воспользовавшись установленными только что свойствами скалярного произведения, получим

$$(x, y) = (x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3) = \sum_{k,l=1}^3 x_k y_l (e^k, e^l). \quad (2.1)$$

Использованные здесь символы означают суммирование по всем значениям индексов  $k, l = 1, 2, 3$  (всего — девять слагаемых).

Полученная формула показывает, что для вычисления скалярного произведения двух любых векторов надо знать скалярные произведения всех (шести) пар базисных векторов.

<sup>1)</sup>Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy; 1789 — 1857) — французский математик.

Проще всего вычисляется скалярное произведение векторов по их декартовым координатам. Действительно, в этом случае  $(e^k, e^l) = \delta_{kl}$ , следовательно,

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \quad (2.2)$$

Приведем в заключение очевидную, но полезную, формулу, выражающую косинус угла между векторами через их декартовы координаты:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

ПРИМЕР. Треугольник  $xyz$  задан декартовыми координатами вершин (сделайте рисунок!):

$$x = (2, 1, -1), \quad y = (3, 2, -1), \quad z = (3, 1, 0). \quad (2.3)$$

Требуется найти угол  $\alpha$  при вершине  $x$ . Сначала находим векторы

$$y - x = (1, 1, 0) \quad \text{и} \quad z - x = (1, 0, 1).$$

Затем вычисляем их длины  $|y - x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ,  $|z - x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , скалярное произведение  $(y - x, z - x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$  и, наконец, косинус угла при вершине  $x$ :

$$\cos \alpha = \frac{(y - x, z - x)}{|y - x||z - x|} = \frac{1}{2},$$

следовательно,  $\alpha = \pi/3$ .

### § 3. Векторное произведение

**1.** *Векторное произведение векторов* естественным образом возникает в физике, например, при введении понятия момента силы относительно данной точки.

Пусть в пространстве фиксирована некоторая базисная система векторов  $e^1, e^2, e^3$ . Введем понятие *ориентации базиса*. Будем говорить, что тройка базисных векторов  $e^1, e^2, e^3$  имеет *правую ориентацию*, если с конца вектора  $e^3$  кратчайший поворот от  $e^1$  к  $e^2$  совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка имеет *левую ориентацию* (см. рис. 10, а).

Векторным произведением вектора  $x$  на вектор  $y$  называется вектор  $z$ , удовлетворяющий следующим трем условиям:

- 1)  $|z| = |x||y| \sin(x, y)$ <sup>1)</sup>,
- 2) вектор  $z$  ортогонален каждому из векторов  $x$  и  $y$ ,

<sup>1)</sup>Последний множитель — синус угла (минимального) между векторами  $x$  и  $y$ .

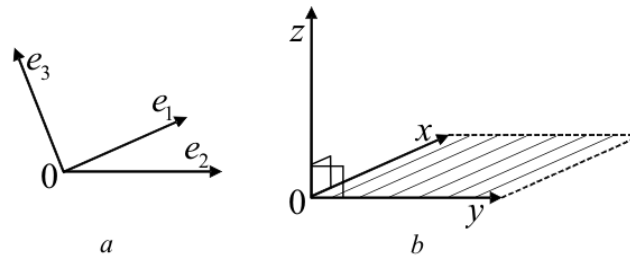


Рис. 10. К определению векторного произведения: левый базис (a),  $z = [x, y]$  (b)

3) вектор  $z$  направлен так, что тройка векторов  $x, y, z$  имеет ту же ориентацию, что и фиксированный выше базис пространства (см. рис. 10, b).

Векторное произведение векторов  $x, y$  будем обозначать через  $[x, y]$ .

Отметим, что  $|[x, y]|$  равен площади параллелограмма, построенного на векторах  $x, y$  (см. рис. 10, b).

Ясно, что необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

- 1)  $[x, y] = -[y, x]$  для любых векторов  $x, y$  — *антисимметричность* (*кососимметричность*),
- 2)  $[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$  для любых векторов  $x, y$  и любого вещественного числа  $\alpha$  — *однородность* по первому аргументу,
- 3)  $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$  для любых векторов  $x, y$  — *аддитивность* по первому аргументу.

Убедимся в справедливости свойств 1)–3). Проверка свойств 1), 2) аналогична проверке свойств 1), 2) скалярного произведения. При этом надо учесть, что если в тройке векторов поменять местами первые два вектора, то тройка меняет ориентацию на противоположную; если умножить первый вектор на отрицательное число, то тройка также меняет ориентацию на противоположную.

Для проверки третьего свойства заметим, что при  $z = 0$  оно выполняется тривиальным образом. Если  $z \neq 0$ , то, поделив равенство 3) на  $|z|$  и используя затем свойство 2), нетрудно убедиться, что достаточно доказать справедливость равенства

$$[x + y, e] = [x, e] + [y, e], \quad (3.1)$$

где  $e$  — произвольный вектор единичной длины. Построение векторного произведения  $[x, e]$  можно описать следующим образом. Сначала вектор  $x$  проецируется на плоскость, ортогональную вектору  $e$ . Затем полученный вектор поворачивается в этой плоскости так, чтобы он стал ортогональным вектору  $x$  и при этом получилась тройка

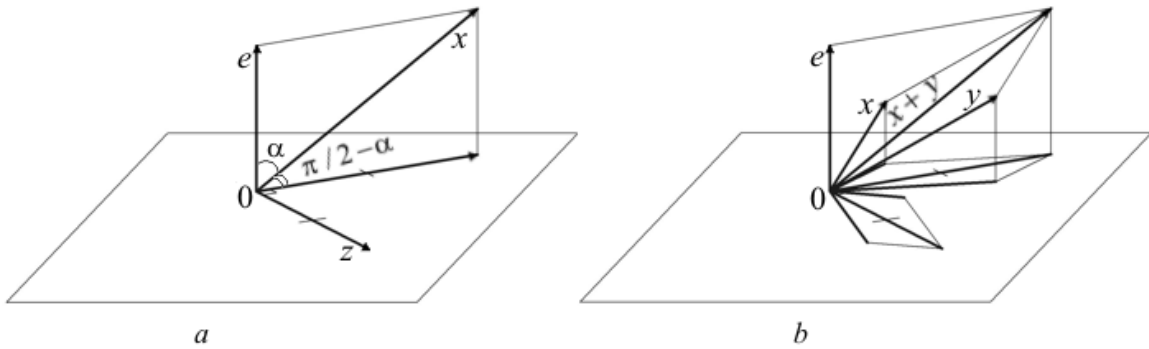


Рис. 11. К доказательству аддитивности векторного произведения. Произведение вектора  $x$  на вектор  $e$  единичной длины,  $z = [x, e]$ ,  $|z| = |x| \sin \alpha = |x| \cos(\pi/2 - \alpha)$  (а). К доказательству равенства  $[x + y, e] = [x, e] + [y, e]$  (б)

нужной ориентации (см. рис. 11, а). Заметим, что возможность такого описания построения векторного произведения обеспечивается хорошо известным равенством  $\sin \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$ . После выполнения указанных геометрических построений равенство (3.1) становится очевидным (см. рис. 11, б).

**2.** Получим теперь выражение для векторного произведения векторов  $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$ ,  $y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3$  через их координаты. Последовательно используя свойства 1)–3) и учитывая, что  $[z, z] = 0$  для любого вектора  $z$ , можно написать

$$\begin{aligned}
 [x, y] &= x_1[e^1, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] + x_2[e^2, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] + \\
 &+ x_3[e^3, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] = -x_1[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3, e^1] - \\
 &- x_2[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3, e^2] - x_3[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3, e^3] = \\
 &= (x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + \\
 &+ (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3]. \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить векторное произведение произвольных векторов, нужно уметь строить векторные произведения векторов базиса.

Проще всего вычисляются векторные произведения векторов декартова базиса. Непосредственно из определения вытекает (см. рис. 7, б), что  $[i^1, i^2] = i^3$ ,  $[i^1, i^3] = -i^2$ ,  $[i^2, i^3] = i^1$ , следовательно, в декартовых координатах

$$[x, y] = (x_2y_3 - x_3y_2)i^1 - (x_1y_3 - x_3y_1)i^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)i^3. \quad (3.3)$$

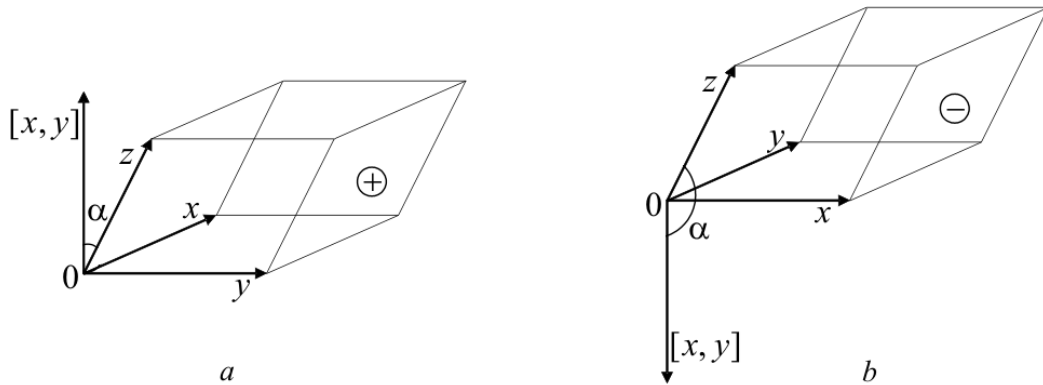


Рис. 12. Смешанное произведение векторов  $(x, y, z)$ . Угол  $\alpha$  между векторами  $[x, y]$  и  $z$  острый (a), тупой (b)

Для запоминания этого равенства полезна следующая запись:

$$[x, y, z] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Если (формально) разложить этот определитель по первой строке, получим (3.3).

ПРИМЕР. Декартовы координаты векторов  $x, y, z$  заданы равенствами (2.3). Найдем векторное произведение векторов  $y - x, z - x$  (сделайте рисунок!). По формуле (3.4)

$$[y - x, z - x] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i^1 - i^2 - i^3,$$

или  $[y - x, z - x] = (1, -1, -1)$ .

## § 4. Смешанное произведение векторов

**1.** *Смешанным произведением векторов  $x, y, z$  называется число  $(x, y, z) = ([x, y], z)$ . Поясним, что сначала строится вектор  $[x, y]$ , затем этот вектор скалярно умножается на вектор  $z$ .*

Смешанное произведение векторов имеет отчетливый геометрический смысл. Если векторы  $[x, y]$  и  $z$  образуют острый угол, это — объем параллелепипеда, построенного на векторах  $x, y, z$ . В противном случае — объем параллелепипеда, построенного на векторах  $x, y, z$ , взятый со знаком минус (см. рис. 12).

Отсюда сразу вытекает, что при перестановке любых двух сомножителей в смешанном произведении абсолютная величина его не меняется, а знак меняется на противоположный, например,

$$(x, y, z) = -(y, x, z), \quad (x, y, z) = -(x, z, y).$$

Ясно, что необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

**2.** Получим выражение для смешанного произведения векторов  $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$ ,  $y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3$ ,  $z = z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3$  через их координаты. Используя формулу (3.2), можем написать

$$(x, y, z) = ((x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3], z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3).$$

Раскроем здесь скобки, используя линейность и симметрию скалярного произведения, описанное выше правило изменения знака смешанного произведения, а также тот очевидный факт, что если два сомножителя в смешанном произведении совпадают, то оно равно нулю. Получим

$$(x, y, z) = \{(x_1y_2 - x_2y_1)z_3 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1\}(e^1, e^2, e^3).$$

Выражение в фигурных скобках — разложение определителя третьего порядка по последней строке. Поэтому

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (e^1, e^2, e^3).$$

Поскольку  $(e^1, e^2, e^3) \neq 0$  (векторы базиса некопланарны), то отсюда сразу вытекает, что необходимое и достаточное условие компланарности векторов  $x, y, z$  есть равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

составленного из компонент векторов относительно любого базиса.

Если базис декартов, то, очевидно,  $(e^1, e^2, e^3) = 1$ , т. е. в декартовых координатах

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

Вычислим, например, смешанное произведение векторов  $x, y, z$ , декартовы координаты которых заданы равенствами (2.3), с. 51. Имеем (сделайте рисунок!)

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Пусть векторы  $e^1, e^2, e^3$  некопланарны. Положим  $Q = (e^1, e^2, e^3)$ ,

$$e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2].$$

Показать, что векторы  $e_1, e_2, e_3$  некопланарны, причем  $(e_k, e^l) = \delta_{kl}$ .

Говорят, что векторы  $e_1, e_2, e_3$  образуют *взаимный базис*. Базис  $e^1, e^2, e^3$  называют при этом *основным*. Равенство (3.2), фактически, дает правило вычисления компонент вектора  $[x, y]$  при разложении его по взаимному базису, если известны компоненты векторов  $x, y$  при разложении их по основному базису.

УПРАЖНЕНИЕ. Вычислить скалярное произведение  $(x, y)$ , разлагая вектор  $x$  по основному базису, а  $y$  — по взаимному.

## § 5. Примеры задач, решаемых методами векторной алгебры

1. *Расстояние между двумя точками.* Даны точки

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

Найти расстояние между ними.

Искомое расстояние равно длине вектора  $y - x$ . Но, как мы знаем,  $y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$ , и по формуле (2.1) получаем

$$|y - x| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^3 (x_k - y_k)(x_l - y_l)(e^k, e^l)}. \quad (5.1)$$

В декартовых координатах

$$|y - x| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$



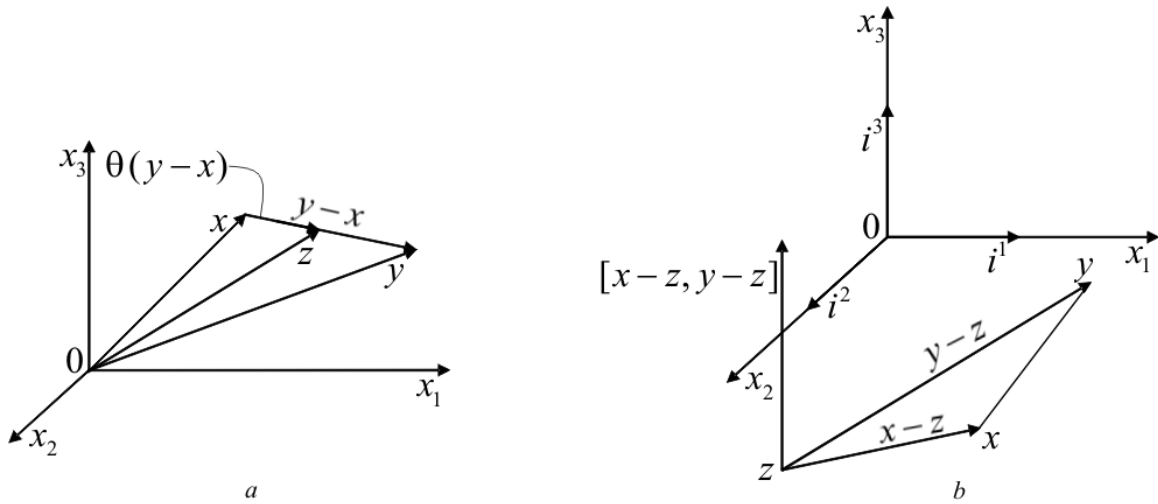


Рис. 13. К уравнению отрезка прямой,  $z = x + \theta(y - x)$  (а). К вычислению площади треугольника  $xyz$  (б)

**2. Уравнение сферы.** Написать уравнение сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ .

По определению сфера — это множество всех точек пространства, равноудаленных от данной. Следовательно, для любой точки  $x$ , лежащей на сфере

$$|x - x^0|^2 = R^2.$$

Это и есть уравнение сферы. Запишем его в координатной форме. Используя формулу (5.1), получаем

$$\sum_{k,l=1}^3 (x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0)(e^k, e^l) = R^2.$$

В декартовых координатах

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = R^2.$$

**3. Уравнение отрезка прямой.** Деление отрезка в данном отношении. Рассмотрим две точки  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Положим

$$z = x + \theta(y - x), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (5.2)$$

Нетрудно видеть, что при изменении  $\theta$  от нуля до единицы, точка  $z$  пробегает отрезок прямой, соединяющий точки  $x$  и  $y$  (см. рис. 13, а). Говорят, что (5.2) — уравнение отрезка прямой (в пространстве).

Ясно, что  $|z - x| = \theta|y - x|$ , т. е. точка  $z$  (при данном  $\theta$ ) делит отрезок в отношении  $\theta : (1 - \theta)$ . В частности, при  $\theta = 1/2$  отрезок делится пополам. Запишем уравнение (5.2) в координатной форме

$$z_i = x_i + \theta(y_i - x_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

При  $\theta = 1/2$  получаем координаты середины отрезка

$$z_i = (x_i + y_i)/2, \quad i = 1, 2, 3.$$

**4. Площадь треугольника.** Рассмотрим плоскость, отнесенную к декартовой системе координат  $x_1, x_2$ , и на этой плоскости треугольник с вершинами  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ ,  $z = (z_1, z_2)$  (см. рис. 13, б).

Поставим задачу: выразить площадь треугольника через координаты его вершин. Нам будет удобно трактовать плоскость  $x_1, x_2$  как координатную плоскость  $x_3 = 0$  трехмерной декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ .

Построим векторы  $x - z$ ,  $y - z$  (см. рис. 13, б) и составим их векторное произведение. Получим вектор, направленный вдоль оси  $x_3$ . Длина этого вектора будет равна удвоенной площади треугольника  $xyz$ . Координаты вектора  $[x - z, y - z]$  определим по формуле (3.3). Понятно, что среди них только одна, третья, будет отлична от нуля. Она, очевидно, будет равна

$$\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, с точностью до знака  $|[x - z, y - z]|$  совпадет с величиной этого определителя. Отсюда вытекает, что с точностью до знака площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Часто используют и такую форму записи:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.4)$$

**ПРИМЕР.** Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках  $x = (1, 1)$ ,  $y = (2, 2)$ ,  $z = (-1, 3)$ . Используем формулу (5.4), а затем выполним очевидные элементарные преобразования определителя:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4/2 = 2.$$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Покажите, что определители (5.3), (5.4) совпадают.

**4.1.** Для любых векторов  $x, y$  положим

$$G(x, y) = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что

$$G(x, y) = S^2, \quad (5.5)$$

где  $S$  — площадь параллелограмма, построенного на векторах  $x, y$ .

Из (5.5) вытекает, что  $G(x, y) \geq 0$  для любых векторов  $x, y$ , причем  $G(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $x, y$  коллинеарны.

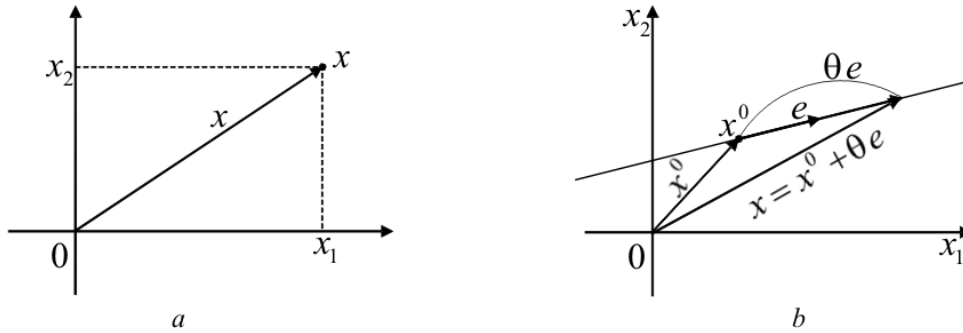


Рис. 14. Декартовы координаты точки  $x = (x_1, x_2)$  и вектор  $x$  (а). К уравнению прямой, проходящей через точку  $x^0$  параллельно вектору  $e$  (б)

## § 6. Различные формы уравнения прямой на плоскости

Отнесем плоскость к декартовой системе координат  $x_1, x_2$ . Как и ранее, точки  $x = (x_1, x_2)$  будут отождествляться с векторами (см. рис. 14, а).

**1.** Прямую  $l$ , проходящую через точку  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$  параллельно вектору  $e = (e_1, e_2)$ , зададим уравнением (см. рис. 14, б)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \quad (6.1)$$

**2.** В каком-то смысле альтернативный способ описания: прямая — это множество всех векторов, ортогональных данному вектору  $p$  (прямая, проходящая через начало координат), сдвинутое параллельно  $p$  на расстояние  $d$  от начала координат (см. рис. 15), т. е. для точек прямой выполнено уравнение

$$(x, p) - d = 0, \quad (6.2)$$

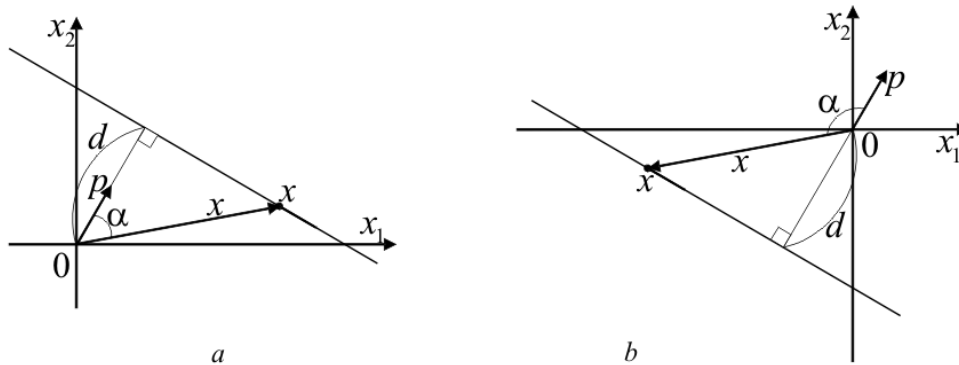


Рис. 15. К нормальному уравнению прямой:  $d > 0$ , угол  $\alpha$  между векторами  $p$  и  $x$  острый (a);  $d < 0$ , угол  $\alpha$  между векторами  $p$  и  $x$  тупой (b)

где  $p = (p_1, p_2)$  — заданный вектор единичной длины. Поясним, что  $d$  — проекция  $x$  на направление  $p$ , одна и та же для всех точек прямой. Знак  $d$  показывает, в какую сторону (по отношению к  $p$ ) выполняется сдвиг (см. рис. 15). Уравнение (6.2) называют *нормальной формой уравнения прямой*. Нужно напомнить, что поскольку мы пользуемся декартовыми координатами, то  $(x, p) = p_1x_1 + p_2x_2$ .

**3.** Записывая уравнения (6.1), (6.2) в координатах, получаем уравнения прямой в формах, знакомых из школьной математики:

$$(x_2 - x_2^0) = k(x_1 - x_1^0), \quad k = e_2/e_1, \quad (6.3)$$

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \quad (6.4)$$

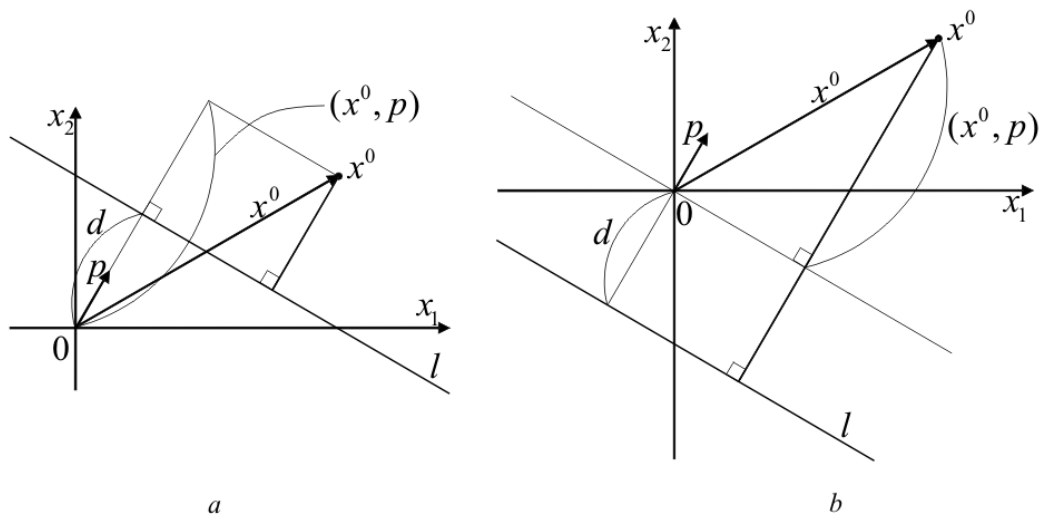
$$x_2 = kx_1 + b. \quad (6.5)$$

Геометрический смысл участвующих в (6.3)–(6.5) коэффициентов также хорошо знаком читателю. Напомним только, что  $k$  — тангенс угла наклона прямой к оси  $x_1$ .

**4.** Из уравнения прямой в любой из форм (6.3)–(6.5) элементарными эквивалентными преобразованиями нетрудно получить уравнение в форме (6.1) или (6.2). Получим, например, нормальное уравнение прямой из уравнения в так называемой *общей форме* (6.4). Для этого поделим обе части уравнения (6.4) на  $\sqrt{a^2 + b^2}$  и положим

$$p_1 = a/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad p_2 = b/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad d = -c/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Поскольку  $p_1^2 + p_2^2 = 1$ , то полученная форма записи уравнения прямой будет нормальной.

Рис. 16. К вычислению расстояния от точки до прямой:  $d > 0$  (a),  $d < 0$  (b)

## § 7. Задачи о взаимном расположении прямых и точек на плоскости

1. Определим *расстояние от точки*  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$  до прямой  $l$ .

Проще всего эта задача решается, когда прямая  $l$  задана нормальным уравнением (6.2). Действительно, поскольку  $|p| = 1$ , то  $(x^0, p)$  — величина проекции вектора  $x^0$  на прямую, параллельную  $p$ , следовательно, величина  $\delta = (x^0, p) - d$  есть отклонение точки  $x^0$  от прямой  $l$  (см. рис. 16). Причем знак  $\delta$  показывает, по какую сторону от прямой  $l$  расположена точка  $x^0$ . Расстояние от точки  $x^0$  до прямой  $l$  равно  $|(x^0, p) - d|$ .

ПРИМЕР. Найти расстояние от точки  $x^0 = (1, -2)$  до прямой  $3x_1 - 4x_2 - 26 = 0$  (сделайте рисунок!). Сначала приведем прямую к нормальному виду:  $\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{26}{5} = 0$ , т. е.  $p = (3/5, -4/5)$ ,  $d = 26/5$ . Теперь вычислим  $\delta = 3/5 + 8/5 - 26/5 = -3$ . Расстояние от точки до прямой равно трем.

2. Даны две прямые  $l_1$  и  $l_2$ , определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Требуется исследовать *взаимное расположение* этих *прямых*, т. е. выяснить, пересекаются ли эти прямые, и указать точку их пересечения.

Эта задача была нами полностью решена в 1, с. 28. Действительно, фактически, поставленная задача эквивалентна исследованию условий разрешимости системы линейных уравнений (7.1). Здесь надо различать три случая.

1) Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Тогда система уравнений (7.1) имеет единственное решение  $x_1, x_2$  при любых  $b_1, b_2$ . Точка  $x = (x_1, x_2)$  — точка пересечения прямых.

2) Определитель  $\Delta$  равен нулю, но определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

а следовательно, и определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

отличны от нуля. Тогда система (7.1) не имеет решений, т. е. прямые  $l_1, l_2$  параллельны.

3) Все три определителя  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$  — нули. Это условие эквивалентно существованию числа  $\alpha \neq 0$  такого, что

$$a_{21} = \alpha a_{11}, \quad a_{22} = \alpha a_{12}, \quad b_2 = \alpha b_1.$$

Система (7.1) имеет бесконечное множество решений (фактически, уравнения системы совпадают). Прямые  $l_1, l_2$  совпадают.

**3.** Найдем *угол между прямыми*  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  (см. рис. 17). Так как  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ ,  $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$ , то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

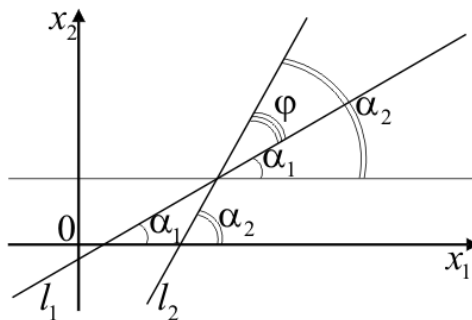


Рис. 17. Угол между прямыми

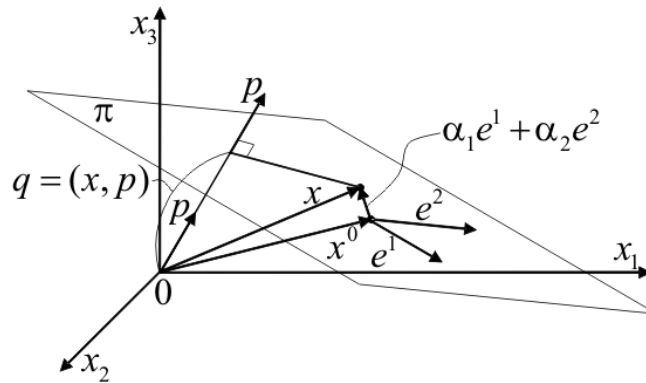


Рис. 18. К уравнению плоскости, проходящей через точку  $x^0$ , натянутой на векторы  $e^1$  и  $e^2$ ; а также к нормальному уравнению плоскости  $(x, p) - q = 0$

### УПРАЖНЕНИЯ.

1) Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (6.1).

2) Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (6.2).

3) Используя выражение для тангенса угла между прямыми, покажите, что при  $k_1 = k_2$  прямые параллельны, а при  $k_1 k_2 = -1$  ортогональны.

## § 8. Различные формы уравнения плоскости

Рассматривается трехмерное евклидово пространство. Пусть  $e^1$  и  $e^2$  — неколлинеарные векторы в трехмерном пространстве, а  $x^0$  — произвольный вектор. Уравнение

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \quad -\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty, \quad (8.1)$$

определяет плоскость  $\pi$ , проходящую через точку  $x^0$ . Говорят, что эта плоскость *натянута* на векторы  $e^1, e^2$  (см. рис. 18).

Пусть  $p$  — единичный вектор. Уравнение

$$(x, p) - q = 0 \quad (8.2)$$

определяет множество векторов, концы которых принадлежат плоскости, ортогональной вектору  $p$  и отстоящей от начала координат на расстояние  $q$  (см. рис. 18). Знак  $q$  определяет направление сдвига плоскости (по отношению к направлению вектора  $p$ ). Уравнение (8.2) называют *нормальным уравнением плоскости*. Напомним, что нормальное уравнение прямой (6.2) имеет аналогичный вид.

Запишем уравнение (8.1) в координатной форме (здесь и далее до конца главы используются только декартовы координаты)

$$x_1 - x_1^0 = \alpha_1 e_1^1 + \alpha_2 e_1^2, \quad (8.3)$$

$$x_2 - x_2^0 = \alpha_1 e_2^1 + \alpha_2 e_2^2, \quad (8.4)$$

$$x_3 - x_3^0 = \alpha_1 e_3^1 + \alpha_2 e_3^2. \quad (8.5)$$

Полагая, что  $x \neq x^0$ , рассмотрим определитель

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix}.$$

Равенства (8.3)–(8.5) означают, что если точка  $x$  принадлежит плоскости  $\pi$ , то столбцы этого определителя линейно зависимы, следовательно, он равен нулю. Наоборот, равенство нулю этого определителя означает, что его столбцы линейно зависимы и, поскольку векторы  $e^1, e^2$  линейно независимы, то выполнены равенства (8.3)–(8.5).

Таким образом, уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.6)$$

есть уравнение плоскости (в координатной форме), проходящей через точку  $x^0$  и натянутой на векторы  $e^1, e^2$ . Раскрывая определитель  $\Delta(x)$  (например, по первому столбцу), запишем уравнение плоскости  $\pi$  в виде

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0. \quad (8.7)$$

Здесь числа  $a, b, c, d$  очевидным образом выражаются через координаты векторов  $e^1, e^2, x^0$ . Уравнение вида (8.7) называют *общим уравнением плоскости*.

Аналогично уравнению прямой уравнения (8.1), (8.2), (8.7) можно эквивалентно преобразовывать из одной формы в другую.

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Преобразовать уравнение (8.7) к нормальному виду.

Ответ:

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c), \quad q = -\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2) Показать, анализируя общее уравнение плоскости, что:



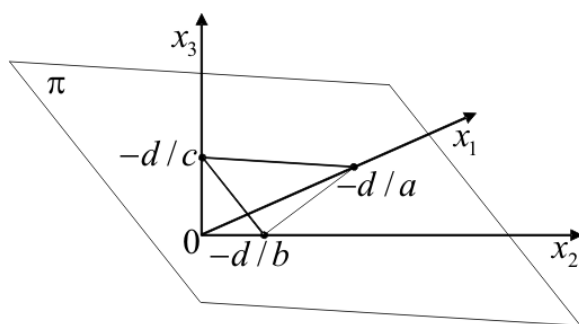


Рис. 19. Точки пересечения плоскости с осями координат

если  $a = 0$ ,  $b = 0$ , то плоскость параллельна координатной плоскости  $x_1x_2$ ;

если  $a = 0$ , то плоскость параллельна оси  $x_1$ ;

если  $d = 0$ , то плоскость проходит через начало координат.

3) Показать, что  $\alpha = -d/a$ ,  $\beta = -d/b$ ,  $\gamma = -d/c$  — координаты точек пересечения плоскости с осями  $x_1, x_2, x_3$  (см. рис. 19), проанализировать случаи, когда соответствующие знаменатели — нули.

4) Показать, что косинус угла  $\varphi$  между плоскостями, задаваемыми уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0,$$

можно вычислить по формуле

$$\cos \varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (8.8)$$

5) Используя уравнение (8.6), написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Проанализировать случай, когда эти точки лежат на одной прямой.

6) Используя нормальное уравнение плоскости (8.2), найти отклонение данной точки  $x^0$  от плоскости.

ПРИМЕР. Даны плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , описываемые уравнениями

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0, \quad (8.9)$$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0, \quad (8.10)$$

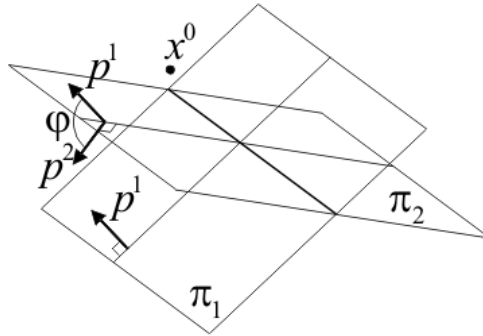
и точка  $x^0 = (1, 1, 8)$ . Определить величину того угла между плоскостями  $\pi_1, \pi_2$ , которому принадлежит точка  $x^0$ .

Приведем уравнения (8.9), (8.10) к нормальному виду. Имеем

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3, \quad \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7,$$

следовательно, нормальный вид уравнения (8.9) есть

$$(p^1, x) - q_1 = 0,$$

Рис. 20. Плоскости  $\pi_1, \pi_2$ 

где  $p^1 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$ ,  $q_1 = 1$ , а для уравнения (8.10) получаем

$$(p^2, x) - q_2 = 0,$$

где  $p^2 = \frac{1}{7}(6, 2, -3)$ ,  $q_2 = -8/7$ . Заметим далее, что

$$(p^1, x^0) - q_1 = \frac{1}{3}(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 - 3) = \frac{14}{3} > 0,$$

$$(p^2, x^0) - q_2 = \frac{1}{7}(6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 8 + 8) = -\frac{8}{7} < 0.$$

Поэтому конец вектора  $p^1$  и точка  $x^0$  лежат по одну сторону от плоскости  $\pi_1$ , а конец вектора  $p^2$  и точка  $x^0$  лежат по разные стороны от плоскости  $\pi_2$  и, следовательно, точка принадлежит углу  $\varphi$  (см. рис. 20). Угол  $\varphi$  равен углу между векторами  $p^1, p^2$ . Используя формулу (8.8), получим

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21}, \quad \varphi \approx 0,44\pi.$$

## § 9. Уравнения прямой в пространстве

Уравнение

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty, \quad (9.1)$$

определяет *прямую, проходящую через точку  $x^0$  параллельно вектору  $e = (e_1, e_2, e_3)$*  (см. рис. 21).

Запишем уравнение (9.1) в координатах

$$x_1 - x_1^0 = \theta e_1, \quad (9.2)$$

$$x_2 - x_2^0 = \theta e_2, \quad (9.3)$$

$$x_3 - x_3^0 = \theta e_3. \quad (9.4)$$

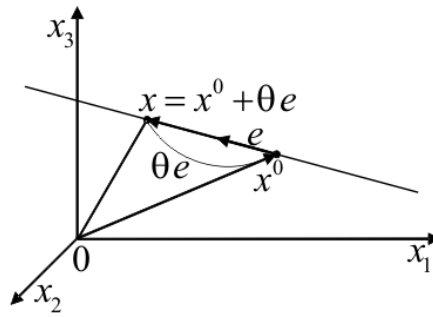


Рис. 21. Прямая в пространстве

Исключая из этих уравнений параметр  $\theta$ , получим

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}. \quad (9.5)$$

Множество всех точек  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , координаты которых удовлетворяют уравнениям (9.5), образуют прямую, проходящую через точку  $x^0$  параллельно вектору  $e$ . Уравнения (9.5) называют *каноническими уравнениями прямой*.

УПРАЖНЕНИЕ. Интерпретируйте случай, когда какой-либо знаменатель в (9.5) обращается в нуль.

## § 10. Задачи о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей

**1.** Найти расстояние  $d$  от прямой  $l$ , заданной уравнением (9.1), до точки  $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ .

Искомым расстоянием является длина перпендикуляра, опущенного из точки  $x^1$  на прямую  $l$  (см. рис. 22, *a*). Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах  $e$  и  $x^1 - x^0$ . Площадь этого параллелограмма равна  $|[e, x^1 - x^0]|$ , следовательно,  $d = |[e, x^1 - x^0]|/|e|$ . Для того, чтобы выразить входящие сюда величины через координаты точек  $x^0, x^1$  и компоненты вектора  $e$ , нужно, в частности, воспользоваться формулой (3.3), с. 53, для компонент векторного произведения.

**2.** Найти расстояние  $d$  между непараллельными прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , заданными уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x^1 + \theta e^1, & -\infty < \theta < \infty, \\ x &= x^2 + \theta e^2, & -\infty < \theta < \infty. \end{aligned}$$

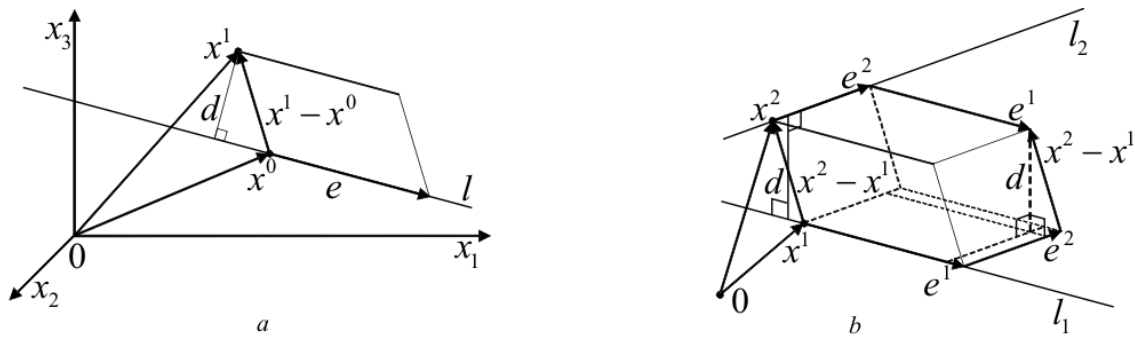


Рис. 22. К вычислению расстояния от точки до прямой (а) и между прямыми (b)

Искомое расстояние, очевидно, есть длина отрезка прямой, который ортогонален  $l_1$  и  $l_2$ , концы его лежат на  $l_1$  и  $l_2$  (см. рис. 22, b). Построим параллелепипед на векторах  $e^1$ ,  $e^2$  и  $x^2 - x^1$ . Понятно, что  $d$  — высота этого параллелепипеда и, следовательно,  $d$  есть отношение его объема к площади основания.

Таким образом,  $d = |(e^1, e^2, x^2 - x^1)| / |[e^1, e^2]|$ . Осталось выразить все входящие в эту формулу величины через координаты точек  $x^1$ ,  $x^2$  и компоненты векторов  $e^1$ ,  $e^2$  (см. (3.3), с. 53, и (4.1), с. 55).

**3.** Найти угол  $\varphi$  между прямой  $l$ , заданной уравнением (9.1), и плоскостью  $\pi$ , заданной нормальным уравнением (8.2).

Угол  $\varphi$  является дополнительным к углу  $\psi$  между направляющим вектором прямой  $e$  и нормальным вектором плоскости  $p$ , следовательно,

$$\sin \varphi = \cos \psi = \cos(e, p) = \frac{(e, p)}{|e|} = \frac{e_1 p_1 + e_2 p_2 + e_3 p_3}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}}.$$

**4.** Определить общие точки прямой  $l$ , заданной уравнением (9.1), и плоскости  $\pi$ , заданной уравнением (8.7).

Подставим значения  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  из (9.2)–(9.4) в уравнение (8.7). После элементарных преобразований получим

$$ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d + \theta(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0. \quad (10.1)$$

Возможны следующие случаи.

1)  $ae_1 + be_2 + ce_3 \neq 0$ . Это означает, что прямая  $l$  не параллельна плоскости  $\pi$  (почему?). Из уравнения (10.1) находим

$$\theta = \theta_1 = -\frac{ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d}{ae_1 + be_2 + ce_3}.$$

Точка  $x^1 = x^0 + \theta_1 e$  — точка пересечения прямой и плоскости (см. рис. 23, a).

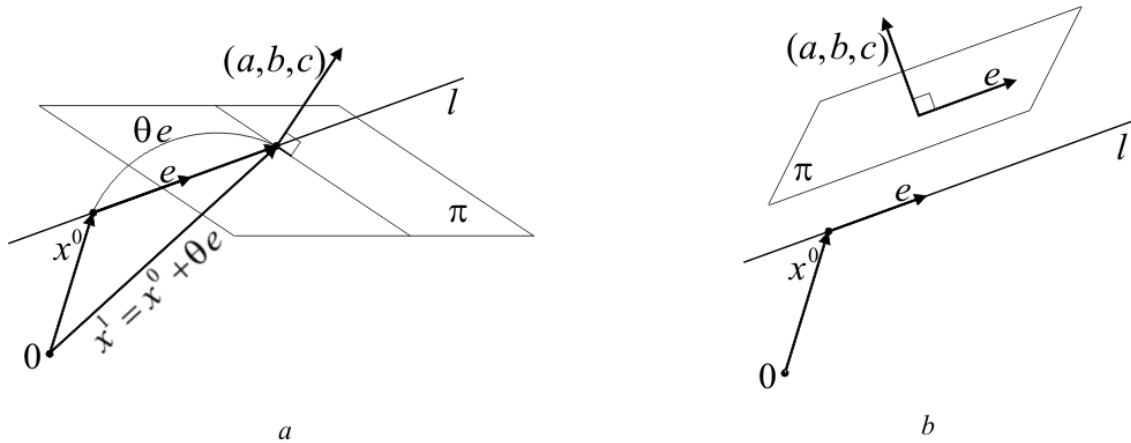


Рис. 23. К определению точки пересечения прямой и плоскости (а). Прямая  $l$ , параллельная плоскости  $\pi$  (b)

2)  $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$ , но  $ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d \neq 0$ . Уравнение (10.1) не имеет решений. Прямая  $l$  проходит через точку  $x^0$ , не принадлежащую плоскости  $\pi$ , параллельно плоскости  $\pi$  (см. рис. 23, b).

3)  $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$ ,  $ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d = 0$ . Любое  $\theta \in (-\infty, \infty)$  — решение уравнения (10.1). Прямая  $l$  лежит в плоскости  $\pi$ .

**5.** Выяснить условия, при которых две прямые  $l_1$  и  $l_2$ , задаваемые уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x^1 + \theta e^1, & \theta &\in (-\infty, \infty), \\ x &= x^2 + \theta e^2, & \theta &\in (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

лежат в одной плоскости.

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости, то векторы  $x^2 - x^1$ ,  $e^1$ ,  $e^2$  лежат в одной плоскости (см. рис. 24, a), иначе говоря, компланарны. Обратное, если векторы  $x^2 - x^1$ ,  $e^1$ ,  $e^2$  компланарны, то прямые  $l_1$ ,  $l_2$  лежат в одной плоскости. Используя результаты § 4, непосредственно получаем, что для принадлежности прямых  $l_1$ ,  $l_2$  одной и той же плоскости необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение  $(x^2 - x^1, e^1, e^2)$  равнялось нулю.

**6.** Написать уравнение прямой  $l$ , являющейся пересечением двух различных и не параллельных плоскостей  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , задаваемых уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0. \quad (10.2)$$

Найдем сначала какую-либо точку, принадлежащую обеим плоскостям (см. рис. 24, b). Иными словами, найдем какое-то реше-

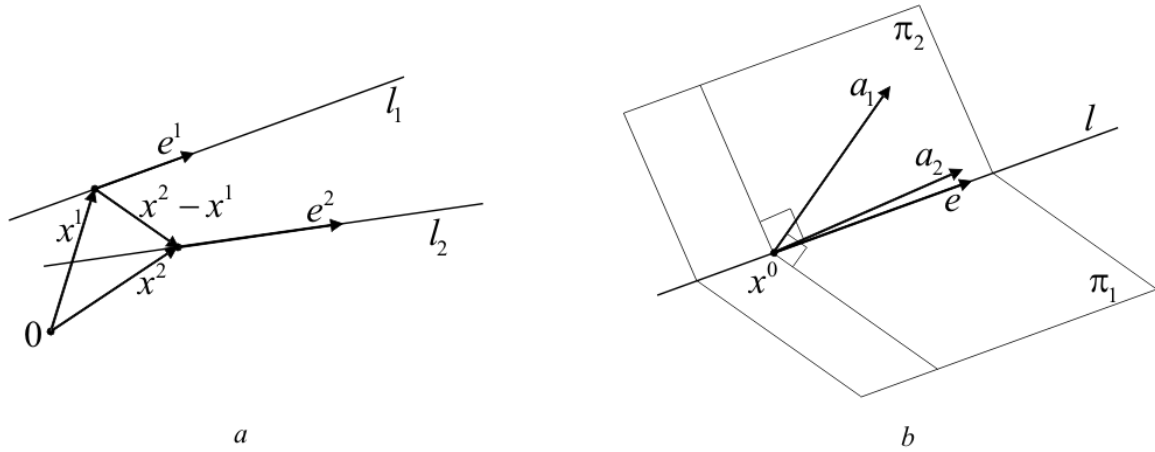


Рис. 24. К компланарности прямых  $l_1$  и  $l_2$  (а). К построению уравнения прямой, по которой пересекаются две плоскости (б)

ние  $x_1, x_2, x_3$  системы уравнений (10.2). По условию плоскости не параллельны, следовательно, векторы

$$a^1 = (a_1, b_1, c_1) \quad \text{и} \quad a^2 = (a_2, b_2, c_2),$$

нормальные к ним, не коллинеарны. Значит не выполняется хотя бы одно из равенств

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Примем для определенности, что  $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ . Положим  $x_3 = 0$ , тогда из (10.2) получаем

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= -d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 &= -d_2. \end{aligned}$$

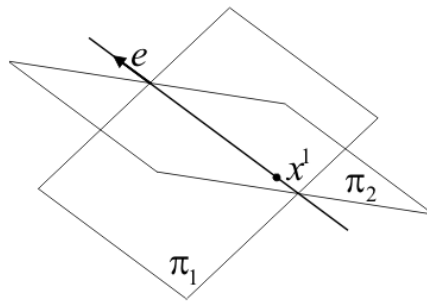
Решая эту систему, приходим к выводу, что точка

$$x^0 = \left( \frac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, 0 \right)$$

принадлежит прямой  $l$ , по которой пересекаются плоскости  $\pi_1, \pi_2$ .

Найдем теперь направляющий вектор  $e$  этой прямой. Вектор  $e$  ортогонален каждому из векторов  $a^1$  и  $a^2$ , следовательно, можно взять вектор  $e$ , равным их векторному произведению:

$$e = [a^1, a^2] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \quad (10.3)$$

Рис. 25. К выводу уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ 

Таким образом, найдены точка  $x^0$ , принадлежащая прямой  $l$ , и вектор  $e$ , параллельный этой прямой, следовательно, уравнение прямой  $l$  можно записать, например, в виде (9.1).

ПРИМЕР. Найдем уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , определяемые уравнениями (8.9), (8.10) (см. рис. 25).

Положим  $x_3 = 0$  в уравнениях (8.9), (8.10), получим систему уравнений для отыскания первых двух координат точки, принадлежащей пересечению плоскостей  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ :

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 + 8 = 0.$$

Решение этой системы:  $x_1 = -1/5$ ,  $x_2 = -17/5$ , т. е. точка  $x^1 = (-1/5, -17/5, 0)$  принадлежит пересечению плоскостей (8.9), (8.10). Вектор  $e$ , параллельный искомой прямой, определим по формуле

$$e = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -i^1 + 18i^2 + 10i^3, \quad (10.4)$$

или  $e = (-1, 18, 10)$ . По формуле (9.1) множество точек искомой прямой описывается уравнением  $x = (-1/5, -17/5, 0) + \theta(-1, 18, 10)$ ,  $\theta \in (-\infty, \infty)$ . Более подробно,

$$x_1 = -1/5 - \theta, \quad x_2 = -17/5 + 18\theta, \quad x_3 = 10\theta, \quad \theta \in (-\infty, \infty).$$

---

---

ГЛАВА 5  
Системы линейных уравнений,  
матрицы, определители

§ 1. Перестановки

1. Рассмотрим множество  $n$  целых чисел:  $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Эти числа можно располагать в различном порядке. Каждое такое расположение называют *перестановкой*. Например, возможны перестановки:

$$1, 2, 3, \dots, n, \quad (1.1)$$

$$2, 1, 3, \dots, n. \quad (1.2)$$

Вообще, перестановку будем записывать в виде

$$n_1, n_2, \dots, n_n. \quad (1.3)$$

Каждая перестановка определяет взаимнооднозначное отображение множества  $M_n$  на себя. При этом отображении числу 1 соответствует число  $n_1$ , числу 2 соответствует  $n_2$  и т. д.

Можно построить график такого отображения. Он будет представлять собой  $n$  точек, расположенных в узлах целочисленной решетки. Причем на каждой вертикальной линии этой решетки лежит ровно одна точка графика, и на каждой горизонтальной линии этой решетки лежит ровно одна точка графика (см. рис. 1, *a*). Понятно, что перестановка однозначно определяется ее графиком и, наоборот, задание графика однозначно определяет перестановку (запишите перестановку, изображенную на рис. 1, *a*!).

Количество всех перестановок множества  $M_n$  принято обозначать символом  $P_n$ . Покажем, что

$$P_n = 123 \cdots n. \quad (1.4)$$

Здесь записано произведение всех первых  $n$  членов натурального ряда. Принято обозначение  $123 \cdots n = n!$  (читается *n-факториал*).

Для  $n = 1$  и  $n = 2$  формула (1.4), очевидно, справедлива. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что равенство  $P_{n-1} = (n-1)!$  верно. Возьмем теперь некоторую перестановку множества  $M_{n-1}$  и добавим к ней элемент  $n$ . Его можно



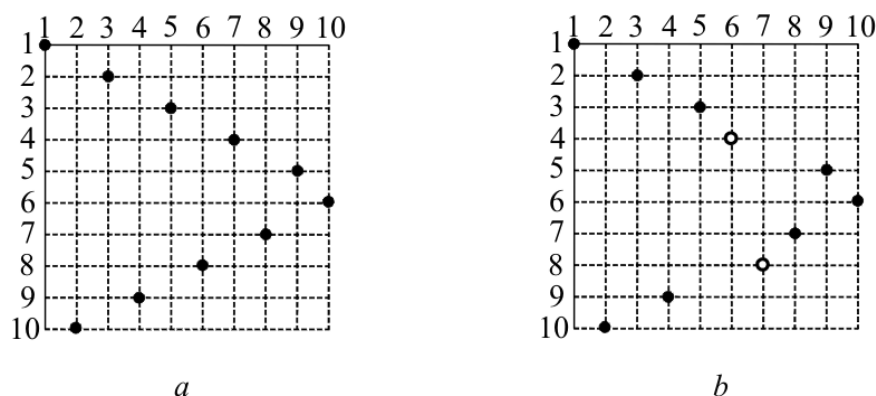


Рис. 1. Пример перестановки из десяти элементов ( $a$ ). Перестановка  $b$  получена из перестановки  $a$  транспозицией (4,8)

поставить первым, вторым, и, наконец, последним, т. е.  $n$ -ым. Понятно, что таким образом можно создать  $n$  перестановок по каждой перестановке множества  $M_{n-1}$  и, поскольку по индуктивному предположению  $P_{n-1} = (n-1)!$ , то формула (1.4) доказана.

**2.** Будем говорить, что элементы  $n_i, n_j, i < j$ , перестановки (1.3) образуют *инверсию*, если  $n_i > n_j$ . Например, в перестановке (1.1) нет инверсий, а в перестановке (1.2) только одна инверсия, ее образуют элементы  $n_1, n_2$ . Полезно отметить, что если соединить отрезком на графике перестановки точки  $(i, n_i)$  и  $(j, n_j)$ , то он будет иметь отрицательный наклон для точек, образующих инверсию.

Количество всех инверсий данной перестановки будем обозначать через

$$\sigma(n_1, n_2, \dots, n_n)$$

и называть *сигнатурой* перестановки.

Перестановка называется *четной*, если ее сигнатура — четное число (нуль, как обычно, полагаем четным числом). В противном случае перестановка называется *нечетной*.

Таким образом, все перестановки разбиваются на два непустых класса: четные перестановки и нечетные перестановки. Например, перестановка (1.1) четная, а перестановка (1.2) нечетная.

Говорят, что в перестановке выполнена *транспозиция*, если поменяли местами два ее элемента. Для того, чтобы определить транспозицию данной перестановки, нужно задать номера двух переставляемых элементов. Например, можно сказать, что перестановка (1.2) получена из перестановки (1.1) транспозицией (1,2). Еще один пример транспозиции показан на рис. 1.

**2.1. Теорема.** *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно убедиться, что количества инверсий в перестановках

$$n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots, n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, \dots, n_n, \quad (1.5)$$

$$n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_j, n_{i+1}, \dots, n_{j-1}, n_i, n_{j+1}, \dots, n_n \quad (1.6)$$

различаются на нечетное число. Введем в рассмотрение множества

$$B_1 = \{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}\}, \quad B_2 = \{n_{i+1}, \dots, n_{j-1}\}, \quad B_3 = \{n_{j+1}, \dots, n_n\}.$$

Обозначим через  $B_{ks}^+$  количество элементов множества  $B_k$ , больших  $n_s$ , через  $B_{ks}^-$  — количество элементов множества  $B_k$ , меньших  $n_s$ ,  $s = i, j$ . Ясно, что  $B_{ks}^+ + B_{ks}^- = \text{card}(B_k)$ , где  $\text{card}(B_k)$  — количество элементов множества  $B_k$ , при любых  $k = 1, 2, 3$ ,  $s = i, j$ . Достаточно подсчитать количество инверсий в перестановках (1.5), (1.6), отвечающих парам, содержащим, либо  $n_i$ , либо  $n_j$ , так как остальные пары при переходе от (1.5) к (1.6) не меняются. Количество указанных инверсий в перестановке (1.5), очевидно, равно

$$B_I = B_{1i}^+ + B_{2i}^- + B_{3i}^- + B_{1j}^+ + B_{2j}^+ + B_{3j}^- + I(n_i, n_j),$$

где  $I(n_i, n_j)$  — количество инверсий пары  $n_i, n_j$ , а для перестановки (1.6) оно есть

$$B_{II} = B_{1j}^+ + B_{2j}^- + B_{3j}^- + B_{1i}^+ + B_{2i}^+ + B_{3i}^- + I(n_j, n_i).$$

Очевидно, что  $B_I - B_{II} = B_{2i}^- - B_{2i}^+ + B_{2j}^+ - B_{2j}^- + I(n_i, n_j) - I(n_j, n_i) =$

$$\begin{aligned} &= B_{2i}^- - B_{2i}^+ + B_{2j}^+ - B_{2j}^- \pm 1 = B_{2i}^- - B_{2i}^+ + B_{2j}^+ - B_{2j}^- \pm 2(B_{2i}^+ + B_{2j}^-) \pm 1 = \\ &= B_{2i}^- + B_{2i}^+ + B_{2j}^+ + B_{2j}^- - 2(B_{2i}^+ + B_{2j}^-) \pm 1 = \\ &= 2 \text{card}(B_2) - 2(B_{2i}^+ + B_{2j}^-) \pm 1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $B_I - B_{II}$  — нечетное число.  $\square$

**2.2. Теорема.** *При любом  $n$  количества четных и нечетных перестановок совпадают.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из предыдущей теоремы вытекает, что всякую четную перестановку можно превратить в нечетную, поменяв местами каких-либо два ее элемента. Справедливо и обратное. Это означает, что между множеством всех четных перестановок и множеством всех нечетных перестановок (множества  $M_n$ ) можно установить взаимнооднозначное соответствие. Эти два множества конечны, поэтому имеют равные количества элементов.  $\square$

## § 2. Определители произвольного порядка

1. *Квадратной матрицей* порядка  $n$  называется таблица, состоящая из  $n$  строк и  $n$  столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Здесь  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , — числа, вообще говоря, комплексные.

Определитель матрицы порядка  $n$  может быть введен по аналогии с определителями второго и третьего порядка в ходе решения системы линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Однако нам будет удобнее опираться непосредственно на обобщение формулы (2.15), с. 33.

*Определителем* матрицы  $A$  назовем величину

$$|A| = \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \dots a_{nn_n}. \quad (2.2)$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\Delta = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Поясним, что определителем матрицы порядка  $n$  является сумма  $n!$  слагаемых, составленная следующим образом: слагаемыми служат всевозможные произведения  $n$  элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, причем слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка  $n_1, n_2, \dots, n_n$  четная, и со знаком минус в противоположном случае.

Вследствие теоремы 2.2 количество слагаемых в (2.2) со знаком плюс равно количеству слагаемых со знаком минус.

Отметим также, что элементы матрицы, участвующие в слагаемом определителя, соответствующем перестановке  $n_1, n_2, \dots, n_n$ , изображаются точками графика этой перестановки (см. рис. 1, с. 73).

Говорят, что элементы  $a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{nn_n}$  составляют *диагональ* матрицы. Диагональ называется *четной*, если перестановка  $n_1, \dots, n_n$  четная, и *нечетной* в противном случае.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Поясним, что слева — определитель порядка  $n$ , а справа — порядка  $n - 1$ .

### § 3. Основные свойства определителей

Переходим к изучению основных свойств определителей. Все они являются обобщением свойств определителей третьего порядка, и их доказательства зачастую не требуют дополнительных сколько-нибудь сложных рассуждений. В этих случаях мы ограничиваемся только формулировками соответствующих утверждений.

**1.** Если одна из строк (или один из столбцов) определителя состоит только из нулей, то этот определитель равен нулю. Доказательство сразу же следует из того, что каждая диагональ матрицы  $A$  содержит в этом случае нулевой элемент.

**2.** Определитель линеен по каждой строке (по каждому столбцу).

**3.** Если в определителе две строки (или два столбца) совпадают, то он равен нулю. Пусть совпадают строки с номерами  $k$  и  $l$ ,  $k < l$ . Множество всех диагоналей матрицы  $A$  можно представить в виде объединения множества пар

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{kn_k}, \dots, a_{ln_l}, \dots, a_{nn_n},$$

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{kn_l}, \dots, a_{ln_k}, \dots, a_{nn_n}.$$

Диагонали каждой такой пары имеют противоположные четности, так как соответствующие им перестановки получены одна из другой при помощи транспозиции  $(k, l)$ . Произведения же элементов этих диагоналей совпадают, так как по предположению

$$a_{kn_k} = a_{ln_k}, \quad a_{kn_l} = a_{ln_l}.$$

Это означает, что слагаемые в (2.2), отвечающие каждой такой паре, в сумме дают нуль, следовательно,  $|A| = 0$ . Доказательство равенства нулю определителя, у которого два столбца совпадают, проводится аналогично.

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

5. Определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. То же самое справедливо и для столбцов определителя.

6. Введенные ранее понятия *алгебраических дополнений* и *миноров* дословно переносятся на случай определителей произвольного порядка. Без каких-либо изменений проходит и доказательство формулы, аналогичной формуле (3.17), с. 41. При этом нужно использовать равенство (2.4). Таким образом, для любого определителя  $|A|$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

Справедлива и формула *разложения определителя по столбцу*:

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

ПРИМЕР. Вычислим определитель пятого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Сначала добьемся того, чтобы все элементы третьего столбца, кроме последнего, были нулями. Для этого умножим последнюю строку на три и прибавим ко второй, а затем умножим последнюю строку на четыре и вычтем из четвертой строки. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по третьему столбцу, получим

$$\Delta = (-1)^{3+5}(-1) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем теперь определитель так, чтобы все элементы первого столбца, кроме второго, были нулями. С этой целью умножим вторую строку на два и прибавим к первой, затем умножим вторую строку на три и вычтем из третьей и, наконец, умножим вторую строку на два и вычтем из последней, получим:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, будем иметь

$$\Delta = -(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель третьего порядка, разложив его по третьей строке:

$$\begin{aligned} \Delta &= 36 \begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix} - (-33) \begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix} + (-24) \begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix} = \\ &= 36(-72) - (-33)(-104) + (-24)(-208) = -1032. \end{aligned}$$

## 7. Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к  $A$ . Поясним, что матрицы  $A$  и  $A^T$  состоят из одних и тех же элементов. Первая строка матрицы  $A^T$  составлена из элементов первого столбца матрицы  $A$ , вторая строка — из элементов второго столбца матрицы  $A$  и т. д.

Определители матриц  $A$  и  $A^T$  совпадают.

Докажем это утверждение индукцией по порядку определителя. Для определителя второго порядка равенство  $|A| = |A^T|$  выполняется очевидным образом. Предположим справедливость этого равенства для произвольного определителя порядка  $n - 1$  и покажем, что тогда оно верно и для произвольного определителя порядка  $n$ . Представим  $|A|$  в виде разложения по первой строке:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}. \quad (3.4)$$

Определитель  $|A^T|$  разложим по первому столбцу:

$$|A^T| = a_{11}M_{11}^T - a_{12}M_{21}^T + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{n1}^T. \quad (3.5)$$

Здесь  $M_{ij}^T$  — минор определителя  $|A^T|$ , соответствующий элементу этого определителя, находящегося в позиции  $i, j$ . По предположению индукции имеем, что  $M_{ij}^T = M_{ji}$ , следовательно,  $|A^T| = |A|$ .

8. Будем говорить, что строки матрицы  $A$  *линейно зависимы*, если существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , не все одновременно равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_n a_{nj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Для того, чтобы определитель матрицы  $A$  был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее строки были линейно зависимы.

То, что из линейной зависимости строк вытекает равенство нулю определителя, доказывается точно так же, как и для определителя третьего порядка.

Докажем обратное утверждение, т. е. докажем, что если строки матрицы линейно независимы, то определитель матрицы не равен нулю. Пусть  $|A|=0$ . Рассмотрим все определители порядка  $n-1$ , которые получаются вычеркиванием одной строки и одного столбца из матрицы  $A$ .

Если все они окажутся равными нулю, перейдем к определителям порядка  $n-2$  и т. д. В конце концов, либо все элементы матрицы  $A$  окажутся равными нулю, и тогда доказываемое утверждение будет выполнено тривиальным образом, либо найдется определитель порядка  $k \geq 1$ , отличный от нуля и полученный вычеркиванием  $n-k$  строк и столбцов матрицы  $A$ , а все определители большего порядка будут нулями. Поскольку при перестановке строк и при перестановке столбцов меняется лишь знак определителя, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что этот определитель (обозначим его через  $d_k$ ) составлен из элементов первых  $k$  строк и первых  $k$  столбцов матрицы  $A$ .

Рассмотрим определитель  $d_{k+1}$ , составленный из первых  $k+1$  строк и первых  $k+1$  столбцов матрицы  $A$ . По предположению он равен нулю. Разложив этот определитель по элементам последнего столбца, получим, что

$$\alpha_1 a_{1k+1} + \alpha_2 a_{2k+1} + \dots + \alpha_k a_{kk+1} + d_k a_{k+1k+1} = 0. \quad (3.6)$$

Подчеркнем, что  $d_k \neq 0$ , а числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — алгебраические дополнения соответствующих элементов последнего столбца определителя  $d_{k+1}$ . Важно отметить, что они зависят только от элементов первых  $k$  столбцов определителя  $d_{k+1}$ .

Переставляя столбцы определителя  $|A|$ , мы можем составить последний столбец определителя  $d_{k+1}$  из элементов

$$a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}, a_{k+1j}, \quad j = k+2, k+3, \dots, n.$$

По предположению этот определитель равен нулю. Выполняя разложение по его последнему столбцу, получим, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = k+2, k+3, \dots, n. \quad (3.7)$$

Наконец, поместив на место  $k+1$  столбца определителя  $|A|$  его же столбец с номером  $j \leq k$ , мы получим нулевой определитель (как определитель с равными столбцами). По той же причине и определитель  $d_{k+1}$  будет равен нулю. Вновь выполняя разложение по последнему столбцу этого определителя, получим, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.8)$$

Теперь можно написать:

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} + 0 \cdot a_{k+2j} + \cdots + 0 \cdot a_{nj} = 0,$$

где  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $d_k \neq 0$ , т. е. строки матрицы  $A$  линейно зависимы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку  $|A^T| = |A|$ , то, очевидно, для того, чтобы определитель матрицы  $A$  был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее столбцы были линейно зависимы.

#### § 4. Примеры вычисления определителей

Приведем примеры вычисления определителей, часто возникающих в различных разделах алгебры.

**1.** Определитель треугольной матрицы. Матрицу  $A$  называют *верхней треугольной*, если  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ . Матрицу  $A$  называют *нижней треугольной*, если  $a_{ij} = 0$  при  $i < j$ .

Если матрица  $A$  треугольная, то

$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (4.1)$$

Докажем это утверждение применительно к верхней треугольной матрице. Справедливость формулы (4.1) для нижней треугольной матрицы  $A$  сразу вытекает из того, что  $|A| = |A^T|$  и  $A^T$  — верхняя треугольная матрица.

Для матриц первого и второго порядков формула (4.1), очевидно, справедлива. Для доказательства этой формулы при произвольном  $n$  используем метод математической индукции, т. е. предположим, что



для определителей  $(n-1)$ -го порядка она уже доказана, и рассмотрим определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель  $|A|$  по первому столбцу, получим

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

К определителю, стоящему в правой части, применимо предположение индукции, т. е. он равен произведению  $a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$ , поэтому

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

2. *Определитель Вандермонда*<sup>1)</sup>. Так называют определитель вида

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что при любом  $n \geq 2$  определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей  $a_i - a_j$ , где  $1 \leq j < i \leq n$ :

$$d = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Доказываемая формула, очевидно, справедлива при  $n = 2$ . Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что для определителей  $(n-1)$ -го порядка формула уже доказана, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

<sup>1)</sup>Александр Теофил Вандермонд (Alexandre-Theophile Vandermonde; 1735 — 1796) — французский музыкант и математик.

Рассмотрим определитель  $d$ . Умножим предпоследнюю строку на  $a_1$  и вычтем из последней. Затем вычтем из  $(n-1)$ -й строки строку с номером  $(n-2)$ , умноженную на  $a_1$ , и так далее. Наконец, умножим первую строку на  $a_1$  и вычтем из второй. В результате такой последовательности преобразований получим

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель  $d$  по первому столбцу, получим определитель  $(n-1)$ -го порядка:

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что общим множителем всех элементов первого столбца является  $a_2 - a_1$ , общим множителем всех элементов второго столбца является  $a_3 - a_1$  и т. д. Поэтому

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

где последний множитель — определитель Вандермонда  $(n-1)$ -го порядка. Следовательно,

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

## § 5. Крамеровские системы линейных уравнений

1. В этом параграфе будем рассматривать системы линейных уравнений, у которых количество неизвестных равно числу уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

составленная из коэффициентов уравнений, называется *матрицей системы* (5.1). Будем предполагать, что  $|A| \neq 0$ . В этом случае систему уравнений (5.1) называют *крамеровской*. Набор чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$  называют *столбцом правой части* (или просто *правой частью*) системы (5.1). Если правая часть системы нулевая, т. е.  $b_i = 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , то система называется *однородной*. Однородная система уравнений всегда имеет решение. Например, можно положить  $x_1, x_2, \dots, x_n = 0$ . Такое решение называют *тривиальным*.

**1.1. Теорема.** *Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим противное. Тогда для некоторого набора чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , среди которых по крайней мере одно не равно нулю, справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Это показывает, что столбцы матрицы  $A$  линейно зависимы, т. е. ее определитель равен нулю, но по условию теоремы определитель  $|A|$  не равен нулю. Значит, предположение о наличии нетривиального решения у однородной крамеровской системы уравнений неверно.  $\square$

**1.2.** Для того, чтобы система (5.3) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы  $A$  был равен нулю. Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из замечания на с. 80.

**1.3. Теорема.** *При любой правой части крамеровская система уравнений не может иметь двух различных решений.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим противное и пусть

$$x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$$

и

$$x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$$

представляют собой два различных решения системы (5.1), т. е.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \dots + a_{1n}x_n^1 &= b_1, \\ a_{21}x_1^1 + a_{22}x_2^1 + \dots + a_{2n}x_n^1 &= b_2, \\ \dots & \\ a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \dots + a_{nn}x_n^1 &= b_n \end{aligned} \quad (5.4)$$

и

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \dots + a_{1n}x_n^2 &= b_1, \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_n^2 &= b_2, \\ \dots & \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 &= b_n. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Положим

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \quad \dots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

и вычтем почленно одноименные уравнения систем (5.4), (5.5). В результате получим, что  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — решение однородной системы (5.3). Но тогда по теореме 1.1 имеем, что  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , т. е. предположение о наличии двух различных решений системы (5.1) неверно.  $\square$

**1.4. Теорема.** *Крамеровская система уравнений при любой правой части имеет решение.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Фактически, мы сконструируем решение системы (5.1), опираясь на формулу (3.1), с. 77. Будем разыскивать решение системы (5.1) в виде

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \dots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

где коэффициенты  $c_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, n$ , подлежат определению. Подставляя выражения (5.6) в уравнения системы (5.1) и собирая в левых частях этих уравнений коэффициенты при одинаковых  $b_i$ , получим

$$\begin{aligned} b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \dots + a_{in}c_{n1}) + \\ + b_2(a_{i1}c_{12} + a_{i2}c_{22} + \dots + a_{in}c_{n2}) + \dots \\ \dots + b_i(a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \dots + a_{in}c_{ni}) + \dots \\ \dots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \dots + a_{in}c_{nn}) = b_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Понятно, что если выбрать коэффициенты  $c_{ik}$  так, чтобы выполнялись условия

$$a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \dots + a_{in}c_{nk} = \delta_{ik}, \quad (5.8)$$

где  $i, k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера, то формулы (5.6) будут давать решение системы (5.1). Сравнив соотношения (5.8) с формулами (3.1), с. 77, нетрудно заметить, что если положить

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.9)$$

то условия (5.8) будут выполнены. Подставляя найденные выражения для  $c_{ik}$  в (5.6), получим следующие формулы для решения системы (5.1):

$$x_i = (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n)/|A|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10)$$

Используя разложение определителя по столбцу, соотношения (5.10) можно переписать в более компактном виде:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.11)$$

Здесь  $\Delta = |A|$ ,  $\Delta_i$  — определитель, который получается заменой  $i$ -го столбца определителя  $\Delta$  правой частью системы (5.1).  $\square$

Формулы (5.11) называют *формулами Крамера*.

ПРИМЕР. Решим при помощи формул Крамера систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Подсчитаем соответствующие определители:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 4, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -4, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -8, \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

По формулам Крамера

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1, \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = -1, \quad x_3 = \Delta_3/\Delta = -2, \quad x_4 = \Delta_4/\Delta = 1.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В вычислительной практике формулы Крамера используются очень редко. Чаще для решения систем линейных алгебраических уравнений применяются различные варианты метода исключения неизвестных (метода Гаусса) или итерационные методы. Подробнее по этому поводу см. с. 99, с. 302.

**2.** В качестве примера применения теории крамеровских систем построим так называемую интерполяционную формулу Лагранжа.

**2.1. Теорема.** Пусть  $z_0, z_1, \dots, z_n$  — попарно различные числа,  $h_0, h_1, \dots, h_n$  — произвольные числа. Тогда существует, и при том только один, полином  $P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  такой, что

$$P_n(z_j) = h_j, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (5.12)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Условия (5.12) представляют собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов полинома  $P_n$ . Определитель этой системы — определитель Вандермонда (см. с. 81). Он, очевидно, не равен нулю, поэтому система уравнений (5.12) имеет единственное решение при любой правой части.  $\square$

**2.2.** Теперь ясно, что если полином степени  $n$  всюду (на самом деле, по крайней мере в  $n + 1$  различных точках) равен нулю, то все его коэффициенты — нули.

**2.3.** Нетрудно построить в явном виде полином, удовлетворяющий условиям (5.12), а именно, решение задачи дает *интерполяционная формула Лагранжа*<sup>1)</sup>

$$P_n(z) = h_0\Phi_0(z) + h_1\Phi_1(z) + \dots + h_n\Phi_n(z), \quad (5.13)$$

где  $\Phi_j$  — полином степени  $n$ , удовлетворяющий условиям

$$\Phi_j(z_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n, \quad (5.14)$$

$$\Phi_j(z_j) = 1, \quad (5.15)$$

<sup>1)</sup>Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange; 1736 — 1813) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

для  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Как показано в п. 3, с. 24, полином своими корнями определяется с точностью до постоянного множителя, следовательно,

$$\Phi_j(z) = A_j(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_n).$$

Используя (5.15), найдем значение постоянной:

$$A_j = \frac{1}{(z_j - z_0)(z_j - z_1) \cdots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \cdots (z_j - z_n)},$$

т. е.

$$\Phi_j(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_n)}{(z_j - z_0)(z_j - z_1) \cdots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \cdots (z_j - z_n)},$$

где  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

## § 6. Матрицы. Операции над матрицами

1. Выше было введено понятие квадратной матрицы. *Прямоугольной матрицей*  $A$  размера  $m \times n$  называется таблица, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Элементами таблицы служат числа  $a_{ij}$  (вообще говоря, комплексные). Иногда будем явно указывать размеры матрицы  $A$  и обозначать ее через  $A(m, n)$ .

Отметим некоторые частные случаи. При  $m = n$  получаем квадратную матрицу. Ее размер (говорят также *порядок*) будем обозначать одной буквой  $n$ .

Если  $m = 1$ , а  $n$  произвольно, получаем *матрицу-строку* (или, просто, *строку*)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (6.2)$$

Говорят, что эта строка имеет *длину*  $n$ .

Если  $n = 1$ , а  $m$  произвольно, получаем *матрицу-столбец* (или, просто, *столбец*)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Говорят, что этот столбец имеет *длину*  $m$ . Подчеркнем, что при записи строк и столбцов второй индекс обычно не пишут. Столбцы или строки часто будем называть *векторами*.

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы — нули. Нулевая матрица обозначается символом  $0$ .

**2.** Опишем некоторые специальные виды квадратных матриц.

**2.1.** Говорят, что элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образуют *главную диагональ* квадратной матрицы  $A$ . Квадратная матрица  $D$  называется *диагональной*, если  $d_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , или, подробнее,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Для диагональной матрицы будем использовать также обозначение

$$D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}).$$

Диагональная матрица называется *единичной*, если  $d_{ii} = 1$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Единичную матрицу будем обозначать буквой  $I$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

**2.2.** Матрица  $P_{ik}$  называется *матрицей перестановки*, если она получена из единичной матрицы перестановкой строк с номерами  $i, k$ . Например, матрицами перестановок третьего порядка являются матрицы

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.3.** Напомним, что квадратная матрица  $L$  называется *нижней треугольной*, если все ее элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$



квадратная матрица  $U$  называется верхней треугольной, если все ее элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

#### 2.4. Квадратная матрица

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & l_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & l_{k+1,k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & l_{n,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

называется *элементарной нижней треугольной*. Поясним, что эта матрица отличается от единичной матрицы лишь элементами  $k$ -го столбца.

**3.** Умножение матрицы на число, сложение матриц. *Произведением матрицы  $A$  и числа  $\alpha$*  называется матрица

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(все элементы матрицы  $A$  умножаются на число  $\alpha$ ).

*Суммой двух матриц  $A, B$  одинаковых размеров* называется матрица  $C$  того же размера с элементами  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Пишут:  $C = A + B$ .

УПРАЖНЕНИЕ. Убедиться, что введенные операции обладают следующим свойством:

- 1)  $A + 0 = A$ ,
- 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,
- 3)  $A + B = B + A$ ,
- 4)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .

Отметим, что сумма двух нижних (верхних) треугольных матриц — нижняя (верхняя) треугольная матрица.

4. Умножение строки на столбец. По определению *произведение строки  $x$  и столбца  $y$*  одинаковой длины  $n$  есть число

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n x_k y_k. \quad (6.9)$$

ПРИМЕР.

$$(5 \quad -1 \quad 3 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10.$$

5. Умножение матрицы на вектор. *Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  и вектора  $x$  длины  $n$  называется вектор  $y$  длины  $m$  с элементами*

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Символически это записывают так:

$$y = Ax.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Поясним, что умножение матрицы на вектор выполняется следующим образом: столбец  $x$  последовательно накладывается на строки матрицы  $A$ , соответствующие элементы попарно перемножаются, а затем полученные  $n$  величин суммируются. В результате получаются элементы вектора  $y$ .

ПРИМЕР.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из определения вытекает, что для любых чисел  $\alpha, \beta$  и для любых векторов  $x, y$  (подходящей длины) справедливо равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay. \quad (6.10)$$

Говорят поэтому, что операция умножения матрицы на вектор *линейна*.

**6.** Умножение строки на матрицу. Произведением строки  $x$  длины  $m$  и матрицы  $A$  размера  $m \times n$  называется строка  $y$  длины  $n$  с элементами

$$y_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Символически это записывают так:

$$y = xA.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение строки на матрицу выполняется следующим образом: столбцы матрицы  $A$  последовательно накладываются на строку  $x$ , соответствующие элементы попарно перемножаются, а затем полученные  $m$  величин суммируются. В результате получают элементы строки  $y$ .

ПРИМЕР.

$$(5 \ 1 \ 0 \ -3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (11 \ -1).$$

Непосредственно из определения вытекает, что для любых чисел  $\alpha$ ,  $\beta$  и для любых строк  $x$ ,  $y$  (подходящей длины) справедливо равенство

$$(\alpha x + \beta y)A = \alpha xA + \beta yA. \quad (6.11)$$

Говорят поэтому, что операция умножения строки на матрицу *линейна*.

**7.** С использованием введенных операций система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными (5.1) может быть записана так:

$$Ax = b, \quad (6.12)$$

где  $A$  — заданная квадратная матрица,  $b$  — заданный вектор,  $x$  — искомый вектор, или в виде

$$xA^T = b, \quad (6.13)$$

где  $b$  — заданная строка,  $x$  — искомая строка. В дальнейшем мы чаще будем пользоваться формой записи (6.12).

8. Умножение прямоугольных матриц. Пусть  $A$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $B$  — матрица размера  $n \times p$ . Матрица  $C$  размера  $m \times p$  называется *произведением матриц*  $A$ ,  $B$ , если ее элементы определяются по правилу

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq}b_{qj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p. \quad (6.14)$$

Пишут  $C = AB$ , или, более подробно,

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Полезно пояснить, что элементы каждого столбца матрицы  $C$  вычисляются как результат умножения матрицы  $A$  на соответствующий столбец матрицы  $B$ . Точно так же элементы каждой строки матрицы  $C$  получаются как результат умножения соответствующей строки матрицы  $A$  на матрицу  $B$ . Отметим также, что элемент  $c_{ij}$  есть результат умножения  $i$ -й строки матрицы  $A$  на  $j$ -й столбец матрицы  $B$ .

ПРИМЕР:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц зависит от порядка сомножителей. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $A$ ,  $B$  называют *перестановочными*, если  $AB = BA$ . Перестановочные матрицы существуют. Например,

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для любой квадратной матрицы  $A$

$$AI = IA = A.$$

Отметим следующие свойства операции умножения матриц:

- 1)  $(A + B)C = AC + BC$ ,
- 2)  $C(A + B) = CA + CB$ ,
- 3)  $A(BC) = (AB)C$ .

Понятно, что размеры участвующих здесь матриц должны быть согласованы так, чтобы все операции имели смысл.

Элементарно проверяется, что 1), 2) следуют из (6.11), (6.10) соответственно. Для доказательства свойства 3) заметим, что элементы матрицы  $D = A(BC)$  есть числа вида  $d_{ij} = a_i(BC_j)$ , где  $a_i$  —  $i$ -ая строка матрицы  $A$ ,  $c_j$  —  $j$ -й столбец матрицы  $C$ . Элементы матрицы  $F = (AB)C$  — это числа  $f_{ij} = (a_iB)c_j$ . Поэтому достаточно доказать, что  $x(By) = (xB)y$  для любой строки  $x$  и любого столбца  $y$ . Понятно, что их длины должны быть согласованы с размерами матрицы  $B$ . Будем полагать, что матрица  $B$  имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов. Элементарные вычисления дают

$$x(By) = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j, \quad (6.16)$$

аналогично,

$$(xB)y = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i y_j. \quad (6.17)$$

Суммы (6.16), (6.17) отличаются лишь порядком следования слагаемых и потому совпадают.

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Пусть  $P_{ik}$  — матрица перестановки (см. с. 88). Показать, что вектор  $P_{ik}x$  получается из вектора  $x$  перестановкой элементов с номерами  $i, k$ .

2) Как следствие показать, что матрица  $P_{ik}A$  получается из матрицы  $A$  перестановкой строк с номерами  $i, k$ .

3) Показать, что если  $L, M$  — нижние треугольные матрицы, то матрица  $LM$  — нижняя треугольная. Показать, что аналогичное верно и для верхних треугольных матриц.

4) Показать, что нижняя треугольная матрица  $L$  равна произведению элементарных нижних треугольных матриц  $L_k$  (см. (6.8)), т. е.  $L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n$ .

УКАЗАНИЕ. Проведите вычисления в соответствии со следующей расстановкой скобок:  $L = L_1(L_2 \cdots (L_{n-2}(L_{n-1}L_n) \cdots))$ , т. е. сначала перемножьте  $L_{n-1}L_n$ , результат умножьте слева на  $L_{n-2}$  и т. д.

5) Показать, что для любой квадратной матрицы  $A$

$$\det(P_{ik}A) = \det P_{ik} \det A = -\det A.$$

6) Показать, что для любой квадратной матрицы  $A$  и элементарной нижней треугольной матрицы  $L_k$

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A. \quad (6.18)$$

РЕШЕНИЕ. Пусть  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  — вектор. Элементарные вычисления дают

$$L_k a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ l_{k,k} a_k \\ l_{k+1,k} a_k + a_{k+1} \\ l_{k+2,k} a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k} a_k + a_n \end{pmatrix}.$$

Такой вид будут иметь столбцы матрицы  $L_k A$ . Полученное равенство показывает, что определитель  $\det(L_k A)$  можно преобразовать следующим образом: из  $k$ -ой строки вынести общий множитель  $l_{kk}$ , затем умножить эту строку на  $l_{jk}$  и вычесть из  $j$ -ой строки последовательно для всех  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$ . В результате, получим равенство (6.18).

7) Опираясь на предыдущие упражнения и правило вычисления определителя треугольной матрицы (см. с. 80), показать, что для любой квадратной матрицы  $A$  и любой нижней треугольной матрицы  $L$

$$\det(LA) = \det L \det A. \quad (6.19)$$

Показать, что если  $R$  — верхняя треугольная матрица, то

$$\det(RA) = \det R \det A. \quad (6.20)$$

**9. Транспонирование матриц.** Определенная на с. 78 операция транспонирования квадратных матриц естественным образом распространяется на прямоугольные матрицы.

Понятно, что при транспонировании размеры матрицы меняются местами. В частности, матрица-строка становится матрицей-столбцом.

Отметим основные свойства операции транспонирования.

1) Для любой матрицы  $A$  справедливо равенство  $(A^T)^T = A$ .

2) Для любых чисел  $\alpha, \beta$  и любых матриц  $A, B$  одинаковых размеров

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$$

(поэтому говорят, что операция транспонирования *линейна*).

3) Если операция умножения матриц  $AB$  имеет смысл, то: а) операция умножения  $B^T A^T$  также имеет смысл; б)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Все сформулированные здесь утверждения, кроме утверждения 3, б), непосредственно вытекают из определений, и их проверка предлагается читателю.

Докажем утверждение 3, б). Элемент с номерами  $i, j$  матрицы  $(AB)^T$  — это результат умножения  $j$ -й строки матрицы  $A$  на  $i$ -й столбец матрицы  $B$ . Элемент с номерами  $i, j$  матрицы  $B^T A^T$  — это результат умножения  $i$ -й строки матрицы  $B^T$  и  $j$ -го столбца матрицы  $A^T$ . Элементы  $i$ -й строки матрицы  $B^T$  совпадают с элементами  $i$ -го столбца матрицы  $B$ , а элементы  $j$ -го столбца матрицы  $A^T$  совпадают с элементами  $j$ -ой строки матрицы  $A$ . Последнее замечание завершает доказательство утверждения 3, б).

## § 7. Обратная матрица

В этом параграфе мы будем широко использовать результаты теории крамеровских систем (см. § 5, с. 82).

**1.** Квадратная матрица  $A$  называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю. В противном случае матрица  $A$  называется *невырожденной*.

При обосновании двух последующих утверждений будем опираться на п. 1.2, с. 83.

**2.** Если  $A, B$  — невырожденные матрицы, матрица  $C = AB$  также невырождена. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что однородная система линейных уравнений

$$ABx = 0 \tag{7.1}$$

имеет только тривиальное решение. Последнее верно, так как, поскольку матрица  $A$  невырождена, то  $Bx = 0$ , а поскольку  $B$  невырождена, то  $x = 0$ .

**3.** Если одна из матриц  $A$ ,  $B$  вырождена, то матрица  $C = AB$  также вырождена. Действительно, в этом случае достаточно установить, что система (7.1) имеет нетривиальное решение. Пусть матрица  $B$  вырождена. Тогда существует вектор  $x \neq 0$  такой, что  $Bx = 0$ , значит  $ABx = 0$ .

Пусть теперь  $A$  вырождена, а  $B$  невырождена. Существует вектор  $y \neq 0$  такой, что  $Ay = 0$ . Так как  $B$  невырождена, существует единственный вектор  $x$  такой, что  $Bx = y$ , причем  $x$  не равен нулю, так как  $y \neq 0$ . Вновь получаем, что  $ABx = 0$  при  $x \neq 0$ .

**4.** Матрица  $X$  называется *правой обратной* к квадратной матрице  $A$ , если

$$AX = I. \quad (7.2)$$

Матрица  $Y$  называется *левой обратной* к квадратной матрице  $A$ , если

$$YA = I. \quad (7.3)$$

Вырожденная матрица не имеет правой обратной матрицы. Действительно, если правая обратная матрица  $X$  существует, то

$$\det(AX) = \det(I) = 1.$$

С другой стороны,  $\det(AX) = 0$ , так как  $A$  вырождена. Точно так же доказывается невозможность существования левой обратной у вырожденной матрицы.

**5.** Если  $\det(A) \neq 0$ , то правая обратная к матрице  $A$  существует и определяется единственным образом. Действительно, обозначим через  $x^k$  столбцы матрицы  $X$ , а через  $i^k$  — столбцы матрицы  $I$ . Уравнение (7.2) распадается на совокупность систем уравнений

$$Ax^k = i^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.4)$$

Поскольку матрица  $A$  невырождена, каждая из этих систем имеет единственное решение.

Точно так же доказывается существование и единственность левой обратной матрицы.

**6.** На самом деле, правая и левая обратные матрицы совпадают. Действительно, если  $YA = I$ , то  $YAX = X$ , но  $AX = I$ , т. е.  $Y = X$ .

**7.** В соответствии с вышесказанным матрицу  $X$  будем называть *обратной матрицей* к матрице  $A$ , если  $AX = I$ . Обратную матрицу к матрице  $A$  обозначают через  $A^{-1}$ .



8. Укажем явный вид матрицы  $A^{-1}$ . Введем в рассмотрение так называемую *присоединенную* к матрице  $A$  матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$ . Формулы (3.1), с. 77, можно записать в матричном виде

$$A\tilde{A} = |A|I. \quad (7.5)$$

Отсюда вытекает, что если  $|A| \neq 0$ , то

$$A^{-1} = |A|^{-1}\tilde{A} \quad (7.6)$$

есть матрица, обратная матрице  $A$ .

ПРИМЕР. Построим матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим сначала определитель матрицы  $A$ , разлагая его по первой строке:

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь подсчитаем алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, & A_{12} &= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, & A_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

По формуле (7.6)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

9. Отметим некоторые свойства обратной матрицы.

1) Матрица  $A^{-1}$  невырождена,  $(A^{-1})^{-1} = A$ . Это утверждение — очевидное следствие равенства  $AA^{-1} = I$ .

2) Если матрицы  $A, B$  невырождены, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Действительно,  $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$ .

3) Если матрица  $A$  невырождена, то матрица  $A^T$  невырождена и

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Невырожденность матрицы  $A^T$  — следствие равенства  $|A^T| = |A|$ . Используя свойство 3 б), с. 94, можем написать

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$

т. е. матрица  $(A^{-1})^T$  обратна к  $A^T$ .

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Пусть матрицы  $A_1, A_2, \dots, A_p$  невырождены. Показать, что

$$(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

2) Пусть  $P_{ik}$  — матрица перестановки. Показать, что  $P_{ik}^{-1} = P_{ik}$ .

3) Пусть  $L_k$  есть элементарная нижняя треугольная матрица и  $l_{kk} \neq 0$ . Показать, что

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1/l_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -l_{k+1,k}/l_{k,k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -l_{n,k}/l_{k,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Пусть  $L$  — нижняя треугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали отличны от нуля. Показать, что матрица  $L^{-1}$  существует и является нижней треугольной матрицей. Показать, что аналогичное верно и для верхней треугольной матрицы.

5) Пусть квадратная матрица  $A$  имеет обратную,  $B$  — произвольная квадратная матрица того же порядка. Показать, что существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  матрица  $A + \varepsilon B$  также имеет обратную.

Решение. Пусть  $x$  — решение системы уравнений

$$Ax + \varepsilon Bx = 0. \quad (7.7)$$

Тогда  $x$  — решение системы уравнений

$$x = -\varepsilon A^{-1} Bx. \quad (7.8)$$

Пусть  $x \neq 0$  и  $|x_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ , где  $n$  — порядок матрицы  $A$ . Положим  $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n = A^{-1}B$ . Из (7.8) очевидным образом получаем

$$|x_i| \leq |x_i| \varepsilon \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{kj}|.$$

Пусть  $\varepsilon$  выбрано так, что

$$\varepsilon \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{kj}| < 1. \quad (7.9)$$

Тогда  $|x_i| < |x_i|$ , что нелепо. Значит, при выполнении условия (7.9) система (7.7) может иметь лишь тривиальное решение, следовательно, матрица  $A + \varepsilon B$  невырождена для всех достаточно малых  $\varepsilon$ .

## § 8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

1. В основе метода Гаусса, как, впрочем, и многих других методов решения систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (8.1)$$

лежит следующее утверждение.

Пусть матрица  $B$  невырождена. Тогда система уравнений

$$BAx = Bb \quad (8.2)$$

эквивалентна системе (8.1), т. е. решение системы (8.2) — решение системы (8.1) и, наоборот, решение системы (8.1) — решение системы (8.2).

Действительно, пусть  $x$  — решение системы (8.2). Тогда

$$B(Ax - b) = 0,$$

но матрица  $B$  невырождена, следовательно,  $Ax - b = 0$ . Обратное утверждение очевидно.

Матрица  $B$  выбирается так, чтобы матрица  $BA$  была проще матрицы  $A$  и решение системы (8.2) находилось легче, чем решение системы (8.1).

В методе Гаусса матрица  $B$  конструируется при помощи элементарных нижних треугольных матриц так, чтобы матрица  $BA$  была верхней треугольной. Тогда решение системы (8.2) становится тривиальной задачей.

**2.** Переходим к описанию *метода Гаусса* решения крамеровских систем. Выберем среди элементов первого столбца матрицы  $A$  максимальный по модулю. Пусть это есть элемент  $a_{i1}$ . Он не может оказаться равным нулю, так как тогда все элементы первого столбца матрицы  $A$  — нули и, значит,  $|A| = 0$ , но система по предположению крамеровская, т. е. определитель матрицы  $A$  не нуль.

Умножим обе части уравнения на матрицу перестановки  $P_{i1}$ . В дальнейшем будем обозначать эту матрицу через  $P_1$  (заметим, что она равна единичной, если максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы  $A$  есть  $a_{11}$ ). Получим

$$A_1 x = b^1, \quad (8.3)$$

где  $A_1 = P_1 A$ ,  $b^1 = P_1 b$ . Поясним, что матрица  $A_1$  получается из матрицы  $A$  перестановкой первой и  $i$ -й строк, столбец  $b^1$  получается из столбца  $b$  перестановкой первого и  $i$ -го элементов. Элементы матрицы  $A_1$  обозначим через  $a_{kl}^{(1)}$ , элементы столбца  $b^1$  — через  $b_k^1$ . По построению  $a_{11}^{(1)} \neq 0$ .

Умножим обе части уравнения (8.3) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,1} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ l_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.4)$$

где  $l_{11} = 1/a_{11}^{(1)}$ ,  $l_{21} = -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ ,  $\dots$ ,  $l_{n1} = -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ . Получим

$$A_2 x = b^2, \quad (8.5)$$

где  $A_2 = L_1 A_1$ ,  $b^2 = L_1 b^1$ . Вычисляя произведение  $L_1 A_1$ , найдем, что

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Умножение  $L_1$  на  $A_1$  равносильно следующему преобразованию матрицы  $A_1$ : все элементы первой строки матрицы  $A_1$  делятся на  $a_{11}^{(1)}$ , затем для всех  $i = 2, \dots, n$  первая строка умножается на  $a_{i1}^{(1)}$  и вычитается из  $i$ -й строки матрицы  $A_1$ . Аналогично, элементы столбца  $b^2$  вычисляются по формулам  $b_1^2 = b_1^1/a_{11}^{(1)}$ ,  $b_i^2 = b_i^1 - b_1^1 a_{i1}^{(1)}$ , где  $i = 2, \dots, n$ .

Подчеркнем, что все элементы первого столбца матрицы  $A_2$ , кроме первого, оказываются при этом равными нулю.

Выберем среди элементов  $a_{22}^{(2)}, a_{32}^{(2)}, \dots, a_{n2}^{(2)}$  максимальный по модулю. Пусть этот элемент есть  $a_{i2}^{(2)}$ . Он не может равняться нулю. Действительно, если он равен нулю, то все числа  $a_{22}^{(2)}, a_{32}^{(2)}, \dots, a_{n2}^{(2)}$  — нули и тогда, вычисляя  $\det(A_2)$  разложением по первому столбцу, получим, что  $\det(A_2) = 0$ . С другой стороны, используя то, что  $L_1$  — элементарная нижняя треугольная матрица, а  $P_1$  — либо единичная матрица, либо матрица перестановки, можем написать, что

$$\det(A_2) = l_{11} \det(P_1 A) = \det(P_1 A) / a_{11}^{(1)} = \pm \det(A) / a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

Умножим обе части уравнения (8.5) на матрицу  $P_2 = P_{2i}$ , т. е. поменяем местами вторую и  $i$ -ю строки матрицы  $A_2$ . Получим

$$\tilde{A}_2 x = P_2 L_1 P_1 b, \quad (8.7)$$

где

$$\tilde{A}_2 = P_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(2)} & \tilde{a}_{23}^{(2)} & \dots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{a}_{n2}^{(2)} & \tilde{a}_{n3}^{(2)} & \dots & \tilde{a}_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части уравнения (8.7) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_{2,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & l_{n-1,2} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & l_{n,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $l_{22} = 1/\tilde{a}_{22}^{(2)}$ ,  $l_{32} = -\tilde{a}_{32}^{(2)}/\tilde{a}_{22}^{(2)}$ ,  $\dots$ ,  $l_{n2} = -\tilde{a}_{n2}^{(2)}/\tilde{a}_{22}^{(2)}$ . Получим

$$A_3 x = L_2 P_2 L_1 P_1 b,$$

где  $A_3 = L_2 \tilde{A}_2 = L_2 P_2 L_1 P_1 A$ . Нетрудно убедиться, что

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Важно подчеркнуть, что все элементы второго столбца матрицы  $A_3$ , кроме первых двух, — нули.

Продолжая этот процесс, в конце концов, получим систему уравнений

$$Ux = f \quad (8.8)$$

(очевидно, эквивалентную исходной), где

$$U = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A, \quad (8.9)$$

$$f = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 b,$$

причем

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \cdots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n-1}^{(4)} & a_{3n}^{(4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

есть треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

Решение системы (8.8) не вызывает затруднений. Из последнего уравнения этой системы находим  $x_n = f_n$ , из предпоследнего имеем

$$x_{n-1} = f_{n-1} - a_{n-1,n}^{(n)} x_n \quad (8.11)$$

и так далее, наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = f_1 - a_{1,2}^{(2)} x_2 - a_{1,3}^{(2)} x_3 - \cdots - a_{1,n}^{(2)} x_n. \quad (8.12)$$

Таким образом, реализация метода Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе, называемом *прямым ходом метода Гаусса*, исходная система преобразуется к системе с треугольной матрицей. На втором этапе, называемом *обратным ходом метода Гаусса*, решается система с треугольной матрицей.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Выбор максимального по модулю элемента столбца при выполнении прямого хода метода Гаусса минимизирует влияние ошибок округления в расчетах на компьютере. Если не заботиться об ошибках округления, то на очередном шаге прямого хода метода Гаусса можно выбирать любой ненулевой элемент столбца.

**3.** Вычисление определителя методом Гаусса. Из (8.9), используя формулы из упражнений на с. 98, получаем

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U, \quad (8.13)$$

откуда, используя формулы из упражнений на с. 93, будем иметь

$$\begin{aligned} \det A &= \det(P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U) = \prod_{i=1}^n \det P_i \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} = \\ &= \pm \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

При этом мы учли, что  $\det U = 1$ . Нетрудно убедиться (см. упражнение 3 на с. 98), что

$$\det L_i^{-1} = \tilde{a}_{ii}^{(i)},$$

следовательно,

$$\det A = \pm a_{11}^{(1)} \tilde{a}_{22}^{(2)} \cdots \tilde{a}_{nn}^{(n)}. \quad (8.15)$$

Знак здесь определяется количеством перестановок строк, выполненных в ходе реализации прямого хода метода Гаусса. Если оно четно, выбирается знак плюс. В противном случае — минус. Таким образом, определитель матрицы  $A$  может быть вычислен в ходе реализации метода Гаусса.

**4.** Оценим количество арифметических операций, требуемых для решения системы уравнений методом Гаусса.

На первом шаге прямого хода метода Гаусса строится матрица  $L_1$ . Это требует выполнения  $n$  операций. Затем матрица  $L_1$  умножается на матрицу  $A_1$ . Нетрудно проверить, что умножение матрицы  $L_1$  на столбец требует  $2(n-1) + 1 = 2n - 1$  операций. Всего столбцов  $n$ . Значит, умножение матрицы  $L_1$  на  $A_1$  требует  $2n^2 - n$  операций.

Кроме того, матрица  $L_1$  умножается на столбец  $P_1 b$ .

Таким образом, реализация первого шага прямого хода метода Гаусса требует  $2n^2 + n - 1$  операций.

На втором шаге, т. е. при умножении матриц  $L_2, \tilde{A}_2$ , как нетрудно убедиться, мы фактически имеем дело с матрицами порядка  $n - 1$ . Поэтому реализация второго шага прямого хода метода Гаусса требует

$$2(n-1)^2 + (n-2)$$

операций.

Это означает, что реализация прямого хода метода Гаусса требует  $2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + (n - 2))$  операций. Хорошо известно, что

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n - 2 &= (n - 1)(n - 2)/2, \\ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= n(n + 1)(2n + 1)/6. \end{aligned}$$

Таким образом, прямой ход метода Гаусса можно выполнить, затратив

$$n(n + 1)(2n + 1)/3 + (n - 1)(n - 2)/2 \approx 2n^3/3$$

арифметических операций (мы пренебрегаем слагаемыми порядка  $n^2$ , считая  $n$  достаточно большим).

Нетрудно также видеть, что вычисления по формулам (8.11), (8.12) требуют

$$2(n - 1) + 2(n - 2) + \dots + 2 = 2(1 + \dots + n - 1) = n(n - 1) \approx n^2$$

операций.

Итак, решение системы линейных уравнений с  $n$  неизвестными методом Гаусса требует порядка  $2n^3/3$  операций. Это существенно меньше, чем при использовании формул Крамера. Их непосредственное применение требует, очевидно,  $n^2n!$  арифметических операций. Нетрудно подсчитать, что если, например,  $n = 20$ , то  $n^2n! \approx 9,7 \cdot 10^{20}$ , а  $2n^3/3 \approx 5,3 \cdot 10^3$ .

ПРИМЕР. Решим методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + 15x_3 &= 60, \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 34, \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 12. \end{aligned}$$

Выпишем матрицу системы уравнений и столбец правой части

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 3 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 34 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Максимальный элемент первого столбца матрицы  $A$  есть  $a_{31} = 9$ . В соответствии с описанным выше алгоритмом матрица  $A_1$  и столбец  $b^1$  равны соответственно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 60 \end{pmatrix}$$

(поменяли местами первую и третью строки матрицы  $A$ , первый и последний элементы столбца  $b$ ). Делим первую строку матрицы  $A_1$  на 9, умножаем ее на 3 и вычитаем из второй и третьей строк; делим первый элемент столбца  $b^1$  на 9, затем умножаем его на 3 и вычитаем из второго и третьего элементов столбца  $b^1$ . В результате получаем

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 30 \\ 56 \end{pmatrix}.$$



Максимальным из чисел  $a_{22}^{(2)}$ ,  $a_{32}^{(2)}$  является  $a_{32}^{(2)}$ , поэтому меняем местами вторую и третью строки матрицы  $A^2$ , а также второй и третий элемент столбца  $b^2$ . Получим

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 56 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Делим вторую строку матрицы  $\tilde{A}_2$  и второй элемент столбца  $\tilde{b}^2$  на 4. Получаем

$$\tilde{\tilde{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{b}}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Наконец, делим последнюю строку матрицы  $\tilde{\tilde{A}}_2$  и последний элемент столбца  $\tilde{\tilde{b}}^2$  на 10. Получаем

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Теперь выполняем обратный ход метода Гаусса. Последовательно находим  $x_3 = 3$ ,  $x_2 = 14 - 3 \cdot 4 = 2$ ,  $x_1 = 4/3 - (2/3) \cdot 2 + (1/3) \cdot 3 = 1$ .

В ходе реализации метода Гаусса мы, фактически, подсчитали и определитель матрицы  $A$ . По формуле (8.15) его абсолютная величина равна произведению *ведущих* элементов метода Гаусса, т. е. тех чисел, на которые приходилось выполнять деление при приведении матрицы  $A$  к треугольному виду. В рассматриваемом примере — это 9, 4, 10. Было выполнено две перестановки строк, следовательно, определитель равен произведению ведущих элементов:  $\det(A) = 360$ .

## 5. ЗАДАЧИ.

### 1) Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы  $A$ . Показать, что если

$$\text{все главные миноры матрицы } A \text{ отличны от нуля,} \quad (8.16)$$

то, реализуя метод Гаусса, можно полагать все матрицы  $P_1, \dots, P_n$  равными единичной матрице, т. е. опускать операцию поиска максимального по модулю элемента в соответствующих столбцах.

2) Показать, что если выполнено условие (8.16), то матрица  $A$  представима в виде

$$A = LU, \quad (8.17)$$

где  $L$  — нижняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали,  $U$  — верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

Равенство (8.17) определяет так называемое *треугольное разложение* матрицы  $A$ .

3) Показать, что матрицы  $L, U$  с указанными свойствами определяются равенством (8.17) однозначно.

4) Показать, что условие (8.16) необходимо для того, чтобы матрицу  $A$  можно было представить в виде (8.17).

## § 9. Определитель произведения матриц

**1. Теорема.** *Определитель произведения произвольных квадратных матриц  $A$  и  $B$  равен произведению их определителей:*

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (9.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если матрица  $A$  вырождена, то, как было установлено выше (см. п. 3, с. 96), матрица  $AB$  также вырождена, и в этом случае равенство (9.1) тривиально выполняется. Если матрица  $A$  невырождена, то, применяя (8.13), получим

$$AB = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U B.$$

В этом произведении каждый сомножитель, кроме  $B$ , есть либо матрица перестановки, либо треугольная матрица, следовательно,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \prod_{i=1}^n \det P_i \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} \det(U) \det B = \\ &= \prod_{i=1}^n \det P_i \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} \det B, \end{aligned}$$

но (см. (8.14))

$$\prod_{i=1}^n \det P_i \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} = \det A,$$

т. е. равенство (9.1) доказано.  $\square$

**2.** Из формулы (9.1), очевидно, вытекает, что если матрица  $A$  невырождена, то  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

## § 10. Некоторые классы матриц

В этом параграфе будут описаны классы матриц, часто возникающих в различных задачах линейной алгебры. Мы приведем и некоторые простейшие свойства этих матриц. Более подробное исследование различных классов матриц будет проведено в последующих главах.

**1.** Пусть  $A$  — прямоугольная матрица. Матрица  $A^* = (\bar{A})^T$  называется *сопряженной* по отношению к матрице  $A$ . Поясним, что элементы матрицы  $\bar{A}$  комплексно сопряжены по отношению к элементам матрицы  $A$ . Нетрудно видеть, что

$$(A^*)^* = A, \quad (\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*, \quad (A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

**2.** Квадратная матрица  $A$  называется *эрмитовой*<sup>1)</sup> (*самосопряженной*), если  $A = A^*$ . Квадратная матрица  $A$  называется *косоэрмитовой*, если  $A = -A^*$ .

Определитель эрмитовой матрицы — вещественное число. В самом деле, поскольку  $\det(A^*) = \det((\bar{A})^T) = \det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$ , то для эрмитовой матрицы  $\det(A) = \overline{\det(A)}$ .

**3.** Любая квадратная матрица  $A$  представима в виде

$$A = H_1 + iH_2, \tag{10.1}$$

здесь  $H_1, H_2$  — эрмитовы матрицы,  $i$  — мнимая единица. Матрицы  $H_1, H_2$  однозначно определяются матрицей  $A$ . Возможность представления (10.1) вытекает из очевидного тождества

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$$

и легко проверяемых соотношений

$$(A + A^*)^* = A + A^*, \quad \left(\frac{1}{i}(A - A^*)\right)^* = \frac{1}{i}(A - A^*).$$

Если предположить, что наряду с (10.1) возможно представление

$$A = \tilde{H}_1 + i\tilde{H}_2$$

с эрмитовыми матрицами  $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ , то

$$(H_1 - \tilde{H}_1) + i(H_2 - \tilde{H}_2) = 0.$$

<sup>1)</sup>Шарль Эрмит (Charles Hermite; 1822 — 1901) — французский математик.

Переходя к сопряженным матрицам, получим

$$(H_1 - \tilde{H}_1) - i(H_2 - \tilde{H}_2) = 0.$$

Складывая почленно два последних равенства, будем иметь, что  $H_1 = \tilde{H}_1$ , но тогда и  $H_2 = \tilde{H}_2$ , т. е. представление (10.1) однозначно.

**4.** Матрицы, у которых все элементы вещественны, называют *вещественными* матрицами.

Вещественная эрмитова матрица  $A$  называется *симметричной*. Для такой матрицы  $A = A^T$ .

Вещественная матрица  $A$  называется *кососимметричной*, если  $A = -A^T$ .

**5.** Для любой квадратной вещественной матрицы справедливо представление

$$A = A_1 + A_2, \quad (10.2)$$

где  $A_1$  — симметричная,  $A_2$  — кососимметричная матрицы. Такое представление единственно,

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

**6.** Квадратная матрица  $A$  называется *унитарной*, если  $AA^* = I$ , иными словами, если  $A^{-1} = A^*$ . Из этого определения сразу следует, что определитель унитарной матрицы по модулю равен единице. Произведение унитарных матриц является унитарной матрицей (докажите!).

Важным примером унитарной матрицы является диагональная матрица, диагональ которой состоит из чисел  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , равных единице по модулю,  $n$  — порядок матрицы. Проверка унитарности этой матрицы элементарна и поручается читателю.

**7.** Вещественная унитарная матрица называется *ортогональной* матрицей. Определитель ортогональной матрицы может быть равен только плюс единице или минус единице. Примеры ортогональных матриц: матрица перестановки  $P_{kl}$ , матрица второго порядка

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

где  $\varphi$  — любое вещественное число.

8. Квадратная матрица  $A$  называется *нормальной*, если она перестановочна с матрицей  $A^*$ , т. е.  $AA^* = A^*A$ . Нетрудно убедиться, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные матрицы — нормальные матрицы.

ПРИМЕР. Матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  является нормальной, но не принадлежит ни к одному из перечисленных выше классов.

### § 11. Блочные матрицы

1. Во многих случаях оказывается полезным «разрезать» матрицу на блоки, т. е. представить ее в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad (11.1)$$

где элементы  $A_{ij}$ , в свою очередь, являются матрицами.

Размеры блоков предполагаются согласованными, т. е. все блоки, стоящие в одной строке, должны иметь одинаковое число строк, все блоки, стоящие в одном столбце, должны иметь одинаковое число столбцов. Одна и та же матрица может быть разбита на блоки различными способами (см. рис. 2).

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

Рис. 2. Примеры разбиения матрицы на блоки

Нетрудно убедиться, что с блочными матрицами можно действовать по тем же формальным правилам, что и с обычными. Так, если наряду с матрицей (11.1) ввести в рассмотрение матрицу

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix}, \quad (11.2)$$

причем такую, что для любой пары индексов  $i, j$  размеры блоков  $A_{ij}, B_{ij}$  совпадают, то матрица  $C = A + B$  может быть представлена как блочная с блоками  $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

Если

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{np} \end{pmatrix}, \quad (11.3)$$

то матрица  $C = AB$  может быть представлена как блочная с блоками

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^n A_{iq} B_{qj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (11.4)$$

При этом, конечно, требуется, чтобы все произведения  $A_{iq} B_{qj}$  имели смысл, т. е. горизонтальные и вертикальные размеры перемножаемых блоков должны быть согласованы.

**2.** Получим некоторые полезные формулы для вычисления определителей блочных матриц.

**2.1.** Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} I & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

есть блочная  $2 \times 2$  матрица,  $I$  — единичная матрица,  $A_{22}$  — квадратная матрица,  $A_{12}$  — прямоугольная, вообще говоря, матрица. Тогда

$$|A| = |A_{22}|. \quad (11.6)$$

Справедливость равенства (11.6) легко устанавливается разложением по первому столбцу. Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (11.7)$$

где  $A_{11}$  — квадратная матрица, то  $|A| = |A_{11}|$ .

**2.2. Теорема.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (11.8)$$

где  $A_{11}, A_{22}$  — квадратные матрицы. Тогда

$$|A| = |A_{11}| |A_{22}|. \quad (11.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что если матрица  $A_{11}$  вырождена, то  $|A| = 0$ . Обозначим через  $n_1$  порядок матрицы  $A_{11}$ , через  $n_2$  — порядок матрицы  $A_{22}$ . Если  $|A_{11}| = 0$ , то существует вектор  $x^1$  длины  $n_1$ , не равный нулю, и такой, что  $A_{11}x^1 = 0$ . Тогда для ненулевого вектора  $x = (x^1, 0, \dots, 0)$  длины  $n_1 + n_2$ , очевидно, имеем  $Ax = 0$ , следовательно,  $|A| = 0$ . Таким образом, показано, что если  $|A_{11}| = 0$ , то равенство (11.9) выполняется тривиальным образом. Пусть теперь  $|A_{11}| \neq 0$ . Нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

и, следовательно,

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться результатами предыдущего пункта.  $\square$

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

есть блочно треугольная матрица,  $A_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — произвольные квадратные матрицы. Доказать, что  $|A| = |A_{11}||A_{22}|\dots|A_{nn}|$ .

2) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

есть блочная матрица,  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  — квадратные матрицы, причем  $|A_{11}| \neq 0$ . Показать, что

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|. \quad (11.11)$$

УКАЗАНИЕ. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (11.11) можно рассматривать как обобщение формулы для вычисления определителя второго порядка.

---

---

## ГЛАВА 6

# Линейные пространства

При изучении операций над векторами трехмерного евклидова пространства (см. § 1, гл. 4) было показано, что, фиксируя в пространстве некоторый базис, можно установить взаимно однозначное соответствие между векторами и упорядоченными тройками вещественных чисел (координатами вектора в этом базисе). При этом операции над векторами могут быть, фактически, заменены операциями над их координатами.

Аналогичная ситуация возникает и во многих других разделах математики и ее приложений, когда приходится иметь дело с объектами, описываемыми конечными наборами вещественных, а зачатую и комплексных, чисел. При этом естественным образом возникает понятие многомерного координатного пространства как множества упорядоченных наборов чисел с введенными на этом множестве алгебраическими операциями.

В этой главе мы будем систематически заниматься конструированием и изучением такого рода пространств. Сначала будет введено пространство  $\mathbb{R}^n$ , представляющее собой множество упорядоченных наборов из  $n$  вещественных чисел, потом пространство  $\mathbb{C}^n$ , состоящее из упорядоченных наборов комплексных чисел. Мы ограничимся при этом лишь определениями и описанием простейших свойств этих пространств, поскольку в дальнейшем будут введены и изучены более общие линейные пространства. Результаты, которые будут получены для этих пространств, распространяются и на пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ .

### § 1. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$

**1.** *Пространство  $\mathbb{R}^n$*  — это множество всех упорядоченных наборов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  вещественных чисел,  $n \geq 1$  — фиксированное целое число. Элементы пространства  $\mathbb{R}^n$  будем называть *векторами*, или *точками*, числа  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , — *компонентами* вектора  $x$ . Два вектора  $x, y \in \mathbb{R}^n$  будем считать *равными* тогда и только тогда, когда  $x_k = y_k$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *нулевым* и обозначать



символом  $0$ . Вектор

$$i^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}),$$

у которого компонента с номером  $k$  равна единице, а все остальные компоненты — нули, будем называть *единичным*. В пространстве  $\mathbb{R}^n$  есть ровно  $n$  единичных векторов:  $i^1, i^2, \dots, i^n$ .

На множестве  $\mathbb{R}^n$  вводятся линейные операции: *умножение векторов на вещественные числа* (скаляры) и *сложение векторов*.

Именно, по определению для любого вещественного числа  $\alpha$  и любого  $x \in \mathbb{R}^n$  положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Для любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$  по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Отметим следующие свойства введенных операций. Для любых  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  и для любых вещественных чисел  $\alpha, \beta$ :

- 1)  $x + y = y + x$  — *коммутативность* операции сложения;
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  — *ассоциативность* операции сложения;
- 3)  $x + 0 = x$  — *нейтральность* нулевого вектора;
- 4)  $x + (-x) = 0$ , где по определению  $-x = (-1)x$ , — существование для каждого вектора единственного *противоположного*;
- 5)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  — *дистрибутивность* по сложению векторов;
- 6)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  — *дистрибутивность* по сложению скаляров;
- 7)  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  — *ассоциативность* по умножению скаляров;
- 8)  $1x = x$  — *нейтральность* единичного скаляра.

Тождества 1)–8) называются *аксиомами линейного пространства*. Их справедливость очевидным образом вытекает из определения линейных операций над элементами  $\mathbb{R}^n$ .

Нетрудно заметить, что аксиомы 1)–8) в точности соответствуют свойствам линейных операций над векторами трехмерного евклидова пространства (см. § 1, гл. 4).

Важно иметь в виду, что  $\mathbb{R}^1$  одновременно является и линейным пространством, и множеством всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать  $\mathbb{R}^1$  через  $\mathbb{R}$ .

**2.** *Пространство*  $\mathbb{C}^n$  — это множество всех упорядоченных наборов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  комплексных чисел,  $n \geq 1$  — фиксированное целое число.

Элементы пространства  $\mathbb{C}^n$  будем называть *векторами*, или *точками*, числа  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , — *компонентами* вектора  $x$ .

Два вектора  $x, y \in \mathbb{C}^n$  будем считать *равными* тогда и только тогда, когда  $x_k = y_k$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *нулевым* и обозначать символом  $0$ .

Вектор  $i^k$ , у которого компонента с номером  $k$  равна единице, а все остальные компоненты — нули, будем называть *единичным*. В пространстве  $\mathbb{C}^n$  есть ровно  $n$  единичных векторов:  $i^1, i^2, \dots, i^n$ .

На пространстве  $\mathbb{C}^n$  вводятся линейные операции: *умножение векторов на комплексные числа* (скаляры) и *сложение векторов*.

Именно, по определению для любого комплексного числа  $\alpha$  и любого  $x \in \mathbb{C}^n$  положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Для любых  $x, y \in \mathbb{C}^n$  по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Отметим, что, фактически, мы уже встречались с таким линейным пространством, а именно, множество всех матриц размера  $m \times n$  с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц (см. п. 3, с. 89) естественно интерпретировать как пространство  $\mathbb{C}^{mn}$  векторов длины  $mn$ . Векторы записывались в виде прямоугольных таблиц, но с точки зрения выполнения операций умножения вектора на число и сложения векторов это не имеет значения.

Для линейных операций, введенных на пространстве  $\mathbb{C}^n$ , также справедливы свойства, выраженные равенствами 1)–8) с. 113.

Важно иметь в виду, что  $\mathbb{C}^1$  одновременно является и линейным пространством, и множеством всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать  $\mathbb{C}^1$  через  $\mathbb{C}$ .

## § 2. Общие линейные пространства

**1.** Во многих разделах математики широко используются более общие конструкции, чем пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{C}^n$ .

Говорят, что множество  $\mathbf{X}$  является *линейным пространством над полем вещественных чисел*, или просто *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов  $x, y \in \mathbf{X}$  определена операция сложения, т. е. определен элемент  $z = x + y \in \mathbf{X}$ , называемый *суммой* элементов  $x, y$ ; для любого элемента  $x \in \mathbf{X}$  и любого вещественного числа  $\alpha$  определен элемент  $\alpha x \in \mathbf{X}$ , называемый *произведением*  $\alpha$  и  $x$ .

Предполагается, что для этих двух операций выполнены *аксиомы линейного пространства*, аналогичные свойствам пространства  $\mathbb{R}^n$  (см. 1)–8) с. 113):

- 1)  $x + y = y + x$  — *коммутативность* операции сложения;
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  — *ассоциативность* операции сложения;
- 3) существует единственный элемент  $0 \in \mathbf{X}$  такой, что  $x + 0 = x$  для любого элемента  $x \in \mathbf{X}$ ; элемент  $0$  называют *нулевым элементом* пространства  $\mathbf{X}$ ;
- 4) для любого элемента  $x \in \mathbf{X}$  существует единственный элемент  $x'$  такой, что  $x + x' = 0$ ; элемент  $x'$  называют *противоположным* элементу  $x$ ;
- 5)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  — *дистрибутивность* по сложению векторов;
- 6)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  — *дистрибутивность* по сложению скаляров;
- 7)  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  — *ассоциативность* по умножению скаляров;
- 8)  $1x = x$  — *нейтральность* единичного скаляра.

Если при определении пространства  $\mathbf{X}$  допускается умножение на комплексные числа, то  $\mathbf{X}$  называется *линейным пространством над полем комплексных чисел*, или *комплексным линейным пространством*. При этом предполагается, что выполняются аксиомы 1)–8).

Элементы линейного пространства  $\mathbf{X}$  часто будем называть *векторами*, а само пространство — *векторным*.

В дальнейшем на протяжении всей книги буквами  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  будем обозначать линейные пространства. Если не оговорено противное, пространства будут предполагаться комплексными. По большей части, определения и результаты очевидным образом переносятся на вещественные пространства. Те случаи, когда возникают хоть какие-то различия при переходе к вещественным пространствам, рассматриваются особо.

**2. УПРАЖНЕНИЕ.** Проверить, что вводимые ниже множества являются линейными пространствами, т. е. для определенных на них операций выполняются аксиомы 1)–8). В некоторых случаях делаются необходимые указания.

1) Множество всех векторов  $\mathbf{V}_3$  трехмерного евклидова пространства с введенными обычным образом операциями умножения вектора на число и сложения векторов (см. § 1, гл. 4).

2) Множество всех вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале  $(a, b)$  вещественной оси, является вещественным линейным пространством, если определить обычным образом понятие суммы двух функций и умножение функции на вещественное число.

3) Множество всех вещественных функций, определенных и непрерывных на замкнутом отрезке  $[a, b]$  вещественной оси, является вещественным линейным пространством. Это пространство обозначают через  $C[a, b]$ . При проверке того, что  $C[a, b]$  — линейное пространство, надо иметь в виду, что сумма двух непрерывных функций есть непрерывная функция, при умножении функции на любое число непрерывность функции также сохраняется.

4) Множество всех функций из пространства  $C[a, b]$ , равных нулю в некоторой фиксированной точке  $c$  из отрезка  $[a, b]$ , — вещественное линейное пространство.

5) Множество всех полиномов с комплексными коэффициентами, на котором обычным образом определены операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число, является комплексным линейным пространством.

6) Множество  $\mathbf{Q}_n$ , состоящее из всех полиномов степени не выше  $n$ , где  $n \geq 0$ , есть фиксированное целое число, и нулевого многочлена, является комплексным линейным пространством. Здесь надо иметь в виду, что сумма полиномов есть полином, степень которого не превосходит максимальной степени слагаемых.

### 3. УПРАЖНЕНИЯ.

1) Рассмотрим множество всех положительных функций, определенных на вещественной оси. Определим на этом множестве операцию сложения функций  $f$  и  $g$  как их произведение, а операцию умножения функции  $f$  на число  $\alpha$  как возведение ее в степень  $\alpha$ . Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

2) Рассмотрим множество всех четных функций, определенных на отрезке  $[-1, 1]$ . Определим на этом множестве операцию сложения двух функций как их произведение, а операцию умножения функции на число будем понимать обычным образом. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

### §3. Линейная зависимость векторов

1. Векторы  $a, b$  из линейного пространства  $\mathbf{X}$  будем называть *коллинеарными* (*пропорциональными, линейно зависимыми*), если существуют числа  $\alpha, \beta$ , не равные одновременно нулю, такие, что

$$\alpha a + \beta b = 0.$$

Понятно, что в этом случае либо  $a = \gamma b$ , либо  $b = \delta a$ , где  $\gamma, \delta$  — некоторые числа.

ПРИМЕРЫ.

- 1) Единичные векторы  $i^k, i^l$  пространства  $\mathbb{C}^n$  при  $k \neq l$  неколлинеарны (докажите).
- 2) Векторы  $x^1 = (1+i, 3, 2-i, 5), x^2 = (2, 3-3i, 1-3i, 5-5i) \in \mathbb{C}^4$  пропорциональны, так как  $2/(1+i) = (3-3i)/3 = (1-3i)/(2-i) = (5-5i)/5 = 1-i$ .

2. В предыдущем пункте было введено понятие линейной зависимости двух векторов пространства  $\mathbf{X}$ . Обобщая это понятие, будем говорить, что система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \dots, a^m\}, m \geq 1$ , *линейно зависима*, если существуют числа  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m = 0. \quad (3.1)$$

ПРИМЕР. Система векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

из пространства  $\mathbb{R}^3$  линейно зависима, так как, положив

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 2,$$

получим

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4 = 4 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Полезно отметить, что это не единственный набор коэффициентов  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , при котором линейная комбинация  $x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4$  обращается в нуль. Например,

$$2a^1 + a^2 - a^3 = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0,$$

$$3a^2 + a^3 - 2a^4 = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 0.$$

Определению линейной зависимости векторов удобно придать матричную формулировку. Будем использовать следующие обозначения:  $\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \dots, a^m\}$  — упорядоченный набор векторов из пространства  $\mathbf{X}$ ; для  $x \in \mathbb{C}^m$  положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m.$$

Можно сказать тогда, что векторы  $a^1, a^2, \dots, a^m$  *линейно зависимы*, если существует ненулевой вектор  $x \in \mathbb{C}^m$  такой, что

$$\mathcal{A}_m x = 0.$$

Будем говорить, что вектор  $a \in \mathbf{X}$  *линейно выражается* через векторы  $b^1, b^2, \dots, b^p$ ,  $p \geq 1$  (является *линейной комбинацией* этих векторов), если существует вектор  $x \in \mathbb{C}^p$  такой, что

$$a = x_1 b^1 + x_2 b^2 + \dots + x_p b^p, \quad (3.2)$$

в матричной записи:

$$a = \mathcal{B}_p x.$$

Линейная комбинация векторов (3.2) называется *нетривиальной*, если хотя бы одно из чисел  $x_1, x_2, \dots, x_p$  отлично от нуля.

#### УПРАЖНЕНИЯ.

1) Доказать, что система векторов линейно зависима, если она содержит линейно зависимую подсистему, в частности, если она содержит нулевой вектор.

2) Доказать, что для того, чтобы система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы она содержала вектор  $a^k$ , который линейно выражается через остальные.

**3.** Говорят, что система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  *линейно выражается* через систему векторов  $\{b^i\}_{i=1}^p$ , если существует матрица  $X(p, m)$  такая, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p, m). \quad (3.3)$$

В более подробной записи это означает, что

$$a^k = \sum_{j=1}^p x_{j,k} b^j, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

**3.1.** Свойство *транзитивности*: если система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  линейно выражается через систему векторов  $\{b^i\}_{i=1}^p$ , а та, в свою очередь, — через систему векторов  $\{c^i\}_{i=1}^q$ , то система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  линейно выражается через систему векторов  $\{c^i\}_{i=1}^q$ .

Действительно, по определению имеем

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p, m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{C}_q Y(q, p).$$

Подставляя в первое из этих равенств выражение для  $\mathcal{B}_p$ , получим

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{C}_q Z(q, m),$$

где

$$Z(q, m) = Y(q, p)X(p, m).$$

**3.2.** Системы векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  и  $\{b^i\}_{i=1}^p$  называются *эквивалентными*, если существуют матрицы  $X(p, m)$ ,  $Y(m, p)$  такие, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p, m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{A}_m Y(m, p), \quad (3.4)$$

т. е. каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Используя свойство транзитивности, показать, что если вектор  $x \in \mathbf{X}$  линейно выражается через систему векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$ , то он линейно выражается и через эквивалентную ей систему векторов  $\{b^i\}_{i=1}^p$ .

## § 4. Линейно независимые системы векторов

**1.** Будем говорить, что система векторов  $\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$  *линейно независима*, если из равенства  $\mathcal{A}_m x = 0$  вытекает, что  $x = 0$ .

Линейно независимые системы векторов существуют. Приведем простые примеры.

1) Любой вектор  $a \neq 0$  образует линейно независимую систему, состоящую из одного вектора.

2) Единичные векторы  $i^1, i^2, \dots, i^m \in \mathbb{C}^n$ ,  $m \leq n$ , линейно независимы. Это утверждение сразу же вытекает из того, что для любого вектора  $x \in \mathbb{C}^m$  вектор  $x_1 i^1 + x_2 i^2 + \dots + x_m i^m \in \mathbb{C}^n$  имеет вид

$$(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

и, следовательно, равен нулю тогда и только тогда, когда  $x = 0$ .

3) Система векторов  $\varphi_0(z) \equiv 1, \varphi_1(z) = z, \dots, \varphi_k(z) = z^k$ , где  $z$  — комплексная переменная,  $k \geq 0$  — целое число, линейно независима

в пространстве полиномов. Для доказательства этого утверждения достаточно вспомнить, что если полином равен нулю, то все его коэффициенты — нули (см. п. 2.2, с. 86).

Непосредственно из упражнения 1), с. 118 вытекает

**2. Теорема.** *Любая подсистема линейно независимой системы векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  линейно независима.*

**3. Теорема.** *Любая система  $a^1, a^2, \dots, a^n, b \in \mathbb{C}^n$  из  $n + 1$  вектора линейно зависима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^n$  линейно зависима. Тогда доказываемое утверждение верно. Если векторы  $\{a^i\}_{i=1}^n$  линейно независимы, то система уравнений

$$Ax = b, \quad (4.1)$$

где  $A$  — матрица, столбцами которой являются компоненты векторов  $a^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , крамеровская, и потому имеет решение  $x$  при любой правой части  $b$ , значит,

$$x_1 a^1 + \dots + x_n a^n = b,$$

т. е. система векторов  $a^1, a^2, \dots, a^n, b$  линейно зависима.  $\square$

**4.** Как очевидное следствие только что доказанного утверждения получаем, что любая система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m \in \mathbb{C}^n$ ,  $m > n$ , линейно зависима.

**5. Теорема.** *Пусть система векторов  $\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$  пространства  $\mathbf{X}$  линейно независима и линейно выражается через систему  $\mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p$ . Тогда  $m \leq p$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т. е. пусть  $m > p$ . По определению существует матрица  $X$  размера  $p \times m$  такая, что  $\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X$ . Как следствие, для любого вектора  $y \in \mathbb{C}^m$  имеем  $\mathcal{A}_m y = \mathcal{B}_p X y$ . Столбцы матрицы  $X$  — векторы из пространства  $\mathbb{C}^p$ . Их количество  $m > p$ , следовательно, они линейно зависимы. Поэтому существует вектор  $y \in \mathbb{C}^m$ , не равный нулю и такой, что  $X y = 0$ , но тогда и  $\mathcal{A}_m y = 0$ , т. е. вопреки предположению векторы  $a^1, a^2, \dots, a^m$  линейно зависимы.  $\square$

**6. Следствие.** *Любые две эквивалентные линейно независимые системы векторов имеют равные количества векторов.*



**7. Теорема.** Пусть  $\{a^k\}_{k=1}^m$  — линейно независимые векторы. Пусть система векторов  $\{b^k\}_{k=1}^m$  линейно выражается через систему векторов  $\{a^k\}_{k=1}^m$ , т. е. существует квадратная матрица  $X$  порядка  $m$  такая, что  $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$ . Для того, чтобы система векторов  $\{b^k\}_{k=1}^m$  была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $X$  была невырожденной.

УПРАЖНЕНИЕ. Следуя рассуждениям пункта 5, доказать теорему 7.

**8.** Важно отметить, что матрица  $X$ , фигурирующая в теореме 7, однозначно определяется по системам векторов  $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m$ . В самом деле, если существует матрица  $\tilde{X} \neq X$  такая, что  $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m \tilde{X}$ , то  $\mathcal{A}_m(\tilde{X} - X) = 0$ , но это вследствие линейной независимости системы векторов  $\mathcal{A}_m$  невозможно, если  $\tilde{X} \neq X$ .

## § 5. Ранг системы векторов

**1.** Фиксируем в пространстве  $\mathbf{X}$  некоторую систему векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$ . Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязательно содержит линейно независимую подсистему векторов. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема  $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r \subset \{a^i\}_{i=1}^m$ , состоящая из линейно независимых векторов, называется *максимальной*, если добавление к ней любого нового вектора из  $\{a^i\}_{i=1}^m$  приводит к линейно зависимой системе.

ПРИМЕР. Рассмотрим систему векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

пространства  $\mathbb{R}^3$ . Векторы  $a^1, a^2$ , очевидно, линейно независимы и образуют максимальную линейно независимую подсистему, так как определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -6 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -15 & 9 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 10 \\ -2 & 9 & 7 \\ -0 & -15 & -15 \end{vmatrix},$$

составленные из компонент векторов  $a^1, a^2, a^3$  и  $a^1, a^2, a^4$  соответственно, равны нулю, и, следовательно, векторы  $a^1, a^2, a^3$  и  $a^1, a^2, a^4$  линейно зависимы.

Вообще говоря, система  $\{a^i\}_{i=1}^m$  может содержать несколько максимальных линейно независимых подсистем, однако, справедлива

**2. Теорема.** Любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы  $\{a^i\}_{i=1}^m$  содержат одно и то же количество векторов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что из определения максимальной линейно независимой подсистемы непосредственно вытекает, что любой вектор из  $\{a^i\}_{i=1}^m$  линейно выражается через векторы ее максимальной линейно независимой подсистемы  $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r$ . Вследствие очевидного равенства

$$a^{i_k} = a^{i_k} + \sum_{i=1, i \neq i_k}^m 0a^i$$

справедливо и обратное, т. е. система  $\{a^i\}_{i=1}^m$  и любая ее максимальная линейно независимая подсистема эквивалентны. Но тогда, очевидно, эквивалентны и любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы  $\{a^i\}_{i=1}^m$ . Отсюда в силу следствия 6, с. 120, вытекает, что любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы  $\{a^i\}_{i=1}^m$  имеют равные количества векторов.  $\square$

**3.** Полученный результат позволяет ввести следующее определение. *Рангом системы векторов* пространства  $\mathbf{X}$  называется количество векторов ее максимальной линейно независимой подсистемы.

Например, ранг системы векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , приведенной на с. 121, равен двум.

Количество линейно независимых векторов пространства  $\mathbb{C}^n$  не превосходит  $n$ . Поэтому ранг любой системы векторов из  $\mathbb{C}^n$  не превосходит  $n$ .

Ясно, что система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  любого линейного пространства  $\mathbf{X}$  линейно независима тогда и только тогда, когда ее ранг равен  $m$ .

## § 6. Конечномерные линейные пространства. Базисы

**1.** Базисы в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Всякая линейно независимая система  $\{e^k\}_{k=1}^n$  (состоящая из  $n$  векторов) называется *базисом* пространства  $\mathbb{C}^n$ . Единичные векторы  $\{i^k\}_{k=1}^n$  образуют так называемый *естественный базис* пространства  $\mathbb{C}^n$ .

Из свойства 8 определителей (см. с. 79) вытекает, что для того, чтобы система  $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$  была базисом, необходимо и достаточно, чтобы матрица, столбцами которой служат векторы  $e^1, e^2, \dots, e^n$ , была невырожденной.

При доказательстве теоремы 3, с. 120, было показано, что если  $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$  есть базис пространства  $\mathbb{C}^n$ , то любой вектор  $x \in \mathbb{C}^n$  может быть представлен в виде линейной комбинации

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n. \quad (6.1)$$

Коэффициенты линейной комбинации (6.1) однозначно определяются по вектору  $x$  и удовлетворяют крамеровской системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{E}_n \xi = x. \quad (6.2)$$

Здесь  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  — столбец коэффициентов разложения вектора  $x$  по базису  $\{e^k\}_{k=1}^n$ .

**2.** Конечномерные пространства. Линейное пространство  $\mathbf{X}$  называется *конечномерным*, если существуют векторы

$$\mathcal{E}_n = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}, \quad (6.3)$$

образующие линейно независимую систему в пространстве  $\mathbf{X}$ , и такие, что любой вектор  $x \in \mathbf{X}$  представим в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n. \quad (6.4)$$

Говорят в этом случае, что векторы  $\{e^k\}_{k=1}^n$  образуют *базис* пространства  $\mathbf{X}$ . Число  $n$  называют *размерностью* пространства  $\mathbf{X}$ . Линейное пространство  $\mathbf{X}$  размерности  $n$  будем обозначать через  $\mathbf{X}_n$ . Коэффициенты разложения  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называют *координатами* вектора  $x$  в базисе  $\{e^k\}_{k=1}^n$ .

**2.1.** Координаты любого вектора  $x \in \mathbf{X}_n$  однозначно определяются по базису  $\{e^k\}_{k=1}^n$ . Действительно, пусть наряду с разложением (6.4) существует разложение  $x = \mathcal{E}_n \tilde{\xi}$ , тогда, очевидно,  $\mathcal{E}_n(\xi - \tilde{\xi}) = 0$ , откуда вследствие линейной независимости системы векторов  $\{e^k\}_{k=1}^n$  получаем, что  $\xi = \tilde{\xi}$ .

**2.2. Теорема.** В  $n$ -мерном линейном пространстве  $\mathbf{X}_n$  любая система  $\tilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ , состоящая из  $n$  линейно независимых векторов, является базисом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно убедиться, что любой вектор  $x \in \mathbf{X}_n$  представим в виде линейной комбинации

$$x = \tilde{\mathcal{E}}_n \tilde{\xi}. \quad (6.5)$$

По определению  $n$ -мерного пространства в нем существует базис  $\mathcal{E}_n$ . Следовательно, любой вектор из  $\tilde{\mathcal{E}}_n$  представим в виде линейной комбинации векторов базиса  $\mathcal{E}_n$ , иными словами, существует квадратная матрица  $T$  порядка  $n$  такая, что  $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$ . Матрица  $T$  невырождена (см. п. 7, с. 121). Поскольку  $\mathcal{E}_n$  — базис, существует вектор  $\xi \in \mathbb{C}^n$  такой, что  $x = \mathcal{E}_n \xi$ . Поскольку матрица  $T$  невырождена, можно найти вектор  $\tilde{\xi} \in \mathbb{C}^n$  такой, что  $\xi = T \tilde{\xi}$ . В результате, получим соотношение  $x = \mathcal{E}_n T \tilde{\xi} = \tilde{\mathcal{E}}_n \tilde{\xi}$  вида (6.5).  $\square$

**3.** Если пространство не является конечномерным, его называют *бесконечномерным*.

**4.** Приведем примеры конечномерных и бесконечномерных пространств.

1) Любые три некопланарных вектора пространства  $\mathbf{V}_3$  образуют базис (см. §1, гл. 4). Пространство  $\mathbf{V}_3$  трехмерно.

2) Пространства  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$ , очевидно, конечномерны. Их размерность равна  $n$ .

3) Пространство  $\mathbf{Q}_n$  всех полиномов степени не выше  $n$  конечномерно. Его размерность равна  $n + 1$ . Базисом в пространстве полиномов степени не выше  $n$  является, например, система векторов  $\{1, z, \dots, z^n\}$ , где  $z$  — комплексная переменная.

4) Пространство всех полиномов бесконечномерно. Действительно, в нем линейно независима система векторов  $\{1, z, \dots, z^k\}$  при любом, сколь угодно большом, целом  $k$ .

5) Пространство  $C[a, b]$  бесконечномерно, так как содержит полиномы с вещественными коэффициентами любого порядка.

## § 7. Замена базиса

**1.** Пусть  $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$  — базисы пространства  $\mathbf{X}_n$ . Как уже говорилось,  $\mathcal{E}_n$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}_n$  — эквивалентные системы векторов, существуют квадратные матрицы  $T$ ,  $\tilde{T}$  порядка  $n$  такие, что

$$\mathcal{E}_n = \tilde{\mathcal{E}}_n \tilde{T}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T. \quad (7.1)$$

Матрицу  $T$  называют *матрицей перехода* от базиса  $\mathcal{E}_n$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}_n$ . Матрицы  $T$  и  $\tilde{T}$  взаимно обратны. Действительно, подставляя выражение для  $\tilde{\mathcal{E}}_n$  из второго равенства (7.1) в первое, получим, что  $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T \tilde{T}$ . Отсюда вследствие линейной независимости векторов ба-

зиса вытекает (см. п. 8, с. 121), что

$$T\tilde{T} = I. \quad (7.2)$$

Пусть известны коэффициенты  $\xi$  разложения некоторого вектора  $x \in \mathbf{X}_n$  по базису  $\{e^k\}_{k=1}^n$ , и пусть задана матрица перехода  $T$  к базису  $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ . Получим формулу для вычисления коэффициентов  $\tilde{\xi}$  разложения того же вектора  $x$  по базису  $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ . В соответствии с (6.4) имеем  $x = \mathcal{E}_n \xi$ , но  $\mathcal{E}_n = \tilde{\mathcal{E}}_n \tilde{T} = \tilde{\mathcal{E}}_n T^{-1}$  (см. (7.1), (7.2)), следовательно,  $x = \tilde{\mathcal{E}}_n T^{-1} \xi$ , а это означает, что

$$\tilde{\xi} = T^{-1} \xi. \quad (7.3)$$

**ПРИМЕР.** Пусть векторы  $e^1, e^2, e^3$  образуют базис в трехмерном пространстве  $\mathbf{X}_3$ . Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} \tilde{e}^1 &= 5e^1 - e^2 - 2e^3, \\ \tilde{e}^2 &= 2e^1 + 3e^2, \\ \tilde{e}^3 &= -2e^1 + e^2 + e^3. \end{aligned}$$

Записывая эти равенства в матричном виде, получим  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T$ , где  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3\}$ ,  $\mathcal{E} = \{e^1, e^2, e^3\}$ ,

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\det T = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

следовательно, матрица  $T$  невырождена. Поэтому векторы  $\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3$  также образуют базис пространства  $\mathbf{X}_3$ . Рассмотрим вектор  $a = e^1 + 4e^2 - e^3$ . Координатами этого вектора в базисе  $\mathcal{E}$  являются числа  $\xi_1 = 1, \xi_2 = 4, \xi_3 = -1$ , т. е.  $a = \mathcal{E}\xi$ , где  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Найдем координаты того же вектора, но в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Вычислим матрицу  $T^{-1}$ . Получим

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$\tilde{\xi} = T^{-1} \xi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix},$$

т. е.  $a = -13\tilde{e}^1 + 6\tilde{e}^2 - 27\tilde{e}^3$ . Мы нашли, таким образом, представление вектора  $a$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

**2.** Отметим, что в пространстве  $\mathbf{X}_n$  существует сколько угодно базисов. Действительно, если  $\mathcal{E}_n$  — базис, то система векторов  $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$ , где  $T$  — произвольная невырожденная матрица, также является базисом (см. теорему 7, с. 121).

**3.** Приведем примеры часто используемых базисов в линейном пространстве полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше  $n$ .

1) *Естественным базисом* в этом пространстве называют базис, составленный из степеней независимой переменной  $\{1, z, \dots, z^n\}$ .

2) Как показано на с. 86, полиномы

$$\Phi_j(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_n)}{(z_j - z_0)(z_j - z_1) \cdots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \cdots (z_j - z_n)},$$

$j = 0, 1, 2, \dots, n$ , где  $z_0, z_1, \dots, z_n$  — произвольные попарно различные комплексные числа, также образуют базис в пространстве полиномов. Этот базис принято называть *базисом Лагранжа*.

3) Покажем, что полиномы

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &\equiv 1, \quad \varphi_1(z) = (z - z_0), \quad \varphi_2(z) = (z - z_0)(z - z_1), \dots, \\ \varphi_n(z) &= (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  — произвольные попарно различные числа, образуют базис. Как и в случае базиса Лагранжа, достаточно установить, что для  $z_0, z_1, \dots, z_n$ , где  $z_n$  не совпадает ни с одним из чисел  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ , система уравнений

$$c_0 \varphi_0(z_j) + c_1 \varphi_1(z_j) + \cdots + c_n \varphi_n(z_j) = h_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (7.5)$$

имеет единственное решение при любых  $h_0, h_1, \dots, h_n$ , но это очевидно, так как система (7.5) треугольна:

$$\begin{aligned} c_0 &= h_0, \\ c_0 + c_1(z_1 - z_0) &= h_1, \\ c_0 + c_1(z_2 - z_0) + c_2(z_2 - z_0)(z_2 - z_1) &= h_2, \\ &\dots \\ c_0 + c_1(z_n - z_0) + \cdots + c_n(z_n - z_0)(z_n - z_1) \cdots (z_n - z_{n-1}) &= h_n, \end{aligned} \quad (7.6)$$

причем коэффициенты, стоящие на диагонали, отличны от нуля. Базис (7.4) называют *базисом Ньютона*.

---

---

ГЛАВА 7  
**Евклидовы пространства**

Как уже говорилось, линейные пространства, изучавшиеся в предыдущей главе, по своим свойствам во многом аналогичны трехмерному пространству векторов  $V_3$  (направленных отрезков). Однако, такие важные понятия, как длина вектора, угол между векторами, в них отсутствуют. В трехмерном евклидовом пространстве, зная длины двух векторов и угол между ними, можно вычислить скалярное произведение векторов. Использование скалярного произведения позволяет решать многие геометрические задачи в трехмерном евклидовом пространстве. Для общих линейных пространств понятие скалярного произведения вводится аксиоматически, и на основе скалярного произведения определяются геометрические понятия, аналогичные случаю трехмерного евклидова пространства.

**§ 1. Евклидовы пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{C}^n$**

1. Вещественное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ . Будем говорить, что на пространстве  $\mathbb{R}^n$  задано *скалярное произведение*, если каждой паре векторов  $x, y \in \mathbb{R}^n$  поставлено в соответствие вещественное число  $(x, y)$  и при этом выполнены так называемые *аксиомы скалярного произведения* (соответствующие свойствам скалярного произведения векторов трехмерного евклидова пространства):

1)  $(x, x) \geq 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ , равенства  $(x, x) = 0$  и  $x = 0$  эквивалентны;

2)  $(x, y) = (y, x)$  для любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ;

3)  $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$  для любых  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Из 2), 3) очевидным образом вытекает, что

4)  $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$  для любых  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Если на пространстве  $\mathbb{R}^n$  введено скалярное произведение, то его называют *вещественным евклидовым пространством*.

Существует бесчисленное множество способов введения скаляр-

ного произведения на пространстве  $\mathbb{R}^n$ , например, можно положить

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Такое скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$  называют *стандартным*. Проверка аксиом 1)–3) для стандартного скалярного произведения не вызывает никаких затруднений.

Укажем еще целый класс скалярных произведений. Фиксируем  $n$  положительных чисел  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  и положим

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \rho_k x_k y_k. \quad (1.1)$$

Справедливость аксиом 1)–3) очевидна. Меняя числа  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ , получаем различные скалярные произведения.

Можно показать, что если определить *длину (модуль)* вектора  $x$  при помощи соотношения  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ , то длина вектора из  $\mathbb{R}^n$  будет обладать свойствами, аналогичными свойствам длины вектора в трехмерном евклидовом пространстве, а именно<sup>1)</sup>:

1)  $|x| \geq 0$  для любого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ , равенство  $|x| = 0$  эквивалентно равенству  $x = 0$ ;

2)  $|\alpha x| = |\alpha| |x|$  для любых  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

3)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  для любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Неравенство 3) называют *неравенством треугольника (неравенством Минковского<sup>2)</sup>*.

Важно понимать, что, определяя различными способами скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$ , мы получаем различные вещественные евклидовы пространства.

Пространство  $\mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением часто называют  *$n$ -мерным арифметическим пространством*. Это пространство играет важную роль во многих разделах математики. Например, оно систематически используется в математическом анализе при изучении функций многих вещественных переменных.

**2.** Комплексное евклидово пространство  $\mathbb{C}^n$ . Будем говорить, что на пространстве  $\mathbb{C}^n$  задано *скалярное произведение*, если каждой паре векторов  $x, y \in \mathbb{C}^n$  поставлено в соответствие число  $(x, y)$ , вообще говоря, комплексное, и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*:

<sup>1)</sup>Обоснование неравенства 3) проведено в п. 3 на с. 132.

<sup>2)</sup>Герман Минковский (Hermann Minkowski; 1864 — 1909) — немецкий математик.



1)  $(x, x) \geq 0$  для любого  $x \in \mathbb{C}^n$ , равенства  $(x, x) = 0$  и  $x = 0$  эквивалентны;

2)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$  для любых  $x, y \in \mathbb{C}^n$ , напомним, что черта означает переход к комплексно сопряженному числу, и отметим, что в отличие от вещественного евклидова пространства скалярное произведение в комплексном пространстве некоммукативно;

3)  $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$  для любых  $x, y, z \in \mathbb{C}^n$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Из 2), 3) очевидным образом вытекает, что

4)  $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$  для любых  $x, y, z \in \mathbb{C}^n$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Если на пространстве  $\mathbb{C}^n$  введено скалярное произведение, то его называют *комплексным евклидовым пространством* (часто говорят также: *унитарное пространство*).

Можно указать бесчисленное множество способов введения скалярного произведения на пространстве  $\mathbb{C}^n$ , например, можно положить

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y}_k.$$

Такое скалярное произведение на  $\mathbb{C}^n$  называют *стандартным*. Проверка аксиом 1)–3) не вызывает никаких затруднений. На  $\mathbb{C}^n$  также можно ввести скалярное произведение, аналогичное (1.1).

*Длину (модуль)* вектора  $x$  определяют при помощи соотношения  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ . При этом выполняются свойства 1)–3), с. 128.

## § 2. Общие евклидовы пространства

**1.** Будем говорить, что на вещественном линейном пространстве  $\mathbf{X}$  введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов  $x, y$  этого пространства поставлено в соответствие вещественное число  $(x, y)$ , и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*, задаваемые соотношениями вида 1)–3) с. 127. Если на линейном вещественном пространстве  $\mathbf{X}$  введено скалярное произведение, его называют *вещественным евклидовым пространством*.

**2.** Говорят, что на комплексном линейном пространстве  $\mathbf{X}$  введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов  $x, y$  этого пространства поставлено в соответствие, вообще говоря, комплексное число  $(x, y)$ , и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*, задаваемые соотношениями вида 1)–3), с. 129. Если на линейном

комплексном пространстве  $\mathbf{X}$  введено скалярное произведение, его называют *комплексным евклидовым (унитарным) пространством*.

**3. УПРАЖНЕНИЕ.** Проверить, что в рассматриваемых ниже примерах аксиомы скалярного произведения выполнены.

1) Множество всех векторов трехмерного пространства с введенными обычным образом линейными операциями и скалярным произведением (см. § 2, гл. 4) — вещественное евклидово пространство.

2) Пусть  $p$  — интегрируемая положительная на интервале  $(a, b)$  вещественной оси вещественная функция. Пространство  $C[a, b]$  превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов  $f$  и  $g$  пространства  $C[a, b]$  по формуле

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx. \quad (2.1)$$

3) Для любой пары

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n$$

элементов пространства  $\mathbf{Q}_n$  определим скалярное произведение по формуле

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^n \rho_j a_j \bar{b}_j,$$

где  $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$  — заданные положительные числа. После введения таким образом скалярного произведения пространство  $\mathbf{Q}_n$  становится комплексным евклидовым пространством.

**4.** Любое конечномерное линейное пространство  $\mathbf{X}_n$  можно превратить в евклидово пространство. Действительно, пусть  $\{e^k\}_{k=1}^n$  — базис пространства  $\mathbf{X}_n$ ,  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$ ,  $y = \sum_{k=1}^n \eta_k e^k$  — элементы пространства  $\mathbf{X}_n$ . Примем в качестве скалярного произведения элементов  $x, y$  величину

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \bar{\eta}_k. \quad (2.2)$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы скалярного произведения при этом будут выполнены.

### §3. Неравенство Коши — Буняковского

1. Тожество Пифагора<sup>1)</sup>. Пусть  $a, b$  — векторы трехмерного евклидова пространства  $\mathbf{V}_3$ , причем векторы  $a - b$  и  $b$  ортогональны, т. е.  $(a - b, b) = 0$ <sup>2)</sup>. Тогда по теореме Пифагора

$$|a|^2 = |a - b|^2 + |b|^2. \quad (3.1)$$

Пусть теперь  $a, b$  — векторы произвольного евклидова пространства  $\mathbf{X}$  такие, что  $(a - b, b) = 0$ . Тожество (3.1) (*тождество Пифагора*) справедливо и в этом случае, если положить, что  $|v| = \sqrt{(v, v)}$  для любого вектора  $v \in \mathbf{X}$ . Действительно, проводя элементарные выкладки, будем иметь

$$\begin{aligned} |a|^2 &= (a, a) = (a - b + b, a - b + b) = \\ &= (a - b, a - b) + (b, b) + (a - b, b) + (b, a - b) = \\ &= (a - b, a - b) + (b, b) + (a - b, b) + \overline{(a - b, b)} = \\ &= (a - b, a - b) + (b, b) = |a - b|^2 + |b|^2. \end{aligned}$$

2. **Теорема.** Пусть  $\mathbf{X}$  — евклидово пространство. Для любых векторов  $x, y \in \mathbf{X}$  справедливо неравенство

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (3.2)$$

Равенство в (3.2) достигается тогда и только тогда, когда векторы  $x, y$  пропорциональны.

Неравенство (3.2) обычно называют неравенством Коши — Буняковского<sup>3)</sup>.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $y = 0$ , то неравенство (3.2) превращается в тривиальное равенство, и при любом  $x \in \mathbf{X}$  векторы  $x, y$  пропорциональны, так как  $0x + y = 0$ . Поэтому в дальнейшем считаем, что  $y \neq 0$ . Положим  $e = |y|^{-1}y$ . Очевидно, что  $(e, e) = 1$ , а  $(x - (x, e)e, (x, e)e) = 0$ , значит, в тождестве (3.1) можно положить  $a = x, b = (x, e)e$  и получить, что  $|x|^2 = |x - (x, e)e|^2 + |(x, e)|^2$ . Отсюда следует, что  $|x|^2 \geq |(x, e)|^2$ . Последнее неравенство эквивалентно (3.2). Пусть  $|x|^2 = |(x, e)|^2$ , т. е. неравенство (3.2) превращается в равенство. Тогда  $|x - (x, e)e|^2 = 0$ , откуда вытекает, что  $x = (x, e)e$ , или  $x = ((x, y)/|y|^2)y$ , следовательно, векторы  $x, y$  пропорциональны. Обратно, если векторы  $x, y$  пропорциональны, то, как нетрудно убедиться, левая и правая части (3.2) совпадают.  $\square$

<sup>1)</sup>Пифагор Самосский (570 — 490 гг. до н. э.) — древнегреческий философ и математик.

<sup>2)</sup>Можно сказать, что вектор  $b$  получен проектированием вектора  $a$  на прямую, параллельную вектору  $b$ .

<sup>3)</sup>Виктор Яковлевич Буняковский (1804 — 1889) — русский математик.

**3.** Величина  $|x| = \sqrt{(x, x)}$  называется *длиной* (*модулем*) вектора  $x$ . Неравенство (3.2) часто записывают в виде

$$|(x, y)| \leq |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbf{X}. \quad (3.3)$$

Введенное понятие длины обладает свойствами, аналогичными свойствам длины вектора в трехмерном евклидовом пространстве, а именно:

- 1)  $|x| \geq 0$  для любого вектора  $x \in \mathbf{X}$ , равенство  $|x| = 0$  эквивалентно равенству  $x = 0$ ;
- 2)  $|\alpha x| = |\alpha||x|$  для любых  $x \in \mathbf{X}$  и  $\alpha \in \mathbb{C}$ ;
- 3)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  для любых  $x, y \in \mathbf{X}$ .

Неравенство 3) называют *неравенством треугольника* (*неравенством Минковского*).

Справедливость утверждений 1), 2) очевидна. Покажем, что неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши — Буняковского. В самом деле,

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = |x|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) + |y|^2.$$

Вследствие (3.3) справедливо неравенство  $|\operatorname{Re}(x, y)| \leq |x||y|$ , откуда получаем, что

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству 3).

**4.** По аналогии с трехмерным евклидовым пространством  $\mathbf{V}_3$  векторы  $x, y$  естественно называть *ортогональными*, если  $(x, y) = 0$ .

**ПРИМЕР.** Векторы  $i^k, i^l \in \mathbb{C}^n$  при  $k \neq l$  ортогональны относительно стандартного скалярного произведения.

**5.** Из неравенства (3.3) вытекает, что если  $\mathbf{X}$  — вещественное евклидово пространство, то  $(x, y)/|x||y| \in [-1, 1]$  для любых не равных нулю векторов  $x, y \in \mathbf{X}$ . Это дает возможность ввести понятие *угла между векторами*  $x, y$ , а именно, принимают, что косинус этого угла равен  $(x, y)/|x||y|$ .

## § 4. Матрица Грама

**1.** Пусть  $\{a^i\}_{i=1}^m$  — система векторов евклидова пространства  $\mathbf{X}$ . Построим квадратную матрицу

$$G = \begin{pmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) & \dots & (a^m, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2) & \dots & (a^m, a^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a^1, a^m) & (a^2, a^m) & \dots & (a^m, a^m) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

порядка  $m$ . Матрица  $G$  называется *матрицей Грама*<sup>1)</sup> системы векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$ .

Отметим, что поскольку  $(a^k, a^l) = \overline{(a^l, a^k)}$ , то матрица Грама любой системы векторов — эрмитова матрица (см. с. 107).

**1.1. Теорема.** *Для того, чтобы система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была невырожденной.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть матрица Грама  $G$  невырождена. Тогда система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  линейно независима. Действительно, если

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m = 0,$$

то

$$(x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Записывая эти равенства более подробно, получаем

$$x_1 (a^1, a^k) + x_2 (a^2, a^k) + \dots + x_m (a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.2)$$

Система (4.2) — однородная система уравнений относительно неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  с матрицей  $G$ . Поскольку матрица Грама  $G$  невырождена, система имеет только тривиальное решение, следовательно,  $x_1, x_2, \dots, x_m = 0$ . Обратно, пусть система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  линейно независима. Составим линейную комбинацию столбцов матрицы  $G$  с некоторыми коэффициентами  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Приравнивая эту линейную комбинацию нулю, получим

$$x_1 (a^1, a^k) + x_2 (a^2, a^k) + \dots + x_m (a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Умножим почленно равенство с номером  $k$  на  $\bar{x}_k$ , затем сложим почленно полученные равенства. После элементарных преобразований сможем написать, что

$$\left( \sum_{k=1}^m x_k a^k, \sum_{k=1}^m x_k a^k \right) = 0,$$

<sup>1)</sup>Йорген Педерсен Грам (Jorgen Pedersen Gram; 1850 — 1916) — датский математик.

следовательно,

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m = 0. \quad (4.4)$$

Поскольку система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  линейно независима, то из (4.4) вытекает, что  $x_1, x_2, \dots, x_m = 0$ . Таким образом, мы получили, что если линейная комбинация столбцов матрицы  $G$  обращается в нуль, то все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю. Это означает, что столбцы матрицы  $G$  линейно независимы, т. е. матрица  $G$  невырождена.  $\square$

ПРИМЕР. Исследуем на линейную зависимость векторы

$$x^1 = (1, 3, 3, 1, -2), \quad x^2 = (3, 3, 1, -3, 2), \quad x^3 = (1, 3, -1, 1, 3)$$

пространства  $\mathbb{R}^5$ . Введем на этом пространстве стандартное скалярное произведение и составим матрицу Грама третьего порядка  $G = \{(x^i, x^j)\}_{i,j=1}^3$ . Выполняя элементарные вычисления, получим

$$G = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 2 \\ 8 & 32 & 14 \\ 2 & 14 & 21 \end{pmatrix}, \quad \det(G) = 2^4 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} 0 & -40 & -125 \\ 0 & -6 & -35 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 2^4 \cdot 650,$$

т. е. векторы  $x^1, x^2, x^3$  линейно независимы.

## § 5. Ортогональные системы векторов

**1.** Система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  называется *ортогональной*, если все векторы  $a^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , не нули и  $(a^i, a^k) = 0$  при  $i \neq k$ .

Матрица Грама ортогональной системы — диагональная невырожденная матрица. Очевидно, ортогональная система линейно независима.

Система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  называется *ортонормированной*, если  $(a^i, a^k) = \delta_{ik}$  для  $i, k = 1, 2, \dots, m$ .

Матрица Грама ортонормированной системы — единичная матрица. Все векторы ортонормированной системы имеют длину, равную единице.

**2.** Матрица  $T$  перехода от любого ортонормированного базиса  $\{e^k\}_{k=1}^n$  к другому ортонормированному базису  $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$  евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$  является унитарной. В самом деле, записывая равенство

$$\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T \quad (5.1)$$

более подробно, получим  $\tilde{e}^k = \sum_{j=1}^n t_{jk} e^j$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Вследствие ортонормированности базиса  $\tilde{\mathcal{E}}_n$  отсюда получаем, что

$$\left( \sum_{j=1}^n t_{jk} e^j, \sum_{j=1}^n t_{jl} e^j \right) = (\tilde{e}^k, \tilde{e}^l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Преобразуя левую часть последнего равенства с учетом ортонормированности базиса  $\mathcal{E}_n$ , будем иметь, что

$$\sum_{j=1}^n t_{jk} \bar{t}_{jl} = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n,$$

а это и означает, что матрица  $T$  унитарна (см. с. 108).

Важно отметить, что, как следует из только что выполненных выкладок, справедливо и обратное утверждение, а именно, если базис  $\mathcal{E}_n$  ортонормирован, а матрица  $T$  унитарна, то базис  $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$  также ортонормирован.

## § 6. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта

**1. Теорема Грама — Шмидта<sup>1)</sup>.** *Всякая линейно независимая система  $\{a^i\}_{i=1}^m$  эквивалентна некоторой ортонормированной системе  $\{b^i\}_{i=1}^m$ , причем вектор  $b^1$  можно выбрать пропорциональным вектору  $a^1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положим  $h^1 = a^1$ ,  $h^2 = x_{2,1} h^1 + a^2$ . Вектор  $h^1$  не нуль, поскольку вектор  $a^1$  как элемент линейно независимой системы не нуль. При любом значении  $x_{2,1}$  вектор  $h^2$  также не нуль, поскольку  $h^2$  — линейная комбинация линейно независимых векторов, причем один из коэффициентов этой линейной комбинации не равен нулю (он равен единице).

Выберем теперь число  $x_{2,1}$  так, чтобы вектор  $h^2$  был ортогонален вектору  $h^1$ . Записывая это условие, получим  $0 = x_{2,1}(h^1, h^1) + (a^2, h^1)$ , откуда  $x_{2,1} = -(a^2, h^1)/(h^1, h^1)$ . Итак, построены векторы  $h^1, h^2$  такие, что  $(h^1, h^2) = 0$ ,  $h^1, h^2 \neq 0$ .

Предположим теперь, что построены векторы  $h^1, h^2, \dots, h^k$  такие, что  $h^1, h^2, \dots, h^k \neq 0$  и  $(h^i, h^j) = 0$  для  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ . Будем разыскивать вектор  $h^{k+1}$  в виде

$$h^{k+1} = x_{k+1,1} h^1 + x_{k+1,2} h^2 + \dots + x_{k+1,k} h^k + a^{k+1}. \quad (6.1)$$

<sup>1)</sup>Эрхард Шмидт (Erhard Schmidt; 1876 — 1959) — немецкий математик.

При любых значениях коэффициентов  $x_{k+1,1}, \dots, x_{k+1,k}$  вектор  $h^{k+1}$  не нуль. В самом деле, по построению векторы  $h^1, h^2, \dots, h^k$  линейно выражаются через векторы системы  $\{a^i\}_{i=1}^m$ , причем так, что в выражение для вектора  $h^j$  входят векторы системы  $\{a^i\}_{i=1}^m$  с номерами, не превосходящими  $j$ . Отсюда вытекает, что вектор  $h^{k+1}$  есть линейная комбинация линейно независимых векторов  $a^1, a^2, \dots, a^{k+1}$ , причем вектор  $a^{k+1}$  входит в эту линейную комбинацию с коэффициентом, равным единице.

Выберем числа  $x_{k+1,1}, x_{k+1,2}, \dots, x_{k+1,k}$  так, чтобы вектор  $h^{k+1}$  был ортогонален уже построенным векторам  $h^1, h^2, \dots, h^k$ . Последовательно выполняя эти условия, найдем  $x_{k+1,1} = -(a^{k+1}, h^1)/(h^1, h^1)$ ,  $x_{k+1,2} = -(a^{k+1}, h^2)/(h^2, h^2)$ ,  $\dots$ ,  $x_{k+1,k} = -(a^{k+1}, h^k)/(h^k, h^k)$ .

Продолжая описанный процесс, построим ортогональную систему ненулевых векторов  $\{h^i\}_{i=1}^m$ . Полагая затем

$$b^i = (|h^i|)^{-1}h^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.2)$$

получим ортонормированную систему векторов  $\{b^i\}_{i=1}^m$ .

Как было установлено выше, система векторов  $\{h^i\}_{i=1}^m$  линейно выражается через систему векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$ . Формула (6.1) показывает, что система векторов  $\{a^i\}_{i=1}^m$  линейно выражается через систему векторов  $\{h^i\}_{i=1}^m$ , формула (6.2) показывает, что системы  $\{b^i\}_{i=1}^m$ ,  $\{h^i\}_{i=1}^m$  эквивалентны. Таким образом, все три рассматриваемые системы векторов попарно эквивалентны.

Заметим, наконец, что векторы  $a^1, b^1$  пропорциональны, так как по построению  $b^1 = (|a^1|)^{-1}a^1$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Доказательство теоремы 1 конструктивно. Оно содержит описание способа построения по любой линейно независимой системе эквивалентной ортонормированной системы. Этот метод называется *процессом ортогонализации Грама — Шмидта*. Следует, однако, иметь в виду, что в вычислительной практике процесс ортогонализации Грама — Шмидта используется очень редко, так как обычно он подвержен сильному влиянию погрешностей округления.

**ПРИМЕР.** Даны полиномы  $Q_0(x) \equiv 1$ ,  $Q_1(x) = x$ ,  $Q_2(x) = x^2$  вещественной переменной  $x$ . Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построим полиномы  $P_0, P_1, P_2$  нулевой первой и второй степени соответственно, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$



Проводя вычисления в соответствии с методом Грама — Шмидта, получим  $\tilde{P}_0 = Q_0 \equiv 1$ ,

$$\tilde{P}_1(x) = Q_1(x) - \tilde{P}_0(x) \int_{-1}^1 Q_1(x) \tilde{P}_0 dx \left( \int_{-1}^1 \tilde{P}_0^2(x) dx \right)^{-1} = x,$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(x) = Q_2(x) - \tilde{P}_0(x) \int_{-1}^1 Q_2(x) \tilde{P}_0 dx \left( \int_{-1}^1 \tilde{P}_0^2(x) dx \right)^{-1} - \\ - \tilde{P}_1(x) \int_{-1}^1 Q_2(x) \tilde{P}_1 dx \left( \int_{-1}^1 \tilde{P}_1^2(x) dx \right)^{-1} = x^2 - 1/3, \end{aligned}$$

$$P_0(x) = \tilde{P}_0(x) \left( \int_{-1}^1 \tilde{P}_0^2(x) dx \right)^{-1/2} = 1/\sqrt{2}, \quad P_1(x) = \tilde{P}_1(x) \left( \int_{-1}^1 \tilde{P}_1^2(x) dx \right)^{-1/2} = x\sqrt{3/2},$$

$$P_2(x) = \tilde{P}_2(x) \left( \int_{-1}^1 \tilde{P}_2^2(x) dx \right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1).$$

Аналогично можно строить полиномы более высоких степеней  $P_3(x), \dots, P_n(x)$ , применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта к полиномам  $1, x, x^2, \dots, x^n$  при произвольном целом положительном  $n$ . Полиномы  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$  называют *полиномами Лежандра*<sup>1)</sup>. Справедлива так называемая *формула Родрига*<sup>2)</sup>

$$P_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{k! 2^k} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.3)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Используя формулу Родрига и формулу интегрирования по частям, показать, что

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx = 0 \quad \text{при } k \neq l, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

**2.** Пусть  $e$  — произвольный ненулевой вектор евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$ ,  $n > 1$ . Понятно, что существует некоторый вектор  $f_2$ , непропорциональный  $e$ , затем можно указать вектор  $f_3$  так, чтобы векторы  $e, f_2, f_3$  были линейно независимы. Продолжая этот процесс, получим базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , включающий в себя вектор  $e$ . Применяя затем процесс ортогонализации Грама — Шмидта, можно построить ортогональный базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , содержащий вектор, коллинеарный вектору  $e$ .

<sup>1)</sup> Адриен Мари Лежандр (Adrien-Marie Legendre; 1752 — 1833) — французский математик.

<sup>2)</sup> Бенжамен Оленд Родриг (Benjamin Olinde Rodrigues; 1794 — 1851) — французский математик.

## § 7. Разложение вектора по базису евклидова пространства

В евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$  вычисление коэффициентов разложения вектора  $x \in \mathbf{X}_n$  по любому базису  $\{e^k\}_{k=1}^n$  можно свести к решению крамеровской системы линейных алгебраических уравнений с эрмитовой матрицей. Действительно, умножим обе части равенства

$$\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_n e^n = x$$

скалярно на вектор  $e^1$ , затем на вектор  $e^2$  и т. д. и, наконец, на вектор  $e^n$ . Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (e^1, e^1)\xi_1 + (e^2, e^1)\xi_2 + \dots + (e^n, e^1)\xi_n &= (x, e^1), \\ (e^1, e^2)\xi_1 + (e^2, e^2)\xi_2 + \dots + (e^n, e^2)\xi_n &= (x, e^2), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (e^1, e^n)\xi_1 + (e^2, e^n)\xi_2 + \dots + (e^n, e^n)\xi_n &= (x, e^n), \end{aligned}$$

матрицей которой служит матрица Грама базиса  $\{e^k\}_{k=1}^n$ . Наиболее просто эта система решается в случае, когда базис ортогонален, т. е. когда матрица Грама диагональна. В этом случае получаем

$$\xi_k = (x, e^k)/(e^k, e^k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.1)$$

Коэффициенты (7.1) называются *коэффициентами Фурье*<sup>1)</sup> вектора  $x$  относительно ортогональной системы  $\{e^k\}_{k=1}^n$ . Отметим, что если базис  $\{e^k\}_{k=1}^n$  ортонормирован, то для любого вектора  $x \in \mathbf{X}_n$  справедливо разложение

$$x = \sum_{k=1}^n (x, e^k) e^k. \quad (7.2)$$

## § 8. Вычисление скалярного произведения

**1.** Пусть  $x, y$  — векторы евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$ , и пусть известны векторы  $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$  коэффициентов разложений  $x, y$  по базису  $\mathcal{E}_n$ , т. е.  $x = \mathcal{E}_n \xi, y = \mathcal{E}_n \eta$ . Тогда

$$(x, y) = \left( \sum_{k=1}^n \xi_k e^k, \sum_{l=1}^n \eta_l e^l \right) = \sum_{k,l=1}^n \xi_k \bar{\eta}_l (e^k, e^l) = (G\xi, \eta), \quad (8.1)$$

<sup>1)</sup>Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier; 1768 — 1830) — французский математик и физик.

где  $G$  — матрица Грама базиса  $\mathcal{E}_n$ , а скобками в правой части равенства обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Следовательно, для вычисления скалярного произведения  $(x, y)$  достаточно знать коэффициенты разложения векторов  $x, y$  по базису и матрицу Грама этого базиса.

2. В случае, когда базис ортонормирован, получаем

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \bar{\eta}_k. \quad (8.2)$$

Таким образом, скалярное произведение векторов можно подсчитать как стандартное скалярное произведение коэффициентов разложения этих векторов по любому ортонормированному базису.

## § 9. Взаимный базис

Пусть  $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$  — базис евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$ . Нетрудно убедиться, что уравнения

$$(\tilde{e}^i, e^j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.1)$$

однозначно определяют линейно независимые векторы  $\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \dots, \tilde{e}^n$ . Базис  $\mathcal{E}_n$  принято называть *основным*, а базис  $\tilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$  — *взаимным*. Понятно, что основной и взаимный базисы совпадают тогда и только тогда, когда  $\mathcal{E}_n$  — ортонормированный базис.

Пусть  $G$  — матрица Грама базиса  $\mathcal{E}_n$ , а  $\tilde{G}$  — матрица Грама базиса  $\tilde{\mathcal{E}}_n$ . Элементарно проверяется справедливость следующих равенств:  $\mathcal{E}_n = G\tilde{\mathcal{E}}_n$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}_n = \tilde{G}\mathcal{E}_n$ , откуда вытекает, что  $\tilde{G} = G^{-1}$ . Пусть, далее,  $x = \mathcal{E}_n\xi$ ,  $y = \tilde{\mathcal{E}}_n\tilde{\eta}$ . Тогда  $\xi_k = (x, \tilde{e}^k)$ ,  $\tilde{\eta}_k = (y, e^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \bar{\tilde{\eta}}_k$ . Числа  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  принято называть *контравариантными* компонентами вектора  $x$ , числа  $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_n$  — *ковариантными* компонентами вектора  $y$ .

## § 10. Примеры ортогональных базисов

1. Примеры ортогональных базисов в пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

1) Естественный базис  $\{i^k\}_{k=1}^n$ . Он ортонормирован относительно стандартного скалярного произведения (докажите!).

2) *Базис Фурье*. Нам удобно будет нумеровать сейчас компоненты вектора и базисные векторы от 0 до  $n - 1$ . Пусть

$$q_k = \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

есть корни степени  $k$  из единицы,  $i$  — мнимая единица (см. § 4, гл. 1). Введем в рассмотрение систему векторов  $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$ , компоненты которых вычисляются по формулам

$$\varphi_j^k = q_k^j, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (10.1)$$

$k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Покажем, что векторы  $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$  образуют ортогональную систему относительно стандартного скалярного произведения в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Заметим прежде всего, что  $q_k = q_1^k$ ,  $\bar{q}_k = q_1^{-k}$ . Поэтому, вычисляя скалярное произведение  $(\varphi^k, \varphi^l)$ , получим

$$(\varphi^k, \varphi^l) = \sum_{j=0}^{n-1} q_1^{(k-l)j} = 1 + (q_1^p) + (q_1^p)^2 + \dots + (q_1^p)^{n-1}, \quad (10.2)$$

где  $p = k - l$ . При  $k = l$ , т. е. при  $p = 0$ , справедливо равенство  $(\varphi^k, \varphi^k) = n$ . Если  $p \neq 0$ , то сумма в правой части (10.2) есть геометрическая прогрессия со знаменателем  $q_1^p$ . Причем, поскольку  $|p| = |k - l| < n$ , то  $q_1^p \neq 1$ . Используя формулу для суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии, получим

$$\sum_{j=0}^{n-1} (q_1^p)^j = \frac{(q_1^p)^n - 1}{q_1^p - 1}, \quad (10.3)$$

но  $(q_1^n)^p = q_1^{pn} = 1$ , следовательно,  $(\varphi^k, \varphi^l) = 0$  при  $k \neq l$ .

Коэффициенты Фурье  $\xi$  разложения любого вектора  $x \in \mathbb{C}^n$  по базису (10.1),

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k q_k^j, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (10.4)$$

в соответствии с (7.1) вычисляются, таким образом, по формулам

$$\xi_k = (x, \varphi_k) / (\varphi_k, \varphi_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j q_k^{-j}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (10.5)$$

Базис  $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$  принято называть *базисом Фурье*. Он широко используется, например, при цифровой обработке сигналов (звуковых, видео).

В реальных задачах  $n$  (это длина обрабатываемого сигнала) велико, в связи с чем используются специальные приемы экономного вычисления сумм вида (10.4), (10.5), называемые алгоритмами быстрого дискретного преобразования Фурье (FFT, Fast Fourier Transformation).

**2.** Примеры ортогональных базисов в пространстве  $\mathbf{P}_n$  полиномов с вещественными коэффициентами. Рассматривается множество всех полиномов вида  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , где коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — произвольные вещественные числа,  $x$  может принимать произвольные вещественные значения,  $n \geq 0$  — фиксированное целое число. Очевидно, что указанное множество полиномов есть вещественное линейное пространство, если понимать операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число обычным образом.

**2.1.** Полиномы Лежандра. Определим в пространстве  $\mathbf{P}_n$  скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad \forall f, g \in \mathbf{P}_n. \quad (10.6)$$

Тогда полиномы Лежандра  $P_0, P_1, \dots, P_n$  (см. (6.3), (6.4), с. 137) образуют ортогональный базис в пространстве  $\mathbf{P}_n$ .

**2.2.** Полиномы Чебышева<sup>1)</sup>. Определим теперь скалярное произведение в пространстве  $\mathbf{P}_n$  при помощи соотношения

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \forall f, g \in \mathbf{P}_n. \quad (10.7)$$

Введем в рассмотрение *полиномы Чебышева*. Так называют полиномы, вычисляемые при помощи следующих рекуррентных формул:

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x, \quad (10.8)$$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.9)$$

<sup>1)</sup>Пафнутий Львович Чебышев (произносится как «Чебышёв»; 1821 — 1894) — русский математик и механик.

Здесь  $k$  — степень полинома.

Нам потребуется явная формула для полиномов Чебышева. Будем разыскивать значение  $T_k(x)$  в виде  $T_k(x) = \lambda^k$ . Используя это представление в рекуррентной формуле (10.9), получим

$$\lambda^{k+1} = 2x\lambda^k - \lambda^{k-1},$$

откуда, предполагая, что  $\lambda \neq 0$ , приходим к квадратному уравнению

$$\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0$$

для определения  $\lambda$ . Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

поэтому функции  $T_k^{(1)}(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^k$ ,  $T_k^{(2)}(x) = (x - \sqrt{x^2 - 1})^k$ , а следовательно, и функции

$$T_k(x) = c_1 T_k^{(1)}(x) + c_2 T_k^{(2)}(x),$$

$k = 0, 1, \dots$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные, удовлетворяют рекуррентному соотношению (10.9). Выберем  $c_1, c_2$  так, чтобы были выполнены условия (10.8):

$$c_1 + c_2 = 1,$$

$$(c_1 + c_2)x + (c_1 - c_2)\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

Отсюда получаем  $c_1 = c_2 = 1/2$ , т. е. полиномы

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^k + \frac{1}{2} \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению (10.9) и условиям (10.8). При  $|x| \leq 1$  полиномам Чебышева можно придать более компактный вид. Положим в этом случае  $x = \cos \varphi$ . Тогда

$$T_k(x) = \frac{1}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k + \frac{1}{2} (\cos \varphi - i \sin \varphi)^k,$$

откуда, используя формулу Муавра (см. (3.7), с. 15), получим, что  $T_k(x) = \cos k\varphi$ , или

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x). \quad (10.10)$$

Полиномы Чебышева ортогональны в смысле скалярного произведения (10.7). Действительно, используя представление (10.10), можем написать, что

$$(T_k, T_l) = \int_{-1}^1 \frac{\cos(k \arccos x) \cos(l \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Полагая  $x = \cos \varphi$ , нетрудно подсчитать, что

$$(T_k, T_l) = \int_0^\pi \cos k\varphi \cos l\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(k+l)\varphi + \cos(k-l)\varphi) d\varphi = 0$$

при  $k \neq l$ .

Таким образом, полиномы Чебышева  $T_0, T_1, \dots, T_n$  образуют ортогональный базис в смысле скалярного произведения (10.7) в пространстве  $\mathbf{P}_n$  полиномов с вещественными коэффициентами.

---

---

ГЛАВА 8  
Подпространства

**§ 1. Сумма и пересечение подпространств**

**1.** Множество  $L$  векторов линейного пространства  $\mathbf{X}$  называется *подпространством*, если из того, что векторы  $x, y$  принадлежат  $L$ , вытекает, что вектор  $\alpha x + \beta y$  при любых комплексных числах  $\alpha, \beta$  также принадлежит множеству  $L$ .

*Тривиальные* примеры подпространств: все пространство  $\mathbf{X}$  является подпространством; множество, состоящее только из одного вектора, равного нулю, является подпространством.

Поскольку по определению наряду с вектором  $x$  подпространству должен принадлежать и вектор  $0x$ , то всякое подпространство содержит нулевой вектор.

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Пусть  $a^1, a^2, \dots, a^m, m \geq 1$ , — произвольным образом фиксированные векторы пространства  $\mathbf{X}$ . Докажите, что множество всех линейных комбинаций  $x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m$  — подпространство. Говорят, что это подпространство *натянута на векторы*  $a^1, a^2, \dots, a^m$ .

2) Пусть  $a^1, a^2$  — векторы пространства  $\mathbf{X}$ , причем  $a^2 \neq 0$ . Множество  $L$  векторов вида  $a^1 + \alpha a^2$ , где  $\alpha$  пробегает множество всех комплексных чисел, называется *прямой*, проходящей через точку  $a^1$  в направлении вектора  $a^2$ . Показать, что множество  $L$  является подпространством тогда и только тогда, когда векторы  $a^1, a^2$  линейно зависимы.

**2.** Пусть  $L_1, L_2$  — подпространства пространства  $\mathbf{X}$ . Множество  $L$  всех векторов вида  $a^1 + a^2$ , где  $a^1 \in L_1, a^2 \in L_2$ , называется *суммой подпространств*  $L_1, L_2$ . Используют обозначение:  $L = L_1 + L_2$ .

Так определенное множество  $L$  — подпространство. Действительно, пусть векторы  $x, y \in L$ . Это означает, что существуют векторы  $a^1, b^1 \in L_1, a^2, b^2 \in L_2$  такие, что  $x = a^1 + a^2, y = b^1 + b^2$ . Пусть  $\alpha, \beta$  — произвольные комплексные числа. Тогда

$$\alpha x + \beta y = \alpha(a^1 + a^2) + \beta(b^1 + b^2) = (\alpha a^1 + \beta b^1) + (\alpha a^2 + \beta b^2).$$

Поскольку  $L_1$  — подпространство, вектор  $\alpha a^1 + \beta b^1$  принадлежит  $L_1$ . Точно так же, вектор  $\alpha a^2 + \beta b^2$  принадлежит  $L_2$ , следовательно, вектор  $\alpha x + \beta y$  принадлежит  $L$ .



**3.** Пересечение подпространств  $L_1, L_2$ , т. е. множество всех векторов, принадлежащих как  $L_1$ , так и  $L_2$ , также является подпространством. Действительно, пусть векторы  $x, y \in L_1 \cap L_2$ . Для любого комплексного числа  $\alpha$  вектор  $\alpha x$  принадлежит как  $L_1$ , так и  $L_2$ , т. е.  $\alpha x \in L_1 \cap L_2$ . Аналогично, для любого  $\beta$  вектор  $\beta y \in L_1 \cap L_2$ , но тогда, очевидно, и  $\alpha x + \beta y \in L_1 \cap L_2$ .

**4.** Система векторов  $\{e^k\}_{k=1}^m \subset L$  называется *базисом подпространства  $L$* , если она линейно независима и любой вектор  $x \in L$  представим в виде линейной комбинации векторов из  $\{e^k\}_{k=1}^m$ . Число  $m$  при этом будем называть *размерностью подпространства*. Размерность подпространства  $L$  обозначают через  $\dim(L)$ .

Подпространству, состоящему только из нулевого вектора, будем приписывать размерность, равную нулю. Это подпространство будем обозначать через  $\{0\}$  и называть *нулевым подпространством*.

УПРАЖНЕНИЕ. Описать суммы и пересечения всевозможных подпространств пространства  $\mathbf{V}_3$ .

**5.** Для того, чтобы подпространство  $L$  конечномерного пространства  $\mathbf{X}_n$  совпадало с  $\mathbf{X}_n$ , необходимо и достаточно выполнения равенства  $\dim(L) = n$ . Справедливость этого утверждения сразу следует из того, что любые  $n$  линейно независимых векторов пространства  $\mathbf{X}_n$  образуют его базис (см. теорему 2.2, с. 123).

**6.** Очевидно, что базис  $\{e^k\}_{k=1}^m$  любого подпространства  $L$  из  $\mathbf{X}_n$  можно дополнить до базиса  $\{e^k\}_{k=1}^n$  всего пространства  $\mathbf{X}_n$ . Точно так же, если  $L_1$  и  $L_2$  — подпространства и  $L_1 \subset L_2$ , то  $\dim(L_1) \leq \dim(L_2)$ , и базис подпространства  $L_1$  можно дополнить до базиса подпространства  $L_2$ .

**7.** Сумма подпространств  $L_1$  и  $L_2$  называется *прямой*, если для любого вектора  $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$  его составляющие  $x^1 \in L_1$  и  $x^2 \in L_2$  определяются однозначно. Прямая сумма подпространств  $L_1$  и  $L_2$  обозначается через  $L_1 \dot{+} L_2$ .

**7.1. Теорема.** Для того, чтобы сумма подпространств  $L_1, L_2$  была прямой, необходимо и достаточно, чтобы из равенства

$$x^1 + x^2 = 0$$

для  $x^1 \in L_1, x^2 \in L_2$  вытекало, что  $x^1 = 0, x^2 = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть из равенства  $x^1 + x^2 = 0$  для  $x^1 \in L_1, x^2 \in L_2$  следует, что  $x^1 = 0, x^2 = 0$ . Покажем, что тогда для любо-

го  $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$  составляющие  $x^1 \in L_1$ ,  $x^2 \in L_2$  определяются однозначно. Предположим, что существует еще одно разложение вектора  $x$ , т. е.  $x = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2$ ,  $\tilde{x}^1 \in L_1$ ,  $\tilde{x}^2 \in L_2$ . Тогда, очевидно,  $(x^1 - \tilde{x}^1) + (x^2 - \tilde{x}^2) = 0$ . Поскольку  $x^1 - \tilde{x}^1 \in L_1$ ,  $x^2 - \tilde{x}^2 \in L_2$ , то  $x^1 - \tilde{x}^1 = 0$ ,  $x^2 - \tilde{x}^2 = 0$ , следовательно,  $x^1 = \tilde{x}^1$ ,  $x^2 = \tilde{x}^2$ . Обратно, пусть составляющие любого вектора  $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$  определяются однозначно, и пусть  $x^1 + x^2 = 0$  для каких-то  $x^1 \in L_1$ ,  $x^2 \in L_2$ . Поскольку  $0 + 0 = 0$ , то отсюда вытекает, что  $x^1 = x^2 = 0$ .  $\square$

**7.2. Теорема.** Для того, чтобы сумма подпространств  $L_1$ ,  $L_2$  была прямой, необходимо и достаточно, чтобы  $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ ,  $x^1 + x^2 = 0$ ,  $x^1 \in L_1$ ,  $x^2 \in L_2$ . Поскольку  $x^1 = -x^2$ , то  $x^1 \in L_2$ , значит,  $x^1 \in L_1 \cap L_2$ , следовательно,  $x^1 = 0$ , но тогда, очевидно, и  $x^2 = 0$ . Обратно, пусть  $x \in L_1 \cap L_2$ . Тогда  $x \in L_1$ ,  $x \in L_2$ , кроме того, очевидно,  $x + (-x) = 0$ , а так как сумма  $L_1$  и  $L_2$  прямая, то вследствие теоремы 7.1 получаем, что  $x = 0$ , следовательно,  $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ .  $\square$

**7.3. УПРАЖНЕНИЕ.** Пусть  $L$  — произвольное подпространство конечномерного линейного пространства  $\mathbf{X}_n$ . Докажите, что существует подпространство  $M \subset \mathbf{X}_n$  такое, что  $\mathbf{X}_n = L \dot{+} M$ .

**8.** Будем говорить, что подпространства  $L_1$  и  $L_2$  евклидова пространства ортогональны (пишут  $L_1 \perp L_2$ ), если  $(x, y) = 0$  для всех  $x \in L_1$ ,  $y \in L_2$ . Сумму ортогональных подпространств будем называть ортогональной и обозначать через  $L_1 \oplus L_2$ .

Ортогональная сумма является прямой. В самом деле, пусть  $L_1 \perp L_2$ ,  $x^1 \in L_1$ ,  $x^2 \in L_2$  и  $x^1 + x^2 = 0$ . В силу ортогональности  $x^1$ ,  $x^2$ , очевидно,  $|x^1 + x^2|^2 = |x^1|^2 + |x^2|^2$ , поэтому  $|x^1|^2 + |x^2|^2 = 0$ , следовательно,  $x^1 = x^2 = 0$ .

**9.** Понятия прямой и ортогональной сумм естественным образом переносятся на случай любого конечного числа подпространств. Так, сумма подпространств  $L_1, L_2, \dots, L_k$  называется ортогональной, если она есть множество всех элементов вида  $x = x^1 + x^2 + \dots + x^k$ ,  $x^j \in L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , и  $L_i \perp L_j$  для  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ . Теорема 7.1 легко обобщается на случай любого конечного числа подпространств.

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Покажите, что ортогональная сумма любого числа подпространств является прямой, т. е. составляющие  $x^j \in L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , определяются по любому  $x$  однозначно.

2) Верно ли утверждение: сумма подпространств  $L_1 + L_2 + \dots + L_k$ ,  $k > 2$ , является прямой, если их пересечение — нулевое подпространство?

## §2. Размерность суммы подпространств

**1. Теорема.** Пусть  $L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_k$  — прямая сумма конечномерных подпространств  $L_1, L_2, \dots, L_k$  линейного пространства  $\mathbf{X}$ . Тогда

$$\dim(L) = \dim(L_1) + \dim(L_2) + \dots + \dim(L_k). \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем его для случая  $k = 2$ . Для произвольного  $k$  рассуждения полностью аналогичны. Пусть

$$f^1, f^2, \dots, f^p; \quad g^1, g^2, \dots, g^q \quad (2.2)$$

есть базисы подпространств  $L_1$  и  $L_2$ , соответственно. Тогда объединение этих систем векторов есть базис подпространства  $L_1 \dot{+} L_2$ . Действительно, для любого  $x \in L_1 \dot{+} L_2$  справедливо представление  $x = x^1 + x^2$ , где

$$x^1 = \alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2 + \dots + \alpha_p f^p \in L_1, \quad x^2 = \beta_1 g^1 + \beta_2 g^2 + \dots + \beta_q g^q \in L_2,$$

причем, если  $x = 0$ , то  $x^1 = 0$ ,  $x^2 = 0$ , поскольку сумма  $L_1 \dot{+} L_2$  прямая. Вследствие того, что  $\{f^k\}_{k=1}^p, \{g^k\}_{k=1}^q$  — базисы, отсюда вытекает, что все числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  — нули. Таким образом, система векторов (2.2) линейно независима. Теперь совершенно ясно, что  $\dim(L_1 \dot{+} L_2) = p + q$ .  $\square$

**2. Теорема.** Пусть  $L_1, L_2$  — произвольные конечномерные подпространства линейного пространства  $\mathbf{X}$ . Тогда

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство  $G = L_1 \cap L_2$ , очевидно, конечномерно. Пусть  $\mathcal{G}_l = \{g^i\}_{i=1}^l$  — базис  $G$ , и пусть векторы  $\mathcal{F}_k = \{f^i\}_{i=1}^k$  дополняют его до базиса пространства  $L_1$ , а векторы  $\mathcal{H}_m = \{h^i\}_{i=1}^m$  — до базиса пространства  $L_2$ . Обозначим через  $F$  подпространство пространства  $\mathbf{X}$ , натянутое на векторы  $\mathcal{F}_k$ , а через  $H$  — натянутое на векторы  $\mathcal{H}_m$ . Покажем, что

$$L_1 + L_2 = F + G + H. \quad (2.4)$$

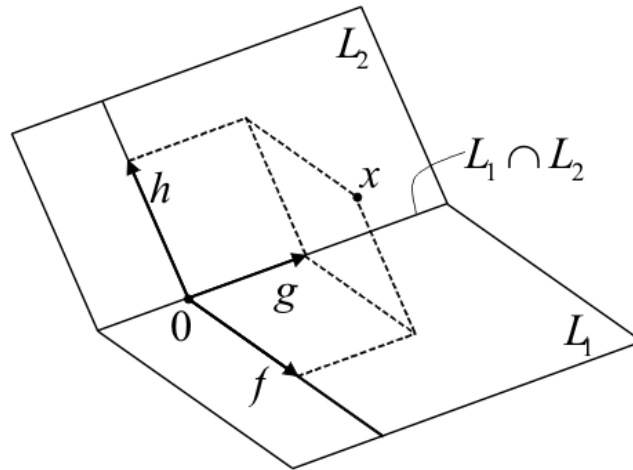


Рис. 1. К теореме 2

Действительно, если  $x \in L_1 + L_2$ , то  $x = x^1 + x^2$ , где  $x^1 \in L_1$ ,  $x^2 \in L_2$ . Ясно, что  $x^1 = f + g^-$ ,  $x^2 = h + g^+$ , где  $f \in F$ ,  $h \in H$ ,  $g^+, g^- \in G$ , следовательно,  $x = f + g + h$ , где  $g = g^+ + g^- \in G$ . Таким образом,  $x \in F + G + H$ . Еще проще доказывается, что если  $x \in F + G + H$ , то  $x \in L_1 + L_2$ . Сумма в правой части равенства (2.4) прямая. В самом деле, пусть  $f + g + h = 0$ , где  $f \in F$ ,  $g \in G$ ,  $h \in H$ . Покажем, что тогда  $f, g, h = 0$ . Имеем  $f + g = -h$ . Ясно, что  $-h \in L_2$ , а  $f + g \in L_1$ , следовательно,  $f + g \in G$ ,  $h \in G$ . Положим  $h + g = \tilde{g}$ . Получаем  $f + \tilde{g} = 0$ , причем  $\tilde{g} \in G$ . Поскольку система векторов  $\mathcal{F}_k \cup \mathcal{G}_l$  линейно независима, отсюда вытекает, что  $f = 0$ ,  $\tilde{g} = 0$ . Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что  $h = 0$ ,  $g = 0$ . По теореме 1 теперь имеем, что  $\dim(L_1 + L_2) = \dim(F \dot{+} G \dot{+} H) = k + l + m$ , но  $\dim L_1 = k + l$ ,  $\dim L_2 = l + m$ ,  $\dim(L_1 \cap L_2) = l$ . Остается заметить, что  $k + l + m = (k + l) + (l + m) - l$ .  $\square$

**3. Следствие.** Пусть  $L_1, L_2$  — подпространства  $n$ -мерного пространства  $\mathbf{X}_n$ , причем  $\dim L_1 + \dim L_2 > n$ . Тогда  $L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку  $L_1 + L_2$  — подпространство пространства  $\mathbf{X}_n$ , то  $\dim(L_1 + L_2) \leq n$ , но тогда (см. (2.3))

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 + L_2) \geq 1. \quad \square$$

### § 3. Ортогональная проекция вектора на подпространство

1. Пусть  $L$  — подпространство евклидова пространства  $\mathbf{X}$ ,  $x$  — вектор из  $\mathbf{X}$ . Вектор  $y \in L$  назовем *наилучшим приближением* к вектору  $x$ , если

$$|x - y| \leq |x - z| \quad \text{для любого } z \in L. \quad (3.1)$$

**2. Теорема.** Для любого  $x \in \mathbf{X}$  в любом конечномерном подпространстве  $L \subset \mathbf{X}$  существует единственное наилучшее приближение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $L = \{0\}$ , то единственным наилучшим приближением к  $x$  будет нулевой вектор. Поэтому далее полагаем, что  $L \neq \{0\}$ . Пусть  $y, z \in L$ . Представим  $z$  в виде  $z = y + h$ ,  $h \in L$ . Тогда

$$\begin{aligned} (x - z, x - z) &= (x - y - h, x - y - h) = \\ &= (x - y, x - y) - (x - y, h) - (h, x - y) + (h, h). \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом получаем, что если  $(x - y, h) = 0$  для любого  $h \in L$ , то (3.1) выполнено. Обратно, если выполнено (3.1), то

$$-(x - y, h) - (h, x - y) + (h, h) \geq 0 \quad \forall h \in L.$$

Заменив  $h$  на  $h_1 = ((x - y, h)/|h|^2)h$ , получим  $-|(x - y, h)|^2/|h|^2 \geq 0$ , следовательно,  $(x - y, h) = 0$ . Итак, для того, чтобы вектор  $y \in L$  был наилучшим приближением к вектору  $x \in \mathbf{X}$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$(x - y, h) = 0 \quad \text{для любого } h \in L. \quad (3.2)$$

Иными словами, вектор  $x - y$  должен быть ортогонален подпространству  $L$ . Геометрически этот вывод вполне очевиден (см. рис. 2). Вектор  $y$ , удовлетворяющий условию (3.2), если он существует, одно-

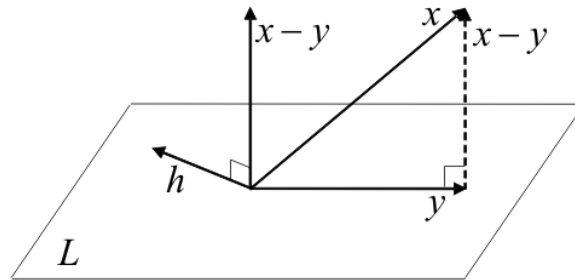


Рис. 2. К доказательству теоремы 2

значно определяется по вектору  $x$ . В самом деле, пусть существует еще один вектор  $\tilde{y} \in L$  такой, что  $(x - \tilde{y}, h) = 0$  для любого  $h \in L$ . Тогда  $(y - \tilde{y}, h) = 0$  для любого  $h \in L$ . Полагая  $h = y - \tilde{y}$ , получим, что  $y = \tilde{y}$ . Докажем теперь, что существует вектор  $y \in L$ , удовлетворяющий условию (3.2). Пусть  $\{e^k\}_{k=1}^m$  — базис подпространства  $L$ . Условие (3.2) эквивалентно тому, что

$$(x - y, e^k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

Будем искать  $y$  в виде разложения по базису:  $y = \sum_{i=1}^m \eta_i e^i$ . Тогда из (3.3) получаем, что

$$\left( \sum_{i=1}^m \eta_i e^i, e^k \right) = (x, e^k), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Более подробная запись этих условий дает систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^m \eta_i (e^i, e^k) = (x, e^k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4)$$

для отыскания  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ . Матрица этой системы — матрица Грама, соответствующая базису  $\{e^k\}_{k=1}^m$ . Эта матрица невырождена (см. теорему 1.1, с. 133), следовательно, система (3.4) однозначно разрешима при любом  $x \in \mathbf{X}$ , т. е. условие (3.2) однозначно определяет вектор  $y$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Вектор  $y$  вычисляется наиболее просто, когда базис  $\{e^k\}_{k=1}^m$  подпространства  $L$  ортонормирован, а именно, в этом случае  $y = \sum_{k=1}^m (x, e^k) e^k$ .

**3.** Вектор  $y$ , удовлетворяющий условию (3.2), естественно назвать *ортгональной проекцией* вектора  $x$  на подпространство  $L$ , вектор  $z = x - y$  — *перпендикуляром*, опущенным из точки  $x$  на подпространство  $L$  (см. рис. 2).

Заметим, что  $(x - y, y) = 0$ , поскольку  $y \in L$ , следовательно, справедливо тождество Пифагора (см. п. 1, с. 131)

$$|x|^2 = |x - y|^2 + |y|^2. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что  $|y|^2 \leq |x|^2$ . Это — так называемое *неравенство Бесселя*<sup>1)</sup>, показывающее, что длина проекции вектора не превосходит длины вектора (см. рис. 2).

**4.** Если система векторов  $\{e^k\}_{k=1}^m$  ортонормирована, то неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{k=1}^m |(x, e^k)|^2 \leq |x|^2 \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad (3.6)$$

<sup>1)</sup>Фридрих Вильгельм Бессель (Friedrich Wilhelm Bessel; 1784–1846) — немецкий математик и астроном.

Равенство в (3.6) достигается тогда и только тогда, когда  $x \in L$ , т. е. когда  $x = \sum_{k=1}^m (x, e^k) e^k$ .

Отметим, что неравенство Коши — Буняковского (3.2), с. 131, можно трактовать как частный случай неравенства Бесселя (3.6), когда ортонормированная система векторов состоит только из одного вектора  $e^1 = |y|^{-1}y$ ,  $y \neq 0$ .

ПРИМЕР. Пусть  $L$  — подпространство арифметического пространства  $\mathbb{R}^4$ , натянутое на векторы  $a^1 = (-3, 0, 7, 6)$ ,  $a^2 = (1, 4, 3, 2)$ ,  $a^3 = (2, 2, -2, -2)$ . Найдем ортогональную проекцию вектора  $x = (14, -3, -6, -7)$  на подпространство  $L$  и перпендикуляр, опущенный из точки  $x$  на подпространство  $L$ .

Векторы  $a^1, a^2$  линейно независимы (не пропорциональны), вектор  $a^3$  — линейная комбинация векторов  $a^1, a^2$ , а именно,  $a^3 = (-1/2)a^1 + (1/2)a^2$ . Поэтому векторы  $a^1, a^2$  можно принять за базис подпространства  $L$ . Компоненты  $\eta_1, \eta_2$  вектора  $y$  — проекции вектора  $x$  на  $L$  в базисе  $a^1, a^2$  — могут быть найдены как решение системы уравнений

$$\eta_1(a^1, a^1) + \eta_2(a^2, a^1) = (x, a^1), \quad (3.7)$$

$$\eta_1(a^1, a^2) + \eta_2(a^2, a^2) = (x, a^2). \quad (3.8)$$

Вычисляя скалярные произведения, получим  $(a^1, a^1) = 9 + 49 + 36 = 94$ ,  $(a^2, a^1) = 30$ ,  $(a^2, a^2) = 30$ ,  $(x, a^1) = -126$ ,  $(x, a^2) = -30$ . Решая систему (3.7), (3.8), найдем, что  $\eta_1 = -3/2$ ,  $\eta_2 = 1/2$ , т. е.  $y = (-3/2)a^1 + (1/2)a^2 = (5, 2, -9, -8)$  — ортогональная проекция вектора  $x$  на подпространство  $L$ ,  $z = x - y = (9, -5, 3, 1)$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $x$  на подпространство  $L$ .

**5.** Неудачный выбор базиса может вызвать большие вычислительные трудности при фактическом построении элемента наилучшего приближения.

Приведем соответствующий пример. В линейном пространстве функций  $C[0, 1]$  введем скалярное произведение по формуле (2.1), с. 130, полагая, что  $p(x) \equiv 1$ . Рассмотрим в этом пространстве пятимерное подпространство, натянутое на базис, образованный функциями  $\varphi_0(x) \equiv 1$ ,  $\varphi_1(x) = x$ ,  $\varphi_2(x) = x^2$ ,  $\varphi_3(x) = x^3$ ,  $\varphi_4(x) = x^4$ , и найдем наилучшее приближение к функции  $\varphi(x) = x^5$ .

Матрица Грама в этом случае вычисляется элементарно:

$$\int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 1/(k + l + 1). \quad (3.9)$$

Столбец правой части системы (3.4), очевидно, состоит из чисел  $1/6$ ,  $1/7$ ,  $1/8$ ,  $1/9$ ,  $1/10$ .

Будем считать, что при вычислении последнего элемента столбца правой части допущена ошибка, и заменим число  $1/10$  на  $(1/10) + \varepsilon$ .

На рис. 3 показаны графики функции  $\varphi(x)$  и приближающего ее полинома  $P_4(x) = 1 + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \eta_3 x^3 + \eta_4 x^4$  при различных значениях  $\varepsilon$ . Видно, что малым погрешностям, допущенным при вычислении

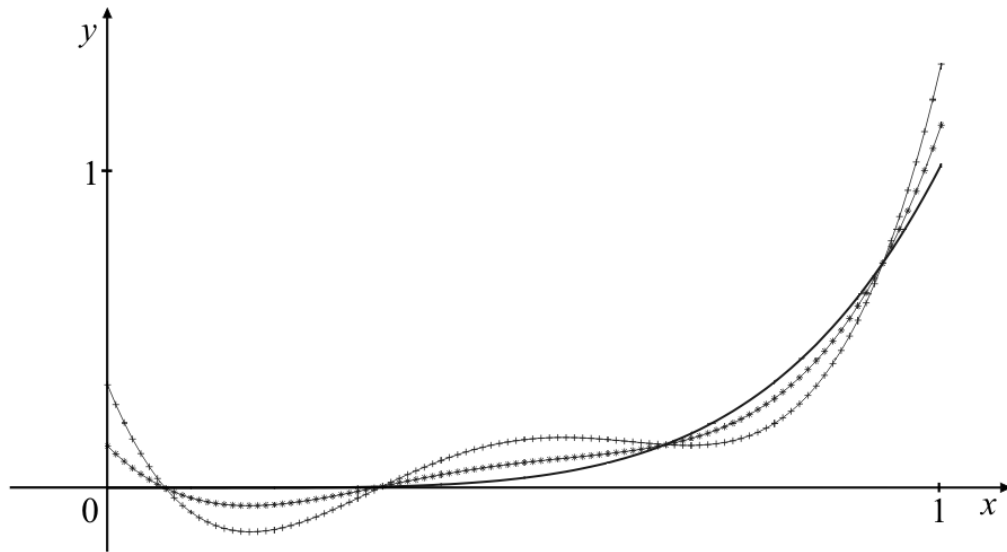


Рис. 3. К примеру почти линейно зависимого базиса: сплошная линия — функция  $\varphi$ , символом «+» помечен график приближающего полинома при  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ , символом «\*» — при  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$

правой части (неизбежным на практике), соответствуют значительные погрешности приближения функции  $\varphi$ .

Причина кроется в том, что выбранный нами базис степеней независимой переменной на самом деле состоит из функций, почти линейно зависимых. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на графики функций  $x^p$ ,  $p = 1, 2, \dots$  на отрезке  $[0, 1]$ . Даже при не очень больших  $p$  эти графики близки. Поэтому матрица системы (3.4) оказалась в данном случае близкой к вырожденной или, как говорят, плохо обусловленной.

Матрица с элементами (3.9), т. е. матрица вида

$$H_n = \left\{ \frac{1}{i+j-1} \right\}_{i,j=1}^n$$

называется *матрицей Гильберта*<sup>1)</sup>. Она часто встречается в различных разделах математики. Уже при  $n > 10$  эта матрица оказывается настолько плохо обусловленной, что решить на компьютере систему линейных уравнений с такой матрицей практически невозможно.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Обычно, приближая функции полиномами, используют ортогональные базисы, например, полиномы Лежандра или Чебышева (см. с. 137, с. 141). В этом случае система (3.4) становится диагональной.

<sup>1)</sup> Давид Гильберт (David Hilbert; 1862 — 1943) — немецкий математик.



### § 4. Ортогональное разложение евклидова пространства

1. Пусть  $L$  — подпространство евклидова пространства  $\mathbf{X}$ . Множество всех векторов из  $\mathbf{X}$ , ортогональных  $L$ , называется *ортогональным дополнением* подпространства  $L$  и обозначается через  $L^\perp$ . Понятно, что  $(L^\perp)^\perp = L$ .

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что  $L^\perp$  — подпространство пространства  $\mathbf{X}$ .

2. **Теорема (об ортогональном разложении).** Пусть  $L$  — конечномерное подпространство евклидова пространства  $\mathbf{X}$ ,  $L^\perp$  — ортогональное дополнение подпространства  $L$ . Тогда

$$\mathbf{X} = L \oplus L^\perp. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2, с. 149, для любого  $x \in \mathbf{X}$  существует  $y \in L$  такой, что  $(x - y, h) = 0$  для любого  $h \in L$ , следовательно,  $z = x - y \in L^\perp$  и  $x = y + z$ , что означает (см. п. 8, с. 146) справедливость (4.1).  $\square$

Пусть  $e \in \mathbf{X}$ ,  $e \neq 0$ . Обозначим через  $\pi_e$  множество всех векторов пространства  $\mathbf{X}$ , ортогональных  $e$ . Нетрудно убедиться, что  $\pi_e$  — подпространство пространства  $\mathbf{X}$ . Это подпространство называют *гиперплоскостью*, ортогональной вектору  $e$ .

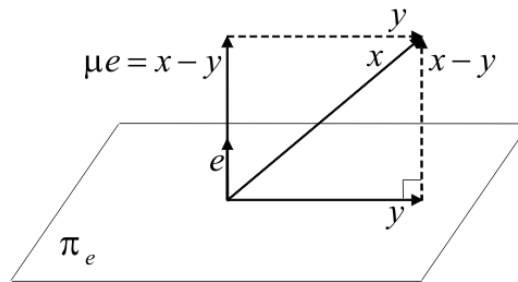


Рис. 4. К теореме 3

3. **Теорема.** Пусть  $x$  — произвольный,  $e$  — ненулевой векторы евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$ . Существуют вектор  $y \in \pi_e$  и число  $\mu$  такие, что

$$x = \mu e + y, \quad (4.2)$$

причем  $\mu$  и  $y$  однозначно определяются по вектору  $x$ . Кроме того,

$$|x - y| \leq |x - z| \quad \text{для любого } z \in \pi_e, \quad (4.3)$$

т. е.  $y$  — элемент наилучшего приближения к вектору  $x$  из подпространства  $\pi_e$  (см. рис. 4).

УПРАЖНЕНИЕ. Следуя доказательству теоремы 2, докажите теорему 3.

---

---

ГЛАВА 9  
**Линейные операторы и матрицы**

**§ 1. Линейные операторы. Действия над операторами**

1. Пусть  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  — линейные пространства. Будем говорить, что задано *отображение*  $\varphi$  пространства  $\mathbf{X}$  в пространство  $\mathbf{Y}$  (пишут  $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ ), если каждому вектору  $x$  из  $\mathbf{X}$  поставлен однозначно в соответствие вектор  $\varphi(x)$  из  $\mathbf{Y}$ . Говорят также в этом случае, что на пространстве  $\mathbf{X}$  задана *функция*  $\varphi$  со значениями в пространстве  $\mathbf{Y}$ . Подчеркнем, что при этом, вообще говоря, не каждый вектор из  $\mathbf{Y}$  должен быть результатом отображения некоторого вектора  $x$  из  $\mathbf{X}$ .

Отображение  $\varphi$  называется *линейным*, если для любых  $x, y \in \mathbf{X}$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y). \quad (1.1)$$

В линейной алгебре, почти исключительно, рассматриваются линейные отображения. Обычно их называют *линейными операторами* (или просто операторами) и обозначают большими латинскими буквами. Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводит к недоразумениям, не пишут. Так, равенство (1.1) применительно к оператору  $\mathcal{A}$  запишется в виде

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y.$$

Из определения линейного отображения сразу вытекает, что

$$\mathcal{A}0 = 0$$

для любого оператора  $\mathcal{A}$ .

Если оператор действует из пространства  $\mathbf{X}$  в пространство  $\mathbf{X}$ , то говорят, что он действует в пространстве  $\mathbf{X}$  или является *преобразованием* пространства  $\mathbf{X}$ .

2. Полезно отметить, что если в пространстве  $\mathbf{X}_n$  фиксирован некоторый базис  $\{e^j\}_{j=1}^n$ , то определяя на  $\mathbf{X}_n$  линейный оператор  $\mathcal{A}$ , достаточно описать его действие на векторы базиса, так как для любого вектора  $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e^j$  имеем  $\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n \xi_j \mathcal{A}e^j$ .

**3.** Действия над операторами. Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  — линейные операторы;  $\alpha, \beta$  — числа. Оператор  $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ , называемый *линейной комбинацией* операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , определяется соотношением

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x = \alpha(\mathcal{A}x) + \beta(\mathcal{B}x) \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad (1.2)$$

Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ ,  $\mathcal{B} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — линейные операторы. Оператор  $\mathcal{B}\mathcal{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$ , определяемый соотношением

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \quad \forall x \in \mathbf{X}, \quad (1.3)$$

называется *произведением операторов*  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ .

УПРАЖНЕНИЕ. Показать, что отображения  $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  — линейные операторы.

Аналогично (1.3) можно определить произведение любого числа операторов.

УПРАЖНЕНИЕ. Показать, что если произведение операторов  $\mathcal{C}, \mathcal{B}, \mathcal{A}$  определено, то

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}.$$

#### 4. Примеры операторов.

**4.1.** Нулевой оператор. Этот оператор переводит все векторы пространства  $\mathbf{X}$  в нулевой вектор пространства  $\mathbf{Y}$ . *Нулевой* оператор обозначают символом  $0$ , так что  $0x = 0$  для всех  $x \in \mathbf{X}$ .

**4.2.** Единичный (тождественный) оператор. Оператор, действующий в пространстве  $\mathbf{X}$ , называется *единичным*, если он оставляет без изменения все векторы пространства  $\mathbf{X}$ . Единичный оператор будем обозначать через  $I$ .

**4.3.** Оператор проектирования. Пусть линейное пространство  $\mathbf{X}$  есть прямая сумма подпространств  $L$  и  $M$ . Каждый вектор  $x \in \mathbf{X}$  представим в виде  $x = x^1 + x^2$ ,  $x^1 \in L$ ,  $x^2 \in M$ , причем векторы  $x^1, x^2$  однозначно определяются по вектору  $x$ . Определим оператор  $\mathcal{P}$ , действующий из  $\mathbf{X}$  в  $L$ , полагая  $\mathcal{P}x = x^1$ . Говорят, что оператор  $\mathcal{P}$  есть оператор *проектирования* пространства  $\mathbf{X}$  на подпространство  $L$  (параллельно подпространству  $M$ ). Если  $\mathbf{X}$  — евклидово пространство и оно представлено как ортогональная сумма подпространств  $L$  и  $M$ , то оператор  $\mathcal{P}$  называют оператором *ортогонального проектирования*.

Докажем, что оператор  $\mathcal{P}$  линеен. Пусть  $x, y \in \mathbf{X}$  и  $x = \mathcal{P}x + x^2$ ,  $y = \mathcal{P}y + y^2$  (здесь  $x^2, y^2 \in M$ ). Тогда для любых чисел  $\alpha, \beta$ , очевидно, справедливо равенство

$$\alpha x + \beta y = \alpha \mathcal{P}x + \beta \mathcal{P}y + \alpha x^2 + \beta y^2.$$

Вследствие того, что  $L, M$  — подпространства, получаем, что  $\alpha \mathcal{P}x + \beta \mathcal{P}y \in L$ ,  $\alpha x^2 + \beta y^2 \in M$ , поэтому  $\mathcal{P}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}x + \beta \mathcal{P}y$ .

Точно так же можно ввести оператор  $\mathcal{Q}$ , проектирующий пространство  $\mathbf{X}$  на подпространство  $M$ . Нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств:  $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$ ,  $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$ ,  $\mathcal{Q}\mathcal{P} = 0$ ,  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$ . Вообще, если пространство  $\mathbf{X}$  — прямая сумма нескольких подпространств

$$\mathbf{X} = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \cdots \dot{+} L_k,$$

а  $\mathcal{P}_i$  — оператор проектирования на  $L_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , то

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \cdots + \mathcal{P}_k = I, \quad \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (1.4)$$

$i, j = 1, 2, \dots, k$ .

**4.4.** Умножение матрицы на вектор. Пусть  $A(m, n)$  — прямоугольная матрица. Поставим в соответствие каждому вектору  $x \in \mathbb{C}^n$  вектор  $y \in \mathbb{C}^m$  при помощи равенства (см. п. 5, с. 90)

$$y = Ax. \quad (1.5)$$

Операция умножения матрицы на вектор — линейная операция, поэтому соотношение (1.5) определяет линейный оператор, действующий из  $\mathbb{C}^n$  в  $\mathbb{C}^m$ .

## § 2. Обратный оператор

Будем говорить, что линейный оператор  $\mathcal{A}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  имеет *обратный*, если существует такой оператор  $\mathcal{B}: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ , что

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = x \quad \forall x \in \mathbf{X}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B}y = y \quad \forall y \in \mathbf{Y}. \quad (2.2)$$

Обратный оператор, если он существует, также является линейным оператором. В самом деле, пусть  $y^1, y^2 \in \mathbf{Y}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Положим  $x^1 = \mathcal{B}y^1$ ,  $x^2 = \mathcal{B}y^2$ . Тогда  $\mathcal{A}x^1 = \mathcal{A}\mathcal{B}y^1 = y^1$ ,  $\mathcal{A}x^2 = \mathcal{A}\mathcal{B}y^2 = y^2$ . Отсюда

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\alpha y^1 + \beta y^2) &= \mathcal{B}(\alpha \mathcal{A}x^1 + \beta \mathcal{A}x^2) = \\ &= \mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha x^1 + \beta x^2 = \alpha \mathcal{B}y^1 + \beta \mathcal{B}y^2.\end{aligned}$$

Если оператор  $\mathcal{A}$  имеет обратный, то он осуществляет взаимно-однозначное отображение пространства  $\mathbf{X}$  на пространство  $\mathbf{Y}$ . Действительно, пусть  $x^1, x^2 \in \mathbf{X}$ ,  $x^1 \neq x^2$ . Тогда и  $\mathcal{A}x^1 \neq \mathcal{A}x^2$ . В самом деле, если предположить, что  $\mathcal{A}x^1 = \mathcal{A}x^2$ , то  $\mathcal{B}\mathcal{A}x^1 = \mathcal{B}\mathcal{A}x^2$  и, значит,  $x^1 = x^2$ . Далее, если  $y \in \mathbf{Y}$ , то, полагая  $x = \mathcal{B}y$ , получим, что  $\mathcal{A}x = \mathcal{A}\mathcal{B}y = y$ , т. е. всякий вектор из  $\mathbf{Y}$  является результатом действия оператора  $\mathcal{A}$  на некоторый вектор из  $\mathbf{X}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ.** Покажите, что линейный оператор не может иметь двух различных обратных операторов.

Обратный к оператору  $\mathcal{A}$  будем обозначать через  $\mathcal{A}^{-1}$ . Непосредственно из определения вытекает, что если оператор  $\mathcal{A}^{-1}$  существует, то  $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$ . Оператор, имеющий обратный, будем называть *обратимым*.

Примеры.

- 1) Единичный оператор имеет обратный, причем  $I^{-1} = I$ .
- 2) Нулевой оператор, очевидно, не имеет обратного.
- 3) Оператор проектирования  $\mathcal{P}$  на подпространство  $L$  при условии, что подпространство  $L$  не совпадает со всем пространством  $\mathbf{X}$ , не имеет обратного (докажите!).
- 4) Всякая квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  определяет линейный оператор, действующий в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Если матрица  $A$  невырождена, то этот оператор имеет обратный и он порождается матрицей  $A^{-1}$  (см. § 7, с. 95).

**УПРАЖНЕНИЕ.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ ,  $\mathcal{B} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$  — обратимые операторы. Показать, что тогда и оператор  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  обратим, причем  $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$ .

### § 3. Оператор разложения по базису

Пусть  $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$  — базис пространства  $\mathbf{X}_n$ . Определим оператор, действующий из  $\mathbb{C}^n$  в  $\mathbf{X}_n$ , при помощи соотношения

$$x = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n. \quad (3.1)$$

Очевидно, что так определенный оператор линеен. Будем обозначать этот оператор через  $\mathcal{E}$ .

Поскольку  $\{e^k\}_{k=1}^n$  — базис, то каждому  $x \in \mathbf{X}_n$  однозначно соответствует элемент  $\xi \in \mathbb{C}^n$  такой, что  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$ . Указанное соответствие порождает *оператор разложения по базису*, действующий из  $\mathbf{X}_n$  в  $\mathbb{C}^n$ . Будем обозначать этот оператор через  $\mathcal{E}^{-1}$ .

Непосредственно из определения операторов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}^{-1}$  вытекает, что

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}\xi = \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \quad \mathcal{E}\mathcal{E}^{-1}x = x \quad \forall x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е. операторы  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}^{-1}$  взаимно обратны.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Вычисление коэффициентов разложения вектора по базису часто приводит к необходимости решения крамеровских систем линейных алгебраических уравнений (см. примеры на с. 122, 138, 126). Наиболее просто коэффициенты разложения вектора вычисляются для ортонормированных базисов в евклидовых пространствах (см. (7.2), с. 138, а также примеры на с. 140, 141).

## § 4. Изоморфизм конечномерных пространств

**1.** Линейные пространства  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  называются *изоморфными*, если существует обратимый линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ . Иными словами, линейные пространства изоморфны, если между ними можно установить линейное взаимно однозначное соответствие.

Понятно, что отношение изоморфизма обладает свойством транзитивности, и, значит, если пространства  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  изоморфны пространству  $\mathbf{Z}$ , то они изоморфны друг другу.

**2. Теорема.** *Все конечномерные линейные комплексные пространства одной и той же размерности изоморфны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Отношение изоморфизма транзитивно. Поэтому достаточно установить, что любое комплексное линейное пространство  $\mathbf{X}_n$  изоморфно пространству  $\mathbb{C}^n$ . Как следует из § 3, линейное взаимно однозначное соответствие пространств  $\mathbf{X}_n$  и  $\mathbb{C}^n$  осуществляет оператор разложения по любому фиксированному базису  $\mathcal{E}_n$  пространства  $\mathbf{X}_n$ .  $\square$

Точно так же доказывается, что все вещественные линейные пространства  $\mathbf{X}_n$  изоморфны пространству  $\mathbb{R}^n$ .

**3. Теорема.** *Если конечномерные пространства  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  изоморфны, то их размерности совпадают.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{e^k\}_{k=1}^n$  — базис пространства  $\mathbf{X}$ , а линейный оператор  $\mathcal{A}$  осуществляет взаимно однозначное отображение

пространства  $\mathbf{X}$  на пространство  $\mathbf{Y}$ . Из равенства  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathcal{A}e^k = 0$  вытекает, что  $\mathcal{A} \sum_{k=1}^n \alpha_k e^k = 0$ . Действуя на обе части последнего равенства оператором  $\mathcal{A}^{-1}$ , будем иметь  $\sum_{k=1}^n \alpha_k e^k = 0$ , откуда получаем, что  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$ , т. е. векторы  $\{\mathcal{A}e^k\}_{k=1}^n$  линейно независимы, и размерность пространства  $\mathbf{Y}$  не меньше чем  $n$ . Меняя в этом рассуждении местами пространства  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , приходим к тому, что их размерности совпадают.  $\square$

Таким образом, справедлива

**4. Теорема.** *Для того, чтобы конечномерные комплексные (или вещественные) пространства были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали.*

**5.** Если установлен изоморфизм пространств  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , то с точки зрения выполнения линейных операций над их элементами они оказываются эквивалентными. Так, линейные операции над элементами любого конечномерного пространства путем введения какого-либо базиса всегда можно свести к линейным операциям на пространстве числовых строк ( $\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{C}^n$ ). Такой подход, фактически, нами уже применялся в §1 гл. 4, где было установлено взаимно однозначное соответствие между векторами (направленными отрезками) и их координатами и показано, что линейные операции над векторами эквивалентны операциям над их координатами.

## § 5. Образ оператора. Ядро оператора

**1.** Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор, действующий из линейного пространства  $\mathbf{X}$  в линейное пространство  $\mathbf{Y}$ .

Множество всех векторов  $y$  из пространства  $\mathbf{Y}$  таких, что  $y = \mathcal{A}x$  для некоторого  $x \in \mathbf{X}$ , называется *областью значений или образом* оператора и обозначается через  $\text{Im}(\mathcal{A})$ .

Множество всех векторов  $x \in \mathbf{X}$  таких, что  $\mathcal{A}x = 0$ , называется *ядром* оператора  $\mathcal{A}$  и обозначается через  $\text{Ker}(\mathcal{A})$ .

**2. Теорема.** *Множество  $\text{Im}(\mathcal{A})$  — линейное подпространство пространства  $\mathbf{Y}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $y^1, y^2 \in \text{Im}(\mathcal{A})$ . Тогда существуют  $x^1, x^2 \in \mathbf{X}$  такие, что  $y^1 = \mathcal{A}x^1, y^2 = \mathcal{A}x^2$ . Для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  от-



сюда получаем, что  $\alpha y^1 + \beta y^2 = \alpha \mathcal{A}x^1 + \beta \mathcal{A}x^2$ . Оператор  $\mathcal{A}$  линеен, следовательно,  $\alpha y^1 + \beta y^2 = \mathcal{A}(\alpha x^1 + \beta x^2)$ , потому  $\alpha y^1 + \beta y^2 \in \text{Im}(\mathcal{A})$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что  $\text{Ker}(\mathcal{A})$  — линейное подпространство пространства  $\mathbf{X}$ .

**3.** Размерность подпространства  $\text{Im}(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Y}_m$  называется *рангом* оператора  $\mathcal{A}$  и обозначается через  $\text{rank}(\mathcal{A})$ .

Размерность ядра оператора  $\mathcal{A}$  называется *дефектом* оператора  $\mathcal{A}$  и обозначается через  $\text{def}(\mathcal{A})$ .

**4. Теорема.** Для любого линейного оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$

$$\text{rank}(\mathcal{A}) + \text{def}(\mathcal{A}) = n. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через  $M$  подпространство пространства  $\mathbf{X}_n$  такое, что  $\mathbf{X}_n = \text{Ker}(\mathcal{A}) \dot{+} M$  (см. упражнение 7.3, с. 146). По теореме 1, с. 147, имеем  $n = \text{def}(\mathcal{A}) + \dim(M)$ . Теперь с учетом теоремы 4, с. 160, достаточно установить, что пространства  $M$  и  $\text{Im}(\mathcal{A})$  изоморфны. Для произвольного  $x \in \mathbf{X}_n$  имеем  $x = x^0 + x^1$ , где  $x^0 \in \text{Ker}(\mathcal{A})$ ,  $x^1 \in M$ , следовательно,  $\mathcal{A}x = \mathcal{A}x^1$ . Таким образом, всякий элемент из  $\text{Im}(\mathcal{A})$  — образ некоторого элемента из  $M$ . Осталось доказать, что если  $\mathcal{A}x' = \mathcal{A}x''$  для  $x', x'' \in M$ , то  $x' = x''$ , т. е. оператор  $\mathcal{A}$  осуществляет взаимно однозначное отображение  $M$  на  $\text{Im}(\mathcal{A})$ . Равенство  $\mathcal{A}(x' - x'') = 0$  означает, что  $x' - x'' \in \text{Ker}(\mathcal{A})$ . С другой стороны,  $M$  — подпространство, поэтому  $x' - x'' \in M$ . По теореме 7.2, с. 146, отсюда получаем, что  $x' - x'' = 0$ .  $\square$

## § 6. Матрица оператора

**1.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  — линейный оператор. Фиксируем в пространстве  $\mathbf{X}_n$  базис  $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ , а в пространстве  $\mathbf{Y}_m$  — базис  $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$ .

Представим каждый вектор  $\mathcal{A}e^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , в виде разложения по базису  $\mathcal{Q}_m$ :

$$\mathcal{A}e^i = \sum_{j=1}^m a_{ji}^{(eq)} q^j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.1)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \dots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \dots & a_{2n}^{(eq)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \dots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

(коэффициенты разложения вектора  $\mathcal{A}e^i$  по базису  $\mathcal{Q}_m$  образуют  $i$ -й столбец матрицы  $A_{eq}$ ). Матрицу  $A_{eq}$  называют *матрицей оператора  $\mathcal{A}$* . Она однозначно определяется оператором  $\mathcal{A}$  и базисами  $\mathcal{E}_n, \mathcal{Q}_m$ .

Оператор и соответствующую ему матрицу будем обозначать одной и той же буквой, но набранной в разных шрифтах. Нижние индексы в обозначении матрицы оператора указывают на базисы, использованные для ее построения.

Соотношения (6.1) можно записать более кратко:

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq}. \quad (6.3)$$

**2.** Пусть  $x = \mathcal{E}_n \xi \in \mathbf{X}_n$ ,  $\xi \in \mathbb{C}^n$ . Представим  $\mathcal{A}x$  в виде разложения по базису:  $\mathcal{A}x = \mathcal{Q}_m \eta$ ,  $\eta \in \mathbb{C}^m$ . Тогда, используя (6.3), получим

$$\mathcal{Q}_m \eta = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\mathcal{E}_n \xi = \mathcal{Q}_m A_{eq} \xi,$$

следовательно,

$$\eta = A_{eq} \xi. \quad (6.4)$$

Формула (6.4) показывает, как связаны коэффициенты разложения векторов  $x$  и  $\mathcal{A}x$  по базисам пространств  $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$  соответственно.

Из (6.4) вытекает, что если матрица  $A_{eq}$  оператора  $\mathcal{A}$  известна, то по заданному вектору  $x \in \mathbf{X}_n$  вектор  $\mathcal{A}x \in \mathbf{Y}_m$  можно построить следующим образом.

1) Найти вектор  $\xi \in \mathbb{C}^n$  коэффициентов разложения  $x$  по базису  $\mathcal{E}_n$ . Это можно представить в операторном виде:  $\xi = \mathcal{E}^{-1}x$ .

2) Умножив матрицу  $A_{eq}$  на вектор  $\xi$ , получить вектор  $\eta \in \mathbb{C}^m$  коэффициентов разложения элемента  $y = \mathcal{A}x \in \mathbf{Y}_m$  по базису  $\mathcal{Q}_m$ .

3) Вычислить элемент  $y$  по найденному вектору  $\eta$ , что опять можно записать в операторной форме:  $y = \mathcal{Q}\eta$ .

**3.** Сказанное выше означает, что, используя операторы  $\mathcal{E}, \mathcal{Q}$ , порожденные базисами  $\mathcal{E}_n, \mathcal{Q}_m$ , соотношение (6.3) можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}, \quad \text{или} \quad \mathcal{A} = \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1}. \quad (6.5)$$

Поясним, что

$$A_{eq} \xi = \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E} \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \quad \mathcal{A}x = \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1} x \quad \forall x \in \mathbf{X}_n. \quad (6.6)$$

Равенства (6.5), (6.6) иллюстрируют следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbf{Y}_m \\ \mathcal{E} \uparrow & & \downarrow \mathcal{Q}^{-1} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A_{eq}} & \mathbb{C}^m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbf{Y}_m \\ \mathcal{E}^{-1} \downarrow & & \uparrow \mathcal{Q} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A_{eq}} & \mathbb{C}^m \end{array}$$

Таким образом, если в пространствах  $\mathbf{X}_n$ ,  $\mathbf{Y}_m$  фиксированы некоторые базисы  $\mathcal{E}_n$ ,  $\mathcal{Q}_m$ , то всякому линейному оператору  $\mathcal{A}$ , действующему из  $\mathbf{X}_n$  в  $\mathbf{Y}_m$ , однозначно соответствует линейный оператор, действующий из  $\mathbb{C}^n$  в  $\mathbb{C}^m$  (оператор умножения на матрицу  $A_{eq}$  оператора  $\mathcal{A}$  в этих базисах), и, наоборот, всякой матрице  $A$  размера  $m \times n$  однозначно соответствует оператор  $\mathcal{A}$ , действующий из  $\mathbf{X}_n$  в  $\mathbf{Y}_m$  и определяемый по формуле  $\mathcal{A} = \mathcal{Q}A\mathcal{E}^{-1}$ .

4. Если  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ , то

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n A_e, \quad (6.7)$$

или

$$A_e = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}, \quad (6.8)$$

где  $A_e$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\mathcal{E}_n$ .

5. Отметим два очевидных случая, когда матрица оператора не зависит от выбора базиса: 1) нулевой оператор, его матрица при любом выборе базисов в пространствах  $\mathbf{X}_n$ ,  $\mathbf{Y}_m$  нулевая; 2) тождественный оператор, его матрица — единичная матрица в любом базисе пространства  $\mathbf{X}_n$ .

В дальнейшем (см. теорему 11, с. 166) будет доказано, фактически, обратное утверждение: если матрица оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  не зависит от выбора базиса, то существует такое число  $\alpha$ , что  $\mathcal{A} = \alpha I$ , т. е. оператор  $\mathcal{A}$  — это оператор умножения на число (*скалярный оператор*).

6. Из определения матрицы оператора сразу же вытекает, что для любых операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  и для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha A + \beta B)_{eq} = \alpha A_{eq} + \beta B_{eq}, \quad (6.9)$$

т. е. линейным операциям над операторами соответствуют линейные операции над их матрицами.

7. Аналогичное при определенных условиях справедливо и для произведения операторов. Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$ ,  $\mathcal{B} : \mathbf{Y}_m \rightarrow \mathbf{Z}_p$ ,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — линейные операторы. Будем считать, что в пространствах  $\mathbf{X}_n$ ,  $\mathbf{Y}_m$ ,  $\mathbf{Z}_p$  заданы базисы  $\{e^k\}_{k=1}^n$ ,  $\{q^k\}_{k=1}^m$ ,  $\{r^k\}_{k=1}^p$ , соответственно;  $A_{eq}$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$ ,  $B_{qr}$  — матрица оператора  $\mathcal{B}$ ,  $(BA)_{er}$  — матрица оператора  $\mathcal{B}\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Z}_p$ . Покажем, что

$$(BA)_{er} = B_{qr}A_{eq}, \quad (6.10)$$

т. е. матрица произведения операторов равна произведению матриц операторов. Действительно, применяя формулы (6.5), получим

$$(BA)_{er} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{E} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} B_{qr} \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{E} = B_{qr} A_{eq}.$$

Важно подчеркнуть, что здесь при определении матриц операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  использовался один и тот же базис  $\{q^k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$ . Указанное согласование базисов обычно предполагается выполненным.

ПРИМЕРЫ.

1) Определим оператор  $\mathcal{A} : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  при помощи соотношения

$$\mathcal{A}x = (x_2, x_1, x_3 + x_4, x_4)$$

для любого  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$ . Построим матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в естественном базисе (см. с. 122, 114) пространства  $\mathbb{C}^4$ . Имеем  $\mathcal{A}i^1 = (0, 1, 0, 0) = i^2$ ,  $\mathcal{A}i^2 = (1, 0, 0, 0) = i^1$ ,  $\mathcal{A}i^3 = (0, 0, 1, 0) = i^3$ ,  $\mathcal{A}i^4 = (0, 0, 1, 1) = i^3 + i^4$ , следовательно, матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) В трехмерном линейном пространстве  $\mathbf{Q}_2$  всех полиномов степени не выше двух с комплексными коэффициентами определим оператор  $\mathcal{T}$  при помощи соотношения  $\mathcal{T}q_2(z) = q_2(z+h)$  для любого элемента  $q_2 \in \mathbf{Q}_2$ . Здесь  $h$  — фиксированное комплексное число (сдвиг). Построим матрицу оператора  $\mathcal{T}$ , принимая за базис пространства  $\mathbf{Q}_2$  полиномы  $\varphi_0(z) \equiv 1$ ,  $\varphi_1(z) = z$ ,  $\varphi_2(z) = z^2$ . Имеем  $\mathcal{T}\varphi_0 = \varphi_0$ ,  $\mathcal{T}\varphi_1 = h\varphi_0 + \varphi_1$ ,  $\mathcal{T}\varphi_2 = h^2\varphi_0 + 2h\varphi_1 + \varphi_2$ , следовательно, матрица оператора  $\mathcal{T}$  равна

$$\begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если  $q_2(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ , то  $\mathcal{T}q_2(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2$ , где

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ha_1 + h^2a_2 \\ a_1 + 2ha_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

## 8. УПРАЖНЕНИЯ.

1) Определим в пространстве  $\mathbb{C}^n$  так называемый оператор  $\mathcal{T}$  циклического сдвига, полагая  $\mathcal{T}x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0)$  для каждого  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ . Построить матрицу этого оператора в базисе Фурье (см. с. 140).

2) Пусть  $\mathbf{T}_n$  — линейное пространство функций вида

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где  $n \geq 1$  — фиксированное целое число,  $a_0, a_k, b_k, k = 1, \dots, n$  — произвольные вещественные числа,  $x$  может принимать любые вещественные значения. Операции сложения функций и умножения функции на число определены обычным образом. Показать, что функции

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$$

образуют базис этого пространства. Построить матрицу оператора дифференцирования  $\mathcal{D}f_n(x) = f_n'(x)$  в этом базисе.

3) Пусть  $\mathbf{P}_n$  — линейное пространство полиномов степени не выше  $n$  с вещественными коэффициентами. Определим на этом пространстве линейный оператор  $\mathcal{A}$ , полагая  $\mathcal{A}p_n(x) = ap_n'(x) + bp_n$  для любого  $p_n \in \mathbf{P}_n$ . Здесь  $a, b$  — произвольным образом фиксированные вещественные числа. Построить матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ .

4) Построить матрицу оператора  $\mathcal{A}$ , описанного в предыдущем примере, полагая при этом  $b = 0$ , трактуя возникающий оператор как оператор из  $\mathbf{P}_n$  в  $\mathbf{P}_{n-1}$  и принимая за базис пространства  $\mathbf{P}_k$  базис Тейлора<sup>1)</sup>  $\{1, (x-c), \dots, (x-c)^k\}$ ,  $c$  — произвольное вещественное число.

5) Определим оператор  $\mathcal{K}$ , действующий из  $\mathbf{P}_n$  в  $\mathbf{P}_{n+1}$  по формуле

$$\mathcal{K}p_n(x) = \int_0^x p_n(t) dt.$$

Построить матрицу оператора  $\mathcal{K}$ , принимая  $\{1, x, \dots, x^k\}$  за базис в пространстве  $\mathbf{P}_k$ .

6) Определим так называемый разностный оператор  $\Delta_h$ , действующий из  $\mathbf{Q}_n$  в  $\mathbf{Q}_{n-1}$  по формуле

$$\Delta_h q_n(z) = q_n(z+h) - q_n(z),$$

$\mathbf{Q}_k$  — пространство полиномов степени не выше  $k$  с комплексными коэффициентами,  $h$  — произвольным образом фиксированное комплексное число. Построить матрицу оператора  $\Delta_h$ , принимая  $\{1, z, \dots, z^k\}$  за базис в пространстве  $\mathbf{Q}_k$ .

**9.** Матрица оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  определяется заданием базисов пространств  $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$ . Выясним, как она изменяется при изменении базисов. Пусть наряду с базисами  $\{e^k\}_{k=1}^n, \{q^k\}_{k=1}^m$  заданы базисы  $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n, \{\tilde{q}^k\}_{k=1}^m$  и  $A_{\tilde{e}\tilde{q}}$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этих базисах.

<sup>1)</sup>Брук Тэйлор (Brook Taylor; 1685 — 1731) — английский математик.

Будем считать известными матрицы  $T, R$  перехода к новым базисам, так что (см. §7, с. 124)

$$\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T, \quad \tilde{\mathcal{Q}}_m = \mathcal{Q}_m R. \quad (6.11)$$

Согласно (6.5), с. 162, имеем  $\mathcal{A} = \mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}$ ,  $A_{\tilde{e}\tilde{q}} = \tilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{A}\tilde{\mathcal{E}}$ , следовательно,  $A_{\tilde{e}\tilde{q}} = \tilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}\tilde{\mathcal{E}}$ . На основании (6.11) для любого  $\xi \in \mathbb{C}^n$  имеем  $\tilde{\mathcal{E}}_n \xi = \mathcal{E}_n T \xi$ , поэтому  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T$ , откуда получаем, что  $\mathcal{E}^{-1}\tilde{\mathcal{E}} = T$ . Аналогично,  $\tilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{Q} = R^{-1}$ . Таким образом,

$$A_{\tilde{e}\tilde{q}} = R^{-1}A_{eq}T. \quad (6.12)$$

**10.** В важном частном случае, когда оператор  $\mathcal{A}$  отображает пространство  $\mathbf{X}_n$  в себя, получаем

$$A_{\tilde{e}} = T^{-1}A_e T. \quad (6.13)$$

Квадратные матрицы  $B, C$ , связанные соотношением

$$B = D^{-1}CD, \quad (6.14)$$

где  $D$  — невырожденная матрица, называют *подобными*. Говорят еще, что матрица  $B$  получена из матрицы  $C$  при помощи *преобразования подобия*.

Соотношение (6.13) показывает, что матрицы одного и того же оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  в разных базисах подобны.

**11. Теорема.** *Если матрица оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  не зависит от выбора базиса в пространстве  $\mathbf{X}_n$ , то существует такое число  $\alpha$ , что  $\mathcal{A} = \alpha I$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $A$  матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе. Поскольку матрицы одного и того же оператора в различных базисах подобны, то  $A = BAB^{-1}$  и, следовательно,  $AB = BA$  для любой невырожденной матрицы  $B$ . Пусть  $E_{ik}$  — матрица, у которой элемент в позиции  $(i, k)$  равен единице, а все остальные элементы — нули. Матрица  $E_{ik} + I$  — треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали и потому обратима. Значит,  $A(E_{ik} + I) = (E_{ik} + I)A$ , следовательно,  $AE_{ik} = E_{ik}A$ . Будем считать, что  $i \neq k$ . В левой части последнего равенства, как нетрудно видеть, — матрица, у которой только  $k$ -й столбец отличен от нуля и он состоит из элементов  $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ . В матрице, записанной в правой части этого же равенства, только  $i$ -я строка отлична от нуля и она состоит из элементов  $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ . Поэтому указанное

равенство может быть выполнено лишь в случае, когда  $a_{ii} = a_{kk}$ , а все участвующие здесь элементы с различающимися индексами равны нулю. Вследствие произвольности номеров  $i, k$  это означает, что матрица  $A$  диагональна и все ее диагональные элементы совпадают между собой, т. е.  $A = \alpha I$ , но тогда, очевидно, и  $\mathcal{A} = \alpha I$ .  $\square$

## § 7. Матрица обратного оператора

1. Поскольку  $\det(D^{-1}) = 1/\det(D)$  для любой невырожденной матрицы  $D$ , то определители подобных матриц совпадают. В связи с этим можно назвать *определителем оператора*  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  определитель матрицы этого оператора. Такая характеристика оператора не зависит от выбора базиса в пространстве  $\mathbf{X}_n$ , т. е. является *инвариантом* оператора. Определитель оператора  $\mathcal{A}$  будем обозначать через  $\det(\mathcal{A})$ .

2. Будем называть оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  *невырожденным*, если  $\det(\mathcal{A}) \neq 0$ . Для любого невырожденного оператора  $\mathcal{A}$  существует обратный. Действительно, фиксируем некоторый базис  $\{e^k\}_{k=1}^n$  и определим оператор  $\mathcal{B}$  соотношением

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1}.$$

Поскольку  $\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1}$ , то  $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E} I \mathcal{E}^{-1} = I$ , значит, оператор  $\mathcal{B}$  — обратный оператор к оператору  $\mathcal{A}$ .

3. Как, фактически, следует из предыдущих рассуждений, в любом базисе пространства  $\mathbf{X}_n$  матрица обратного оператора обратна к матрице исходного оператора.

4. **Теорема.** *Если оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  имеет обратный, то он невырожден.*

5. **Теорема.** *Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы уравнение  $\mathcal{A}x = 0$  имело только тривиальное решение  $x = 0$ .*

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите теоремы 4, 5.

## § 8. Линейное пространство операторов

Рассмотрим множество всех линейных операторов, действующих из  $\mathbf{X}_n$  в  $\mathbf{Y}_m$ . Как показано в п. 3, с. 156, на этом множестве можно ввести операции сложения линейных операторов и умножения оператора на число. Нетрудно убедиться, что эти операции удовлетворяют

аксиомам линейного пространства. Таким образом, множество всех линейных операторов, действующих из  $\mathbf{X}_n$  в  $\mathbf{Y}_m$ , само можно рассматривать как *линейное пространство*. Из результатов п. 1, с. 161, вытекает, что это пространство изоморфно пространству всех прямоугольных матриц размера  $m \times n$ . Соответствующее линейное отображение задается соотношением (6.3), с. 162. Размерность пространства всех линейных операторов, действующих из  $\mathbf{X}_n$  в  $\mathbf{Y}_m$ , равна  $mn$ .

Если пространства  $\mathbf{X}_n$  и  $\mathbf{Y}_m$  вещественны и допускается умножение операторов только на вещественные числа, мы приходим к *вещественному* линейному пространству операторов.

### § 9. Ранг матрицы

**1.** Пусть  $A(m, n)$  — произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства  $\mathbb{C}^m$ . Ранг этой системы векторов (см. § 5, с. 121) назовем *рангом матрицы*  $A(m, n)$ . Ранг матрицы  $A$  будем обозначать через  $\text{rank}(A)$ .

**2. Теорема.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$ ,  $A_{eq}$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  относительно произвольным образом фиксированных базисов  $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$ ,  $\{q_k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$ . Тогда  $\text{rank}(A_{eq}) = \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $x = \mathcal{E}_n \xi \in \mathbf{X}_n$ . Тогда  $\mathcal{A}x = \mathcal{Q}_m \eta$ , где  $\eta = A_{eq} \xi$  (см. п. 2, с. 162). Понятно, что вектор  $\eta$  принадлежит подпространству пространства  $\mathbb{C}^m$ , натянутому на столбцы матрицы  $A_{eq}$  и, следовательно, имеющему размерность, равную  $\text{rank}(A_{eq})$ . Поскольку линейный оператор  $\mathcal{Q}$  обратим, то, очевидно, указанное подпространство изоморфно  $\text{Im } \mathcal{A}$ , следовательно, в силу теоремы 4, с. 160, размерность  $\text{Im}(\mathcal{A})$  равна  $\text{rank}(A_{eq})$ .  $\square$

**3.** Таким образом, ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранга его матрицы.

**4.** Матрицу  $A(m, n)$  можно трактовать и как систему строк из пространства  $\mathbb{C}^n$ . Ранг этой системы строк обозначим через  $r_s$ .

Справедлива следующая, на первый взгляд, неожиданная

**5. Теорема.** Для любой матрицы  $A(m, n)$  выполнено равенство  $r_s = \text{rank}(A(m, n))$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что первые  $r_s$  строк матрицы  $A(m, n)$  линейно незави-



симы, а каждая из последующих линейно выражается через первые  $r_s$  строк матрицы  $A(m, n)$ . Пусть  $A(r_s, n)$  — матрица, состоящая из первых  $r_s$  строк матрицы  $A(m, n)$ . Используем для преобразования матрицы  $A(r_s, n)$  алгоритм, совпадающий, фактически, с прямым ходом метода Гаусса (см. с. 99). Выберем в первой строке матрицы  $A(r_s, n)$  ненулевой элемент. Это возможно, так как ни одна строка матрицы  $A(r_s, n)$  не может быть нулевой. Переставим столбцы матрицы  $A(r_s, n)$  так, чтобы столбец, содержащий указанный ненулевой элемент, оказался первым. Сохраним за преобразованной таким образом матрицей прежнее обозначение. Умножим первую строку на  $-a_{21}/a_{11}$  и сложим со второй. Затем аналогичные преобразования сделаем со всеми последующими строками матрицы  $A(r_s, n)$ . В результате получим матрицу, у которой все элементы первого столбца, кроме элемента  $a_{11}$ , равны нулю, причем  $a_{11} \neq 0$ . Вторая строка преобразованной матрицы есть нетривиальная линейная комбинация первых двух строк, поэтому она отлична от нуля. Поменяв местами при необходимости второй столбец преобразованной матрицы с одним из последующих, мы получим матрицу, у которой элемент  $a_{22}$  не нуль. Умножим вторую строку на  $-a_{32}/a_{22}$  и сложим с третьей. Аналогичные преобразования сделаем и с последующими строками матрицы  $A(r_s, n)$ . Продолжая такие преобразования, мы, в результате, придем к матрице, которую можно представить в блочном виде

$$(\tilde{A}(r_s, r_s), B(r_s, n - r_s)), \quad (9.1)$$

где  $\tilde{A}(r_s, r_s)$  — верхняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали. Описанные выше преобразования не могут «сорваться», так как в ходе указанных вычислений каждый раз возникает строка, которая является нетривиальной линейной комбинацией предыдущих строк матрицы  $A(r_s, n)$ , и потому не может оказаться нулевой. Очевидно, что, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что первые  $r_s$  столбцов исходной матрицы  $A(r_s, n)$  таковы, что выполняя описанные выше преобразования и не прибегая к перестановке столбцов, мы придем к матрице вида (9.1). Ясно, что  $\det(\tilde{A}(r_s, r_s)) \neq 0$ , поэтому первые  $r_s$  столбцов исходной матрицы  $A(r_s, n)$  линейно независимы. Но тогда и первые  $r_s$  столбцов матрицы  $A(m, n)$  линейно независимы. Покажем, что добавление к ним любого столбца матрицы  $A(m, n)$  приводит к линейно зависимой системе. Пусть  $\Delta_{r_s}$  — главный минор<sup>1)</sup> порядка  $r_s$  матрицы  $A(m, n)$ .

<sup>1)</sup>Напомним, что главным минором порядка  $r$  называется минор, образованный элементами матрицы, стоящими на пересечении ее первых  $r$  строк и первых  $r$  столбцов (см. задачу 1 на с. 105).

Из предыдущих рассуждений следует, что  $\Delta_{r_s} \neq 0$ , поэтому система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, r_s, \quad (9.2)$$

имеет решение при любом  $k = 1, 2, \dots, n$ . Поскольку каждая строка матрицы  $A(m, n)$  с номером большим  $r_s$  линейно выражается через первые  $r_s$  строк матрицы  $A(m, n)$ , то вектор  $(x_1, x_2, \dots, x_{r_s})$ , являющийся решением системы (9.2), удовлетворяет и соотношениям

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = r_s + 1, \dots, m.$$

Таким образом, каждый столбец матрицы  $A(m, n)$  есть линейная комбинация ее первых  $r_s$  столбцов, следовательно,  $\text{rank}(A(m, n)) = r_s$ .  $\square$

**6.** Квадратная матрица порядка  $n$  невырождена тогда и только тогда, когда ее ранг равен  $n$ .

**7.** Любая перестановка строк или столбцов матрицы, очевидно, не меняет ее ранга. Более того, имеет место

**8. Теорема.** Пусть  $A(m, n)$  — произвольная матрица, а  $B(m, m)$  и  $C(n, n)$  — квадратные невырожденные матрицы. Тогда

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(BA), \quad (9.3)$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(AC). \quad (9.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для проверки справедливости равенства (9.3) достаточно заметить, что если матрица  $B$  невырождена, то для линейной независимости системы столбцов  $Ba^1, \dots, Ba^p$  необходимо и достаточно линейной независимости столбцов  $a^1, \dots, a^p$  (проверьте!). Справедливость (9.4) устанавливается затем переходом к транспонированным матрицам.  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Показать, что для любых допускающих умножение прямоугольных матриц  $A, B$  справедливо неравенство

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

## § 10. Элементарный метод вычисления ранга матрицы

1. Из рассуждений, выполненных при доказательстве теоремы 5 предыдущего параграфа, следует, что если матрица  $A$  имеет ранг равный  $r$ , то можно так переставить столбцы и строки этой матрицы, что главный минор  $\Delta_r$  порядка  $r$  полученной матрицы будет отличен от нуля. Указанный минор принято называть *базисным минором* матрицы  $A$ .

Сформулируем и докажем в некотором смысле обратное утверждение. Пусть  $A$  — произвольная прямоугольная матрица,  $\Delta_r$  — ее главный минор порядка  $r$ . Назовем главный минор  $\Delta_{r+1}$  *окаймляющим* минором для минора  $\Delta_r$ . Переставляя строки и столбцы матрицы  $A$  с номерами, большими чем  $r$ , можно построить различные окаймляющие миноры для минора  $\Delta_r$ .

**2. Лемма.** Пусть главный минор  $\Delta_r$  матрицы  $A$  не равен нулю, а все окаймляющие его миноры — нули. Тогда ранг матрицы  $A$  равен  $r$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку  $\Delta_r \neq 0$ , первые  $r$  столбцов матрицы  $A$  линейно независимы. Покажем, что любой столбец матрицы  $A$  с номером, большим чем  $r$ , линейно выражается через ее первые  $r$  столбцов. Это и будет означать, что  $\text{rank}(A) = r$ . Предположим противное. Тогда, присоединяя к первым  $r$  столбцам матрицы  $A$  некоторый столбец с большим номером, мы получим, что образованная таким образом матрица имеет ранг  $r + 1$ . Поэтому она имеет  $r + 1$  линейно независимую строку. Причем первые ее  $r$  строк линейно независимы, так как  $\Delta_r \neq 0$ . Значит, найдется строка с номером, большим чем  $r$ , которая не выражается линейно через первые  $r$  строк. Делая указанную строку  $(r + 1)$ -й строкой матрицы  $A$ , получим, что  $\Delta_{r+1} \neq 0$ , чего по условию леммы быть не может.  $\square$

**3.** Доказательство леммы 2 приводит к следующему способу вычисления ранга матрицы<sup>1)</sup>.

1) Просматриваем элементы матрицы. Если все они — нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

2) Если найден элемент матрицы, отличный от нуля, то, переставляя соответствующие строки и столбцы матрицы, помещаем его на место первого элемента первого столбца.

3) Окаймляем элемент  $a_{11}$ , т. е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов

<sup>1)</sup>В реальной вычислительной практике обычно применяют способ отыскания ранга матрицы, описанный на с. 238.

(например, элементы второй строки и второго столбца). Если все эти определители второго порядка — нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец (и одна линейно независимая строка). Значит, ранг матрицы равен единице.

4) Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путем перестановки строк и столбцов матрицы превращаем этот определитель в определитель вида  $\Delta_2$  (образованный элементами, стоящими на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов) и окаймлением строим определители третьего порядка, пока не получим среди них определитель, отличный от нуля, и т. д.

Если на каком-то шаге описанного алгоритма получен определитель  $\Delta_r$ , не равный нулю, а все определители порядка  $r + 1$ , построенные его окаймлением, — нули, то это означает, что ранг матрицы равен  $r$ .

Понятно, что описанный процесс зачастую может быть ускорен. Именно, пусть удалось установить, что определитель, образованный элементами, стоящими на пересечении каких-то  $r$  строк и каких-то  $r$  столбцов матрицы, не равен нулю. Строим окаймлением этого определителя определители порядка  $r + 1$ . Если среди них есть ненулевой, процесс продолжается. Если все такие определители — нули, то ранг матрицы равен  $r$ .

ПРИМЕР. Найдём ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в матрице  $A$  содержится минор

$$d = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},$$

не равный нулю. Минор третьего порядка

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор  $d$ , не равен нулю, однако, оба минора четвертого порядка

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

окаймляющие минор  $d'$ , очевидно, равны нулю, поэтому ранг матрицы  $A$  равен трем.

---

---

ГЛАВА 10  
**Линейные уравнения**

**§ 1. Общее решение линейного уравнения**

В этом параграфе будем считать, что уравнение

$$\mathcal{A}x = y, \quad (1.1)$$

где  $\mathcal{A}$  — линейный оператор, действующий из линейного пространства  $\mathbf{X}_n$  в линейное пространство  $\mathbf{Y}_m$ ,  $y$  — заданный элемент пространства  $\mathbf{Y}_m$ ,  $x$  — искомый элемент пространства  $\mathbf{X}_n$ , имеет решение, и опишем структуру всех его возможных решений, иными словами, получим представление *общего* решения уравнения (1.1).

Пусть  $x^1, x^2$  — решения уравнения (1.1) при одной и той же правой части  $y$ . Тогда, очевидно,  $\mathcal{A}(x^1 - x^2) = 0$ , т. е.  $x^1 - x^2 \in \text{Ker}(\mathcal{A})$ . Отсюда вытекает, что если фиксировать некоторое решение уравнения (1.1) (обозначим его через  $x^0$  и будем называть *частным* решением неоднородного уравнения), то любое другое решение (1.1) имеет вид  $x = x^0 + \tilde{x}$ , где  $\tilde{x} \in \text{Ker}(\mathcal{A})$ . Пусть  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^p$  — некий базис в  $\text{Ker}(\mathcal{A})$ . Тогда

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^p c_k \varphi^k. \quad (1.2)$$

Таким образом, представление общего решения уравнения (1.1) получено. Меняя в (1.2) коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_p$ , можно получить любое решение этого уравнения.

Векторы  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^p$  принято называть *фундаментальной системой решений* однородного уравнения

$$\mathcal{A}x = 0, \quad (1.3)$$

а  $\tilde{x} = \sum_{k=1}^p c_k \varphi^k$  — *общим решением* однородного уравнения. Итак, общее решение уравнения (1.1) есть сумма какого-либо частного решения уравнения (1.1) и общего решения однородного уравнения (1.3).

## § 2. Исследование разрешимости систем линейных алгебраических уравнений

1. При фактическом построении решений уравнения

$$Ax = y \quad (2.1)$$

нужно ввести некоторые базисы  $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ ,  $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$  в пространствах  $\mathbf{X}_n$ ,  $\mathbf{Y}_m$  и перейти к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\xi$  разложения вектора  $x$  по базису  $\mathcal{E}_n$ , считая известными коэффициенты  $\eta$  разложения вектора  $y$  по базису  $\mathcal{Q}_m$ . В результате (см. п. 2, с. 162), получим

$$A_{eq}\xi = \eta, \quad (2.2)$$

где  $A_{eq}$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$ .

Более подробная запись уравнения (2.2) дает

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(eq)} \xi_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3)$$

Подчеркнем, что коэффициенты  $a_{ij}^{(eq)}$  этой системы уравнений (элементы матрицы оператора  $\mathcal{A}$ ) и столбец правой части  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  предполагаются известными, а числа  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  требуется найти.

В отличие от рассматривавшихся ранее систем линейных алгебраических уравнений (см. § 5, гл. 5) у системы уравнений (2.3) количество уравнений и число неизвестных, вообще говоря, различны.

Задачи (2.1), (2.2) эквивалентны в том смысле, что если  $\xi$  — решение уравнения (2.2), то  $x = \mathcal{E}_n \xi$  — решение уравнения (2.1) при  $y = \mathcal{Q}_m \eta$ , и наоборот, если  $x$  — решение уравнения (2.1), то коэффициенты разложения векторов  $x, y$  по соответствующим базисам связаны соотношением (2.2).

2. Получим необходимые и достаточные условия разрешимости системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (2.4)$$

где  $A = A(m, n)$  — заданная прямоугольная матрица с комплексными, вообще говоря, элементами,  $b$  — заданный вектор из  $\mathbb{C}^m$ .

Обозначим через  $(A, b)$  матрицу размера  $m \times (n + 1)$ , получающуюся присоединением к матрице  $A$  столбца  $b$ . Матрицу  $(A, b)$  принято называть *расширенной матрицей* системы (2.4).

**3. Теорема Кронекера — Капелли<sup>1)</sup>.** Для того, чтобы система уравнений (2.4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц  $A$  и  $(A, b)$  совпадали.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Добавление столбца не уменьшает ранга матрицы, и очевидно, что ранг сохраняется тогда и только тогда, когда  $b$  есть линейная комбинация столбцов матрицы  $A$ . Последнее эквивалентно тому, что существует вектор  $x \in \mathbb{C}^n$ , являющийся решением системы (2.4).  $\square$

**4. Теорема (матричная теорема Фредгольма<sup>2)</sup>.** Для того, чтобы система линейных уравнений (2.4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения однородной системы уравнений  $zA = 0$  выполнялось равенство  $zb = 0$ .

Поясним, что здесь  $b$  интерпретируется как вектор столбец, а  $z$  — как вектор строка.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** **Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть  $r = \text{rank}(A)$ . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что первые  $r$  строк матрицы  $A$  линейно независимы. Понятно, что тогда и первые  $r$  строк матрицы  $(A, b)$  линейно независимы. Если  $k$ -я строка матрицы  $A$  линейно выражается через ее первые  $r$  строк, то существует ненулевой вектор  $z$  такой, что  $zA = 0$ . Тогда по условию теоремы  $zb = 0$ , но это означает, что  $k$ -я строка матрицы  $(A, b)$  линейно выражается через ее первые  $r$  строк. Таким образом, ранги матриц  $A$  и  $(A, b)$  совпадают, и по теореме Кронекера — Капелли система (2.4) имеет решение. **Н е о б х о д и м о с т ь.** Пусть система уравнений (2.4) имеет решение, т. е. существует вектор  $x \in \mathbb{C}^n$  такой, что  $Ax = b$ . Тогда для любого  $z \in \mathbb{C}^m$  справедливо равенство  $zAx = zb$ . Очевидно, что если  $zA = 0$ , то  $zb = 0$ .  $\square$

**4.1.** Приведем пример использования матричной теоремы Фредгольма. Дана симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>1)</sup>Альфредо Капелли (Alfredo Capelli; 1858 — 1916) — итальянский математик.

<sup>2)</sup>Эрик Ивар Фредгольм (Erik Ivar Fredholm; 1866 — 1927) — шведский математик.



порядка  $n$ . Требуется найти ранг матрицы  $A$  и описать условия на вектор  $b \in \mathbb{R}^n$ , необходимые и достаточные для разрешимости системы линейных уравнений

$$Ax = b. \quad (2.5)$$

Будем трактовать матрицу  $A$  как линейный оператор, действующий в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Опишем его ядро. Рассматривая однородную систему уравнений

$$Ax = 0, \quad (2.6)$$

заметим, что ее  $i$ -е уравнение,  $i = 2, 3, \dots, n - 1$ , записывается так:  $-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0$ , или  $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$ . Отсюда, очевидно, вытекает, что если вектор  $x$  — решение системы (2.6), то

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n,$$

т. е. ядро оператора  $A$  — одномерное подпространство пространства  $\mathbb{R}^n$  векторов вида  $x^1 = c(1, \dots, 1)$ , где  $c$  — произвольное вещественное число. Отсюда вследствие теоремы 4, с. 161, получаем, что  $\text{rang}(A) = n - 1$ . Далее, поскольку матрица  $A$  симметрична, то, применяя матичную теорему Фредгольма, получаем, что для разрешимости системы (2.5) необходимо и достаточно выполнения условия  $(x^1)^T b = 0$ , где  $x^1$  — любое решение уравнения (2.6). Таким образом, необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений (2.5) является равенство  $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0$ .

### § 3. Построение общего решения системы линейных алгебраических уравнений

Опишем элементарный способ, который можно применять для построения общего решения системы линейных алгебраических уравнений<sup>1)</sup>

$$Ax = b. \quad (3.1)$$

Будем опираться при этом на результаты § 1. В дальнейшем будем предполагать, что система (3.1) разрешима и обозначать через  $r$  ранг расширенной матрицы этой системы.

**1.** Построение частного решения уравнения (3.1). Используя описанные в пункте 3, с. 171, приемы вычисления ранга матрицы, приведем матрицу  $(A, b)$  к такому виду, что главный минор порядка  $r$

<sup>1)</sup>В реальной вычислительной практике обычно применяют методы основанные на построении так называемых сингулярных базисов оператора (см. с. 238).

этой матрицы отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы  $(A, b)$ , начиная с  $(r + 1)$ -й, есть линейные комбинации первых  $r$  строк.

Выполняемые указанным способом преобразования приводят, очевидно, к системе линейных уравнений, эквивалентной системе (3.1), т. е. каждое решение системы (3.1) — решение преобразованной системы, и, наоборот, каждое решение преобразованной системы есть решение системы (3.1). При этом последние  $m - r$  уравнений преобразованной системы — следствия первых  $r$  уравнений.

Отбросим эти последние уравнения, а в оставшихся  $r$  уравнениях перенесем слагаемые, содержащие переменные с  $(r + 1)$ -й до  $n$ -й (эти переменные принято называть *свободными*), в правую часть.

Придадим свободным переменным  $x_{r+1}, \dots, x_n$  любые значения (чаще всего нет никаких причин не брать их равными нулю). В результате получим систему из  $r$  уравнений с  $r$  неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля. Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . Таким образом будет построен вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ , являющийся решением системы (3.1).

ПРИМЕР. Найдем частное решение системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \quad (3.2)$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \quad (3.3)$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20. \quad (3.4)$$

Определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

находящийся в левом верхнем углу матрицы системы уравнений, не равен нулю. Определители

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 20 \end{vmatrix},$$

окаймляющие определитель  $\Delta_2$ , — нули. Поэтому ранг основной матрицы системы уравнений равен двум, и ранг расширенной матрицы системы уравнений равен двум. Система совместна, причем последнее уравнение — следствие первых двух уравнений системы. Таким образом, чтобы найти частное решение системы (3.2)–(3.4), достаточно решить систему двух уравнений (3.2)–(3.3), придавая  $x_3, x_4$  произвольные значения. Полагая  $x_3 = x_4 = 0$ , находим  $x_1 = 6, x_2 = 2$ , следовательно, вектор  $x = (6, 2, 0, 0)$  — решение системы (3.2)–(3.4).

**2.** Обратимся теперь к задаче построения фундаментальной системы решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0 \quad (3.5)$$

с матрицей размера  $m \times n$ . Пусть  $\text{rank}(A) = r$ . Вследствие теоремы 4, с. 161, достаточно построить любые  $n - r$  линейно независимых решений однородной системы уравнений (3.5). Будем, естественно, предполагать, что  $n > r$ .

Выполнив те же действия, что и в п. 1, приведем систему уравнений (3.5) к эквивалентной системе вида

$$A(r, r)x(r, 1) + B(r, n - r)y(n - r, 1) = 0. \quad (3.6)$$

Здесь  $A(r, r)$  — невырожденная матрица, столбец  $y((n - r), 1)$  соответствует свободным переменным. Выберем векторы

$$y^1((n - r), 1), y^2((n - r), 1), \dots, y^{n-r}((n - r), 1) \quad (3.7)$$

так, чтобы они были линейно независимы (проще всего их взять как векторы стандартного базиса пространства  $\mathbb{C}^{n-r}$ ). По этим векторам из уравнений

$$A(r, r)x^k(r, 1) + B(r, (n - r))y^k((n - r), 1) = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, n - r$ , однозначно определяются векторы

$$x^1(r, 1), x^2(r, 1), \dots, x^{n-r}(r, 1).$$

Образуем теперь векторы  $z^k(n, 1)$ , приписывая к компонентам векторов  $x^k(r, 1)$  компоненты векторов  $y^k((n - r), 1)$ :

$$z^k(n, 1) = (x^k(r, 1), y^k((n - r), 1)), \quad k = 1, 2, \dots, n - r.$$

По построению  $Az^k = 0$  для  $k = 1, \dots, n - r$ , кроме того, очевидно, векторы  $z^k$ ,  $k = 1, \dots, n - r$ , линейно независимы, так как векторы системы (3.7) линейно независимы. Таким образом, векторы  $z^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - r$ , образуют фундаментальную систему решений однородной системы уравнений (3.5).

**ПРИМЕР.** Найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \quad (3.8)$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \quad (3.9)$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \quad (3.10)$$

соответствующей системе (3.2)–(3.4). Ранг матрицы этой системы, как было показано при решении предыдущего примера, равен двум. Поэтому нужно построить два линейно независимых (непропорциональных) решения системы (3.8)–(3.10). Как уже было установлено, последнее уравнение системы — следствие первых двух. Полагая  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 0$  в уравнениях (3.8), (3.9), получим

$$x_1 - x_2 + 1 = 0, \quad (3.11)$$

$$x_1 + x_2 + 2 = 0, \quad (3.12)$$

откуда  $x_1 = -3/2$ ,  $x_2 = -1/2$ . Полагая же  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$  в уравнениях (3.8), (3.9), будем иметь  $x^1 = (-3/2, -1/2, 1, 0)$ ,  $x^2 = (-1, -2, 0, 1)$  образуют фундаментальную систему решений системы уравнений (3.8)–(3.10). Любой вектор

$$x = c_1(-3/2, -1/2, 1, 0) + c_2(-1, -2, 0, 1), \quad (3.13)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные числа, — решение системы (3.8)–(3.10), и наоборот, любое решение системы уравнений (3.8)–(3.10) представимо в виде (3.13) при некоторых  $c_1, c_2$ . Таким образом, общее решение системы (3.2)–(3.4) можно представить в виде

$$x = (6, 2, 0, 0) + c_1(-3/2, -1/2, 1, 0) + c_2(-1, -2, 0, 1),$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные вещественные числа.

---

---

ГЛАВА 11  
Строение линейного оператора

§ 1. Инвариантные подпространства

1. Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  — линейный оператор. Подпространство  $L \subset \mathbf{X}$  называется *инвариантным подпространством* оператора  $\mathcal{A}$ , если оператор  $\mathcal{A}$  отображает всякий вектор  $x$  из  $L$  в вектор, также принадлежащий подпространству  $L$ .

*Тривиальные* подпространства, т. е.  $L = \{0\}$  и  $L = \mathbf{X}$ , являются инвариантными подпространствами любого оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ .

Пусть пространство  $\mathbf{X}$  — прямая сумма подпространств  $L$  и  $M$ ,  $\mathcal{P}$  — оператор проектирования на подпространство  $L$  параллельно подпространству  $M$ . Тогда  $\mathcal{P}x = x$  для любого  $x \in L$  и  $\mathcal{P}x = 0$  для любого  $x \in M$ , т. е.  $L$  и  $M$  — инвариантные подпространства оператора  $\mathcal{P}$ .

Приведем пример оператора, не имеющего нетривиальных инвариантных подпространств.

Пусть  $\mathbf{X}_2$  — двумерное вещественное евклидово пространство. Нетрудно убедиться, что если  $L$  — нетривиальное подпространство  $\mathbf{X}_2$ , то  $L$  — множество векторов вида  $\alpha e$ , где  $e$  — фиксированный ненулевой вектор, а  $\alpha$  пробегает все множество вещественных чисел (можно сказать, что  $L$  — прямая на плоскости, проходящая через начало координат). Введем в  $\mathbf{X}_2$  ортонормированный базис  $e^1, e^2$ . Пусть  $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_2 \rightarrow \mathbf{X}_2$  — оператор, отображающий каждый вектор  $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2$  в вектор  $y = -\xi_2 e^1 + \xi_1 e^2$ . Векторы  $x, y$  ортогональны, и поэтому ясно, что если  $L$  — нетривиальное подпространство  $\mathbf{X}_2$ , то для  $x \in L$  вектор  $\mathcal{Q}x \in L^\perp$  и, следовательно,  $\mathcal{Q}x \notin L$ , если  $x \neq 0$ , т. е. оператор  $\mathcal{Q}$  не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

2. Если известен базис инвариантного подпространства, то вид матрицы оператора может быть упрощен. Именно, пусть  $\{e^k\}_{k=1}^n$  — базис пространства  $\mathbf{X}_n$ ,  $L$  — подпространство  $\mathbf{X}_n$ , инвариантное относительно оператора  $\mathcal{A}$  и имеющее размерность  $m$ . Пусть векторы  $\{e^k\}_{k=1}^m$  принадлежат  $L$ . Тогда  $\{e^k\}_{k=1}^m$  — базис подпространства  $L$

(докажите!) и

$$\mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^m a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = 1, \dots, m, \quad \mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^n a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = m+1, \dots, n.$$

Эти равенства показывают, что элементы матрицы  $A_e$ , стоящие на пересечении первых  $m$  столбцов и последних  $(n - m)$  строк, — нули, следовательно, матрица  $A_e$  может быть записана как блочная  $2 \times 2$  треугольная матрица:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $A_{11}$  — квадратная матрица размера  $m$ ,  $A_{22}$  — квадратная матрица размера  $n - m$ ,  $0$  — нулевая матрица размера  $(n - m) \times m$ ,  $A_{12}$  — матрица размера  $m \times (n - m)$ .

Еще большее упрощение матрицы  $A_e$  достигается, когда пространство  $\mathbf{X}_n$  представимо в виде прямой суммы инвариантных подпространств  $L$  и  $M$  оператора  $\mathcal{A}$ , т. е.  $\mathbf{X}_n = L \dot{+} M$  и базис  $\{e^k\}_{k=1}^n$  пространства  $\mathbf{X}_n$  выбран так, что векторы  $\{e^k\}_{k=1}^m$  — базис подпространства  $L$ . Тогда, как нетрудно видеть, в представлении (1.1) матрица  $A_{12}$  будет нулевой, т. е. матрица  $A_e$  принимает блочно диагональный вид

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

**2.1.** Очевидно, верно и обратное, а именно, если матрица оператора в некотором базисе  $\{e^k\}_{k=1}^n$  имеет блочную структуру вида (1.2), то пространство  $\mathbf{X}_n$  представимо как прямая сумма двух подпространств, базисами этих подпространств будут векторы базиса  $\{e^k\}_{k=1}^n$  с номерами, совпадающими с номерами строк соответствующих блоков.

**2.2.** Вообще говоря, и подпространства  $L$  и  $M$  могут распадаться на прямые суммы инвариантных подпространств меньшей размерности. Тогда количество блоков, стоящих на диагонали матрицы  $A_e$ , будет увеличиваться, а их размеры будут уменьшаться.

**2.3.** Наиболее простым является случай, когда пространство  $\mathbf{X}_n$  может быть представлено в виде прямой суммы  $n$  одномерных инвариантных подпространств оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда матрица  $A_e$  становится диагональной. Однако такое представление возможно лишь для некоторых специальных классов операторов.

**3. Лемма.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — невырожденный оператор. Пусть  $L \subset \mathbf{X}_n$  — инвариантное подпространство оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда для любого  $x \in L$  найдется, и при том только один, вектор  $y \in L$  такой, что  $\mathcal{A}y = x$ <sup>1)</sup>.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпространство  $L$  инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ , поэтому можно ввести в рассмотрение оператор  $\mathcal{A}_L : L \rightarrow L$ , полагая  $\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x$  для  $x \in L$ . Оператор  $\mathcal{A}_L$  не вырожден, так как если  $\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x = 0$ , то  $x = 0$ , поскольку  $\mathcal{A}$  не вырожден (см. теорему 5, с. 167). Отсюда вытекает, что уравнение  $\mathcal{A}_L y = x$  при любом  $x \in L$  имеет единственное решение  $y \in L$ .  $\square$

Оператор  $\mathcal{A}_L$ , определенный в ходе доказательства леммы 3, называют *сужением оператора  $\mathcal{A}$  на его инвариантное подпространство  $L$* .

## § 2. Собственные числа и собственные векторы

В пункте 2 предыдущего параграфа была показана особая роль одномерных инвариантных подпространств оператора. С понятием одномерного инвариантного подпространства тесно связано понятие собственного вектора оператора.

1. Будем говорить, что вектор  $x \in \mathbf{X}$  — *собственный вектор оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$* , если  $x \neq 0$  и существует число  $\lambda$  такое, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x. \quad (2.1)$$

Число  $\lambda$  при этом называется *собственным числом оператора  $\mathcal{A}$* . Говорят, что собственный вектор  $x$  соответствует (отвечает) собственному числу  $\lambda$ . Собственный вектор и соответствующее ему собственное число называют также *собственной парой оператора  $\mathcal{A}$* .

2. Пусть  $x, \lambda$  — собственная пара оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\mathcal{A}\alpha x = \lambda\alpha x$  для любого  $\alpha \in \mathbb{C}$ , т. е. одномерное подпространство пространства  $\mathbf{X}$ , натянутое на собственный вектор оператора  $\mathcal{A}$ , инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ .

3. Пусть  $\lambda$  — собственное число оператора  $\mathcal{A}$ . Ядро оператора  $\mathcal{A} - \lambda I$  будем обозначать через  $L_\lambda$  и называть *собственным подпространством оператора  $\mathcal{A}$* . Понятно, что  $L_\lambda \neq \{0\}$ . Всякий ненулевой вектор из  $L_\lambda$  — собственный вектор оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающий собственному числу  $\lambda$ .

<sup>1)</sup>Можно сказать, таким образом, что невырожденный оператор осуществляет взаимно однозначное отображение любого своего инвариантного подпространства на это же подпространство.

4. Приведем простые примеры операторов, имеющих собственные векторы.

1) Для нулевого оператора всякий ненулевой вектор пространства  $\mathbf{X}_n$  — собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному нулю.

2) Для оператора  $\alpha I$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$ , всякий ненулевой вектор пространства есть собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному  $\alpha$ .

3) Пусть пространство  $\mathbf{X}$  — прямая сумма подпространств  $L$  и  $M$ , и пусть  $\mathcal{P}$  — оператор проектирования пространства  $\mathbf{X}$  на подпространство  $L$  параллельно  $M$ . Тогда  $\mathcal{P}x = x$  для любого вектора  $x$  из  $L$ , и  $\mathcal{P}x = 0$  для любого  $x \in M$ , т. е. все ненулевые векторы из  $L$  — собственные векторы оператора  $\mathcal{P}$ , и все они отвечают собственному числу, равному единице, тогда как все ненулевые векторы из  $M$  — собственные векторы оператора  $\mathcal{P}$ , отвечающие собственному числу, равному нулю.

В вещественном пространстве  $\mathbf{X}_n$  не у всякого оператора есть собственные векторы. Так, например, оператор  $\mathcal{Q}$ , построенный в пункте 1, с. 181, не имеет собственных векторов в вещественном пространстве  $\mathbf{X}_2$ . Это сразу следует из того, что у оператора  $\mathcal{Q}$  нет нетривиальных инвариантных подпространств.

**5. Теорема.** *Всякий оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в комплексном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , имеет собственные векторы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться, что существует  $\lambda \in \mathbb{C}$  такое, что линейное уравнение

$$(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0 \quad (2.2)$$

имеет нетривиальное решение. Фиксируем в пространстве  $\mathbf{X}_n$  некоторый базис  $\mathcal{E}_n$ . Пусть  $A_e$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе. Рассмотрим уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0. \quad (2.3)$$

Нетрудно проверить, что  $\det(A_e - \lambda I)$  — полином порядка  $n$  относительно  $\lambda$ . Поэтому уравнение (2.3) имеет  $n$  корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Всякий корень  $\lambda_k$  уравнения (2.3) — собственное число оператора  $\mathcal{A}$ . В самом деле,

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0 \quad (2.4)$$

есть однородная система линейных уравнений с вырожденной матрицей, следовательно, она имеет нетривиальное решение. Обозначим



это решение через  $\xi^k$ . Тогда вектор  $x^k = \mathcal{E}_n \xi^k$ , очевидно, будет не равен нулю и будет решением уравнения  $(\mathcal{A} - \lambda_k I)x^k = 0$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Пусть  $\mathcal{A}$  — оператор, действующий в комплексном пространстве  $\mathbf{X}_n$ ,  $L \neq \{0\}$  — инвариантное подпространство оператора  $\mathcal{A}$ . Показать, что у оператора  $\mathcal{A}$  есть собственный вектор, принадлежащий  $L$ .

**6.** Операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , действующие в линейном пространстве  $\mathbf{X}$ , называются *перестановочными*, если  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ .

**6.1. Лемма.** Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — перестановочные преобразования линейного пространства  $\mathbf{X}$ , и пусть  $L_\lambda \subset \mathbf{X}$  — собственное подпространство оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда  $L_\lambda$  — инвариантное подпространство оператора  $\mathcal{B}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $x \in L_\lambda$ . Тогда  $\mathcal{A}x = \lambda x$ , следовательно,  $\mathcal{B}\mathcal{A}x = \lambda \mathcal{B}x$ , но  $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ , поэтому  $\mathcal{A}\mathcal{B}x = \lambda \mathcal{B}x$ . Это означает, что вектор  $\mathcal{B}x$  принадлежит подпространству  $L_\lambda$ .  $\square$

### § 3. Характеристический полином и характеристические числа

**1.** Полином  $\det(A - \lambda I)$  называется *характеристическим полиномом матрицы  $A$* . Корни характеристического полинома называются *характеристическими (собственными) числами матрицы  $A$* . Множество всех характеристических чисел матрицы  $A$  называется ее *спектром* и обозначается через  $\sigma(A)$ . Как установлено в ходе доказательства теоремы 5, с. 184, для любого числа  $\lambda \in \sigma(A)$  существует вектор  $x \in \mathbb{C}^n$ , не равный нулю, и такой, что

$$Ax = \lambda x.$$

Вектор  $x$  называется *собственным вектором матрицы  $A$* , соответствующим характеристическому числу  $\lambda$  этой матрицы.

**2. Теорема.** *Характеристические полиномы, а следовательно, и спектры подобных матриц совпадают.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $T$  — невырожденная матрица, матрица  $B = T^{-1}AT$  подобна матрице  $A$ . Тогда для любого  $\lambda$  из  $\mathbb{C}$

$$B - \lambda I = T^{-1}AT - \lambda I = T^{-1}(A - \lambda I)T.$$

Поскольку  $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$ , то  $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$ .  $\square$

**2.1.** Матрицы оператора в различных базисах подобны (см. п. 10, с. 166), поэтому характеристический полином матрицы оператора и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Характеристический полином матрицы оператора естественно называть по этому *характеристическим полиномом оператора*.

Характеристические числа матрицы оператора называются *характеристическими числами этого оператора*. Они, таким образом, являются инвариантами оператора.

Множество всех характеристических чисел оператора  $\mathcal{A}$  (часто называемое его *спектром*) будем обозначать через  $\sigma(\mathcal{A})$ .

Из доказательства теоремы 5 вытекает, что для оператора, действующего в комплексном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , понятия характеристического и собственного числа, фактически, не различаются, и применительно к таким операторам соответствующие термины используются как синонимы.

#### § 4. Признак линейной независимости собственных векторов

1. Любой оператор, действующий в пространстве  $\mathbf{X}_n$ , имеет не более чем  $n$  различных собственных чисел.

**2. Теорема.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  — собственные числа оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ . Пусть все они попарно различны. Пусть, далее,  $x^1, x^2, \dots, x^p$  — собственные векторы оператора  $\mathcal{A}$ , причем  $\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . Тогда векторы  $x^1, x^2, \dots, x^p$  линейно независимы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что вопреки утверждению теоремы система векторов  $x^1, x^2, \dots, x^p$  линейно зависима. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что ее максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы  $x^1, x^2, \dots, x^r$ ,  $r < p$ . Обозначим через  $L_r$  подпространство пространства  $\mathbf{X}_n$ , натянутое на векторы  $x^1, x^2, \dots, x^r$ . Оно имеет размерность  $r$  и инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть  $\mathcal{A}_{L_r}$  — сужение оператора  $\mathcal{A}$  на  $L_r$ . Тогда числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  — собственные числа оператора  $\mathcal{A}_{L_r}$ . Все они попарно различны. Ненулевой вектор  $x^{r+1}$  принадлежит  $L_r$  и  $\mathcal{A}_{L_r} x^{r+1} = \mathcal{A} x^{r+1} = \lambda_{r+1} x^{r+1}$ , т. е.  $\lambda_{r+1}$  — собственное число оператора  $\mathcal{A}_{L_r}$ , но оператор  $\mathcal{A}_{L_r}$  действует в пространстве размерности  $r$  и потому не может иметь больше чем  $r$  различных собственных чисел.  $\square$

**2.1.** Из сказанного выше вытекает, что если у оператора  $\mathcal{A}$  все собственные числа оказываются различными, то соответствующие им собственные векторы  $x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , образуют базис пространства  $\mathbf{X}_n$ . По построению

$$\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

поэтому матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\{x^k\}_{k=1}^n$  — диагональная матрица, по диагонали которой расположены числа  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

ПРИМЕР. Найдем все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4 - \lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0. \quad (4.1)$$

Очевидно,  $\lambda = 1$  — корень этого уравнения. Нетрудно проверить, что

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13).$$

Корни уравнения  $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$  есть  $2 \pm 3i$ . Таким образом,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 + 3i, \quad \lambda_3 = 2 - 3i$$

есть собственные числа матрицы  $A$ .

Координаты собственного вектора, отвечающего  $\lambda_1$ , есть решение однородной системы уравнений

$$3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \quad (4.2)$$

$$x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0, \quad (4.3)$$

$$-4x_1 + 4x_3 = 0. \quad (4.4)$$

Определитель  $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ . Поэтому ранг матрицы системы уравнений (4.2)–(4.4) равен двум и, следовательно, эта система уравнений может иметь лишь одно линейно независимое решение. Положим  $x_3 = 1$  и найдем  $x_1, x_2$ , решая систему уравнений (4.2)–(4.3). Получим  $x_1 = 1, x_2 = 2$ . Таким образом, вектор  $(1, 2, 1)$  — решение системы уравнений (4.2)–(4.4). Отсюда вытекает, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу  $\lambda_1 = 1$ , есть множество векторов вида  $c(1, 2, 1)$ , где  $c$  — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Координаты собственного вектора, отвечающего  $\lambda_2$ , есть решение однородной системы уравнений

$$(2 - 3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \quad (4.5)$$

$$x_1 - (6 + 3i)x_2 + 9x_3 = 0, \quad (4.6)$$

$$-4x_1 + (3 - 3i)x_3 = 0. \quad (4.7)$$

Определитель  $\begin{vmatrix} 2 - 3i & -5 \\ 1 & -(6 + 3i) \end{vmatrix} \neq 0$ . Поэтому координаты собственного вектора найдем, решая систему уравнений (4.5)–(4.6) при  $x_3 = 1$ . Получим  $x_1 = (3 - 3i)/4$ ,  $x_2 = (5 - 3i)/4$ . Таким образом, множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу  $\lambda_2$ , есть множество векторов вида  $c(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$ , где  $c$  — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Аналогичные вычисления показывают, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу  $\lambda_3$ , есть множество векторов вида  $c(3 + 3i, 5 + 3i, 4)$ , где  $c$  — произвольное комплексное число, не равное нулю.

В рассматриваемом примере все собственные числа различны. Соответствующие им собственные векторы образуют базис пространства  $\mathbb{C}^3$ . Это видно и из того, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 - 3i & 5 - 3i & 4 \\ 3 + 3i & 5 + 3i & 4 \end{vmatrix},$$

составленный из их координат, не равен нулю.

В случае, когда характеристический полином оператора  $\mathcal{A}$  имеет кратные корни, соответствующих им линейно независимых векторов может оказаться меньше, чем  $n$ , и они не будут базисом пространства  $\mathbf{X}_n$ .

**ПРИМЕР.** Найдем все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение есть  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ . Корни этого уравнения есть  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ . Система уравнений для отыскания координат собственного вектора имеет, следовательно, вид

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \quad (4.8)$$

$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \quad (4.9)$$

$$-x_1 - x_3 = 0. \quad (4.10)$$

Определитель  $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$  не равен нулю. Поэтому ранг матрицы этой системы равен двум, и линейное пространство решений системы (4.8)–(4.10) одномерно. Нетрудно видеть, что вектор  $x = (1, 1, -1)$  — решение системы (4.8)–(4.10). Следовательно, множество всех собственных векторов матрицы — это множество векторов вида  $c(1, 1, -1)$ , где  $c$  — произвольное не равное нулю число. Понятно, что собственные векторы матрицы в рассматриваемом случае не образуют базиса в пространстве  $\mathbb{C}^3$ .

## § 5. Геометрическая и алгебраическая кратности собственных чисел

1. Размерность собственного подпространства оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающего собственному числу  $\lambda$  этого оператора, называется *геометрической кратностью* собственного числа  $\lambda$ .

Кратность числа  $\lambda$  как корня характеристического уравнения оператора  $\mathcal{A}$  называется *алгебраической кратностью* собственного числа  $\lambda$ .

**2. Теорема.** *Для любого оператора  $\mathcal{A}$ , действующего в конечномерном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , геометрическая кратность любого собственного числа не превосходит его алгебраической кратности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $L_{\lambda_0}$  — собственное подпространство оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающее его собственному числу  $\lambda_0$ ,  $\dim(L_{\lambda_0}) = m$ , и векторы  $f^1, f^2, \dots, f^m$  образуют базис этого подпространства. Дополним произвольно указанный базис векторами  $g^{m+1}, g^{m+2}, \dots, g^n$  до базиса пространства  $\mathbf{X}_n$ . Поскольку  $\mathcal{A}f^k = \lambda_0 f^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , то матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в полученном базисе можно представить в блочном виде (см. п. 2 с. 181)

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где  $\Lambda_0$  — диагональная матрица порядка  $m$  с элементами  $\lambda_0$  на диагонали и, следовательно, характеристический полином оператора  $\mathcal{A}$  можно представить так:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = (\lambda - \lambda_0)^m Q_{n-m}(\lambda),$$

где  $Q_{n-m}(\lambda)$  — некоторый полином порядка  $n - m$ . Теперь совершенно очевидно, что  $m$  не может превосходить кратности  $\lambda_0$  как корня уравнения  $\det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$ .  $\square$

## § 6. Операторы простой структуры

Говорят, что оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  есть оператор *простой структуры*, если можно указать базис  $\mathcal{E}_n$  пространства  $\mathbf{X}_n$ , все векторы которого — собственные векторы оператора  $\mathcal{A}$ . Матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе можно записать в виде

$$A_e = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k),$$

где каждое собственное число оператора  $\mathcal{A}$  повторяется столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Отметим также, что если  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — оператор простой структуры,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, k \leq n$ , — все попарно различные собственные числа этого оператора,  $L_{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, k$ , — соответствующие собственные подпространства оператора  $\mathcal{A}$ , то

$$\mathbf{X}_n = L_{\lambda_1} \dot{+} L_{\lambda_2} \dot{+} \dots \dot{+} L_{\lambda_k}.$$

Пусть  $\mathcal{P}_i$  — оператор проектирования пространства  $\mathbf{X}_n$  на  $L_{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, k$ . Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\mathcal{A}x = \lambda_1 \mathcal{P}_1 x + \lambda_2 \mathcal{P}_2 x + \dots + \lambda_k \mathcal{P}_k x \quad \forall x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е.

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathcal{P}_k. \quad (6.1)$$

Равенство (6.1) определяет так называемое *спектральное представление оператора  $\mathcal{A}$* . Вследствие (1.4), с. 157, для любого целого неотрицательного  $j$  отсюда имеем  $\mathcal{A}^j = \lambda_1^j \mathcal{P}_1 + \lambda_2^j \mathcal{P}_2 + \dots + \lambda_k^j \mathcal{P}_k$  и, вообще, если  $Q_m$  — произвольный полином степени  $m \geq 0$ , то

$$Q_m(\mathcal{A}) = Q_m(\lambda_1) \mathcal{P}_1 + Q_m(\lambda_2) \mathcal{P}_2 + \dots + Q_m(\lambda_k) \mathcal{P}_k. \quad (6.2)$$

Поскольку все числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  попарно различны, то можно определить базисные функции Лагранжа (см. с. 86, с. 126)

$$\Phi_j(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{j-1})(\lambda - \lambda_{j+1}) \dots (\lambda - \lambda_k)}{(\lambda_j - \lambda_1)(\lambda_j - \lambda_2) \dots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \dots (\lambda_j - \lambda_k)},$$

$j = 1, 2, \dots, k$ . Из (6.2) тогда, очевидно, получаем

$$\mathcal{P}_j = \Phi_j(\mathcal{A}), \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (6.3)$$

Формулу (6.3) называют *формулой Сильвестра*<sup>1)</sup>. Она показывает, что каждый из операторов  $\mathcal{P}_j, j = 1, 2, \dots, k$ , есть полином степени  $k - 1$  от оператора  $\mathcal{A}$ , причем коэффициенты этого полинома зависят лишь от собственных чисел оператора  $\mathcal{A}$ .

**1. Теорема.** *Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая кратность каждого собственного числа оператора  $\mathcal{A}$  совпадала с его алгебраической кратностью.*

<sup>1)</sup> Джеймс Джозеф Сильвестр (James Joseph Sylvester, 1814 — 1897) — английский математик.

Доказательство теоремы предоставляется читателю.

УПРАЖНЕНИЕ. Пусть операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , действующие в пространстве  $\mathbf{X}_n$ , есть операторы простой структуры, и пусть их характеристические полиномы совпадают. Доказать, что тогда существует невырожденный оператор  $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  такой, что  $\mathcal{B} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}$ .

## § 7. Инварианты оператора

В этом параграфе существенно используется

**1. Лемма.** Для любого  $x \in \mathbb{C}$  справедливо разложение

$$d(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} =$$

$$= x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n, \quad (7.1)$$

где

$$c_k = \sum_{1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k \leq n} \begin{vmatrix} a_{p_1, p_1} & a_{p_1, p_2} & \dots & a_{p_1, p_k} \\ a_{p_2, p_1} & a_{p_2, p_2} & \dots & a_{p_2, p_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p_k, p_1} & a_{p_k, p_2} & \dots & a_{p_k, p_k} \end{vmatrix}, \quad (7.2)$$

$k = 1, 2, \dots, n$ . Суммирование в (7.2) распространяется на все  $C_n^k$  определителей порядка  $k$  указанного вида.

Определители, входящие в правую часть равенства (7.2), называются *диагональными* минорами порядка  $k$  матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$c_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}, \quad c_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1. Обозначим через  $a^1, a^2, \dots, a^n$  столбцы матрицы  $A$  и будем трактовать определитель матрицы  $A$

как функцию ее столбцов, т. е.  $\det A = \Delta(a^1, a^2, \dots, a^n)$ . Тогда функцию  $d(x)$  можно представить в виде

$$d(x) = \Delta(a^1 + xi^1, a^2 + xi^2, \dots, a^n + xi^n),$$

где, как обычно, через  $i^1, i^2, \dots, i^n$  обозначены единичные векторы пространства  $\mathbb{C}^n$ . Как мы знаем, определитель линеен по каждому из своих столбцов, поэтому, проводя элементарные вычисления, получим

$$\begin{aligned} d(x) = & \Delta(a^1, a^2, \dots, a^n) + \\ & + x(\Delta(i^1, a^2, \dots, a^n) + \Delta(a^1, i^2, \dots, a^n) + \dots + \Delta(a^1, a^2, \dots, a^{n-1}, i^n)) + \\ & + x^2(\Delta(i^1, i^2, a^3, \dots, a^n) + \dots + \Delta(a^1, a^2, \dots, a^{n-2}, i^{n-1}, i^n)) + \\ & + \dots + x^n \Delta(i^1, i^2, \dots, i^n). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Поясним, что множителем при  $x^k$  является сумма  $C_n^k$  определителей, каждый из которых получается заменой  $k$  столбцов определителя  $\Delta(a^1, a^2, \dots, a^n)$  на соответствующие единичные векторы. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что  $\Delta(i^1, i^2, \dots, i^n) = 1$ , а заменяя  $k$  столбцов в определителе  $\Delta(a^1, a^2, \dots, a^n)$  на единичные векторы с теми же номерами, мы получаем соответствующий диагональный минор порядка  $n - k$  матрицы  $A$ .  $\square$

**2.** Характеристический полином матрицы  $A_e$  оператора  $\mathcal{A}$  с точностью до знака совпадает с  $\det(\lambda I - A_e)$ . Записывая этот определитель в виде разложения по степеням  $\lambda$ , получим

$$\det(\lambda I - A_e) = P_n(\lambda) = \lambda^n - \mathcal{I}_1 \lambda^{n-1} + \mathcal{I}_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \mathcal{I}_n. \quad (7.4)$$

Как уже отмечалось, коэффициенты полинома  $P_n$  являются *инвариантами оператора  $\mathcal{A}$* . Все они выражаются через элементы матрицы оператора, но при этом важно помнить, что никакое преобразование базиса их значений не меняет. В связи этим приняты обозначения  $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k(\mathcal{A})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Используя формулы (7.1), (7.2), нетрудно получить следующие выражения для инвариантов  $\mathcal{I}_k(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$  через элементы матрицы  $A_e$ :

$$\mathcal{I}_k(\mathcal{A}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \begin{vmatrix} a_{i_1, i_1}^e & a_{i_1, i_2}^e & \dots & a_{i_1, i_k}^e \\ a_{i_2, i_1}^e & a_{i_2, i_2}^e & \dots & a_{i_2, i_k}^e \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k, i_1}^e & a_{i_k, i_2}^e & \dots & a_{i_k, i_k}^e \end{vmatrix}, \quad (7.5)$$



$k = 1, 2, \dots, n$ , в частности,

$$\mathcal{I}_1(\mathcal{A}) = a_{11}^e + a_{22}^e + \dots + a_{nn}^e, \quad \mathcal{I}_n(\mathcal{A}) = \det A_e, \quad (7.6)$$

причем вследствие формул Вьета (см. п. 5, с. 25)

$$a_{11}^e + a_{22}^e + \dots + a_{nn}^e = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \quad \det A_e = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \quad (7.7)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — характеристические числа оператора  $\mathcal{A}$ . Вообще,  $\mathcal{I}_k(\mathcal{A})$  есть сумма всевозможных произведений  $k$  различных характеристических чисел оператора  $\mathcal{A}$ .

**3.** Полезно отметить, что, поскольку всякая квадратная матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  порождает линейный оператор (умножения на вектор), действующий в пространстве  $\mathbb{C}^n$ , ей можно отнести величины  $\mathcal{I}_k(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , вычисляемые по формулам вида (7.5) с заменой  $a_{ij}^e$  на  $a_{ij}$ . Понятно, что эти величины не меняются ни при каком подобном преобразовании матрицы  $A$  и потому называются *инвариантами матрицы  $A$* .

**4. Теорема.** Пусть  $\mathcal{A}$  — оператор, действующий в конечномерном пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Тогда существует положительное число  $\varepsilon_0$  такое, что если  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  и  $\varepsilon \neq 0$ , то оператор  $\mathcal{A} + \varepsilon I$  обратим.

Доказательство этой теоремы поручается читателю в качестве упражнения.

**5.** Величину  $\mathcal{I}_1(\mathcal{A}) = a_{11}^e + a_{22}^e + \dots + a_{nn}^e = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  называют *следом* оператора  $\mathcal{A}$  и обозначают через  $\text{tr}(\mathcal{A})$ . Отметим следующие полезные формулы:

$$\text{tr}(\alpha \mathcal{A} + \beta \mathcal{B}) = \alpha \text{tr}(\mathcal{A}) + \beta \text{tr}(\mathcal{B}), \quad (7.8)$$

$$\text{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \text{tr}(\mathcal{B}\mathcal{A}). \quad (7.9)$$

Здесь  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — произвольные линейные операторы, действующие в конечномерном линейном пространстве,  $\alpha, \beta$  — произвольные числа.

Равенство (7.8) непосредственно вытекает из определения следа оператора. Равенство (7.9) легко проверяется переходом к матрицам операторов и прямыми вычислениями величин, записанных в его правой и левой частях.

## § 8. Инвариантные функции операторного аргумента

1. Функцию  $f$ , ставящую в соответствие каждому оператору  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  число, назовем *инвариантной скалярной функцией операторного аргумента на операторе  $\mathcal{A}$* , если

$$f(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}) = f(\mathcal{A}) \quad (8.1)$$

для любого невырожденного оператора  $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ .

**1.1. Теорема.** *Для того, чтобы скалярная функция  $f$  операторного аргумента была инвариантной на любом операторе простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы она зависела только от инвариантов оператора.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Характеристические полиномы операторов  $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}$  и  $\mathcal{A}$  при любом невырожденном операторе  $\mathcal{Q}$  совпадают. Поэтому, если скалярная функция зависит только от инвариантов оператора, то она инвариантна. Обратно, пусть все инварианты операторов простой структуры  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  совпадают. Тогда (см. упражнение, с. 191) существует невырожденный оператор  $\mathcal{Q}$  такой, что  $\mathcal{B} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}$  и, если функция  $f$  инвариантна, то  $f(\mathcal{B}) = f(\mathcal{A})$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Приведите примеры инвариантных скалярных функций операторного аргумента.

2. Операторную функцию  $f$ , т. е. функцию, отображающую линейное пространство операторов в себя, назовем *инвариантной на операторе  $\mathcal{A}$* , если

$$f(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}) = \mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^{-1}$$

для любого невырожденного оператора  $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ .

**2.1. Теорема.** *Операторная функция  $f$  инвариантна на любом операторе  $\mathcal{A}$  простой структуры тогда и только тогда, когда для любого оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  простой структуры имеет место представление:*

$$f(\mathcal{A}) = \varphi_0 I + \varphi_1 \mathcal{A} + \varphi_2 \mathcal{A}^2 + \dots + \varphi_{n-1} \mathcal{A}^{n-1}, \quad (8.2)$$

где  $\varphi_i = \varphi_i(\mathcal{A})$ ,  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , есть инвариантные скалярные функции операторного аргумента.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При любом невырожденном операторе  $\mathcal{Q}$  характеристические полиномы, а значит, и инварианты операторов  $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}$  и  $\mathcal{A}$  совпадают. Очевидно также, что  $(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1})^p = \mathcal{Q}\mathcal{A}^p\mathcal{Q}^{-1}$

при любом целом неотрицательном  $p$ . Поэтому любая функция вида (8.2) инвариантна.

Докажем обратное утверждение. Пусть  $\mathcal{A}$  — оператор простой структуры,  $\{e_k\}_{k=1}^n$  — его собственные векторы, образующие базис пространства  $\mathbf{X}_n$ ,  $\mathcal{A}e_k = \lambda_k e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Определим оператор  $\mathcal{Q}$  равенствами  $\mathcal{Q}e_1 = -e_1$ ,  $\mathcal{Q}e_k = e_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ . Нетрудно видеть, что  $\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}$ . Очевидно также, что  $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}e_k = \mathcal{A}e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , т. е.  $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{A}$ . Положим  $\mathcal{D} = f(\mathcal{A})$ . Тогда  $\mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^{-1}$ . По условию теоремы  $\mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^{-1} = f(\mathcal{A})$ , значит,  $\mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{D}$ , или  $\mathcal{Q}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{Q}$ . Следовательно,

$$\mathcal{Q}\mathcal{D}e_1 = -\mathcal{D}e_1. \quad (8.3)$$

С другой стороны, если

$$\mathcal{D}e_1 = d_1e_1 + d_2e_2 + \dots + d_n e_n, \quad (8.4)$$

то

$$\mathcal{Q}\mathcal{D}e_1 = -d_1e_1 + d_2e_2 + \dots + d_n e_n. \quad (8.5)$$

Из равенств (8.3)–(8.5), очевидно, вытекает, что  $d_2, d_3, \dots, d_n = 0$ , а это означает, что  $\mathcal{D}e_1 = d_1e_1$ , т. е.  $e_1$  — собственный вектор оператора  $\mathcal{D}$ . Аналогично доказывается, что и все остальные векторы системы  $\{e_k\}_{k=1}^n$  — собственные векторы оператора  $\mathcal{D}$ , т. е.  $f(\mathcal{A})e_k = d_k e_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Заметим теперь, что для любого обратимого оператора  $\mathcal{Q}$  справедливы равенства  $\mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^{-1}g_k = d_k g_k$ , где  $g_k = \mathcal{Q}e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , следовательно,  $f(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1})g_k = d_k g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, все собственные числа операторов  $f(\mathcal{A})$  и  $f(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1})$  совпадают. Это означает, что все собственные числа оператора  $f(\mathcal{A})$  — инвариантные скалярные функции оператора  $\mathcal{A}$  и потому зависят только от инвариантов оператора  $\mathcal{A}$ .

Пусть  $e_1, e_2$  — собственные векторы оператора  $\mathcal{A}$ , соответствующие одному и тому же собственному числу:  $\mathcal{A}e_1 = \lambda e_1$ ,  $\mathcal{A}e_2 = \lambda e_2$ . Тогда и собственные числа оператора  $\mathcal{D}$ , отвечающие собственным векторам  $e_1, e_2$ , также совпадают:  $\mathcal{D}e_1 = d e_1$ ,  $\mathcal{D}e_2 = d e_2$ . Для доказательства этого утверждения введем в рассмотрение оператор  $\mathcal{Q}$ , определяемый равенствами  $\mathcal{Q}e_1 = e_2$ ,  $\mathcal{Q}e_2 = e_1$ ,  $\mathcal{Q}e_3 = e_3$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{Q}e_n = e_n$ . Нетрудно убедиться, что оператор  $\mathcal{Q}^{-1}$  существует и  $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}e_k = \mathcal{A}e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , т. е.  $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{A}$ , а значит, и

$$\mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{D}. \quad (8.6)$$

Пусть теперь  $e = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ , где  $\beta_1, \beta_2$  — произвольные числа, не равные нулю одновременно. В силу (8.6) имеем  $\mathcal{Q}\mathcal{D}e = \mathcal{D}\mathcal{Q}e$ , или

$$\mathcal{Q}(d_1\beta_1 e_1 + d_2\beta_2 e_2) = \mathcal{D}(\beta_1 e_2 + \beta_2 e_1),$$

поэтому

$$d_1\beta_1 e_2 + d_2\beta_2 e_1 = \beta_1 d_2 e_2 + \beta_2 d_1 e_1,$$

откуда вытекает, что  $d_1\beta_1 = \beta_1 d_2$ ,  $d_2\beta_2 = \beta_2 d_1$ , следовательно,  $d_1 = d_2$ . Как нетрудно убедиться, это означает, что кратности всех собственных чисел операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{D}$  совпадают и, таким образом, установлено, что если

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_s \mathcal{P}_s, \quad (8.7)$$

$s \leq n$ , есть спектральное представление оператора  $\mathcal{A}$  (см. (6.1), с. 190), то спектральное представление оператора  $\mathcal{D}$  имеет вид

$$\mathcal{D} = d_1 \mathcal{P}_1 + d_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + d_s \mathcal{P}_s. \quad (8.8)$$

При этом существенно, что операторы проектирования  $\mathcal{P}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ , в равенстве (8.7) те же самые, что и в равенстве (8.8). Как показано в § 6, с. 189, каждый из операторов  $\mathcal{P}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ , есть полином степени не выше  $s - 1$  от оператора  $\mathcal{A}$  с коэффициентами, зависящими лишь от собственных чисел оператора  $\mathcal{A}$ . Отсюда, очевидно, следует справедливость представления (8.2).  $\square$

**3. Теорема.** *Для того, чтобы функция  $f$  была линейной и инвариантной на любом операторе простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$f(\mathcal{A}) = \lambda \operatorname{tr}(\mathcal{A})I + 2\mu\mathcal{A}, \quad (8.9)$$

где  $\lambda, \mu$  — числа.

Доказательство этой теоремы поручается читателю в качестве упражнения.

## § 9. Инвариантные подпространства оператора в вещественном пространстве

**1.** Пусть теперь оператор  $\mathcal{A}$  действует в вещественном пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Матрица  $A_e$  оператора  $\mathcal{A}$  в любом базисе  $\mathcal{E}_n$  вещественна. Уравнение (2.3), с. 184, т. е. характеристическое уравнение матрицы  $A_e$ , — алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами. Оно, вообще говоря, имеет как вещественные, так и комплексные корни.

Если  $\lambda$  — вещественный корень уравнения (2.3), то система уравнений

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0 \quad (9.1)$$

имеет нетривиальное вещественное решение  $\xi$ , и для вектора  $x = \mathcal{E}_n \xi$  выполнено равенство  $\mathcal{A}x = \lambda x$ , т. е.  $x$  — собственный вектор оператора  $\mathcal{A}$ . Таким образом, все вещественные характеристические числа матрицы  $A_e$  — собственные числа оператора  $\mathcal{A}$ .

Если число  $\lambda$  не совпадает ни с одним из вещественных корней уравнения (2.3), то система уравнений (9.1) не может иметь нетривиальных вещественных решений, поэтому, если все корни уравнения (2.3) — комплексные числа, то оператор  $\mathcal{A}$  не имеет собственных векторов.

Таким образом, линейный оператор, действующий в вещественном пространстве, может не иметь одномерных инвариантных подпространств.

**2.** Каждому комплексному характеристическому числу матрицы  $A_e$  соответствует двумерное инвариантное подпространство оператора  $\mathcal{A}$ .

Действительно, если  $\lambda = \alpha + i\beta$  — комплексное характеристическое число матрицы  $A_e$ , то  $\det(A_e - \lambda I) = 0$ , и система уравнений

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0 \quad (9.2)$$

имеет нетривиальное комплексное решение  $\xi = \zeta + i\eta$ . Поясним, что  $\zeta$  и  $\eta$  — векторы из  $\mathbb{R}^n$ . Более подробная запись системы (9.2), с учетом того, что  $A_e$  — вещественная матрица, дает

$$A_e \zeta + iA_e \eta = (\alpha + i\beta)(\zeta + i\eta) = \alpha\zeta - \beta\eta + i(\beta\zeta + \alpha\eta),$$

откуда, приравнивая вещественные и мнимые части, получаем

$$A_e \zeta = \alpha\zeta - \beta\eta,$$

$$A_e \eta = \beta\zeta + \alpha\eta.$$

Полагая  $x = \mathcal{E}_n \zeta$ ,  $y = \mathcal{E}_n \eta$ , будем иметь

$$\mathcal{A}x = \alpha x - \beta y, \quad (9.3)$$

$$\mathcal{A}y = \beta x + \alpha y. \quad (9.4)$$

Образуем подпространство  $L$ , натянутое на векторы  $x$ ,  $y$ . Пусть вектор  $z \in L$ . Это означает, что  $z = \gamma x + \delta y$  для некоторых  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\mathcal{A}z \in L$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} Az &= \gamma Ax + \delta Ay = \gamma(\alpha x - \beta y) + \delta(\beta x + \alpha y) = \\ &= (\alpha\gamma + \beta\delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma)y \in L. \end{aligned}$$

Таким образом,  $L$  — инвариантное подпространство оператора  $A$ .

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Показать, что векторы  $x, y$ , удовлетворяющие соотношениям (9.3), (9.4), линейно независимы, т. е. подпространство  $L$  двумерно.

2) Пусть  $\mathbf{X}_n$  — вещественное пространство. Показать, что в любом подпространстве  $L_m \subset \mathbf{X}_n$  размерности  $m \geq 2$ , инвариантном относительно оператора  $A: \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ , оператор  $A$  имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство.

## § 10. Приведение матрицы оператора к треугольной форме

**1. Теорема.** Для любого оператора  $A$ , действующего в комплексном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , можно указать такой базис, что матрица оператора  $A$  в этом базисе треугольна, причем по ее диагонали расположены все собственные числа оператора  $A$ .

В основе доказательства этого утверждения лежит

**2. Теорема Шура<sup>1)</sup>.** Пусть  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — характеристические числа матрицы  $A$ , занумерованные в некотором порядке. Существует унитарная матрица  $U$  такая, что

$$U^*AU = T, \quad (10.1)$$

где  $T$  — верхняя треугольная матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u^1$  — собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному числу  $\lambda_1$ . Собственные векторы матрицы определяются с точностью до скалярного множителя, поэтому можно считать, что  $|u^1| = 1$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup>Исая Шур (Issai Schur; 1875 — 1941) — немецкий математик.

<sup>2)</sup>Здесь и далее на протяжении этого параграфа под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

Построим в пространстве  $\mathbb{C}^n$  ортонормированный базис  $\{u^k\}_{k=1}^n$  (см. п. 2, с. 137) и обозначим через  $U_1$  матрицу, столбцами которой служат элементы векторов  $\{u^k\}_{k=1}^n$ .

Вычислим матрицу  $U_1^*AU_1$ . Учтем при этом, что  $Au^1 = \lambda_1u^1$ , а  $(u^k, u^1) = 0$  для  $k = 2, 3, \dots, n$ . В результате, получим, что

$$U_1^*AU_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

Справа в этом равенстве — блочная  $2 \times 2$  матрица. Первый диагональный блок состоит из одного элемента, равного  $\lambda_1$ . Второй диагональный блок — квадратная матрица размера  $n - 1$ . Блок в позиции (2,1) — нулевой столбец длины  $n - 1$ . Блок в позиции (1,2) — строка длины  $n - 1$  с ненулевыми, вообще говоря, элементами. Обозначения, аналогичные использованным здесь, будут применяться и в дальнейшем.

Матрица  $U_1^*AU_1$  подобна матрице  $A$ , поэтому (см. теорему 2, с. 185)

$$\sigma(U_1^*AU_1) = \sigma(A).$$

С другой стороны, из (10.3) вытекает, что  $\sigma(U_1^*AU_1) = \lambda_1 \cup \sigma(A_1)$ . Для того, чтобы убедиться в этом, нужно разложить по первому столбцу определитель  $\det(\lambda I - U_1^*AU_1)$ . Таким образом,

$$\sigma(A_1) = \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Рассуждая точно так же, как при построении матрицы  $U_1$ , можно построить унитарную матрицу  $U_2$  порядка  $n - 1$  такую, что

$$U_2^*A_1U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Положим

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $V_2$ , как нетрудно убедиться, есть унитарная матрица порядка  $n$ . Проводя элементарные вычисления, получим

$$V_2^*U_1^*AU_1V_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что, продолжая этот процесс, можно построить унитарные матрицы  $V_3, \dots, V_{n-1}$  такие, что матрица

$$V_{n-1}^* \cdots V_2^*U_1^*AU_1V_2 \cdots V_{n-1}$$

есть верхняя треугольная матрица, на главной диагонали которой последовательно стоят числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Положим  $U = U_1 V_2 \cdots V_{n-1}$ . Матрица  $U$  унитарна как произведение унитарных матриц (см. п. 6, с. 108), причем  $U^* = V_{n-1}^* \cdots V_2^* U_1^*$ , поэтому для матрицы  $T = U^* A U$  справедливо равенство (10.2).  $\square$

3. Совершенно аналогично доказывается, что существует унитарная матрица  $V$  такая, что

$$V^* A V = L,$$

где  $L$  — нижняя треугольная матрица, по диагонали которой расположены характеристические числа матрицы  $A$ .

4. Из доказательства теоремы Шура видно, что если матрица  $A$  вещественна и все ее характеристические числа (а, следовательно, и собственные векторы) вещественны, то матрица  $U$  в (10.1) может быть выбрана вещественной и унитарной, иными словами, ортогональной.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Пусть  $\mathcal{A}$  — произвольный линейный оператор, действующий в пространстве  $\mathbf{X}_n$ ,  $\mathcal{F}_n = \{f^k\}_{k=1}^n$  — произвольно фиксированный базис в  $\mathbf{X}_n$ . Тогда  $\mathcal{A}\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n A_f$ , где  $A_f$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе (см. (6.3), с. 162). По теореме Шура существует унитарная матрица  $U$  такая, что  $A_f = U T U^*$ , где  $T$  — матрица вида (10.2),  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — характеристические числа матрицы  $A_f$ , или, что все равно, собственные числа оператора  $\mathcal{A}$ , следовательно,  $\mathcal{A}\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n U T U^*$ , или  $\mathcal{A}\mathcal{F}_n U = \mathcal{F}_n U T$ . Положим  $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_n U$ . Тогда  $\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T$ . Таким образом,  $T$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\mathcal{E}_n$ .  $\square$

## § 11. Нильпотентный оператор

1. Оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в конечномерном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , называется *нильпотентным*, если существует целое число  $q \geq 1$  такое, что  $\mathcal{A}^q = 0$ . Наименьшее  $q$ , для которого выполнено указанное равенство, называется *индексом* нильпотентности оператора  $\mathcal{A}$ . Аналогичным образом вводится понятие *нильпотентности* квадратной матрицы.

Вследствие (6.8), с. 163, имеем  $A_e^q = \mathcal{E}^{-1} \mathcal{A}^q \mathcal{E}$ , поэтому, если  $\mathcal{A}$  — нильпотентный оператор, то и его матрица в любом базисе нильпотентна с тем же индексом нильпотентности и, наоборот, если матрица оператора в некотором базисе нильпотентна, то и оператор нильпотентен с тем же индексом нильпотентности.



**2. Лемма.** Пусть  $A$  — треугольная матрица порядка  $n$ , все диагональные элементы которой равны нулю. Тогда  $A$  — нильпотентная матрица, индекс ее нильпотентности не превосходит  $n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что  $A$  — нижняя треугольная матрица. В случае верхней треугольной матрицы рассуждения повторяются, практически, дословно. Пусть  $x$  — произвольный вектор из  $\mathbb{C}^n$ . Тогда, как нетрудно видеть, первая компонента вектора  $Ax$  равна нулю. Аналогично проверяется, что первые две компоненты вектора  $A(Ax) = A^2x$  равны нулю. Продолжая эти вычисления, получим, что все компоненты вектора  $A^n x$  равны нулю. Вследствие произвольности вектора  $x$  отсюда вытекает, что  $A^n = 0$ .  $\square$

**3. Теорема.** Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор  $\mathcal{A}$  нильпотентен и  $q$  — индекс его нильпотентности. Пусть  $\lambda, x$  — собственная пара оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\mathcal{A}x = \lambda x$ , следовательно,  $\mathcal{A}^q x = \lambda^q x$ . По сделанному предположению  $\mathcal{A}^q x = 0$ , поэтому  $\lambda^q x = 0$ , но  $x \neq 0$ , значит,  $\lambda = 0$ . Обратно, пусть все собственные числа оператора  $\mathcal{A}$  равны нулю. По теореме 1, с. 198, существует базис, в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  треугольна, причем вследствие сделанного предположения все ее диагональные элементы — нули, значит, по лемме 2 она нильпотентна.  $\square$

Укажем на очевидное

**3.1. Следствие.** Индекс нильпотентности оператора, действующего в  $n$ -мерном пространстве, не может превосходить  $n$ .

**4.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — нильпотентный оператор индекса  $q$ . Тогда, очевидно, существует вектор  $x^0 \in \mathbf{X}_n$  такой, что  $\mathcal{A}^{q-1}x^0 \neq 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что векторы  $x^0, \mathcal{A}x^0, \dots, \mathcal{A}^{q-1}x^0$  линейно независимы.

## § 12. Приведение матрицы оператора к жордановой форме

В этом параграфе будет показано, что для любого линейного оператора, действующего в комплексном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , можно указать базис, в котором матрица оператора имеет очень простую форму. Она двухдиагональна. Причем по ее главной диагонали расположены

все собственные числа оператора. На ближайшей сверху параллельной диагонали располагаются элементы, которые могут принимать значения нуль или единица. Матрица такого вида называется *жордановой*<sup>1)</sup>. Для того, чтобы получить *жорданово представление* оператора, нужно взять его матрицу в произвольно выбранном базисе, а затем преобразованием подобия привести ее к жордановой форме. Указанная программа и будет реализована в настоящем параграфе.

Естественно, возникает вопрос, а нельзя ли любую матрицу привести подобным преобразованием к диагональному виду. Простейшие примеры показывают, что это невозможно. Так, если потребовать, чтобы матрица  $SAS^{-1}$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при некоторой невырожденной матрице  $S$  была диагональной, то мы получим противоречивые равенства.

**1.** Нам потребуется следующее определение. *Жордановым блоком* или *жордановой клеткой* называется верхняя треугольная матрица  $J_k(\lambda)$ , имеющая вид

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}. \quad (12.1)$$

Поясним, что  $k$  — порядок матрицы  $J_k(\lambda)$ , все элементы ее главной диагонали равны  $\lambda$ , параллельно главной диагонали располагается  $k - 1$  единиц. Все остальные элементы матрицы  $J_k(\lambda)$  равны нулю.

**2.** Полезно отметить, что если матрица оператора  $\mathcal{A}: \mathbf{X}_k \rightarrow \mathbf{X}_k$  в базисе  $\{e^i\}_{i=1}^k$  есть клетка Жордана  $J_k(0)$ , то векторы этого базиса, очевидно, связаны соотношениями

$$\mathcal{A}e^1 = 0, \quad \mathcal{A}e^2 = e^1, \quad \dots, \quad \mathcal{A}e^k = e^{k-1}.$$

Обозначая вектор  $e^k$  через  $f$ , получим, что базис  $\{e^i\}_{i=1}^k$  образован векторами  $f, \mathcal{A}f, \mathcal{A}^2f, \dots, \mathcal{A}^{k-1}f$ <sup>1)</sup>, причем  $\mathcal{A}^k f = 0$ .

Сформулируем теперь основной результат настоящего параграфа.

<sup>1)</sup>Мари Энмон Камиль (Камилл) Жордан (Marie Ennemond Camille Jordan; 1838 — 1922) — французский математик.

<sup>1)</sup>Взятыми в обратном порядке.

**3. Теорема.** Для произвольной матрицы  $A$  порядка  $n$  существует невырожденная матрица  $S$  такая, что

$$S^{-1}AS = J, \quad (12.2)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}. \quad (12.3)$$

Здесь  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Числа  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , не обязательно различные, исчерпывают все множество характеристических чисел матрицы  $A$  (с учетом их кратности).

**3.1.** Теорема 3, очевидно, эквивалентна следующему утверждению. Для любого оператора  $\mathcal{A}$ , действующего в конечномерном комплексном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , можно указать базис  $\mathcal{E}_n$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  принимает вид (12.3), т. е.

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n J. \quad (12.4)$$

Базис, в котором матрица оператора принимает жорданову форму, называется *жордановым базисом*.

**4.** Наиболее просто доказательство существования жорданова базиса проводится для нильпотентного оператора. Отметим, что в соответствии с теоремой 3, с. 201, и теоремой Шура для того, чтобы оператор был нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы матрица этого оператора в некотором базисе была верхней треугольной с нулевыми элементами на главной диагонали.

**4.1. Теорема.** Пусть  $\mathbf{X}_n$  — комплексное линейное пространство,  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — нильпотентный оператор. Тогда существует базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  принимает жорданову форму

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & 0 \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_m}(0) \end{pmatrix}. \quad (12.5)$$

Здесь  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Принимая во внимание сказанное в п. 2, нетрудно убедиться, что доказываемое утверждение эквивалентно

следующему: для любого нильпотентного оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  существуют векторы  $f^1, f^2, \dots, f^m$  такие, что

$$f^1, \mathcal{A}f^1, \mathcal{A}^2f^1, \dots, \mathcal{A}^{n_1-1}f^1, f^2, \mathcal{A}f^2, \mathcal{A}^2f^2, \dots, \mathcal{A}^{n_2-1}f^2, \dots, f^m, \mathcal{A}f^m, \mathcal{A}^2f^m, \dots, \mathcal{A}^{n_m-1}f^m \quad (12.6)$$

есть базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , причем

$$\mathcal{A}^{n_1}f^1 = \mathcal{A}^{n_2}f^2 = \dots = \mathcal{A}^{n_m}f^m = 0. \quad (12.7)$$

Существование искомого базиса докажем индукцией по размерности пространства. Для случая нильпотентного оператора, действующего в одномерном пространстве, доказываемое утверждение выполняется тривиальным образом. Предположим, что оно верно для любого пространства размерности меньше  $n$ , и покажем, что тогда это утверждение справедливо и для пространства размерности равной  $n$ .

Оператор  $\mathcal{A}$  нильпотентен, следовательно,  $\text{def}(\mathcal{A}) \geq 1$ , поэтому (см. (5.1), с. 161)  $\text{rank}(\mathcal{A}) < n$ . Подпространство  $\text{Im}(\mathcal{A})$ , очевидно, инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ , поэтому в силу предположения индукции существуют векторы  $u^1, u^2, \dots, u^k$  такие, что векторы

$$u^1, \mathcal{A}u^1, \mathcal{A}^2u^1, \dots, \mathcal{A}^{p_1-1}u^1, u^2, \mathcal{A}u^2, \mathcal{A}^2u^2, \dots, \mathcal{A}^{p_2-1}u^2, \dots, u^k, \mathcal{A}u^k, \mathcal{A}^2u^k, \dots, \mathcal{A}^{p_k-1}u^k \quad (12.8)$$

образуют базис подпространства  $\text{Im}(\mathcal{A})$ , причем,

$$\mathcal{A}^{p_1}u^1 = \mathcal{A}^{p_2}u^2 = \dots = \mathcal{A}^{p_k}u^k = 0. \quad (12.9)$$

Для  $i = 1, 2, \dots, k$  векторы  $u^i$  принадлежат  $\text{Im}(\mathcal{A})$ , следовательно, существуют векторы  $v^i \in \mathbf{X}_n$  такие, что

$$u^i = \mathcal{A}v^i. \quad (12.10)$$

Векторы

$$\mathcal{A}^{p_i-1}u^i, i = 1, 2, \dots, k, \quad (12.11)$$

принадлежат базису (12.8), следовательно, они линейно независимы. Соотношения (12.9) показывают, что эти векторы принадлежат  $\text{Ker}(\mathcal{A})$ . Отсюда вытекает, что можно построить векторы  $w^1, w^2, \dots, w^l$ , дополняющие векторы (12.11) до базиса подпространства  $\text{Ker}(\mathcal{A})$ .

Если мы покажем теперь, что векторы

$$v^1, \mathcal{A}v^1, \dots, \mathcal{A}^{p_1}v^1, v^2, \mathcal{A}v^2, \dots, \mathcal{A}^{p_2}v^2, \dots, v^k, \mathcal{A}v^k, \dots, \mathcal{A}^{p_k}v^k, \\ w^1, w^2, \dots, w^l \quad (12.12)$$

образуют базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , то, очевидно, это и будет искомым базисом Жордана оператора  $\mathcal{A}$ . Система (12.12) содержит  $n$  векторов. В самом деле, в этой системе  $p_1 + \dots + p_k + k + l$  элементов, причем  $p_1 + \dots + p_k = \text{rank}(\mathcal{A})$ , и  $k + l = \text{def}(\mathcal{A})$ , а для любого оператора  $\mathcal{A}$  справедливо равенство  $\text{rank}(\mathcal{A}) + \text{def}(\mathcal{A}) = n$ . Далее, пусть

$$\alpha_{1,0}v^1 + \alpha_{1,1}\mathcal{A}v^1 + \dots + \alpha_{1,p_1}\mathcal{A}^{p_1}v^1 + \alpha_{2,0}v^2 + \alpha_{2,1}\mathcal{A}v^2 + \dots + \alpha_{2,p_2}\mathcal{A}^{p_2}v^2 + \\ + \dots + \alpha_{k,0}v^k + \alpha_{k,1}\mathcal{A}v^k + \dots + \alpha_{k,p_k}\mathcal{A}^{p_k}v^k + \\ + \beta_1w^1 + \beta_2w^2 + \dots + \beta_lw^l = 0. \quad (12.13)$$

Поддействуем на обе части этого равенства оператором  $\mathcal{A}$ , учтем соотношения (12.9), (12.10) и тот факт, что  $w^1, w^2, \dots, w^l \in \text{Ker}(\mathcal{A})$ . Получим

$$\alpha_{1,0}u^1 + \alpha_{1,1}\mathcal{A}u^1 + \dots + \alpha_{1,p_1-1}\mathcal{A}^{p_1-1}u^1 + \\ + \alpha_{2,0}u^2 + \alpha_{2,1}\mathcal{A}u^2 + \dots + \alpha_{2,p_2-1}\mathcal{A}^{p_2-1}u^2 + \\ + \dots + \alpha_{k,0}u^k + \alpha_{k,1}\mathcal{A}u^k + \dots + \alpha_{k,p_k-1}\mathcal{A}^{p_k-1}u^k = 0. \quad (12.14)$$

Векторы (12.8) линейно независимы, следовательно, все коэффициенты линейной комбинации в левой части (12.14) — нули, и равенство (12.13) принимает вид

$$\alpha_{1,p_1}\mathcal{A}^{p_1}v^1 + \alpha_{2,p_2}\mathcal{A}^{p_2}v^2 + \dots + \alpha_{k,p_k}\mathcal{A}^{p_k}v^k + \\ + \beta_1w^1 + \beta_2w^2 + \dots + \beta_lw^l = 0. \quad (12.15)$$

В левой части (12.15) — линейная комбинация базисных векторов подпространства  $\text{Ker}(\mathcal{A})$ , поэтому все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю. Таким образом, показано, что все коэффициенты линейной комбинации в правой части равенства (12.13) могут быть только нулями, т. е. система векторов (12.12) линейно независима, содержит  $n$  векторов и потому является базисом пространства  $\mathbf{X}_n$ .  $\square$

Непосредственным обобщением теоремы 4.1 является

**4.2. Теорема.** Пусть оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в комплексном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , имеет вид  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \lambda I$ , где  $\mathcal{A}_0$  — нильпотентный оператор,  $\lambda$  — произвольное число. Тогда в базисе Жордана

оператора  $A_0$  матрица оператора  $A$  имеет жорданову форму

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_m}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (12.16)$$

Справедливость этого утверждения следует из того, что линейным операциям над операторами соответствуют линейные операции над их матрицами, а матрица тождественного оператора в любом базисе — единичная матрица.

**5. Теорема.** Пусть  $A$  — произвольная квадратная матрица порядка  $n$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  — попарно различные характеристические числа матрицы  $A$  кратностей  $n_1, n_2, \dots, n_k$ ,  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Существует невырожденная матрица  $S$  такая, что

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} T_1 & & & 0 \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_k \end{pmatrix} \quad (12.17)$$

есть блочно диагональная матрица, каждый диагональный блок  $T_i$  — верхняя треугольная матрица порядка  $n_i$ , все диагональные элементы матрицы  $T_i$  равны  $\lambda_i$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сначала, используя теорему Шура, приведем унитарным подобием матрицу  $A$  к верхнему треугольному виду  $T$ . При этом характеристические числа матрицы  $A$  будем упорядочивать так, как это сделано в формулировке настоящей теоремы, т. е. сначала на диагонали треугольной матрицы будут расположены  $n_1$  чисел  $\lambda_1$ , затем  $n_2$  чисел  $\lambda_2$  и т. д.

Для того, чтобы завершить доказательство теоремы, нужно построить преобразование подобия, которое «уничтожит лишние» ненулевые элементы верхней треугольной матрицы и приведет ее к виду (12.17).

Искомое преобразование будет получено как результат последовательных элементарных преобразований подобия, основанных на использовании матриц вида  $I + \alpha E_{rs}$ , где, напомним,  $E_{rs}$  — матрица, у которой элемент в позиции  $(r, s)$  равен единице, а все остальные элементы — нули. Нетрудно убедиться, что если  $r \neq s$ , то при любом  $\alpha$  справедливо равенство  $(I + \alpha E_{rs})(I - \alpha E_{rs}) = I$ , т. е. матрицы  $(I + \alpha E_{rs})$ ,  $(I - \alpha E_{rs})$  взаимно обратны.

Проводя элементарные вычисления, нетрудно проверить, что для любой верхней треугольной матрицы  $T$  матрица

$$(I - \alpha E_{rs})T(I + \alpha E_{rs}) \quad (12.18)$$

при  $r < s$  отличается от  $T$  только элементами, стоящими в  $r$ -й строке правее  $s$ -го столбца, и элементами, стоящим в  $s$ -м столбце выше  $r$ -й строки, а также элементом в позиции  $(r, s)$ , который принимает значение, равное  $t_{rs} + \alpha(t_{rr} - t_{ss})$ . Если  $t_{rr} \neq t_{ss}$ , то, полагая  $\alpha = -t_{rs}/(t_{rr} - t_{ss})$ , преобразование подобия (12.18) получим матрицу, которая, как и  $T$ , — верхняя треугольная матрица, ее диагональные элементы такие же, как у  $T$ , а элемент в позиции  $(r, s)$  равен нулю.

Обратимся теперь к верхней треугольной матрице  $T$ , полученной, как уже говорилось, из матрицы  $A$  при помощи теоремы Шура. Будем перебирать элементы матрицы  $T$  по строкам в следующем порядке:  $(n-1, n)$ ;  $(n-2, n-1)$ ,  $(n-2, n)$ ;  $(n-3, n-2)$ ,  $(n-3, n-1)$ ,  $(n-3, n)$ ; ... Если при этом окажется, что соответствующие элементы  $t_{rr}$  и  $t_{ss}$  различны, то элемент  $t_{rs}$  превратим в нулевой при помощи описанного выше преобразования подобия (12.18). Важно подчеркнуть, на каждом шаге такого преобразования нули, полученные на предыдущих шагах, не будут «портиться». В результате будет построена матрица, подобная матрице  $A$  и имеющая вид (12.17).  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Опираясь на теорему 5, докажите, что для любого оператора  $\mathcal{A}$ , действующего в пространстве  $\mathbf{X}_n$ , существуют такие его инвариантные подпространства  $M$  и  $N$ , что  $\mathbf{X}_n = M \dot{+} N$ , сужение оператора  $\mathcal{A}$  на подпространство  $M$  есть нильпотентный оператор, сужение оператора  $\mathcal{A}$  на подпространство  $N$  — обратимый оператор.

**6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** теоремы 3. Представление (12.2) получается как результат последовательного выполнения следующих шагов.

1) Опираясь на теорему Шура, находим верхнюю треугольную матрицу  $T$ , унитарно подобную матрице  $A$ .

2) Используя метод, описанный в доказательстве теоремы 5, приведем матрицу  $T$  к блочно диагональному виду. Каждый блок здесь будет верхней треугольной матрицей, у которой все диагональные элементы равны между собой и совпадают с некоторым характеристическим числом матрицы  $A$ .

3) Применяя теоремы 4.1, 4.2, каждый блок, полученный на втором этапе, независимо приведем к виду (12.16).  $\square$

При исследовании единственности жордановой формы нам требуется

**7. Лемма.** Для жордановой клетки  $J_k(0)$  справедливы следующие соотношения:

$$(J_k(0))^k = 0, \quad (12.19)$$

$$(J_k(0))^j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \quad (12.20)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Справедливость (12.19) сразу следует из леммы 2, с. 201, (12.20) легко проверяется непосредственными вычислениями. При этом полезно отметить, что при последовательном увеличении степени матрицы  $J_k(0)$  ее ненулевые столбцы «вытесняются» вправо.  $\square$

**8. Теорема.** Жорданова матрица (12.2) определяется по матрице  $A$  однозначно (с точностью до перестановок жордановых клеток на главной диагонали).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Две возможные жордановы формы матрицы  $A$  подобны матрице  $A$  и потому обладают одним и тем же набором характеристических чисел (с учетом их кратностей), поэтому остается лишь доказать совпадение размеров жордановых клеток, соответствующих некоторому фиксированному характеристическому числу матрицы  $A$ .

Стоящую перед нами задачу можно сформулировать так: убедиться в совпадении размеров жордановых клеток двух возможных жордановых форм для матрицы, обладающей единственным характеристическим числом. Более того, используя рассуждения из доказательства теоремы 4.2, нетрудно заметить, что можно ограничиться рассмотрением матрицы  $A_0$ , которая имеет единственное характеристическое число, равное нулю.

Итак, пусть

$$J(0) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k}(0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}(0) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_r}(0) \end{pmatrix}$$

есть две возможные жордановы формы матрицы  $A_0$ . Будем считать жордановы клетки упорядоченными по неубыванию размеров (это можно добиться при помощи соответствующей нумерации базисов Жордана), так что

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_r = n,$$



$n$  — порядок матрицы  $A_0$ . Предположим, что первые  $l-1$ ,  $l \geq 1$  жордановых клеток матриц  $J(0)$  и  $\tilde{J}(0)$  совпадают. По предположению существует невырожденная матрица  $S$  такая, что

$$J(0) = S\tilde{J}(0)S^{-1}. \quad (12.21)$$

Вследствие сделанного предположения о совпадении первых  $l-1$  клеток матрица  $S$  должна иметь следующую структуру:

$$S = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & S_{n-p} \end{pmatrix},$$

где  $I_p$  — единичная матрица порядка  $p = n_1 + \dots + n_{l-1}$ . Это дает возможность, фактически, считать, что рассматриваются матрицы  $J(0)$  и  $\tilde{J}(0)$ , уже первые блоки которых, т. е.  $J_{n_1}(0)$ ,  $J_{m_1}(0)$ , не совпадают. Если мы установим, что это невозможно, то теорема будет доказана. Положим для определенности, что  $n_1 > m_1$  и возведем обе части равенства (12.21) в степень  $m_1$ . Получим

$$(J(0))^{m_1} = S(\tilde{J}(0))^{m_1}S^{-1}. \quad (12.22)$$

По лемме 7 имеем, что  $(\tilde{J}(0))^{m_1} = 0$ , по той же лемме  $(J(0))^{m_1} \neq 0$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.  $\square$

### § 13. Корневые и циклические подпространства

**1.** Матрица Жордана имеет блочно диагональную структуру, следовательно, пространство  $\mathbf{X}_n$  можно представить в виде прямой суммы инвариантных подпространств оператора  $\mathcal{A}$ , соответствующих этим блокам (см. п. 2.1, с. 182). Подпространство, отвечающее блоку  $J_{n_j}(\lambda_j)$  в представлении (12.2), называется *циклическим* подпространством. Прямая сумма всех циклических подпространств, отвечающих одному и тому же собственному числу  $\lambda$  оператора  $\mathcal{A}$ , называется *корневым* подпространством.

Исследуем подробнее структуру циклических и корневых подпространств.

**1.1.** Пусть собственному числу  $\lambda$  оператора  $\mathcal{A}$  отвечает циклическое подпространство размерности  $m$ . Пусть для определенности ему соответствуют векторы  $\{e^k\}_{k=1}^m$  базиса  $\mathcal{E}_n$ . Вследствие (12.4) получаем

$$\mathcal{A}e^1 = \lambda e^1, \quad \mathcal{A}e^2 = \lambda e^2 + e^1, \quad \dots, \quad \mathcal{A}e^m = \lambda e^m + e^{m-1}. \quad (13.1)$$

Отсюда сразу вытекает, что вектор  $e^1$  — собственный вектор оператора  $\mathcal{A}$ , и поскольку векторы  $e^1, e^2, \dots, e^{m-1}$ , конечно, не нули, то все остальные векторы  $e^2, e^3, \dots, e^m$  не являются собственными векторами оператора  $\mathcal{A}$ .

**1.2.** Каждое циклическое подпространство содержит ровно один собственный вектор оператора  $\mathcal{A}$ . В самом деле, если предположить, что вектор  $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_m e^m$  — собственный вектор оператора  $\mathcal{A}$ , то  $J_m(\lambda)\xi = \lambda\xi$ , где  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T$ . Последнее равенство эквивалентно тому, что  $J_m(0)\xi = 0$ . Ранг матрицы  $J_m(0)$  равен  $m - 1$ , так как  $\det J_m(0) = 0$ , а минор, получающийся при вычеркивании первого столбца и последней строки матрицы  $J_m(0)$ , равен единице. Поэтому размерность ядра матрицы  $J_m(0)$  равна единице.

**1.3.** Понятно, что если корневое подпространство, отвечающее собственному числу  $\lambda$  оператора  $\mathcal{A}$ , есть прямая сумма  $k$  циклических подпространств, то оно содержит ровно  $k$  линейно независимых собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающих собственному числу  $\lambda$ .

В соответствии с этим количество циклических подпространств данного корневого подпространства совпадает с геометрической кратностью собственного числа  $\lambda$ .

Сумма размерностей всех циклических подпространств, совпадающая с кратностью  $\lambda$  как корня характеристического уравнения оператора  $\mathcal{A}$ , есть алгебраическая кратность собственного числа  $\lambda$ .

**1.4.** Из (13.1) очевидным образом вытекает цепочка следующих равенств:

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^j e^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (13.2)$$

Нетрудно видеть, что  $(\mathcal{A} - \lambda I)^p e^j \neq 0$  при  $p < j$ . Целое число  $j$  принято в связи с этим называть *высотой циклического* вектора  $e^j$ . В частности, собственный вектор есть циклический вектор высоты, равной единице.

Нетрудно догадаться, что если  $l$  — размерность корневого подпространства, отвечающего собственному числу  $\lambda$  оператора  $\mathcal{A}$ , то для любого вектора  $x$  этого подпространства справедливо равенство

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^l x = 0. \quad (13.3)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Базис Жордана, конечно, не определяется однозначно по оператору  $\mathcal{A}$ . Более того, имея некий базис Жордана, можно легко построить по нему другой базис Жордана. Например, если в базисе  $\mathcal{E}_n$  заменить вектор  $e^2$  вектором  $\tilde{e}^2 = e^2 + \alpha e^1$ , где  $\alpha$  — любое число, то для такого базиса, по-прежнему, будут выполнены равенства (13.1), т. е. это также будет жорданов базис оператора  $\mathcal{A}$ . Однако, поскольку жорданова матрица определяется по оператору  $\mathcal{A}$  однозначно (с точностью до перестановки диагональных блоков), то все базисы Жордана будут иметь описанную выше структуру.

## § 14. Теорема Кэли — Гамильтона

1. Теорема Кэли — Гамильтона<sup>1)</sup>. Пусть

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 \quad (14.1)$$

есть характеристический полином оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда

$$P_n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^n + a_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} + \dots + a_0I = 0. \quad (14.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  — попарно различные корни полинома  $P_n$ ,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  — их кратности. Тогда (см. (2.6), с. 24)

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

Справедливо равенство

$$P_n(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda_1 I)^{n_1}(\mathcal{A} - \lambda_2 I)^{n_2} \dots (\mathcal{A} - \lambda_k I)^{n_k}. \quad (14.3)$$

Для того, чтобы убедиться в этом, нужно раскрыть скобки в правой части (14.3), привести подобные и воспользоваться затем формулами Вьета (с. 25). Пусть теперь  $x$  — произвольный вектор пространства  $\mathbf{X}_n$ . Поскольку пространство  $\mathbf{X}_n$  представимо в виде прямой суммы корневых подпространств  $L_j$  оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающих собственным числам  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , оператора  $\mathcal{A}$ , то вектор  $x$  можно записать в виде

$$x = x^1 + x^2 + \dots + x^k,$$

где  $x^j \in L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Следовательно,

$$P_n(\mathcal{A})x = P_n(\mathcal{A})x^1 + \dots + P_n(\mathcal{A})x^k.$$

Операторы  $(\mathcal{A} - \lambda_2 I)^{n_s}$ ,  $(\mathcal{A} - \lambda_2 I)^{n_t}$  при любых  $s, t = 1, \dots, k$  являются полиномами от оператора  $\mathcal{A}$  и поэтому, как нетрудно убедиться непосредственными вычислениями, они перестановочны, значит, для любого  $j = 1, 2, \dots, k$  справедливо равенство

$$P_n(\mathcal{A})x^j = Q_{n-n_j}(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_2 I)^{n_j}x^j.$$

Здесь  $Q_{n-n_j}(\mathcal{A})$  — полином от  $\mathcal{A}$  степени  $n - n_j$ . Вследствие (13.3) имеем  $(\mathcal{A} - \lambda_2 I)^{n_j}x^j = 0$ , поэтому  $P_n(\mathcal{A})x^j = 0$ , а значит,  $P_n(\mathcal{A})x = 0$ . Поскольку  $x$  — произвольный вектор пространства  $\mathbf{X}_n$ , получаем, что  $P_n(\mathcal{A}) = 0$ .  $\square$

Из теоремы 1 вытекает простое, но важное для приложений, например, в механике

<sup>1)</sup>Артур Кэли (Arthur Cayley; 1821 — 1895) — английский математик, Уильям Роуэн Гамильтон (William Rowan Hamilton; 1805 — 1865) — ирландский математик и физик.

**2. Следствие.** Пусть оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  обратим. Тогда существует полином  $Q_{n-1}$ , степени не выше чем  $n - 1$ , такой, что

$$\mathcal{A}^{-1} = Q_{n-1}(\mathcal{A}).$$

Доказательство этого утверждения поручается читателю.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите теорему 3, с. 201, в части достаточности, опираясь на теорему Кэли — Гамильтона.

## § 15. Сходящиеся матрицы

**1.** Хорошо известное читателю из курса математического анализа понятие предела последовательности вещественных чисел естественным образом обобщается на последовательности комплексных чисел. Именно, говорят, что последовательность  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  из  $\mathbb{C}$  сходится к  $z$  из  $\mathbb{C}$ , если  $|z_k - z| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Понятно, что последовательность  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к  $z$  тогда и только тогда, когда  $\{\operatorname{Re} z_k\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к  $\operatorname{Re} z$ , а  $\{\operatorname{Im} z_k\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к  $\operatorname{Im} z$ .

Очевидно, что для того, чтобы  $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$ , где  $q$  — комплексное, вообще говоря, число, необходимо и достаточно, чтобы  $|q| < 1$ .

Естественно попытаться исследовать аналогичную ситуацию для матриц. Будем говорить, что квадратная матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  с комплексными, вообще говоря, элементами является *сходящейся*, если  $A^p \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ , точнее говоря, для любых  $i, j = 1, 2, \dots, n$  выполнено предельное соотношение  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(p)} = 0$ , где через  $a_{ij}^{(p)}$  обозначены элементы матрицы  $A^p$ . Более общо, будем говорить, что последовательность матриц  $A^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится к матрице  $A$ , если  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$  для всех  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Изучение условий, при которых матрица оказывается сходящейся, полезно для многих приложений линейной алгебры, например, при исследовании итерационных методов решения систем линейных уравнений (см. гл. 17).

**2.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — все собственные числа матрицы  $A$ . Неотрицательное число

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| \quad (15.1)$$

называется *спектральным радиусом* матрицы  $A$ .

**3. Теорема.** Для того, чтобы матрица  $A$  была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы ее спектральный радиус был меньше единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании теоремы 3, с. 203, нетрудно получить, что при любом целом неотрицательном  $p$  справедливо равенство

$$A^p = S \begin{pmatrix} J_{n_1}^p(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}^p(\lambda_2) & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & J_{n_k}^p(\lambda_k) \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (15.2)$$

где каждый из блоков  $J_{n_j}(\lambda_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , — клетка Жордана (см. (12.1), с. 202). При этом важно помнить, что объединение элементов главных диагоналей матриц  $J_{n_j}(\lambda_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , исчерпывает все собственные числа матрицы  $A$ . Нетрудно видеть, что  $A^p \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда  $J_{n_j}^p(\lambda_j) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  для всех  $j = 1, 2, \dots, k$ . Таким образом, поведение степеней матрицы  $A$  целиком определяется поведением степеней матриц вида  $T = \lambda I + J(0)$ , где  $\lambda$  — собственное число матрицы  $A$ ,  $J(0)$  — клетка Жордана с нулевыми элементами на главной диагонали. По лемме 7, с. 208, имеем  $(J(0))^l = 0$ ,  $(J(0))^j \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, l-1$ , где  $l$  — порядок матрицы  $J(0)$ , следовательно, для любого  $p > l - 1$ <sup>1)</sup>

$$T^p = \lambda^p I + C_1^p \lambda^{p-1} J(0) + \dots + C_{l-1}^p \lambda^{p-l+1} (J(0))^{l-1}. \quad (15.3)$$

Заметим, что каждая из матриц  $J(0)$ ,  $(J(0))^2$ ,  $\dots$ ,  $(J(0))^{l-1}$  — треугольная матрица с нулевыми диагональными элементами. Следовательно, диагональные элементы матрицы  $T^p$  равны  $\lambda^p$ . Отсюда, очевидно, вытекает, что для того, чтобы матрица  $T$  была сходящейся, необходимо выполнение неравенства  $|\lambda| < 1$ . Для любого  $k = 0, 1, \dots, l-1$  имеем

$$C_k^p |\lambda|^{p-k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{|\lambda|^k k!} |\lambda|^p \leq \frac{1}{|\lambda|^k k!} p^k |\lambda|^p,$$

но  $p^k |\lambda|^p \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ , если  $|\lambda| < 1$ . Таким образом,  $T$  — сходящаяся матрица, если  $|\lambda| < 1$ .  $\square$

Хорошо известно, что если  $|q| < 1$ , то  $(1-q)^{-1} = 1 + q + q^2 + \dots$ . Аналогичное утверждение справедливо и для матриц.

<sup>1)</sup>Мы полагаем, что  $\lambda \neq 0$ , так как в противном случае  $T^p = 0$  для  $p > l - 1$ .

**4. Теорема.** Пусть  $A$  — сходящаяся матрица. Тогда матрица, обратная к матрице  $I - A$ , существует и представима в виде ряда

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots \quad (15.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нетрудно убедиться, что если  $\lambda$  — собственное число матрицы  $I - A$ , то  $1 - \lambda$  — собственное число матрицы  $A$ . Из теоремы 3 вытекает, что ни одно собственное число матрицы  $A$  не равно единице, значит, среди собственных чисел матрицы  $I - A$  нет нулевых, поэтому ее определитель не нуль, и, следовательно, матрица  $(I - A)^{-1}$  существует. Фиксируем некоторое целое  $k \geq 1$  и запишем очевидное равенство  $(I - A)(I + A + \dots + A^k) = I - A^{k+1}$ . Отсюда получаем, что  $\sum_{i=0}^k A^i = (I - A)^{-1} - (I - A)^{-1} A^{k+1}$ . Поскольку  $A$  — сходящаяся матрица, то предел правой части последнего равенства при  $k \rightarrow \infty$  существует и равен  $(I - A)^{-1}$ , но тогда и предел правой части этого равенства существует, т. е. соотношение (15.4) доказано.  $\square$

## Операторы в евклидовом пространстве

### § 1. Линейные функционалы

**1.** Линейное отображение пространства  $\mathbf{X}$  в одномерное пространство  $\mathbf{Y} = \mathbb{C}$  называется *линейным функционалом* (*линейной формой*). Подчеркнем, что линейный функционал ставит в соответствие каждому вектору  $x \in \mathbf{X}$  число.

**2. Теорема Рисса<sup>1)</sup>.** Пусть  $l$  — линейный функционал, заданный на конечномерном евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Тогда существует и притом только один вектор  $u \in \mathbf{X}_n$  такой, что

$$l(x) = (x, u) \quad \forall x \in \mathbf{X}_n. \quad (1.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Убедимся сначала, что вектор  $u$  определяется по функционалу  $l$  однозначно. Действительно, если предположить, что существует еще один вектор  $u^1 \in \mathbf{X}_n$  такой, что

$$l(x) = (x, u^1) \quad \forall x \in \mathbf{X}_n, \quad (1.2)$$

то, вычитая равенства (1.1), (1.2) почленно, получим, что

$$(x, u^1 - u) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}_n.$$

В частности, в последнем равенстве можно положить  $x = u^1 - u$ , и тогда  $(u^1 - u, u^1 - u) = 0$ , т. е.  $u^1 = u$ .

Для доказательства существования вектора  $u$ , определяемого тождеством (1.1), фиксируем в пространстве  $\mathbf{X}_n$  некоторый ортонормированный базис  $\{e^k\}_{k=1}^n$ , и пусть  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$ . Тогда вследствие линейности функционала  $l$  получаем

$$l(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k l(e^k).$$

Положим  $u = \sum_{k=1}^n \overline{l(e^k)} e^k$ . Применяя формулу (8.2), с. 139, будем иметь, что  $l(x) = (x, u)$  для любого  $x \in \mathbf{X}_n$ .  $\square$

<sup>1)</sup>Рисс Фридьеш (Frigeys Riesz; 1880 — 1956) — венгерский математик.

## § 2. Сопряженный оператор

1. Пусть  $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$  — евклидовы пространства,  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  — линейный оператор. Оператор  $\mathcal{A}^* : \mathbf{Y}_m \rightarrow \mathbf{X}_n$  называется *сопряженным* к оператору  $\mathcal{A}$ , если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) \quad \text{для любых } x \in \mathbf{X}_n \text{ и } y \in \mathbf{Y}_m. \quad (2.1)$$

Конечно, в левой части равенства здесь имеется в виду скалярное произведение в пространстве  $\mathbf{Y}_m$ , а в правой части — в пространстве  $\mathbf{X}_n$ .

2. Для любого оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  сопряженный оператор существует. В самом деле, фиксируем вектор  $y \in \mathbf{Y}_m$  и будем рассматривать скалярное произведение  $(\mathcal{A}x, y)$  как функционал на пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Из линейности оператора  $\mathcal{A}$  и линейности скалярного произведения по первому аргументу вытекает, что этот функционал линеен. Значит, по теореме Рисса существует и притом только один вектор  $g \in \mathbf{X}_n$  такой, что

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, g) \quad \forall x \in \mathbf{X}_n.$$

Таким образом, определено отображение, ставящее в соответствие каждому вектору  $y \in \mathbf{Y}_m$  вектор  $g \in \mathbf{X}_n$ . Обозначим это отображение через  $\mathcal{A}^*$ . Тогда можно написать, что

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) \quad \forall x \in \mathbf{X}_n, y \in \mathbf{Y}_m. \quad (2.2)$$

Осталось доказать, что отображение  $\mathcal{A}^*$  линейно. Пусть  $y^1, y^2 \in \mathbf{Y}_m$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}x, \alpha y^1 + \beta y^2) &= \bar{\alpha}(\mathcal{A}x, y^1) + \bar{\beta}(\mathcal{A}x, y^2) = \\ &= \bar{\alpha}(x, \mathcal{A}^*y^1) + \bar{\beta}(x, \mathcal{A}^*y^2) = (x, \alpha \mathcal{A}^*y^1 + \beta \mathcal{A}^*y^2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

С другой стороны, по определению отображения  $\mathcal{A}^*$  имеем

$$(\mathcal{A}x, \alpha y^1 + \beta y^2) = (x, \mathcal{A}^*(\alpha y^1 + \beta y^2)). \quad (2.4)$$

Сравнивая (2.3), (2.4) и используя произвольность вектора  $x \in \mathbf{X}_n$ , получаем

$$\mathcal{A}^*(\alpha y^1 + \beta y^2) = \alpha \mathcal{A}^*y^1 + \beta \mathcal{A}^*y^2.$$

Из определения сопряженного оператора, очевидно, вытекает, что  $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ .



## УПРАЖНЕНИЯ.

1) Докажите, что каждому оператору соответствует только один сопряженный оператор.

2) Докажите, что если  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  — линейные операторы, то  $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^* + \bar{\beta}\mathcal{B}^*$  для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

3) Покажите, что  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$  для любых операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ .

4) Докажите, что если линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  обратим, то оператор  $\mathcal{A}^*$  также обратим, причем  $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$ .

### §3. Вычисление матрицы оператора в евклидовом пространстве

1. Если пространство  $\mathbf{Y}_m$  евклидово, можно указать полезную формулу для вычисления матрицы оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$ . Именно, пусть  $\mathcal{E}_n$  — базис пространства  $\mathbf{X}_n$ ,  $\mathcal{Q}_m$  — базис пространства  $\mathbf{Y}_m$ ,  $G_q = \{(q^j, q^i)\}_{i,j=1}^m$  — матрица Грама, соответствующая базису  $\mathcal{Q}_m$ , матрица  $G_{\mathcal{A}}$  определяется равенством

$$G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}e^1, q^1) & (\mathcal{A}e^2, q^1) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^1) \\ (\mathcal{A}e^1, q^2) & (\mathcal{A}e^2, q^2) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{A}e^1, q^m) & (\mathcal{A}e^2, q^m) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^m) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$G_{\mathcal{A}} = G_q A_{eq}. \quad (3.1)$$

Действительно, умножая скалярно обе части уравнения (6.1), с. 161, на  $q^l$ , получим

$$(\mathcal{A}e^i, q^l) = \sum_{j=1}^m a_{ji}^{(eq)} (q^j, q^l), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

Формула (3.1) — это матричная запись равенств (3.2). Матрица Грама  $G_q$  невырождена, так как  $\mathcal{Q}_m$  — базис, следовательно,

$$A_{eq} = G_q^{-1} G_{\mathcal{A}}. \quad (3.3)$$

В случае, когда базис  $\mathcal{Q}_m$  ортонормирован, т. е. матрица  $G_q$  единичная,

$$A_{eq} = G_{\mathcal{A}}. \quad (3.4)$$

2. Если и пространство  $\mathbf{X}_n$  евклидово,  $\mathcal{A}^* : \mathbf{Y}_m \rightarrow \mathbf{X}_n$  — сопряженный к оператору  $\mathcal{A}$ , то точно так же, как в предыдущем пункте, получаем, что

$$G_{\mathcal{A}^*} = G_e A_{qe}^*, \quad (3.5)$$

где  $A_{qe}^*$  — матрица оператора  $\mathcal{A}^*$  относительно базисов  $\mathcal{Q}_m, \mathcal{E}_n$ ,  $G_e$  — матрица Грама базиса  $\mathcal{E}_n$ , матрица  $G_{\mathcal{A}^*}$  определяется равенством

$$G_{\mathcal{A}^*} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}^* q^1, e^1) & (\mathcal{A}^* q^2, e^1) & \dots & (\mathcal{A}^* q^m, e^1) \\ (\mathcal{A}^* q^1, e^2) & (\mathcal{A}^* q^2, e^2) & \dots & (\mathcal{A}^* q^m, e^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{A}^* q^1, e^n) & (\mathcal{A}^* q^2, e^n) & \dots & (\mathcal{A}^* q^m, e^n) \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $(\mathcal{A}^* q^i, e^j) = (q^i, \mathcal{A} e^j) = \overline{(\mathcal{A} e^j, q^i)}$ , то матрицы  $G_{\mathcal{A}}$  и  $G_{\mathcal{A}^*}$  взаимно сопряжены. Поэтому из (3.1) получаем  $G_{\mathcal{A}^*} = (A_{eq})^* G_q$ , откуда вследствие (3.5) вытекает, что

$$A_{qe}^* = G_e^{-1} (A_{eq})^* G_q. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) устанавливает связь между матрицами операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$ . В частности, если базисы  $\mathcal{E}_n$  и  $\mathcal{Q}_m$  ортонормированы, то матрицы операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  взаимно сопряжены.

#### § 4. Линейные уравнения в евклидовом пространстве

1. **Теорема.** Пусть  $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$  — евклидовы пространства. Для любого линейного оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  пространство  $\mathbf{Y}_m$  допускает следующее ортогональное разложение:

$$\mathbf{Y}_m = \text{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \text{Im}(\mathcal{A}). \quad (4.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $y \in \text{Im}(\mathcal{A})$ ,  $y^1 \in \text{Ker}(\mathcal{A}^*)$ . Тогда существует  $x \in \mathbf{X}_n$  такой, что  $y = \mathcal{A}x$ , следовательно,

$$(y, y^1) = (\mathcal{A}x, y^1) = (x, \mathcal{A}^* y^1) = 0,$$

т. е.  $y$  ортогонален  $\text{Ker}(\mathcal{A}^*)$ . Если же вектор  $y \in \mathbf{Y}_m$  ортогонален  $\text{Im}(\mathcal{A})$ , то  $(y, \mathcal{A}x) = 0$  для любого  $x \in \mathbf{X}_n$ , и тогда  $(\mathcal{A}^* y, x) = 0$  для любого  $x \in \mathbf{X}_n$ , поэтому  $\mathcal{A}^* y = 0$ , т. е.  $y \in \text{Ker}(\mathcal{A}^*)$ . Эти рассуждения показывают, что  $\text{Im}(\mathcal{A})$  — ортогональное дополнение  $\text{Ker}(\mathcal{A}^*)$ , следовательно, по теореме 2, с. 153, равенство (4.1) выполнено.  $\square$

Очевидно, что имеет место и следующее представление:

$$\mathbf{X}_n = \text{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{A}^*). \quad (4.2)$$

**2. Теорема.** Пусть оператор  $\mathcal{A}$  действует из конечномерного евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$  в конечномерное евклидово пространство  $\mathbf{Y}_m$ . Тогда

$$\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}^*). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор  $\mathcal{A}$  осуществляет изоморфизм пространств  $\text{Im}(\mathcal{A}^*)$  и  $\text{Im}(\mathcal{A})$ . Действительно, вследствие (4.2) для любого  $x \in \mathbf{X}_n$  имеем  $\mathcal{A}x = \mathcal{A}x^1$ , где  $x^1 \in \text{Im}(\mathcal{A}^*)$ , т. е. любой элемент  $\text{Im}(\mathcal{A})$  — образ некоторого элемента из  $\text{Im}(\mathcal{A}^*)$ . Предполагая, что  $\mathcal{A}x' = \mathcal{A}x''$  для несовпадающих  $x', x''$  из  $\text{Im}(\mathcal{A}^*)$ , получим, что  $\mathcal{A}(x' - x'') = 0$ , следовательно,  $(x' - x'') \in \text{Ker}(\mathcal{A})$ . Поскольку  $\text{Im}(\mathcal{A}^*)$  — линейное подпространство, то  $(x' - x'') \in \text{Im}(\mathcal{A}^*)$ . Вновь используя (4.2), получаем, что  $x' - x'' = 0$ . Таким образом, конечномерные пространства  $\text{Im}(\mathcal{A})$  и  $\text{Im}(\mathcal{A}^*)$  изоморфны, поэтому (см. теорему 3, с. 159) их размерности совпадают.  $\square$

Непосредственным следствием теоремы 1 является

**3. Теорема Фредгольма.** Пусть  $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$  — евклидовы пространства,  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}_m$  — линейный оператор. Для того, чтобы уравнение  $\mathcal{A}x = y$  имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна любому решению однородного уравнения  $\mathcal{A}^*z = 0$ .

ЗАДАЧА. Докажите теоремы 3, 4, § 2, гл. 10, опираясь на теорему Фредгольма.

## § 5. Псевдорешение линейного уравнения

**1.** Пусть оператор  $\mathcal{A}$  действует из евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$  в евклидово пространство  $\mathbf{Y}_m$ ,  $y$  — фиксированный вектор из  $\mathbf{Y}_m$ ,  $x$  — произвольный вектор из  $\mathbf{X}_n$ . Вектор  $\mathcal{A}x - y$  называется *невязкой*, соответствующей уравнению

$$\mathcal{A}x = y. \quad (5.1)$$

Вещественная функция

$$F(x) = |\mathcal{A}x - y|^2,$$

определенная на пространстве  $\mathbf{X}_n$ , называется *функцией (функционалом) невязки*. Если  $\mathcal{A}x \neq y$ , т. е. вектор  $x$  не является решением уравнения (5.1), то  $F(x) > 0$ . Естественно попытаться найти вектор  $x$ , который доставляет минимальное значение функции невязки.

Вектор  $x \in \mathbf{X}_n$ , минимизирующий функцию невязки, называют *псевдорешением* уравнения (5.1). Если уравнение (5.1) разрешимо, то любое его решение является псевдорешением.

**2.** Псевдорешение существует при любой правой части уравнения (5.1). В самом деле, в соответствии с разложением (4.1), с. 218, представим вектор  $y$  в виде  $y = y^1 + y^0$ , где  $y^1 \in \text{Im}(\mathcal{A})$ ,  $y^0 \in \text{Ker}(\mathcal{A}^*)$ . Тогда для любого  $x \in \mathbf{X}_n$  вектор  $\mathcal{A}x - y^1$  принадлежит  $\text{Im}(\mathcal{A})$ , и, следовательно,

$$F(x) = |\mathcal{A}x - y^1|^2 + |y^0|^2.$$

Очевидно, что минимальное значение функции  $F$  равно  $|y^0|^2$  и достигается на векторе  $x$ , являющемся решением уравнения

$$\mathcal{A}x = y^1. \quad (5.2)$$

Поскольку  $y^1 \in \text{Im}(\mathcal{A})$ , уравнение (5.2) разрешимо.

**3.** При любом  $y \in \mathbf{Y}_m$  уравнение

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y \quad (5.3)$$

разрешимо. Всякое его решение — псевдорешение уравнения (5.1). Действительно, так как  $\mathcal{A}^* y^0 = 0$ , то уравнение (5.3) эквивалентно уравнению

$$\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y^1) = 0. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) разрешимо, так как каждое решение уравнения (5.2) есть решение уравнения (5.4). Обратно, если  $x$  — решение уравнения (5.4), то вектор  $\mathcal{A}x - y^1 \in \text{Ker}(\mathcal{A}^*)$  и, следовательно (см. (4.1), с. 218), ортогонален  $\text{Im}(\mathcal{A})$ , но, с другой стороны,  $\mathcal{A}x - y^1 \in \text{Im}(\mathcal{A})$ , значит  $\mathcal{A}x - y^1 = 0$ , т. е.  $x$  — решение уравнения (5.2).

Уравнение (5.3) называют *трансформацией Гаусса* уравнения (5.1). Трансформация Гаусса любого линейного уравнения приводит к разрешимому уравнению.

## § 6. Самосопряженный и косоэрмитов операторы

**1.** Оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  называется *самосопряженным* (эрмитовым), если  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , иными словами, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \quad \forall x, y \in \mathbf{X}_n. \quad (6.1)$$

Оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  называется *косоэрмитовым*, если  $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ , то есть

$$(\mathcal{A}x, y) = -(x, \mathcal{A}y) \quad \forall x, y \in \mathbf{X}_n. \quad (6.2)$$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Показать, что если оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжен, то скалярное произведение  $(\mathcal{A}x, x)$  вещественно для любого  $x \in \mathbf{X}_n$ ;

если оператор  $\mathcal{A}$  косоэрмитов, то скалярное произведение  $(\mathcal{A}x, x)$  — мнимое число для любого  $x \in \mathbf{X}_n$ .

Поскольку в любом ортонормированном базисе матрицы взаимно сопряженных операторов взаимно сопряжены (см. п. 2, с. 218), то матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе эрмитова, матрица косоэрмитова оператора косоэрмитова.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Показать, что если матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором ортонормированном базисе эрмитова, то оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжен, если матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором ортонормированном базисе косоэрмитова, то оператор  $\mathcal{A}$  косоэрмитов.

**1.1.** Примером самосопряженного оператора является оператор ортогонального проектирования<sup>1)</sup>. Действительно, пусть  $\mathcal{P}$  — оператор ортогонального проектирования евклидова пространства  $\mathbf{X}$  на подпространство  $L \subset \mathbf{X}$ ,  $x, y$  — произвольные векторы из  $\mathbf{X}$ . По определению оператора ортогонального проектирования можем написать, что  $y = \mathcal{P}y + y^2$ ,  $x = \mathcal{P}x + x^2$ , где  $x^2, y^2$  — векторы, ортогональные  $L$ . Поэтому  $(\mathcal{P}x, y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y)$ . Точно так же  $(x, \mathcal{P}y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y)$ , следовательно,  $(\mathcal{P}x, y) = (y, \mathcal{P}x)$ .

**1.2.** Рассуждая точно так же, как в п. 3, с. 107, нетрудно убедиться, что любой оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в евклидовом пространстве, однозначно представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2, \quad (6.3)$$

где  $i$  — мнимая единица,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$$

есть самосопряженные операторы.

**1.3. Теорема.** Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Если

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}_n, \quad (6.4)$$

то  $\mathcal{A} = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим сначала, что  $\mathcal{A}$  — самосопряженный оператор. Тогда для любых  $x, y \in \mathbf{X}_n$  справедливо равенство

$$(\mathcal{A}(x + y), x + y) = (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{A}x, y).$$

<sup>1)</sup>См. определение на с. 156.

Отсюда, используя условие (6.4), получаем, что  $\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, y) = 0$ . Последнее равенство выполнено для любого  $y \in \mathbf{X}_n$ . Поэтому можно заменить  $y$ , на  $iy$ , но  $\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, iy) = \operatorname{Im}(\mathcal{A}x, y)$ . Таким образом, получаем, что  $(\mathcal{A}x, y) = 0$  для любых  $x, y \in \mathbf{X}_n$ . Полагая  $y = \mathcal{A}x$ , будем иметь, что  $|\mathcal{A}x| = 0$  для любого  $x \in \mathbf{X}_n$ , т. е.  $\mathcal{A} = 0$ . Итак, в случае самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  утверждение теоремы доказано. Пусть теперь  $\mathcal{A}$  — произвольный оператор. Если  $(\mathcal{A}x, x) = 0$ , то вследствие (6.3) с учетом самосопряженности операторов  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  получаем, что  $(\mathcal{H}_1x, x) = 0, (\mathcal{H}_2x, x) = 0$  для любого  $x \in \mathbf{X}_n$ , откуда, вновь учитывая самосопряженность операторов  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ , получим, что  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 = 0$ .  $\square$

**1.4. Лемма.** *Если для оператора  $\mathcal{A}$ , действующего в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , скалярное произведение  $(\mathcal{A}x, x)$  вещественно при любом  $x \in \mathbf{X}_n$ , то оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжен.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $(\mathcal{A}x, x)$  — вещественное число, то из (6.3) следует, что  $((\mathcal{A}^* - \mathcal{A})x, x) = 0$ , откуда по теореме 1.3 получаем, что  $\mathcal{A}^* - \mathcal{A} = 0$ .  $\square$

Совершенно аналогично доказывается

**1.5. Лемма.** *Если для оператора  $\mathcal{A}$ , действующего в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , скалярное произведение  $(\mathcal{A}x, x)$  при любом  $x \in \mathbf{X}_n$  — мнимое число, то оператор  $\mathcal{A}$  косоэрмитов.*

Таким образом, справедлива

**1.6. Теорема.** *Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , был самосопряжен, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение  $(\mathcal{A}x, x)$  было вещественным при любом  $x \in \mathbf{X}_n$ . Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , был косоэрмитов, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение  $(\mathcal{A}x, x)$  было мнимым при любом  $x \in \mathbf{X}_n$ .*

## § 7. Неотрицательный и положительно определенный операторы

Самосопряженный оператор  $\mathcal{A}$  называется *неотрицательным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}_n. \quad (7.1)$$

Самосопряженный оператор  $\mathcal{A}$  называется *положительно определенным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ из } \mathbf{X}_n. \quad (7.2)$$

Эрмитова матрица  $A$  порядка  $n$  называется *неотрицательной*, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j\bar{x}_i \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n. \quad (7.3)$$

Эрмитова матрица  $A$  порядка  $n$  называется *положительно определенной*, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j\bar{x}_i > 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ из } \mathbb{C}^n. \quad (7.4)$$

В двух последних определениях скобками обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Покажите что, если  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — положительно определенный оператор, то равенство  $(x, y)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, y)$  определяет скалярное произведение на пространстве  $\mathbf{X}_n$ .

2) Покажите, что для любого оператора  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  оператор  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  самосопряжен и неотрицателен. Если оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  обратим, то оператор  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  положительно определен.

3) Пусть оператор  $\mathcal{A}$  действует в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Докажите, что если оператор  $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$  положительно определен, то оператор  $\mathcal{A}$  невырожден.

4) Покажите, что матрица положительно определенного оператора в любом ортонормированном базисе положительно определена.

5) Покажите, что все элементы главной диагонали положительно определенной матрицы положительны.

6) Покажите, что матрица Грама любой системы векторов в евклидовом пространстве неотрицательна.

7) Покажите, что линейная независимость системы векторов эквивалентна положительной определенности матрицы Грама этой системы векторов.

## § 8. Унитарный оператор

1. Оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  называется *унитарным*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = I. \quad (8.1)$$

## УПРАЖНЕНИЯ.

1) Покажите, что для того, чтобы оператор был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства  $\mathbf{X}_n$  была унитарна (см. с. 108).

2) Покажите, что определитель унитарного оператора по модулю равен единице.

3) Покажите, что произведение унитарных операторов — унитарный оператор.

**2.** Если оператор  $\mathcal{A}$  унитарен, то для любых  $x, y \in \mathbf{X}_n$  имеем  $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^* \mathcal{A}y) = (x, y)$ , т. е. унитарный оператор не меняет скалярного произведения векторов, и, следовательно, унитарный оператор не меняет длин векторов.

**3.** Обратно, если линейный оператор не меняет скалярного произведения любых двух векторов из  $\mathbf{X}_n$ , то он унитарен. В самом деле, из равенства  $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$  вытекает, что  $(x, \mathcal{A}^* \mathcal{A}y) = (x, y)$ . Нетрудно убедиться, что, поскольку последнее равенство выполнено для любых  $x, y \in \mathbf{X}_n$ , то

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A} = I. \quad (8.2)$$

Докажем, что равенство  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I$  также выполняется. Из равенства (8.2) вытекает, что  $\det(\mathcal{A}) \neq 0$ , следовательно, оператор  $\mathcal{A}$  имеет обратный. Умножая обе части равенства (8.2) слева на  $\mathcal{A}$ , а затем справа на  $\mathcal{A}^{-1}$ , получим, что  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I$ .

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что если для любого  $x \in \mathbf{X}_n$  выполнено равенство  $|\mathcal{A}x| = |x|$ , то  $\mathcal{A}$  — унитарный оператор.

**4.** Таким образом, оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  является унитарным тогда и только тогда, когда он не меняет длины никакого вектора пространства  $\mathbf{X}_n$ .

## § 9. Нормальный оператор

**1.** Оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , называется *нормальным*, если  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \mathcal{A}$ . Самосопряженный, кососопряженный и унитарный операторы, очевидно, — нормальные операторы.

Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства  $\mathbf{X}_n$  была нормальной (см. определение на с. 109).



**2. Теорема.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — нормальный оператор. Тогда  $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A}^*)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\mathcal{A}x = 0$ . Тогда

$$0 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* \mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A} \mathcal{A}^* x, x) = (\mathcal{A}^* x, \mathcal{A}^* x),$$

следовательно,  $\mathcal{A}^* x = 0$ . Эти же выкладки показывают, что если  $\mathcal{A}^* x = 0$ , то  $\mathcal{A}x = 0$ .  $\square$

Из теоремы 2 и теоремы 1, с. 218, немедленно вытекает

**3. Следствие.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — нормальный оператор. Тогда  $\mathbf{X}_n = \text{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \text{Im}(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \text{Im}(\mathcal{A}^*)$ ,  $\text{Im}(\mathcal{A}) = \text{Im}(\mathcal{A}^*)$ .

**4. Теорема.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — нормальный оператор,  $x$ ,  $\lambda$  — собственная пара оператора  $\mathcal{A}$ , т. е.  $\mathcal{A}x = \lambda x$ . Тогда  $x$ ,  $\bar{\lambda}$  — собственная пара оператора  $\mathcal{A}^*$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться, что если  $\mathcal{A}$  — нормальный оператор, то при любом  $\lambda \in \mathbb{C}$  оператор  $\mathcal{A} - \lambda I$  — также нормальный оператор, причем  $(\mathcal{A} - \lambda I)^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda} I$ , следовательно,  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) = \text{Ker}(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda} I)$ .  $\square$

**5.** Все собственные числа самосопряженного оператора вещественны. Все собственные числа косоэрмитова оператора чисто мнимые. Действительно, всякий самосопряженный оператор  $\mathcal{A}$  является нормальным, поэтому, если  $x$ ,  $\lambda$  — собственная пара оператора  $\mathcal{A}$ , то  $\mathcal{A}x = \lambda x$  и  $\mathcal{A}x = \bar{\lambda} x$ , следовательно,  $(\lambda - \bar{\lambda})x = 0$ , но вектор  $x$ , как собственный вектор, не равен нулю, значит,  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Аналогично, если  $x$ ,  $\lambda$  — собственная пара косоэрмитова оператора  $\mathcal{A}$ , то выполняются равенства  $\mathcal{A}x = \lambda x$ ,  $\mathcal{A}x = -\bar{\lambda} x$ , следовательно,  $\lambda = -\bar{\lambda}$ .

**6.** Все собственные числа унитарного оператора по модулю равны единице. В самом деле, если  $\mathcal{A}x = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ , то поскольку для унитарного оператора  $|\mathcal{A}x| = |x|$  (см. п. 4, с. 224), то  $|\lambda||x| = |\mathcal{A}x| = |x|$ , т. е.  $|\lambda| = 1$ .

Укажем на очевидное, но полезное

**7. Следствие.** У всякой эрмитовой матрицы все характеристические числа вещественны; у всякой косоэрмитовой матрицы все характеристические числа чисто мнимые; у всякой унитарной матрицы все характеристические числа по модулю равны единице.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что определитель самосопряженного оператора — вещественное число (см. также п. 2, с. 107).

**8. Теорема.** *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, пусть  $\mathcal{A}$  — нормальный оператор,  $\mathcal{A}x = \lambda x$ ,  $\mathcal{A}y = \mu y$ ,  $\lambda \neq \mu$ . Тогда  $\lambda(x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$ . По теореме 4 имеем  $\mathcal{A}^*y = \bar{\mu}y$ , следовательно,  $(x, \mathcal{A}^*y) = \mu(x, y)$ , значит,  $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ . Поскольку  $\lambda \neq \mu$ , то  $(x, y) = 0$ .  $\square$

**9. Теорема.** *Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор, действующий в пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Для того, чтобы существовал ортонормированный базис  $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$  такой, что  $\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , необходимо и достаточно, чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был нормальным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** **Н е о б х о д и м о с т ь.** Матрицы взаимно сопряженных операторов в ортонормированном базисе взаимно сопряжены (см. п. 2, с. 218). Поэтому, если

$$A_e = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

есть матрица оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе  $\{e^k\}_{k=1}^n$ , то матрицей оператора  $\mathcal{A}^*$  в этом же базисе будет матрица

$$A_e^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n).$$

Матрица произведения операторов есть произведение их матриц (см. п. 7, с. 163), диагональные матрицы, очевидно, перестановочны, следовательно,

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A})_e = A_e^*A_e = A_eA_e^* = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*)_e,$$

откуда вытекает, что  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$ , т. е.  $\mathcal{A}$  — нормальный оператор.

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть  $e^1$ ,  $\lambda_1$  — собственная пара оператора  $\mathcal{A}$ . Будем считать, что  $|e^1| = 1$ . По теореме 4  $e^1$ ,  $\bar{\lambda}_1$  — собственная пара оператора  $\mathcal{A}^*$ . Обозначим через  $L_{n-1}$  подпространство всех векторов из  $\mathbf{X}_n$ , ортогональных  $e^1$ . Подпространство  $L_{n-1}$  инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ . Действительно, если  $x \in L_{n-1}$ , т. е.  $(x, e^1) = 0$ , то и  $(\mathcal{A}x, e^1) = (x, \mathcal{A}^*e^1) = \lambda_1(x, e^1) = 0$ . Точно так же доказывается, что подпространство  $L_{n-1}$  инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}^*$ . Поэтому (см. упражнение на с. 185) существует нормированный вектор  $e^2 \in L_{n-1}$  и число  $\lambda_2$  такие, что  $\mathcal{A}e^2 = \lambda_2 e^2$ ,  $\mathcal{A}^*e^2 = \bar{\lambda}_2 e^2$ . Пусть теперь  $L_{n-2}$  — подпространство пространства  $\mathbf{X}_n$ , состоящее из векторов, ортогональных одновременно  $e^1$  и  $e^2$ . Точно так же, как и раньше, покажем, что существует нормированный вектор  $e^3 \in L_{n-2}$  и число  $\lambda_3$  такие, что  $\mathcal{A}e^3 = \lambda_3 e^3$ ,  $\mathcal{A}^*e^3 = \bar{\lambda}_3 e^3$ . Продолжая этот процесс, мы построим ортонормированную систему векторов  $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$  такую, что  $\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k$ ,  $\mathcal{A}^*e^k = \bar{\lambda}_k e^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЯ.

1) В теореме 9, фактически, утверждается, что для каждого нормального оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица принимает диагональный вид, причем на диагонали матрицы расположены все собственные числа этого оператора. Таким образом, всякий нормальный оператор есть оператор простой структуры (см. §6, с. 189).

2) Часто оказывается полезной следующая эквивалентная формулировка указанного результата: пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, k \leq n$ , есть все попарно различные собственные числа нормального оператора  $\mathcal{A}: \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ ,  $L_{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, k$ , — соответствующие собственные подпространства оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда

$$\mathbf{X}_n = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_k}, \quad (9.1)$$

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathcal{P}_k, \quad (9.2)$$

где  $\mathcal{P}_i$  — оператор ортогонального проектирования пространства  $\mathbf{X}_n$  на подпространство  $L_{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, k$ .

10. УПРАЖНЕНИЯ.

1) Пусть  $A$  — вещественная квадратная матрица порядка  $n$  такая, что  $A^T A = A A^T$ . Опираясь на теорему 9, показать, что существует система векторов  $\{\xi^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ , ортонормированная в смысле стандартного скалярного произведения пространства  $\mathbb{C}^n$ , и такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , что  $A \xi^k = \lambda_k \xi^k, k = 1, 2, \dots, n$ . Причем, если число  $\lambda_k$  вещественно, то и вектор  $\xi_k$  можно выбрать вещественным.

2) Докажите, что если у нормального оператора все собственные числа вещественны, то он — самосопряженный оператор; если у нормального оператора все собственные числа чисто мнимые, то он — косоэрмитов оператор; если у нормального оператора все собственные числа по модулю равны единице, то он — унитарный оператор.

3) Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — нормальные операторы, характеристические полиномы которых совпадают. Докажите, что тогда существует унитарный оператор  $\mathcal{Q}$  такой, что  $\mathcal{B} = \mathcal{Q} \mathcal{A} \mathcal{Q}^*$ .

4) Пусть  $\mathcal{A}$  — нормальный оператор,  $\mathcal{Q}$  — унитарный оператор. Докажите, что оператор  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q} \mathcal{A} \mathcal{Q}^*$  нормальный и справедливо представление

$$\tilde{\mathcal{A}} = \lambda_1 \tilde{\mathcal{P}}_1 + \lambda_2 \tilde{\mathcal{P}}_2 + \dots + \lambda_k \tilde{\mathcal{P}}_k, \quad (9.3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  — все попарно различные собственные числа оператора  $\mathcal{A}$ ,  $\tilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{Q} \mathcal{P}_i \mathcal{Q}^*$  — оператор ортогонального проектирования пространства  $\mathbf{X}_n$  на подпространство  $\mathcal{Q} L_{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, k$ .

**11. Теорема.** Для того, чтобы нормальные операторы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  были перестановочными, необходимо и достаточно, чтобы у них был общий ортонормированный базис собственных векторов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть  $\{e^j\}_{k=1}^n$  — общий базис собственных векторов операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , т. е.  $\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k$ ,  $\mathcal{B}e^k = \mu_k e^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $\mathcal{B}\mathcal{A}e^k = \lambda_k \mu_k e^k$ ,  $\mathcal{A}\mathcal{B}e^k = \lambda_k \mu_k e^k$  для  $k = 1, 2, \dots, n$ , т. е. на векторах базиса операторы  $\mathcal{A}\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  совпадают, но тогда они совпадают и на любом векторе пространства  $\mathbf{X}_n$ .

**Н е о б х о д и м о с т ь.** Воспользуемся представлением пространства  $\mathbf{X}_n$  в виде ортогональной суммы (9.1) собственных подпространств оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающих попарно различным собственным числам этого оператора. По лемме 6.1, с. 185, каждое из подпространств  $L_{\lambda_i}$  инвариантно относительно оператора  $\mathcal{B}$ . Поскольку  $\mathcal{B}$  — нормальный оператор, то в этом подпространстве существует ортонормированный базис собственных векторов оператора  $\mathcal{B}$ . Объединение всех указанных базисов, очевидно, образует базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , причем по построению все векторы этого базиса — собственные векторы оператора  $\mathcal{A}$ .  $\square$

## § 10. Некоторые свойства собственных чисел самосопряженного оператора

**1.** Напомним, что оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  называется самосопряженным, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \quad \forall x, y \in \mathbf{X}_n. \quad (10.1)$$

Напомним также, что все собственные числа самосопряженного оператора вещественны, существует ортонормированный базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , составленный из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ , собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

**2.** Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — самосопряженный оператор, а  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — его собственные числа,  $\{e^k\}_{k=1}^n$  — ортонормированный базис собственных векторов. Будем считать, что собственные числа упорядочены по возрастанию, т. е.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (10.2)$$

Подчеркнем, что мы рассматриваем как собственные числа оператора все характеристические числа его матрицы, т. е. кратные характеристические числа повторяются столько раз, какова их кратность, поэтому, вообще говоря, неравенства в (3.5) являются нестрогими.

Пусть  $p, q$  — целые числа такие, что  $1 \leq p \leq q \leq n$ . Обозначим через  $L_{pq}$  подпространство пространства  $\mathbf{X}_n$ , натянутое на векторы  $\{e^k\}_{k=p}^q$ . Очевидно,  $L_{1n} = \mathbf{X}_n$ .

**2.1. Лемма.** Для любого  $x \in L_{pq}$  справедливы неравенства

$$\lambda_p(x, x) \leq (\mathcal{A}x, x) \leq \lambda_q(x, x), \quad (10.3)$$

более того,

$$\lambda_p = \min_{x \in L_{pq}, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_q = \max_{x \in L_{pq}, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}. \quad (10.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого  $x \in L_{pq}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}x, x) &= \left( \mathcal{A} \sum_{k=p}^q \xi_k e^k, \sum_{k=p}^q \xi_k e^k \right) = \\ &= \left( \sum_{k=p}^q \lambda_k \xi_k e^k, \sum_{k=p}^q \xi_k e^k \right) = \sum_{k=p}^q \lambda_k |\xi_k|^2. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Очевидно, что

$$\lambda_p \sum_{k=p}^q |\xi_k|^2 \leq \sum_{k=p}^q \lambda_k |\xi_k|^2 \leq \lambda_q \sum_{k=p}^q |\xi_k|^2, \quad \sum_{k=p}^q |\xi_k|^2 = (x, x),$$

следовательно, (10.3) доказано, и для любого  $x \neq 0$  из  $L_{pq}$  справедливы неравенства

$$\lambda_p \leq \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leq \lambda_q.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{(\mathcal{A}e^p, e^p)}{(e^p, e^p)} = \lambda_p, \quad \frac{(\mathcal{A}e^q, e^q)}{(e^q, e^q)} = \lambda_q,$$

поэтому равенства (10.4) также доказаны.  $\square$

Очевидным следствием леммы 2.1 является

**2.2. Теорема.** Для любого  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\lambda_k = \min_{x \in L_{kn}, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_k = \max_{x \in L_{1k}, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}. \quad (10.6)$$

Использование формул (10.6) затруднено тем, что при отыскании собственного числа с номером  $k$  нужно знать все собственные векторы оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающие всем собственным числам с меньшими номерами, или — все собственные векторы оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающие всем собственным числам с большими номерами.

Следующие две теоремы дают независимое описание каждого собственного числа самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$ .

**2.3. Теорема.** *Для любого  $k = 1, 2, \dots, n$*

$$\lambda_k = \max_{R_{n-k+1}} \min_{x \in R_{n-k+1}, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}. \quad (10.7)$$

Здесь  $R_{n-k+1} \subset \mathbf{X}_n$  — подпространство размерности  $n - k + 1$ . Максимум берется по всем подпространствам пространства  $\mathbf{X}_n$  размерности  $n - k + 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что  $\dim(R_{n-k+1}) + \dim(L_{1k}) = n + 1$ , поэтому (см. следствие 3, с. 148) существует вектор  $x \neq 0$ , принадлежащий  $R_{n-k+1} \cap L_{1k}$ . Таким образом (см. (10.6)), в каждом подпространстве  $R_{n-k+1}$  найдется вектор  $x$ , для которого  $(\mathcal{A}x, x)/(x, x) \leq \lambda_k$ . Следовательно, для любого подпространства  $R_{n-k+1}$

$$\min_{x \in R_{n-k+1}, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leq \lambda_k.$$

Если мы укажем подпространство  $R_{n-k+1}$ , для которого

$$\min_{x \in R_{n-k+1}, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

то это будет означать выполнение равенства (10.7). По теореме 2.2 искомым подпространством  $R_{n-k+1}$  является  $L_{kn}$ .  $\square$

**2.4. Теорема.** *Для любого  $k = 1, 2, \dots, n$*

$$\lambda_k = \min_{R_k} \max_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}. \quad (10.8)$$

Здесь  $R_k \subset \mathbf{X}_n$  — подпространство размерности  $k$ . Минимум берется по всем подпространствам пространства  $\mathbf{X}_n$  размерности  $k$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что  $\dim(R_k) + \dim(L_{kn}) = n + 1$  для любого подпространства  $R_k$ , значит  $R_k \cap L_{kn} \neq \{0\}$ . По теореме 2.2

$$\min_{x \in L_{kn}, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

поэтому для любого подпространства  $R_k$

$$\max_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \geq \lambda_k.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось указать такое подпространство  $R_k$  размерности  $k$ , для которого

$$\max_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k.$$

По теореме 2.2 таким подпространством является  $L_{1k}$ .  $\square$

**3.** Из (10.3) сразу же следует, что для того, чтобы самосопряженный оператор  $\mathcal{A}$  был неотрицателен (см. (7.1), с. 222), необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были неотрицательными, а для того, чтобы самосопряженный оператор  $\mathcal{A}$  был положительно определен (см. (7.2), с. 222), необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были положительными.

#### УПРАЖНЕНИЯ.

1) Доказать, что если оператор положительно определен, то его определитель положителен.

2) Доказать неравенство Коши — Буняковского (см. теорему 2, с. 131), используя матрицу Грама (см. (4.1), с. 133) системы, состоящей из двух векторов  $x, y$  евклидова пространства.

### § 11. Применения вариационного описания собственных чисел

1. Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — самосопряженные операторы, а

$$\lambda_1(\mathcal{A}) \leq \lambda_2(\mathcal{A}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathcal{A}),$$

$$\lambda_1(\mathcal{B}) \leq \lambda_2(\mathcal{B}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathcal{B}),$$

$$\lambda_1(\mathcal{C}) \leq \lambda_2(\mathcal{C}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathcal{C})$$

есть их собственные числа. Пусть  $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ . Тогда

$$\lambda_1(\mathcal{C}) \leq \lambda_k(\mathcal{A}) - \lambda_k(\mathcal{B}) \leq \lambda_n(\mathcal{C}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.1)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что, фиксируя произвольное подпространство  $R_k \subset \mathbf{X}_n$ , получаем, что

$$\frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \frac{(\mathcal{B}x, x)}{(x, x)} + \frac{(\mathcal{C}x, x)}{(x, x)} \quad \forall x \in R_k, x \neq 0.$$

Вследствие (10.3)

$$\frac{(\mathcal{C}x, x)}{(x, x)} \leq \lambda_n(\mathcal{C}) \quad \forall x \in \mathbf{X}_n, x \neq 0,$$

поэтому

$$\min_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leq \min_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(\mathcal{B}x, x)}{(x, x)} + \lambda_n(\mathcal{C}),$$

но тогда и

$$\max_{R_k} \min_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leq \max_{R_k} \min_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(\mathcal{B}x, x)}{(x, x)} + \lambda_n(\mathcal{C}).$$

Последнее неравенство по теореме 2.3, с. 230, равносильно тому, что

$$\lambda_k(\mathcal{A}) - \lambda_k(\mathcal{B}) \leq \lambda_n(\mathcal{C}). \quad (11.2)$$

Заметим теперь, что  $\mathcal{B} = \mathcal{A} + (-\mathcal{C})$ . Собственными числами оператора  $-\mathcal{C}$  являются числа  $-\lambda_k(\mathcal{C})$ . Максимальным из них будет  $-\lambda_1(\mathcal{C})$ . Поэтому, повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\lambda_k(\mathcal{B}) - \lambda_k(\mathcal{A}) \leq -\lambda_1(\mathcal{C}). \quad (11.3)$$

Объединяя (11.2), (11.3), приходим к (11.1).

Оценки (11.1) полезны тем, что они показывают, как могут измениться собственные числа самосопряженного оператора  $\mathcal{B}$ , если к нему добавить самосопряженный оператор  $\mathcal{C}$ . Видно, что если собственные числа оператора  $\mathcal{C}$  малы, то собственные числа оператора  $\mathcal{B}$  мало меняются.

**2.** Используем полученный результат для оценки возмущений собственных чисел эрмитовой матрицы.

Пусть  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $E = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — эрмитовы матрицы. Предположим, что  $|\varepsilon_{ij}| \leq \varepsilon$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(A + E)| \leq n\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11.4)$$

т. е. малые возмущения элементов самосопряженной матрицы приводят к малым возмущениям ее собственных чисел.

Из (11.1) вытекает, что для доказательства оценки (11.4) достаточно установить, что

$$|\lambda_k(E)| \leq n\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.5)$$



Вследствие (10.4) нужная оценка сводится к оценке  $|(Ex, x)|$ . Под скалярным произведением здесь понимается стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{C}^n$ . Запишем сначала очевидное неравенство

$$|(Ex, x)| = \left| \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij} x_i \bar{x}_j \right| \leq \sum_{i,j=1}^n |\varepsilon_{ij}| |x_i| |x_j|.$$

Используя теперь неравенство Коши — Буняковского (применительно к стандартному скалярному произведению в пространстве  $\mathbb{R}^m$  размерности  $m = n^2$ ), получим

$$\begin{aligned} |(Ex, x)| &\leq \left( \sum_{i,j=1}^n |\varepsilon_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j=1}^n |x_i|^2 |x_j|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left( \sum_{i,j=1}^n |\varepsilon_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i,j=1}^n |\varepsilon_{ij}|^2 \right)^{1/2} (x, x) \leq \\ &\leq n\varepsilon(x, x). \end{aligned}$$

Последнее неравенство, очевидно, обеспечивает выполнение (11.5).

Нетрудно убедиться, что если  $A = I$ , а все элементы матрицы  $E$  равны  $\varepsilon > 0$ , то  $\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k(A) - \lambda_k(A + E)| = n\varepsilon$ , т. е. оценка (11.4) неулучшаема на множестве всех эрмитовых матриц.

**3.** Полученная оценка возмущений собственных чисел эрмитовой матрицы не распространяется на произвольные матрицы. Следует, тем не менее, иметь в виду, что и у произвольной матрицы характеристические числа непрерывно зависят от ее элементов. Точнее, справедлива

**3.1. Теорема<sup>1)</sup>.** Пусть  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — произвольные квадратные матрицы, и пусть

$$M(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|, \quad M(B) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |b_{ij}|, \quad M = \max\{M(A), M(B)\},$$

$$\delta = \frac{1}{nM} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|.$$

Тогда можно так пронумеровать характеристические числа матриц  $A$ ,  $B$ , что

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq 2(n+1)^2 M \delta^{1/n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.6)$$

<sup>1)</sup>Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений, М.: ИЛ, 1963, с. 206.

Известные примеры (см. [17] по списку дополнительной литературы) показывают, что наличие множителя  $\delta^{1/n}$  в оценке (11.6) необходимо. Это означает, что даже у очень близких матриц при больших  $n$  характеристические числа могут сильно различаться.

### 3.2. Иллюстрируем сказанное.

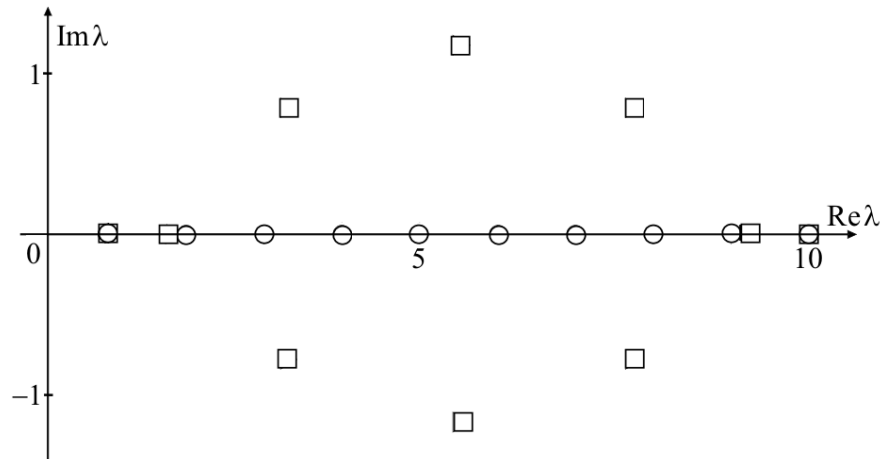


Рис. 1. К примеру неустойчивой задачи на собственные значения:  $\circ$  — характеристические числа матрицы  $A$ ,  $\square$  — характеристические числа матрицы  $A_\varepsilon$

Пусть  $A$  — вещественная двухдиагональная матрица десятого порядка. По диагонали этой матрицы расположены в порядке убывания целые числа  $10, 9, 8, \dots, 1$ , все элементы на ближайшей сверху параллельной диагонали равны десяти. Понятно, что все характеристические числа этой матрицы есть числа, стоящие на ее диагонали. Наряду с матрицей  $A$  рассмотрим матрицу

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 9 & 10 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 8 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & 10 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

отличающуюся от  $A$  только одним элементом, стоящим в позиции  $(10,1)$  и равным  $\varepsilon$ . На рисунке 1 показано расположение на комплексной плоскости характеристических чисел матрицы  $A$  и матрицы  $A_\varepsilon$  при  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Видно, что малому по сравнению с элементами матрицы  $A$  значению  $\varepsilon$  отвечают существенные отклонения характеристических чисел. Результат, впрочем, ожидаемый, поскольку, как нетрудно убедиться, разлагая определитель по первому столбцу,  $\det A = 10!$ , а  $\det A_\varepsilon = 10! - \varepsilon 10^9$ , и, поскольку определитель

матрицы есть произведение ее характеристических чисел, то даже при малых  $\varepsilon$  характеристические числа матриц  $A$  и  $A_\varepsilon$  различаются значительно.

**4. Теорема.** Пусть  $A_{n+1} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$  — произвольная эрмитова матрица порядка  $n+1$ ,  $A_n = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — матрица, соответствующая ее главному минору порядка  $n$ . Пусть  $\hat{\lambda}_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_{n+1}$  — собственные числа матрицы  $A_{n+1}$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $A_n$ . Тогда

$$\hat{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \hat{\lambda}_{n+1}, \quad (11.7)$$

т. е., как говорят, собственные числа матриц  $A_n$  и  $A_{n+1}$  перемежаются.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В ходе последующих рассуждений под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

Пусть  $1 \leq k \leq n$ . В соответствии с теоремой 2.4, с. 230,

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x \in R_{k+1}, x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}. \quad (11.8)$$

Здесь минимум берется по всевозможным подпространствам  $R_{k+1}$  пространства  $\mathbb{C}^{n+1}$  размерности  $k+1$ .

Обозначим через  $R_k \subset \mathbb{C}^n$  множество векторов из  $R_{k+1}$ ,  $(n+1)$ -я компонента которых в естественном базисе равна нулю. Тогда

$$\max_{x \in R_{k+1}, x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \geq \max_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)}.$$

Для обоснования этого неравенства достаточно заметить, что слева максимум берется по более широкому множеству векторов, чем справа. Таким образом, из (11.8) получаем

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x \in R_{k+1}, x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \geq \min_{R_k} \max_{x \in R_k, x \neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)},$$

но правая часть этого неравенства по теореме 2.4 равна  $\lambda_k$ . Итак,  $\hat{\lambda}_{k+1} \geq \lambda_k$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Обратимся теперь к теореме 2.3, с. 230, в соответствии с которой

$$\hat{\lambda}_k = \max_{R_{n+2-k}} \min_{x \in R_{n+2-k}, x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}. \quad (11.9)$$

Здесь максимум берется по всевозможным подпространствам  $R_{n+2-k}$  пространства  $\mathbb{C}^{n+1}$  размерности  $n+2-k$ . При сужении множества векторов, по которому вычисляется минимум, последний не может уменьшиться, поэтому по аналогии с предыдущим случаем можем написать, что

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_k &= \max_{R_{n+2-k}} \min_{x \in R_{n+2-k}, x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \leq \\ &\leq \max_{R_{n+1-k}} \min_{x \in R_{n+1-k}, x \neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)} = \lambda_k. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Таким образом, неравенства (11.7) доказаны.  $\square$

## § 12. Корень из самосопряженного неотрицательного оператора

**1. Теорема.** Пусть  $\mathcal{A}$  — самосопряженный неотрицательный оператор,  $k \geq 2$  — целое число. Тогда существует единственный самосопряженный неотрицательный оператор  $\mathcal{T}$  такой, что  $\mathcal{T}^k = \mathcal{A}$ .

Оператор  $\mathcal{T}$  называют *корнем порядка  $k$*  из оператора  $\mathcal{A}$  и обозначают через  $\mathcal{A}^{1/k}$  или через  $\sqrt[k]{\mathcal{A}}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжен, существует ортонормированный базис  $\{e^j\}_{j=1}^n$  его собственных векторов. Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  соответствующие им собственные числа и определим оператор  $\mathcal{T}$  действием на векторы базиса:

$$\mathcal{T}e_i = \sqrt[k]{\lambda_i} e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Все собственные числа неотрицательного оператора неотрицательны, поэтому можно считать, что все числа  $\sqrt[k]{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , неотрицательны. Очевидно, что оператор  $\mathcal{T}$  самосопряжен, неотрицателен и  $\mathcal{T}^k = \mathcal{A}$ , т. е.  $\mathcal{T} = \mathcal{A}^{1/k}$ .

Осталось доказать единственность корня порядка  $k$  из оператора  $\mathcal{A}$ . С этой целью установим предварительно, что существует полином  $P_m$ , степени  $m \leq n-1$ , такой, что  $\mathcal{T} = P_m(\mathcal{A})$ . Действительно, пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ,  $r \leq n$ , — все попарно различные собственные числа оператора  $\mathcal{A}$ . Найдется (и притом только один) полином  $P_{r-1}$ , степени  $r-1$ , такой, что  $P_{r-1}(\lambda_i) = \sqrt[k]{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ <sup>1)</sup>. Действуя

<sup>1)</sup> Полином  $P_{r-1}$  можно записать в явном виде, используя, например, интерполяционную формулу Лагранжа (см. с. 86).

оператором  $P_{r-1}(\mathcal{A})$  на векторы базиса  $e_i$ , получим

$$P_{r-1}(\mathcal{A})e_i = P_{r-1}(\lambda_i)e_i = \sqrt[k]{\lambda_i} e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

т. е.  $P_{r-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$ . Пусть теперь  $\mathcal{U}$  — произвольный самосопряженный неотрицательный оператор такой, что  $\mathcal{U}^k = \mathcal{A}$ . Тогда

$$\mathcal{T}\mathcal{U} = P_{r-1}(\mathcal{A})\mathcal{U} = P_{r-1}(\mathcal{U}^k)\mathcal{U} = \mathcal{U}P_{r-1}(\mathcal{U}^k) = \mathcal{U}\mathcal{T},$$

т. е. операторы  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{U}$  перестановочны, по теореме 11, с. 228, у них существует общий ортонормированный базис собственных векторов (обозначим его вновь через  $e_1, \dots, e_n$ )

$$\mathcal{T}e_i = \mu_i e_i, \quad \mathcal{U}e_i = \tilde{\mu}_i e_i, \quad \mu_i, \tilde{\mu}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\mathcal{T}^k e_i = \mu_i^k e_i, \quad \mathcal{U}^k e_i = \tilde{\mu}_i^k e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

но  $\mathcal{T}^k = \mathcal{U}^k$ , поэтому  $\tilde{\mu}_i^k = \mu_i^k$ , откуда вытекает, что  $\tilde{\mu}_i = \mu_i, i = 1, \dots, n$ . Таким образом,  $\mathcal{U} = \mathcal{T}$ .  $\square$

### § 13. Обобщенная проблема собственных значений

1. Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — произвольные операторы, действующие в пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Ненулевой вектор  $x \in \mathbf{X}_n$  называется *собственным вектором* обобщенной проблемы собственных значений, если существует число  $\lambda$  такое, что

$$\mathcal{A}x = \lambda \mathcal{B}x; \tag{13.1}$$

число  $\lambda$  называется при этом *собственным числом* обобщенной проблемы собственных значений. Если оператор  $\mathcal{B}$  невырожден, то задача (13.1), очевидно, эквивалентна задаче на собственные значения

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}x = \lambda x \tag{13.2}$$

для оператора  $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ .

Наиболее просто обобщенная проблема собственных значений исследуется в случае самосопряженных операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ .

2. **Теорема.** Пусть  $\mathcal{A}$  — самосопряженный оператор,  $\mathcal{B}$  — положительно определенный оператор, действующие в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Тогда существуют векторы  $\{e^k\}_{k=1}^n$ , образующие

базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , и вещественные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  такие, что

$$\mathcal{A}e^k = \lambda_k \mathcal{B}e^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (13.3)$$

$$(\mathcal{B}e^k, e^l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (13.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Каждой паре элементов  $x, y \in \mathbf{X}_n$  поставим в соответствие число  $(x, y)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}x, y)$ . Это соответствие определяет скалярное произведение на пространстве  $\mathbf{X}_n$  (см. упражнение 1, с. 223). Оператор  $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$  самосопряжен относительно этого нового скалярного произведения. Действительно, для любых  $x, y \in \mathbf{X}_n$  имеем

$$(\mathcal{C}x, y)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}\mathcal{C}x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}y) = (x, \mathcal{C}y)_{\mathcal{B}}.$$

Поэтому по теореме 9, с. 226, существуют векторы  $\{e^k\}_{k=1}^n$ , образующие базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , и вещественные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (см. п. 5, с. 225) такие, что

$$\mathcal{C}e^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (13.5)$$

$$(e^k, e^l)_{\mathcal{B}} = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (13.6)$$

Равенства (13.5), (13.6) эквивалентны соответствующим равенствам (13.3), (13.4).  $\square$

## § 14. Сингулярные базисы и сингулярные числа оператора

**1.** В этом параграфе будет показано, что для любого оператора  $\mathcal{A}$ , действующего из евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$  в евклидово пространство  $\mathbf{Y}_m$ , можно указать такие ортонормированные базисы  $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$  и  $\{q^k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$ , что матрица оператора  $\mathcal{A}$  принимает очень простой вид, а именно,

$$\mathcal{A}e^k = \begin{cases} \rho_k q^k, & k \leq r, \\ 0 & , k > r, \end{cases} \quad (14.1)$$

где  $\rho_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ . Числа  $\rho_k$  называют *сингулярными числами* оператора  $\mathcal{A}$ . Базисы  $\{e^k\}_{k=1}^n$ ,  $\{q^k\}_{k=1}^m$ , обеспечивающие выполнение соотношений (14.1), называются *сингулярными базисами* оператора  $\mathcal{A}$ .

Как показывает (14.1), ненулевыми элементами матрицы  $A_{eq}$  оператора  $\mathcal{A}$  относительно сингулярных базисов являются только числа  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ , расположенные на диагонали главного (базисного) минора матрицы  $A_{eq}$ .

**2.** Построим сингулярные базисы оператора  $\mathcal{A}$ . Оператор  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  самосопряжен и неотрицателен (см. упражнение 2 на с. 223), следовательно (см. теорему 9, с. 226, и п. 3, § 10, с. 231), существуют ортонормированные собственные векторы  $\{e^k\}_{k=1}^n$  оператора  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ , все его собственные числа неотрицательны. Таким образом,

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}e^k = \rho_k^2 e^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14.2)$$

Здесь  $\rho_k^2 \geq 0$  — собственные числа оператора  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ . Будем нумеровать их так, чтобы  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_r > 0$ ,  $\rho_{r+1} = \dots = \rho_n = 0$ . Положим  $z^k = \mathcal{A}e^k$  для  $k = 1, \dots, r$  и заметим, что

$$(z^p, z^q) = (\mathcal{A}e^p, \mathcal{A}e^q) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}e^p, e^q) = \rho_p^2 (e^p, e^q).$$

Поэтому

$$(z^p, z^q) = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ \rho_p^2, & p = q, \end{cases} \quad (14.3)$$

следовательно, векторы

$$q^k = \rho_k^{-1} \mathcal{A}e^k, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (14.4)$$

образуют ортонормированную систему в пространстве  $\mathbf{Y}_m$ . Если окажется, что  $r < m$ , дополним ее произвольно векторами  $q^k$ ,  $k = r + 1, r + 2, \dots, m$ , до ортонормированного базиса пространства  $\mathbf{Y}_m$ . Из определения векторов  $\{e^k\}_{k=1}^n$ ,  $\{q^k\}_{k=1}^m$  сразу же вытекает справедливость (14.1).

**3.** Из (14.1) получаем, что векторы  $\{q^k\}_{k=1}^r$  образуют базис в  $\text{Im}(\mathcal{A})$ , но тогда из теоремы 1, с. 218, вытекает, что векторы  $\{q^k\}_{k=r+1}^m$  образуют базис в  $\text{Ker}(\mathcal{A}^*)$ , следовательно,

$$\mathcal{A}^*q^k = 0 \quad \text{для } k = r + 1, \dots, m. \quad (14.5)$$

Для  $k = 1, 2, \dots, r$  из (14.4), (14.2) получаем

$$\mathcal{A}^*q^k = \rho_k^{-1} \mathcal{A}^*\mathcal{A}e^k = \rho_k e^k. \quad (14.6)$$

**4.** Сопоставляя (14.6), (14.4), (14.5), будем иметь, что

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*q^k = \rho_k^2 q^k, \quad k = 1, \dots, r, \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^*q^k = 0, \quad k = r + 1, \dots, m. \quad (14.7)$$

Из (14.2), (14.7) вытекает, что ненулевые собственные числа операторов  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$  совпадают, т. е. спектры этих операторов могут отличаться лишь кратностью нулевого собственного числа.

5. Из предыдущих рассуждений также следуют равенства

$$\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A} \mathcal{A}^*),$$

$$\text{def}(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) = n - \text{rank}(\mathcal{A}), \quad \text{def}(\mathcal{A} \mathcal{A}^*) = m - \text{rank}(\mathcal{A}).$$

6. Понятно, что ранг  $r$  оператора  $\mathcal{A}$  равен количеству ненулевых сингулярных чисел оператора  $\mathcal{A}$ . Это наблюдение открывает реальную возможность вычисления ранга оператора  $\mathcal{A}$ : нужно решить задачу на собственные значения для самосопряженного неотрицательного оператора  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  и определить количество ненулевых собственных чисел. Именно таким способом обычно пользуются в вычислительной практике. Ясно также, что собственные векторы  $\{e^i\}_{i=r+1}^n$  оператора  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  образуют ортонормированный базис ядра оператора  $\mathcal{A}$ .

7. Если сингулярные числа и сингулярные базисы оператора  $\mathcal{A}$  найдены, то построение псевдорешения (см. § 5, с. 219) уравнения

$$\mathcal{A}x = y \tag{14.8}$$

не вызывает затруднений. В самом деле, как было показано в п. 3, с. 220, любое решение уравнения

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y \tag{14.9}$$

есть псевдорешение уравнения (14.8). Представляя векторы  $x$  и  $y$  в виде разложений по сингулярным базисам,  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$ ,  $y = \sum_{k=1}^m \eta_k q^k$ , и используя затем соотношения (14.2), (14.5), (14.6), получим как следствие уравнения (14.9), что

$$\sum_{k=1}^r (\rho_k^2 \xi_k - \rho_k \eta_k) e^k = 0, \tag{14.10}$$

откуда вытекает, что  $\xi_k = \eta_k / \rho_k$  для  $k = 1, 2, \dots, r$ . Таким образом, любой вектор

$$x = \sum_{k=1}^r (\eta_k / \rho_k) e^k + \sum_{k=r+1}^n \xi_k e^k, \tag{14.11}$$

где  $\xi_{r+1}, \dots, \xi_n$  — произвольные числа, есть псевдорешение уравнения (14.8).



Если  $y \in \text{Im}(\mathcal{A})$ , т. е. уравнение (14.8) разрешимо, то формула (14.11) дает общее решение (см. § 1, с. 174) уравнения (14.8). Действительно, в этом случае вектор  $x^0 = \sum_{k=1}^r (\eta_k / \rho_k) e^k$  есть частное решение уравнения (14.8), а  $\sum_{k=r+1}^n \xi_k e^k$  — общее решение соответствующего однородного уравнения.

8. Для любого псевдорешения  $x$  уравнения (14.8) имеем

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^r (\eta_k / \rho_k)^2 + \sum_{k=r+1}^n \xi_k^2.$$

Полагая  $\xi_{r+1}, \dots, \xi_n = 0$ , получим псевдорешение с минимальной длиной. Такое псевдорешение принято называть *нормальным*. Оно ортогонально ядру оператора  $\mathcal{A}$ .

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Покажите, что модуль определителя любого оператора, действующего в конечномерном пространстве, равен произведению всех сингулярных чисел этого оператора.

2) Пусть  $A$  — произвольная прямоугольная матрица ранга  $r$ . Покажите, что существуют унитарные матрицы  $U, V$  такие, что

$$A = UDV, \quad (14.12)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} R & O_{1,2} \\ O_{2,1} & O_{2,2} \end{pmatrix}$$

есть блочная  $2 \times 2$  матрица,  $R = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r)$ , все элементы диагонали  $R$  положительны, все элементы матриц  $O_{1,2}, O_{2,1}, O_{2,2}$  — нули.

Формула (14.12) определяет так называемое *сингулярное* разложение прямоугольной матрицы.

9. Сингулярные числа оператора характеризуют чувствительность решения линейного уравнения по отношению к изменению его правой части. Пусть  $\mathcal{A}$  — невырожденный оператор, действующий в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ . Рассмотрим наряду с уравнением

$$\mathcal{A}x = y \quad (14.13)$$

уравнение

$$\mathcal{A}x = \tilde{y}. \quad (14.14)$$

Поскольку оператор  $\mathcal{A}$  невырожден, оба уравнения однозначно разрешимы. Пусть  $x$  — решение уравнения (14.13),  $\tilde{x}$  — решение уравнения (14.14). Величину  $\delta_x = |x - \tilde{x}|/|x|$  называют величиной *относительного изменения решения* при изменении правой части. Выясним, как она зависит от  $\delta_y = |y - \tilde{y}|/|y|$  — величины *относительного изменения правой части*. Представим векторы  $y, \tilde{y}$  в виде разложений

по сингулярному базису:  $y = \sum_{k=1}^n \eta_k q^k, \tilde{y} = \sum_{k=1}^n \tilde{\eta}_k q^k$ . Тогда в след-

ствие (14.1) получим  $x = \mathcal{A}^{-1}y = \sum_{k=1}^n \frac{\eta_k}{\rho_k} e^k, \tilde{x} = \mathcal{A}^{-1}\tilde{y} = \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{\eta}_k}{\rho_k} e^k$ ,

поэтому, используя неравенства  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n > 0$ , будем иметь, что

$$\delta_x^2 = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|\eta_k - \tilde{\eta}_k|^2}{\rho_k^2}}{\sum_{k=1}^n \frac{|\eta_k|^2}{\rho_k^2}} \leq \frac{\rho_1^2}{\rho_n^2} \frac{\sum_{k=1}^n |\eta_k - \tilde{\eta}_k|^2}{\sum_{k=1}^n |\eta_k|^2} = \frac{\rho_1^2}{\rho_n^2} \delta_y^2. \quad (14.15)$$

Таким образом,

$$\delta_x \leq \frac{\rho_1}{\rho_n} \delta_y. \quad (14.16)$$

Величина  $\rho_1/\rho_n$ , характеризующая устойчивость решения уравнения (14.13) по отношению к изменению его правой части, называется *числом обусловленности* оператора  $\mathcal{A}$  и обозначается через  $\text{cond}(\mathcal{A})$ . Очевидно,  $\text{cond}(\mathcal{A}) \geq 1$  для любого оператора  $\mathcal{A}$ .

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Покажите, что при определенном выборе  $y$  и  $\tilde{y}$  неравенство (14.16) превращается в равенство, и в этом смысле оценка (14.16) неумлучшаема.

2) Приведите примеры операторов, для которых число обусловленности равно единице.

## § 15. Полярное разложение оператора

1. Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — произвольный оператор. Определим, как в п. 1, § 14, сингулярные базисы  $\{e^k\}_{k=1}^n, \{q^k\}_{k=1}^n$  оператора  $\mathcal{A}$ , а затем операторы  $\mathcal{U}, \mathcal{T}, \mathcal{S}$ , задав их действием на векторы базисов:

$$\mathcal{U}e^k = q^k, \mathcal{T}q^k = \rho_k q^k, \mathcal{S}e^k = \rho_k e^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15.1)$$

Оператор  $\mathcal{U}$  унитарный, так как переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис. Операторы  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{S}$  — самосопряженные неотрицательные операторы. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что числа  $(\mathcal{T}x, x)$ ,  $(\mathcal{S}x, x)$  неотрицательны для любого  $x \in \mathbf{X}_n$ .

Далее, учитывая (14.1), (15.1), получим

$$\mathcal{U}\mathcal{S}e^k = \rho_k q^k = \mathcal{A}e^k, \quad \mathcal{T}\mathcal{U}e^k = \rho_k q^k = \mathcal{A}e^k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

следовательно,

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}\mathcal{S} = \mathcal{T}\mathcal{U}. \quad (15.2)$$

Формулы (15.2) определяют так называемое *полярное разложение* оператора  $\mathcal{A}$ . Они показывают, что любое линейное преобразование есть результат последовательного выполнения унитарного преобразования, не меняющего длин векторов, и самосопряженного неотрицательного преобразования, выполняющего растяжения пространства в  $n$  попарно ортогональных направлениях.

Оператор  $\mathcal{S}$  называют *правым оператором растяжения*, а оператор  $\mathcal{T}$  — *левым оператором растяжения*.

**2.** Из (15.2) непосредственно получаем  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{S}^2$ ,  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{T}^2$ . Поскольку операторы  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  — самосопряженные неотрицательные операторы, то эти равенства показывают, что  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  однозначно определяются по оператору  $\mathcal{A}$ , а именно

$$\mathcal{S} = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}, \quad \mathcal{T} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}. \quad (15.3)$$

В случае, когда оператор  $\mathcal{A}$  невырожден, оператор  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  также невырожден, следовательно, невырожден и оператор  $\mathcal{S}$ , поэтому оператор  $\mathcal{U} = \mathcal{A}\mathcal{S}^{-1}$  также определяется однозначно.

Из формул (15.2), (15.3) непосредственно вытекает

**3. Теорема.** *Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы операторы  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{S}$  в представлении (15.2) совпадали, иными словами, чтобы операторы  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{S}$  были перестановочны.*

## § 16. Евклидово пространство операторов

**1.** Определим на пространстве линейных операторов, действующих в конечномерном евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , *скалярное произведение* по формуле  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \text{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}^*)$ , Пусть  $A_e$ ,  $B_e$  — матрицы операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  в произвольном ортонормированном базисе. Тогда,

как нетрудно подсчитать,  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^e \bar{b}_{ij}^e$ . Из этой формулы очевидным образом вытекает справедливость аксиом скалярного произведения.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что для любого оператора  $\mathcal{A}$ , действующего в евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ ,

$$|\mathcal{A}|^2 = \sum_{k=1}^n \rho_k^2,$$

где  $\rho_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , — сингулярные числа оператора  $\mathcal{A}$ .

**2.** Построим некоторые часто используемые в различных приложениях базисы евклидова пространства операторов. Каждой паре векторов  $a, b$  евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$  поставим в соответствие линейный оператор, обозначаемый через  $a \otimes b$  и определяемый равенством

$$a \otimes b x = (x, b)a \quad \forall x \in \mathbf{X}_n. \quad (16.1)$$

Оператор  $a \otimes b$  называют *тензорным произведением* или *диадой* векторов  $a, b$ . Пусть  $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$  — базис пространства  $\mathbf{X}_n$ . Образует линейные операторы

$$e^k \otimes e^l, \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (16.2)$$

Количество операторов вида (16.2) равно  $n^2$ , т. е. совпадает с размерностью пространства всех линейных операторов, действующих в  $\mathbf{X}_n$  (см. § 8, с. 167). Совокупность операторов (16.2) линейно независима.

Действительно, пусть  $\sum_{k,l=1}^n c_{kl} e^k \otimes e^l = 0$ . Тогда для любого вектора  $\tilde{e}^j$  взаимного базиса  $\tilde{\mathcal{E}}_n \subset \mathbf{X}_n$  (см. § 9, с. 139), используя (16.1), получим

$$0 = \sum_{k,l=1}^n c_{kl} (e^k \otimes e^l) \tilde{e}^j = \sum_{k=1}^n c_{kj} e^k, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (16.3)$$

Отсюда вследствие линейной независимости векторов  $\mathcal{E}_n$  вытекает, что  $c_{kl} = 0$  для всех  $k, l = 1, 2, \dots, n$ .

Таким образом, система (16.2) есть базис, и каждый оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в пространстве  $\mathbf{X}_n$ , однозначно представим в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l=1}^n \alpha_{kl} e^k \otimes e^l. \quad (16.4)$$

Аналогично доказывается, что каждый оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  однозначно представим в одной из следующих форм при помощи векторов основного и взаимного базисов:

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l=1}^n \tilde{\alpha}_{kl} \tilde{e}^k \otimes \tilde{e}^l, \quad (16.5)$$

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l=1}^n \hat{\alpha}_{kl} e^k \otimes \tilde{e}^l, \quad (16.6)$$

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l=1}^n \check{\alpha}_{kl} \tilde{e}^k \otimes e^l. \quad (16.7)$$

Коэффициенты разложения (16.4) называются *контравариантными* компонентами оператора  $\mathcal{A}$ , коэффициенты разложения (16.5) называются *ковариантными* компонентами оператора  $\mathcal{A}$ , а коэффициенты разложений (16.6), (16.7) — *смешанными* компонентами.

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Покажите, что для любых  $a, b \in \mathbf{X}_n$  справедливо равенство

$$a \otimes b = (b \otimes a)^*. \quad (16.8)$$

2) Опираясь на (16.8), докажите, что любых  $a, b \in \mathbf{X}_n$  оператор

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a, \quad (16.9)$$

называемый *внешним произведением* векторов  $a, b$ , косоэрмитов.

3) Опишите ядро оператора  $a \wedge b$ . Специально рассмотрите случай  $n = 3$ .

4) Докажите, что матрица оператора  $a \otimes b$  относительно базиса  $\{e^k\}_{k=1}^n$  есть  $\{a_k \tilde{b}_l\}_{k,l=1}^n$ , где  $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ , — контравариантные компоненты вектора  $a$  относительно этого базиса,  $\tilde{b}_k, k = 1, 2, \dots, n$ , — ковариантные компоненты вектора  $b$ .

5) Докажите, что коэффициенты разложений (16.4)–(16.7) можно вычислить по следующим формулам:

$$\alpha_{kl} = (\mathcal{A}\tilde{e}^l, \tilde{e}^k), \quad \tilde{\alpha}_{kl} = (\mathcal{A}e^l, e^k), \quad \hat{\alpha}_{kl} = (\mathcal{A}e^l, \tilde{e}^k), \quad \check{\alpha}_{kl} = (\mathcal{A}\tilde{e}^l, e^k),$$

$k, l = 1, 2, \dots, n$ .

Покажите также, что числа  $\hat{\alpha}_{kl}, \check{\alpha}_{kl}, k, l = 1, 2, \dots, n$ , есть элементы матрицы оператора  $\mathcal{A}$  в основном и взаимном базисах соответственно.

6) Пусть  $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$  — нормальный оператор,  $\{e^k\}_{k=1}^n$  — ортонормированный базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , составленный из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — соответствующие собственные числа оператора  $\mathcal{A}$ . Покажите, что  $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i \otimes e^i$ .

---

---

ГЛАВА 13  
Операторы в вещественном евклидовом  
пространстве

§ 1. Общие сведения

Отметим некоторые особенности, связанные с рассмотрением линейных операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ .

В любом ортонормированном базисе пространства  $\mathbf{X}_n$  матрицы операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  взаимно транспонированы.

Для того, чтобы оператор был самосопряжен, необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе пространства  $\mathbf{X}_n$  его матрица была симметрична.

Косоэрмитов оператор, действующий в вещественном евклидовом пространстве, обычно называют *кососимметричным*. Для того, чтобы оператор был кососимметричным, необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе пространства  $\mathbf{X}_n$  его матрица была кососимметрична.

Любой оператор  $\mathcal{A}$  однозначно представим в виде  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ , где  $\mathcal{A}_1$  — самосопряженный,  $\mathcal{A}_2$  — кососимметричный операторы, причем

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*).$$

Аналогичные рассуждения для матриц см. на с. 107, 108.

**1. Теорема<sup>1)</sup>.** *Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был кососимметричным, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}_n. \quad (1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если  $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$ , то

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = -(x, \mathcal{A}x),$$

т. е.  $(\mathcal{A}x, x) = 0$ . Достаточность условия (1.1) вытекает из очевидного тождества  $(\mathcal{A}(x+y), x+y) = (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + (\mathcal{A}x + \mathcal{A}^*x, y)$ .  $\square$

---

<sup>1)</sup>Сравните с теоремой 1.3 с. 221.

**2.** Унитарный оператор, т. е. оператор  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющий условию  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I$ , действующий в вещественном евклидовом пространстве, называется *ортогональным*. Для того, чтобы оператор был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица была ортогональной (см. п. 7 на с.108) в любом ортонормированном базисе пространства  $\mathbf{X}_n$ .

Из определения ортогонального оператора сразу же вытекает, что он не меняет длин векторов и углов между векторами. Определитель ортогонального оператора равен плюс или минус единице.

Собственным числом ортогонального оператора может быть только плюс или минус единица.

**3.** Напомним, что оператор  $\mathcal{A}$  называется нормальным, если  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ . Самосопряженный, кососимметричный и ортогональный операторы — нормальные операторы. В любом ортонормированном базисе  $\mathcal{E}_n$  пространства  $\mathbf{X}_n$  матрица  $A_e$  нормального оператора  $\mathcal{A}$  является нормальной, т. е. удовлетворяет условию

$$A_e A_e^T = A_e^T A_e. \quad (1.2)$$

Справедливо и обратное: если в некотором ортонормированном базисе  $\mathcal{E}_n$  пространства  $\mathbf{X}_n$  матрица  $A_e$  оператора  $\mathcal{A}$  удовлетворяет условию (1.2), то  $\mathcal{A}$  — нормальный оператор.

## § 2. Вещественное евклидово пространство операторов

**1.** Вводя на вещественном линейном пространстве всех операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , скалярное произведение по формуле  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \text{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}^*)$ , получим *вещественное евклидово пространство операторов*. Все факты, установленные в § 16, с. 243, очевидным образом переносятся и на этот случай.

### УПРАЖНЕНИЯ

1) Покажите, что множество всех самосопряженных операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , есть подпространство евклидова пространства операторов, действующих в вещественном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , и определите его размерность.

2) Покажите, что множество всех кососимметричных операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , есть подпространство евклидова пространства операторов, действующих в вещественном пространстве  $\mathbf{X}_n$ , и определите его размерность.



3) Пусть  $\{e^k\}_{k=1}^n$  — базис вещественного евклидова пространства  $\mathbf{X}_n$ . Докажите, что операторы  $e^k \otimes e^l + e^l \otimes e^k$  — базис пространства всех самосопряженных операторов, действующих в  $\mathbf{X}_n$ , а операторы  $e^k \wedge e^l$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n$ ,  $k < l$  — базис пространства всех кососимметричных операторов, действующих в  $\mathbf{X}_n$ .

**2.** Изотропные функции операторного аргумента. В этом пункте описывается класс операторных функций, находящих многочисленные применения в механике.

**2.1.** Функция  $f$ , отображающая вещественное евклидово пространство операторов на  $\mathbb{R}$ , называется изотропной скалярной функцией, если

$$f(QAQ^*) = f(A)$$

для любого самосопряженного оператора  $A$  и любого ортогонального оператора  $Q$ . Практически дословно повторяя рассуждения п. 1, с. 194, нетрудно убедиться, что для того, чтобы функция  $f$  была скалярной и изотропной, необходимо и достаточно, чтобы она зависела только от инвариантов оператора  $A$ .

**2.2.** Функция  $f$ , отображающая вещественное евклидово пространство операторов в себя, называется симметричной и изотропной, если

$$f(QAQ^*) = Qf(A)Q^*$$

для любого самосопряженного оператора  $A$  и любого ортогонального оператора  $Q$ .

Аналогично теоремам 2.1, с. 194, 3, с. 196, доказываются

**2.3. Теорема.** *Операторная функция  $f$  симметрична и изотропна тогда и только тогда, когда для любого самосопряженного оператора  $A$  имеет место представление:*

$$f(A) = \varphi_0 I + \varphi_1 A + \varphi_2 A^2 + \dots + \varphi_{n-1} A^{n-1}, \quad (2.1)$$

где  $\varphi_i = \varphi_i(A)$ ,  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , есть изотропные скалярные функции операторного аргумента.

**2.4. Теорема.** *Для того, чтобы функция  $f$  была линейной симметричной и изотропной, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$f(A) = \lambda \operatorname{tr}(A)I + 2\mu A, \quad (2.2)$$

где  $\lambda, \mu$  — вещественные числа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 2.3, 2.4 часто используются в механике сплошной среды. Множитель два во втором слагаемом правой части

равенства (2.2) обусловлен традиционно применяемыми обозначениями в этой области механики.

### § 3. Структура нормального оператора

В этом параграфе все операторы — операторы, действующие в вещественном евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ .

**1. Теорема.** *Для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$ , действующий в вещественном евклидовом пространстве  $\mathbf{X}_n$ , был нормальным оператором, необходимо и достаточно существования ортонормированного базиса  $\mathcal{E}_n$  пространства  $\mathbf{X}_n$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  блочно диагональна:*

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

*Диагональные блоки этой матрицы могут иметь размеры либо  $1 \times 1$ , либо  $2 \times 2$ ; блоки размера  $1 \times 1$  — это вещественные числа, блоки размера  $2 \times 2$  есть матрицы вида*

$$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $\alpha_p, \beta_p$  — вещественные числа.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** **Д о с т а т о ч н о с т ь.** Непосредственными вычислениями легко проверяется, что матрица  $A_e$  описанной в теореме структуры удовлетворяет условию (1.2), с. 248.

**Н е о б х о д и м о с т ь.** Пусть  $A_e$  — матрица нормального оператора  $\mathcal{A}$  в произвольно выбранном ортонормированном базисе  $\mathcal{E}_n$ . Тогда  $A_e$  удовлетворяет условию (1.2). Как было установлено ранее (см. упражнение 1 на с. 227), по матрице  $A_e$  можно построить ортонормированный базис  $\mathcal{F}_n = \{f_k\}_{k=1}^n$  пространства  $\mathbb{C}^n$  такой, что

$$A_e f_k = \lambda_k f_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — характеристические числа матрицы  $A_e$ , причем если  $\lambda_k$  — вещественное число, то и вектор  $f_k$  можно считать вещественным. Будем нумеровать характеристические числа матрицы  $A_e$  так, что  $\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \dots, \lambda_m = \alpha_m, 0 \leq m \leq n$ , вещественны, а  $\lambda_{m+j} = \alpha_{m+j} + i\beta_{m+j}, \bar{\lambda}_{m+j} = \alpha_{m+j} - i\beta_{m+j}, j = 1, 2, \dots, p$ ,

$p = (n - m)/2$ , — комплексные числа. Тогда собственные векторы  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , будут вещественными, остальные — комплексными, т. е.  $f_k = g_k + ih_k$ , где  $g_k, h_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k > m$ . Отметим также, что, поскольку  $A_e$  — вещественная матрица, то если  $\lambda_k$  — комплексное характеристическое число матрицы  $A_e$  и  $A_e f_k = \lambda_k f_k$ , то  $A_e \bar{f}_k = \bar{\lambda}_k \bar{f}_k$ . По теореме 8, с. 226, собственные векторы, соответствующие различным собственным числам нормального оператора, ортогональны, следовательно,  $(f_k, \bar{f}_k) = 0$ , откуда вытекает, что  $(g_k, g_k) = (h_k, h_k)$ ,  $(g_k, h_k) = 0$ . Кроме того,  $(f_k, f_k) = 1$ . Отсюда легко получается, что  $(g_k, g_k) = (h_k, h_k) = 1/2$ . Пусть, далее,  $f_k, f_l \in \mathcal{F}_n$  есть комплексные векторы  $k \neq l$ ,  $f_k \neq \bar{f}_l$ . Тогда  $(f_k, f_l) = 0$ , и  $(f_k, \bar{f}_l) = 0$ , откуда при помощи элементарных выкладок получаем, что  $(g_k, g_l)$ ,  $(h_k, h_l)$ ,  $(g_k, h_l)$ ,  $(h_k, g_l) = 0$ . Напомним (см. п. 2, с. 197), что если  $A_e f_k = \lambda_k f_k$ ,  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ ,  $f_k = g_k + ih_k$ , то  $A_e g_k = \alpha_k g_k - \beta_k h_k$ ,  $A_e h_k = \alpha_k g_k + \beta_k h_k$ . Поставим теперь в соответствие каждому вещественному характеристическому числу  $\lambda_k$  матрицы  $A_e$  вещественный вектор  $f_k \in \mathcal{F}_n$ , а каждой паре комплексно сопряженных характеристических чисел  $\lambda_k, \bar{\lambda}_k$  матрицы  $A_e$  вещественные векторы  $\tilde{g}_k = \sqrt{2} g_k$ ,  $\tilde{h}_k = \sqrt{2} h_k$ . В результате получим систему

$$\tilde{\mathcal{F}}_n = \{f_1, f_2, \dots, f_m, \tilde{g}_1, \tilde{h}_1, \tilde{g}_2, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{g}_p, \tilde{h}_p\},$$

состоящую из  $n$  векторов пространства  $\mathbb{R}^n$  и по доказанному выше ортонормированную. Для векторов системы  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  выполнены равенства

$$A_e f_k = \alpha_k f_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} A_e \tilde{g}_j &= \alpha_j \tilde{g}_j - \beta_j \tilde{h}_j \\ A_e \tilde{h}_j &= \beta_j \tilde{g}_j + \alpha_j \tilde{h}_j, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$j = 1, 2, \dots, p$ , из которых, очевидно, вытекает, что в ортонормированном базисе  $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}_n$  пространства  $\mathbf{X}_n$  оператор  $\mathcal{A}$  будет иметь матрицу вида (3.1). Блоки этой матрицы образованы соответствующими элементами матрицы  $A_e$ .  $\square$

Остановимся на некоторых важных частных случаях. При этом мы будем опираться на следствие 7, с. 225.

**2. Самосопряженный оператор.** Матрица самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  в любом ортонормированном базисе симметрична, следовательно, (см. п. 7, с. 225), все ее характеристические числа вещественны. Поэтому все числа  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , в равенствах (3.5) равны нулю. Таким образом, существует ортонормированный базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  диагональна.

**3.** Кососимметричный оператор. Матрица кососимметричного оператора  $\mathcal{A}$  в любом ортонормированном базисе кососимметрична, следовательно, (см. п. 7, с. 225), все ее характеристические числа чисто мнимые. Поэтому все числа  $\alpha_j$ , в равенствах (3.4), (3.5) равны нулю, значит, существует ортонормированный базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет вид (3.1). При этом все диагональные блоки первого порядка нулевые, а блоки второго порядка кососимметричны:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$j = 1, 2, \dots, p.$$

#### § 4. Структура ортогонального оператора

**1.** Матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе ортогональна, следовательно (см. п. 7, с. 225), все ее характеристические числа по модулю равны единице. Поэтому числа  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , в соотношениях (3.4) могут быть равны только плюс единице или минус единице, а числа  $\alpha_j, \beta_j, j = 1, 2, \dots, p$ , в равенствах (3.5) таковы, что  $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$ , следовательно, существуют углы  $\varphi_j \in [0, 2\pi)$  такие, что  $\alpha_j = \cos \varphi_j, \beta_j = \sin \varphi_j$ . Таким образом, существует ортонормированный базис пространства  $\mathbf{X}_n$ , в котором матрица ортогонального оператора принимает вид (3.1). При этом все диагональные блоки первого порядка — это числа, равные плюс единице или минус единице, а блоки второго порядка имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix}.$$

Всякому ортогональному преобразованию вещественного евклидова пространства можно придать отчетливый геометрический смысл.

**2.** Начнем с двумерного случая. Как следует из вышеизложенного, для любого ортогонального преобразования евклидова пространства  $\mathbf{X}_2$  существует ортонормированный базис  $e^1, e^2$ , в котором его матрица будет либо

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

либо

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

В первом случае всякий вектор  $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 \in \mathbf{X}_2$  переводится оператором  $\mathcal{A}$  в вектор  $\mathcal{A}x = -\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2$ , т. е. оператор  $\mathcal{A}$  осуществляет зеркальное отражение относительно координатной оси  $\xi_2$ .

Во втором случае  $(\mathcal{A}x, x) = |x||\mathcal{A}x| \cos \varphi$ , т. е. оператор  $\mathcal{A}$  осуществляет поворот каждого вектора  $x \in \mathbf{X}_2$  на угол  $\varphi$ . Направление поворота (при  $\varphi > 0$ ) совпадает с направлением кратчайшего поворота от  $e^1$  к  $e^2$ .

**3.** В трехмерном случае у любого ортогонального оператора  $\mathcal{A}$  существует хотя бы одно собственное число, поскольку соответствующее характеристическое уравнение есть алгебраическое уравнение третьего порядка с вещественными коэффициентами. Поэтому с точностью до перенумерации векторов ортонормированного базиса  $e^1, e^2, e^3 \in \mathbf{X}_3$  матрица  $A_e$  может принять одну из следующих форм:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Поясним, что если оператор  $\mathcal{A}$  имеет одно собственное число, указанные представления непосредственно следуют из теоремы 1, а если оператор  $\mathcal{A}$  имеет три собственных числа, то представления (4.1) или (4.2) получаются за счет специального выбора угла  $\varphi$ .

Рассуждая по аналогии с двумерным случаем, нетрудно убедиться, что оператор  $\mathcal{A}$  с матрицей (4.1) осуществляет поворот пространства  $\mathbf{X}_3$  вокруг оси  $\xi_1$  на угол  $\varphi$ , а оператор  $\mathcal{A}$  с матрицей (4.2) осуществляет поворот пространства  $\mathbf{X}_3$  вокруг оси  $\xi_1$  на угол  $\varphi$  с последующим отражением относительно плоскости, ортогональной вектору  $e^1$ . В первом случае определитель оператора  $\mathcal{A}$  равен единице, во втором — минус единице.

Определитель оператора, как мы знаем, не зависит от выбора базиса пространства. Поэтому все ортогональные преобразования трехмерного пространства можно разбить на два класса: *собственные вращения* — это преобразования с положительным определителем, они осуществляют поворот пространства вокруг некоторой оси; и *несобственные вращения* — это преобразования с отрицательным определителем, они осуществляют поворот пространства вокруг некоторой оси с последующим отражением относительно плоскости, ортогональной этой же оси.

4. Евклидово пространство  $\mathbf{X}_n$  произвольной размерности в соответствии с теоремой 1, § 3, можно представить в виде ортогональной суммы некоторого количества одномерных инвариантных подпространств и некоторого количества двумерных инвариантных подпространств ортогонального оператора  $\mathcal{A}$ . В двумерных инвариантных подпространствах оператор  $\mathcal{A}$  выполняет поворот, в каждом, вообще говоря, на свой угол, а в одномерных инвариантных подпространствах может измениться лишь направление координатной оси.

### 5. УПРАЖНЕНИЯ.

1) Опираясь на результаты § 15, с. 242, описать линейные отображения трехмерного вещественного евклидова пространства с положительным определителем и линейные отображения с отрицательным определителем.

2) Показать, что всякая вещественная симметричная матрица  $A$  ортогонально подобна диагональной, т. е.  $Q^T A Q = \Lambda$ , где  $\Lambda$  — диагональная,  $Q$  — ортогональная матрицы. Столбцы матрицы  $Q$  — собственные векторы матрицы  $A$ , по диагонали матрицы  $\Lambda$  расположены все собственные числа матрицы  $A$ .

3) Пусть  $A$  — симметричная,  $B$  — положительно определенная вещественные матрицы одного и того же порядка. Опираясь на теорему 2, с. 237, показать, что существует невырожденная матрица  $T$  такая, что  $T^T A T = \Lambda$ , где  $\Lambda$  — диагональная матрица, а  $T^T B T = I$ .

## § 5. Матрицы вращения и отражения

Остановимся на двух часто используемых в приложениях типах ортогональных матриц.

### 1. Матрица вращения. Вещественная матрица

$$Q_{st}(\varphi) = \{q_{ij}(\varphi)\}_{i,j=1}^n, \quad 1 \leq s < t \leq n,$$

называется *матрицей вращения*, если  $q_{ss}(\varphi) = q_{tt}(\varphi) = \cos \varphi$ ,  $q_{ii}(\varphi) = 1$  при  $i \neq s, t$ ,  $q_{st}(\varphi) = -\sin \varphi$ ,  $q_{ts}(\varphi) = \sin \varphi$ , а все остальные элементы матрицы  $Q_{st}(\varphi)$  — нули.

Нетрудно видеть, что матрица  $Q = Q_{st}(\varphi)$  ортогональна. Порождаемое этой матрицей преобразование евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением есть поворот на угол  $\varphi$  в двумерном подпространстве (плоскости), натянутом на векторы  $i^s, i^t$  естественного базиса пространства  $\mathbb{R}^n$ . Матрица  $Q^T$ , обратная к  $Q$ , выполняет поворот в той же плоскости в обратном направлении.

Пусть  $x$  — произвольный вектор пространства  $\mathbb{R}^n$ . Ясно, что  $(Qx)_i = x_i$  при  $i \neq s, t$ ,

$$(Qx)_s = x_s \cos \varphi - x_t \sin \varphi,$$

$$(Qx)_t = x_s \sin \varphi + x_t \cos \varphi.$$

Положим  $\rho = (x_s^2 + x_t^2)^{1/2}$ . Пусть  $\varphi = 0$ , если  $\rho = 0$ , и  $\cos \varphi = x_s/\rho$ ,  $\sin \varphi = -x_t/\rho$ , если  $\rho > 0$ . Тогда  $(Qx)_s = \rho$ ,  $(Qx)_t = 0$ .

Теперь совершенно ясно, что если  $x$  — произвольный ненулевой вектор пространства  $\mathbb{R}^n$ , то выбирая последовательно углы  $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots, \varphi_2$ , можно построить матрицы вращения  $Q_{1,n}(\varphi_n), Q_{1,n-1}(\varphi_{n-1}), \dots, Q_{1,2}(\varphi_2)$  такие, что  $Qx = |x| i^1$ . Здесь

$$Q = Q_{1,2}(\varphi_2) \cdots Q_{1,n-1}(\varphi_{n-1}) Q_{1,n}(\varphi_n).$$

Таким образом, любой ненулевой вектор при помощи ортогональной матрицы можно преобразовать в вектор, совпадающий по направлению с вектором  $i^1$  естественного базиса.

Пусть теперь  $x, y$  — два произвольных ненулевых вектора пространства  $\mathbb{R}^n$ . Как только что было показано, существуют ортогональные матрицы  $Q_x$  и  $Q_y$  такие, что  $Q_x x = |x| i^1$ ,  $Q_y y = |y| i^1$ . Отсюда вытекает, что  $Qx = (|x|/|y|)y$ , где  $Q = Q_y^T Q_x$ , т. е. для любой пары ненулевых векторов найдется ортогональная матрица, преобразующая первый вектор в вектор, совпадающий по направлению со вторым.

**2. Матрица отражения.** Пусть  $w = \{w_i\}_{i=1}^n$  — произвольно выбранный вектор единичной длины пространства  $\mathbb{R}^n$ . Матрица

$$R = I - 2ww^T$$

называется *матрицей отражения*. Поясним, что  $w$  трактуется здесь как вектор столбец, так что  $R = \{\delta_{ij} - 2w_i w_j\}_{i,j=1}^n$ .

Матрица  $R$  симметрична. Покажем, что она ортогональна. Действительно,

$$R^T R = R^2 = I - 4ww^T + 4ww^T ww^T = I,$$

так как  $w^T w = |w|^2 = 1$ .

Заметим, далее, что

$$Rw = w - 2ww^T w = -w, \quad Rz = z - 2ww^T z = z, \quad (5.1)$$

если  $w^T z = (w, z) = 0$ , т. е. векторы  $w$  и  $z$  ортогональны<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>В смысле стандартного скалярного произведения в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть теперь  $x$  — произвольный вектор. По теореме 3, с. 153, он однозначно представим в виде  $x = \alpha w + z$ , где  $\alpha$  некоторое число,  $z$  — некоторый вектор, ортогональный  $w$ . Из равенств (5.1) вытекает, что  $Rx = -\alpha w + z$ .

Можно сказать, таким образом, что матрица  $R$  выполняет отражение вектора  $x$  относительно  $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости, ортогональной вектору  $w$ . Это свойство матрицы  $R$  и позволяет называть ее матрицей отражения.

**2.1.** Рассмотрим следующую задачу. Даны ненулевой вектор  $a$  и вектор единичной длины  $e$ . Требуется построить матрицу отражения  $R$ , такую, что  $Ra = \mu e$ , где  $\mu$  — число (ясно, что  $|\mu| = |a|$ , поскольку матрица  $R$  ортогональна).

Нетрудно видеть (сделайте рисунок!), что решение задачи — матрица отражения, определяемая вектором

$$w = (a - |a|e)/|a - |a|e| \quad (5.2)$$

или вектором  $w = (a + |a|e)/|a + |a|e|$ . При вычислениях для минимизации погрешностей округления следует выбрать вектор  $w$  с бóльшим знаменателем.

Полезно отметить, что если  $a$  — произвольный ненулевой вектор, то матрица отражения  $R$  может быть построена так, что для любого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$

$$(a, Rx) = |a|x_k, \quad (5.3)$$

где  $k$  — заданное целое число, лежащее в пределах от 1 до  $n$ . Для этого, очевидно, в формуле (5.2) нужно положить  $e = i^k$ .



## Квадратичные формы и квадратичные функции

### § 1. Канонический вид квадратичной формы

1. *Квадратичной формой* будем называть вещественную функцию  $F$  от  $n$  вещественных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j. \quad (1.1)$$

Заданные вещественные числа  $a_{ij}$  называют *коэффициентами* квадратичной формы. Их можно считать удовлетворяющими условиям симметрии  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , поскольку слагаемые в квадратичной форме, содержащие коэффициенты  $a_{ij}, a_{ji}$ , можно представить так:

$$a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}x_i x_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}x_j x_i.$$

Запишем квадратичную форму в более компактном виде. Пусть  $A$  — симметричная матрица с элементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  будем считать элементом пространства  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $F(x) = (Ax, x)$ . Здесь и всюду на протяжении данной главы скобки обозначают стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

2. Пусть в квадратичной форме выполнена *линейная замена переменных*, т. е. введены новые переменные  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , связанные со старыми переменными  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  соотношением

$$x = Qy, \quad (1.2)$$

где  $Q$  — невырожденная матрица, называемая *матрицей преобразования переменных*. Выполнив замену переменных (1.2), получим

$$F(Qy) = (AQy, Qy) = (Q^T A Q y, y) = (By, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}y_i y_j,$$

где через  $B$  обозначена матрица  $Q^T A Q$ . Очевидно, матрица  $B$  симметрична. Чаще всего, матрицу  $Q$  стремятся подобрать так, чтобы

квадратичная форма в новых переменных приобрела наиболее простой вид.

Говорят, что преобразование переменных (1.2) приводит квадратичную форму (1.1) к *каноническому виду*, если матрица  $B = Q^T A Q$  диагональна, т. е.

$$F(Qy) = \sum_{i=1}^n b_{ii} y_i^2. \quad (1.3)$$

Можно сказать также, что квадратичная форма (1.1) преобразованием переменных (1.2) приведена к сумме квадратов.

**3.** Всякую квадратичную форму невырожденным преобразованием переменных можно привести к каноническому виду. Действительно, поскольку  $A$  — симметричная матрица, то существует ортогональная матрица  $Q$  такая, что (см. упражнение 2 на с. 254)

$$Q^T A Q = \Lambda,$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица, по диагонали которой расположены все собственные числа матрицы  $A$ . При указанном выборе матрицы  $Q$  преобразование переменных (1.2) приводит квадратичную форму (1.1) к виду

$$F(Qy) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \quad (1.4)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $A$ .

**4.** Известны и другие способы приведения квадратичной формы к каноническому виду. Опишем, например, *метод Лагранжа*, или *метод выделения полных квадратов*, приведения квадратичной формы к каноническому виду. В ходе описания этого метода, фактически, будет дано еще одно, независимое, доказательство возможности приведения любой квадратичной формы к каноническому виду.

Будем различать два случая: 1) в квадратичной форме (1.1) коэффициент при квадрате какой-либо переменной отличен от нуля, 2) коэффициенты при квадратах всех переменных — нули.

Рассмотрим сначала первый случай, и пусть  $a_{11} \neq 0$ . Если это не так, придется ввести другую нумерацию неизвестных.

Запишем квадратичную форму (1.1) в виде

$$F = a_{11}^{-1} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + G, \quad (1.5)$$

где  $G = F - a_{11}^{-1} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2$ . Нетрудно убедиться, что  $G$  не содержит  $x_1$ , а является квадратичной формой только от

переменных  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Положим

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_n = x_n. \quad (1.6)$$

Тогда

$$F = a_{11}^{-1}y_1^2 + G(y_2, \dots, y_n), \quad (1.7)$$

где  $G(y_2, \dots, y_n)$  — квадратичная форма от переменных  $y_2, \dots, y_n$ .

Матрица замены переменных (1.6) невырождена, так как ее определитель равен  $a_{11}$ , а по предположению  $a_{11} \neq 0$ .

Пусть теперь все коэффициенты при квадратах переменных в (1.1) равны нулю. Тогда будем считать, что хотя бы один коэффициент при произведениях переменных отличен от нуля, иначе квадратичная форма тождественно равна нулю, и она имеет тривиальный канонический вид: все коэффициенты при квадратах неизвестных — нули. Итак, примем для определенности, что  $a_{12} \neq 0$ , и выполним преобразование переменных по формулам

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_3 = z_3, \quad \dots, \quad x_n = z_n. \quad (1.8)$$

Заметим, во-первых, что определитель матрицы преобразования (1.8) равен двум, а во-вторых, что  $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2$ , следовательно, в квадратичной форме появились слагаемые, содержащие квадраты переменных, поэтому, повторяя рассуждения предыдущего случая, при помощи невырожденной замены переменных приведем квадратичную форму к виду

$$F = \alpha y_1^2 + G(y_2, \dots, y_n). \quad (1.9)$$

Таким образом, выполняя одно или два последовательных невырожденных преобразования переменных, квадратичную форму (1.1) можно привести к виду (1.9).

Аналогичными преобразованиями переменных выделим полный квадрат в квадратичной форме  $G(y_2, \dots, y_n)$ . Продолжая преобразования, в конце концов приведем квадратичную форму (1.1) к сумме квадратов.

**ПРИМЕР.** Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1. \quad (1.10)$$

Поскольку в этой форме отсутствуют квадраты переменных, выполним сначала преобразование переменных

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Получим

$$F = 2y_1^2 - 4y_1y_3 - 2y_2^2 - 8y_2y_3.$$

Положим теперь

$$z_1 = y_1 - y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3.$$

Тогда

$$F = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = 2z_1^2 - 2(z_2^2 + 4z_2z_3) - 2z_3^2.$$

Отсюда после замены переменных

$$t_1 = z_1, \quad t_2 = z_2 + 2z_3, \quad t_3 = z_3$$

получаем

$$F = 2t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2, \quad (1.11)$$

т. е. в переменных  $t_1, t_2, t_3$  квадратичная форма принимает канонический вид. Очевидно, каждое из выполненных нами преобразований переменных имеет невырожденную матрицу. Результирующее преобразование переменных, как нетрудно проверить, имеет вид

$$t_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \quad t_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3, \quad t_3 = x_3,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что матрица преобразования переменных (1.12) невырождена, и эта замена переменных приводит квадратичную форму (1.10) к каноническому виду (1.11).

## § 2. Закон инерции квадратичных форм

Среди коэффициентов  $b_{ii}$  канонического вида (1.3) квадратичной формы (1.1) могут быть положительные, отрицательные числа, а также — нули. Нумеруя соответствующим образом переменные, запишем (1.3) так:

$$F(Qy) = (By, y) = \sum_{i=1}^{n_+} b_{ii}y_i^2 + \sum_{i=n_++1}^{n_++n_-} b_{ii}y_i^2. \quad (2.1)$$

Считаем при этом, что числа  $b_{ii}$  положительны при  $i = 1, 2, \dots, n_+$  и отрицательны при  $i = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$ .

Как мы уже убедились, приведение квадратичной формы к каноническому виду может быть выполнено различными способами. Поэтому естественно поставить вопрос: зависят ли числа  $n_+, n_-$  от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду?

При исследовании этого вопроса будут использованы следующие определения.

Симметричные матрицы  $A$  и  $B$  называют *конгруэнтными*, если существует невырожденная матрица  $C$  такая, что  $B = C^T A C$ .

С каждой симметричной матрицей  $A$  свяжем три целых числа:  $n_0(A)$  — количество нулевых характеристических чисел матрицы  $A$ ,  $n_+(A)$  — количество положительных характеристических чисел,  $n_-(A)$  — количество отрицательных характеристических чисел (характеристические числа подсчитываются с учетом их кратности). Тройка чисел  $n_0(A), n_+(A), n_-(A)$  называется *инерцией матрицы  $A$* , или *инерцией* соответствующей ей *квадратичной формы*.

**1. Теорема.** *Для того, чтобы матрицы  $A$  и  $B$  были конгруэнтными, необходимо и достаточно, чтобы их инерции совпадали.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** **Д о с т а т о ч н о с т ь.** Как было показано выше, для всякой симметричной матрицы  $A$  можно указать ортогональную матрицу  $Q$  такую, что

$$F(Qy) = (Q^T A Q y, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \quad (2.2)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $A$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 &= \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(\lambda_i) |\lambda_i| y_i^2 = \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(\lambda_i) (\sqrt{|\lambda_i|} |y_i|)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(\lambda_i) t_i^2 = \sum_{i=1}^{n_+(A)} t_i^2 - \sum_{i=n_+(A)+1}^{n_+(A)+n_-(A)} t_i^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эти преобразования можно трактовать как невырожденную замену переменных:  $t_i = \sqrt{|\lambda_i|} |y_i|$ , если  $\lambda_i \neq 0$ , и  $t_i = y_i$ , если  $\lambda_i = 0$ .

Таким образом, установлено, что всякая симметричная матрица  $A$  конгруэнтна диагональной матрице, у которой на диагонали  $n_+(A)$  единиц,  $n_-(A)$  минус единиц, остальные элементы главной диагонали — нули. Если симметричная матрица  $B$  имеет инерцию, равную инерции матрицы  $A$ , то она конгруэнтна точно такой же диагональной матрице. Отношение конгруэнтности, как нетрудно убедиться, транзитивно, следовательно, матрицы  $A$  и  $B$  конгруэнтны.

**Н е о б х о д и м о с т ь.** Заметим, прежде всего, что у конгруэнтных матриц ранги, очевидно, совпадают. Кроме того, для любой симметричной матрицы  $A$  справедливо равенство  $\operatorname{rang}(A) = n_+(A) + n_-(A)$ . Действительно, всякая симметричная матрица  $A$  подобна диагональной матрице, у которой по диагонали расположены все собственные числа матрицы  $A$ . Из этих рассуждений вытекает, что если матрицы  $A$  и  $B$  конгруэнтны, то  $n_+(A) + n_-(A) = n_+(B) + n_-(B)$ .

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что если матрицы  $A, B$  конгруэнтны, то

$$n_+(A) = n_+(B). \quad (2.4)$$

Пусть  $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_{n-n_++1}$  — положительные собственные числа матрицы  $A$ ,  $e^{n-n_++1}, \dots, e^n$  — соответствующие им ортонормированные собственные векторы матрицы  $A$ . По предположению теоремы  $B = C^T A C$ , где  $C$  — невырожденная матрица, или  $A = D^T B D$ , где  $D = C^{-1}$ . Поскольку матрица  $D$  невырождена, векторы  $D e^{n-n_++1}, \dots, D e^n$  линейно независимы, и подпространство  $S_{n_+}$ , натянутое на эти векторы, имеет размерность  $n_+$ . Пусть  $x \in S_{n_+}$ . Тогда  $x = \alpha_{n-n_++1} D e^{n-n_++1} + \dots + \alpha_n D e^n = D y$ , где  $y = \alpha_{n-n_++1} e^{n-n_++1} + \dots + \alpha_n e^n$ , и, используя лемму 2.1, с. 229, получим

$$(Bx, x) = (D^T B D y, y) = (A y, y) \geq \lambda_{n-n_++1}(y, y). \quad (2.5)$$

Заметим теперь, что  $(y, y) = (C x, C x) = (C^T C x, x)$ . Матрица  $C$  невырождена, поэтому матрица  $C^T C$  положительно определена (см. упражнение 2 на с. 223), следовательно,

$$(y, y) \geq \lambda_1(C^T C)(x, x), \quad (2.6)$$

причем  $\lambda_1(C^T C) > 0$  (здесь вновь использована лемма 2.1, с. 229). Из (2.5), (2.6) вытекает, что

$$\min_{x \in S_{n_+}, x \neq 0} \frac{(Bx, x)}{(x, x)} \geq \lambda_{n-n_++1} \lambda_1(C^T C) > 0,$$

поэтому, применяя теорему 2.3, с. 230, получим, что  $\lambda_{n-n_++1}(B) > 0$ . Это означает, что у матрицы  $B$  не меньше чем  $n_+$  положительных характеристических чисел, иначе говоря,  $n_+(B) \geq n_+(A)$ . В выполненных рассуждениях матрицы  $A$  и  $B$  можно поменять местами. Таким образом,  $n_+(A) = n_+(B)$ .  $\square$

**2. Следствие (закон инерции квадратичных форм).** *Количества положительных и отрицательных слагаемых в (2.1) не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы (1.1) к каноническому виду.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Коэффициенты  $b_{ii}$  в (2.1) — это характеристические числа диагональной матрицы  $B = Q^T A Q$ , конгруэнтной

матрице  $A$ , поэтому количества положительных и отрицательных слагаемых в (2.1) определяются инерцией матрицы  $A$  и не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы (1.1) к каноническому виду.  $\square$

### § 3. Положительно определенные квадратичные формы

1. Квадратичная форма (1.1) называется *положительно определенной*, если соответствующая ей матрица  $A$  положительно определена, т. е.

$$(Ax, x) > 0 \quad \text{для всех не равных нулю } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Как известно (см. п. 3, с. 231), для того, чтобы матрица  $A$  была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные числа были положительны.

Полезный признак положительной определенности квадратичной формы дает

**1.1. Теорема (критерий Сильвестра).** *Для того, чтобы квадратичная форма (1.1), с. 257, была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы  $A$  были положительны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Н е о б х о д и м о с т ь.** Фиксируем некоторое целое  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Выберем в качестве вектора  $x$  в (3.1) вектор вида  $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = (y, 0, \dots, 0)$ , где  $y$  можно считать произвольным вектором пространства  $\mathbb{R}^k$ . Тогда  $(Ax, x) = (A_k y, y)$ , где  $A_k$  — матрица, соответствующая главному минору порядка  $k$  матрицы  $A$ . Из условия (3.1), очевидно, вытекает, что  $(A_k y, y) > 0$  для любого ненулевого вектора  $y$  из  $\mathbb{R}^k$ , т. е. матрица  $A_k$  положительно определена, следовательно, ее определитель (главный минор порядка  $k$  матрицы  $A$ ) положителен (см. упражнение 1 на с. 231).

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Покажем, что если все главные миноры матрицы  $A$  положительны, то положительны все ее собственные числа. Тогда положительная определенность матрицы  $A$  будет установлена. На самом деле, мы докажем большее, а именно, мы установим, что собственные числа всех главных миноров матрицы  $A$  положительны. Для минора первого порядка, т. е. для  $a_{11}$ , это выполняется тривиальным образом. Предположим, что у матрицы  $A_k$ , соответствующей главному минору порядка  $k$ , все собственные числа  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$  положительны и покажем, что тогда и у матрицы  $A_{k+1}$  все собственные

числа  $\hat{\lambda}_1 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_{k+1}$  положительны. В соответствии с теоремой 4, с. 235, выполнены неравенства

$$\hat{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \hat{\lambda}_{k+1},$$

откуда вытекает, что  $\hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{k+1} > 0$ . Поскольку по условию  $\det(A_{k+1}) > 0$ , а  $\det(A_{k+1}) = \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \dots \hat{\lambda}_{k+1}$  (см. (7.7), с. 193), то и  $\hat{\lambda}_1 > 0$ .  $\square$

**1.2.** Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду.

УПРАЖНЕНИЕ. Пусть  $(Ax, x)$  — произвольная квадратичная форма,  $(Bx, x)$  — положительно определенная квадратичная форма. Показать, что существует невырожденное преобразование переменных  $y = Tx$ , которое одновременно приводит эти квадратичные формы к каноническому виду, а именно

$$(T^T ATy, y) = \sum_{i=1}^n d_{ii} y_i^2, \quad (T^T BTy, y) = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

УКАЗАНИЕ. Используйте результаты упражнения 3, с. 254.

#### § 4. Квадратичная функция и ее инварианты

**1.** Пусть  $A$  — вещественная квадратная матрица порядка  $n$ ,  $a$  — заданный фиксированный вектор пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $a_0$  — вещественное число. Определенная на пространстве  $\mathbb{R}^n$  вещественная функция вида

$$F(x) = (Ax, x) + 2(a, x) + a_0 \quad (4.1)$$

называется *квадратичной*. Множитель два перед вторым слагаемым поставлен ради удобства записи формул в дальнейшем. Не ограничивая общности (см. п. 1, с. 257), можно считать, что матрица  $A$  симметрична.

Понятно, что теория квадратичных функций может строиться как некоторое обобщение теории квадратичных форм.

Свяжем с каждой квадратичной функцией  $F$  симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Здесь  $a$  трактуется как вектор столбец.



**2.** Выполним так называемое *аффинное преобразование* переменных, т. е. положим

$$x = x^0 + Ty, \quad (4.3)$$

где  $x^0$  — фиксированный вектор пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  — невырожденная матрица. Иногда замену переменных (4.3) удобнее записывать в виде  $x = T(\hat{x}^0 + y)$ , где  $\hat{x}^0 = T^{-1}x^0$ .

Выполняя элементарные преобразования, нетрудно получить, что

$$F(x^0 + Ty) \equiv \hat{F}(y) = (\hat{A}y, y) + 2(\hat{a}, y) + \hat{a}_0, \quad (4.4)$$

где

$$\hat{A} = T^T AT, \quad (4.5)$$

$$\hat{a} = T^T a + \hat{A}\hat{x}^0, \quad \hat{a}_0 = a_0 + 2(T^T a, \hat{x}^0) + (\hat{A}\hat{x}^0, \hat{x}^0). \quad (4.6)$$

Таким образом, любое аффинное преобразование переменных переводит квадратичную функцию в квадратичную.

Введем в рассмотрение квадратные матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} I & \hat{x}^0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

порядка  $n + 1$ . Здесь  $0$  — вектор столбец длины  $n$ ,  $I$  — единичная матрица порядка  $n$ . Ясно, что  $\det(Q) = \det(T)$ ,  $\det(U) = 1$ , т. е. матрицы  $Q$ ,  $U$  невырождены.

Простые выкладки показывают, что

$$\hat{B} \equiv \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{a} \\ \hat{a}^T & \hat{a}_0 \end{pmatrix} = (QU)^T B (QU). \quad (4.8)$$

Из соотношений (4.5), (4.8) вытекает, что матрицы  $A$  и  $\hat{A}$ ,  $B$  и  $\hat{B}$  соответственно конгруэнтны, поэтому их инерции совпадают (см. теорему 1, с. 261). Можно сказать, таким образом, что инерции матриц  $A$ ,  $B$  являются *аффинными инвариантами* квадратичной функции, определенной равенством (4.1).

**3.** Будем считать теперь, что матрица  $T$  ортогональна, т. е.  $T^T = T^{-1}$ . Тогда матрица  $Q$ , очевидно, также ортогональна. Из (4.5) в этом случае вытекает, что матрицы  $A$  и  $\hat{A}$  подобны, следовательно, их собственные числа совпадают. Из (4.8), очевидно, вытекает, что  $\det(\hat{B}) = \det(B)$ .

Таким образом, собственные числа матрицы  $A$ , инерция, а следовательно, и ранг матрицы  $B$ , а также определитель матрицы  $B$  могут быть названы *ортогональными инвариантами* квадратичной функции (4.1). Они не меняются при любом преобразовании переменных (4.3) с ортогональной матрицей  $T$ .

### § 5. Приведенная форма квадратичной функции

1. Покажем, что, выбирая в (4.3) соответствующим образом ортогональную матрицу  $T$  и вектор  $x^0$ , любую квадратичную функцию можно преобразовать к простейшему так называемому *приведенному виду*.

Матрица  $A$  симметрична, поэтому существует ортонормированный базис  $e^1, e^2, \dots, e^n$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , составленный из собственных векторов матрицы  $A$ . Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  соответствующие им собственные числа матрицы  $A$ .

Будем считать что первые  $r$  собственных чисел матрицы  $A$  отличны от нуля, остальные — нули.

Обозначим через  $T$  ортогональную матрицу, столбцы которой образованы векторами  $e^1, e^2, \dots, e^n$ . Отметим, что последние  $n - r$  столбцов матрицы  $T$  принадлежат ядру матрицы  $A$ .

Выполним замену переменных в функции (4.1), полагая

$$x = Tu. \quad (5.1)$$

В соответствии с формулами (4.4)–(4.6) (см. также упражнение 2 на с. 254) получим

$$F(Tu) = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_r u_r^2 + 2(\hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \dots + \hat{a}_r u_r) + \\ + 2(\hat{a}_{r+1} u_{r+1} + \hat{a}_{r+2} u_{r+2} + \dots + \hat{a}_n u_n) + a_0. \quad (5.2)$$

Заметим, что

$$\lambda_k u_k^2 + 2\hat{a}_k u_k = \lambda_k (u_k + \hat{a}_k/\lambda_k)^2 - \hat{a}_k^2/\lambda_k$$

для  $k = 1, 2, \dots, r$ . Поэтому

$$F(Tu) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + 2(b, \tilde{y}) + \hat{a}_0, \quad (5.3)$$

где

$$y_k = u_k + \hat{a}_k/\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad \tilde{y} = (u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n-r},$$

$$b = (\hat{a}_{r+1}, \hat{a}_{r+2}, \dots, \hat{a}_n) \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad \hat{a}_0 = a_0 - \sum_{k=1}^r \hat{a}_k^2/\lambda_k. \quad (5.4)$$

Далее будем различать два случая. Предположим сначала, что вектор  $b$  равен нулю, и пусть

$$\hat{x}_k^0 = -\hat{a}_k/\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad \hat{x}_k^0 = 0, \quad k = r+1, r+2, \dots, n. \quad (5.5)$$

Тогда  $u = y + \hat{x}^0$ ,

$$Tu = Ty + T\hat{x}^0, \quad (5.6)$$

и равенство (5.3) принимает вид

$$F(x^0 + Ty) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + \hat{a}_0, \quad (5.7)$$

где

$$x^0 = T\hat{x}^0. \quad (5.8)$$

Пусть теперь  $b \neq 0$ . Следуя построениям п. 2.1, с. 256, сконструируем симметричную ортогональную матрицу  $R$  порядка  $n - r$  (матрицу отражения) такую, что  $Rb = |b|(1, 0, \dots, 0)$ . Выполним в (5.3) замену переменных

$$y = \tilde{R}v, \quad (5.9)$$

где

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0^T & R \end{pmatrix},$$

$I_r$  — единичная матрица порядка  $r$ . Тогда (5.3) примет вид

$$F(Tu) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \cdots + \lambda_r v_r^2 + 2b_{r+1}v_{r+1} + \hat{a}_0, \quad (5.10)$$

где  $b_{r+1} = |b|$ . Заметим, наконец, что

$$2b_{r+1}v_{r+1} + \hat{a}_0 = 2b_{r+1}(v_{r+1} + \hat{a}_0/(2b_{r+1})).$$

Поэтому, полагая

$$w = v + x^1, \quad (5.11)$$

где

$$x_{r+1}^1 = \hat{a}_0/(2b_{r+1}), \quad x_i^1 = 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq r + 1, \quad (5.12)$$

получим

$$F(Tu) = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \cdots + \lambda_r w_r^2 + 2b_{r+1}w_{r+1}. \quad (5.13)$$

Из (5.6), (5.8), (5.9), (5.11) вытекает, что  $Tu = \tilde{x}^0 + \tilde{T}w$ , где

$$\tilde{T} = T\tilde{R}, \quad \tilde{x}^0 = x^0 - \tilde{T}x^1, \quad (5.14)$$

следовательно,

$$F(\tilde{x}^0 + \tilde{T}w) = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \cdots + \lambda_r w_r^2 + 2b_{r+1}w_{r+1}. \quad (5.15)$$

Матрица  $\tilde{T}$  ортогональна, поскольку является произведением ортогональных матриц. Нетрудно убедиться также, что первые  $r$  столбцов матрицы  $\tilde{T}$  совпадают с соответствующими столбцами матрицы  $T$ , а последние  $n - r$  столбцов матрицы  $\tilde{T}$  являются линейными комбинациями последних  $n - r$  столбцов матрицы  $T$  и потому принадлежат ядру матрицы  $A$ .

**2.** Таким образом, доказано, что для любой квадратичной функции вида (4.1) найдутся матрица  $T$ , столбцы которой есть векторы ортонормированного базиса пространства  $\mathbb{R}^n$ , образованного собственными векторами матрицы  $A$ , и вектор  $x^0$  такие, что либо

$$F(x^0 + Ty) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + \hat{a}_0, \quad (5.16)$$

либо

$$F(x^0 + Ty) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2b_{r+1}y_{r+1}. \quad (5.17)$$

Здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  — все ненулевые собственные числа матрицы  $A$ ,  $b_{r+1} > 0$ . Представления (5.16), (5.17) называются *приведенными формами* квадратичной функции.

Ранг матрицы  $B$  (см. (4.2)), соответствующей квадратичной функции (5.16), очевидно, равен  $r$ , если  $\hat{a}_0 = 0$ , и равен  $r + 1$ , если  $\hat{a}_0 \neq 0$ . Ранг матрицы  $B$ , соответствующей квадратичной функции (5.17), равен  $r + 2$  (докажите!).

Собственные числа матрицы  $A$  и ранг матрицы  $B$  инвариантны по отношению к замене переменных (4.3) с любой ортогональной матрицей  $T$  и любым вектором  $x^0$ . Поэтому любой квадратичной функции однозначно соответствует либо приведенная форма вида (5.16), либо приведенная форма вида (5.17).

**3.** В этом пункте будет показано, что коэффициенты приведенной формы квадратичной функции  $F$  однозначно определяются по элементам матрицы  $B$  (см. (4.2)). Они не зависят от выбора вектора  $x^0$  и ортогональной матрицы  $T$  в преобразовании переменных (4.3), дающем приведенную форму квадратичной функции.

Нам потребуются в дальнейшем некоторые вспомогательные результаты.

### 3.1. Лемма. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

где  $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  — диагональная матрица порядка  $n$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  — вектор столбец. Предполагается, что лишь элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ ,  $r \leq n - 1$ , матрицы  $A$  отличны от нуля. Тогда

$$\mathcal{I}_{r+2}(B) = -a_{11}a_{22} \cdots a_{rr}(a_{r+1}^2 + \cdots + a_n^2)^1. \quad (5.19)$$

<sup>1)</sup>Напомним, что  $\mathcal{I}_k(B)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , — инвариант матрицы  $B$ , определяемый по ее элементам при помощи формулы вида (7.5), с. 192.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться, что среди диагональных миноров порядка  $r + 2$  матрицы  $B$  лишь миноры вида

$$\Delta_{r,m} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{vmatrix}, \quad (5.20)$$

где

$$D_{11} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}), \quad (5.21)$$

$$D_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_r \end{pmatrix}, \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 0 & a_m \\ a_m & a_0 \end{pmatrix},$$

$m = r + 1, r + 2, \dots, n$ , отличны от нуля. Все остальные диагональные миноры порядка  $r + 2$  содержат хотя бы одну нулевую строку (и столбец). Используя формулу (11.11), с. 111, нетрудно получить, что  $\Delta_{r,m} = -a_{11}a_{22} \cdots a_{rr}a_m^2$ . Суммируя теперь все миноры вида (5.20), приходим к (5.19).  $\square$

**3.2. Лемма.** Пусть выполнены условия леммы 3.1,

$$\text{rank}(B) = r + 1. \quad (5.22)$$

Тогда

$$\mathcal{I}_{r+1}(B) = \begin{vmatrix} D_{11} & d \\ d^T & a_0 \end{vmatrix}, \quad (5.23)$$

где матрица  $D_{11}$  определена равенством (5.21),  $d = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  — вектор столбца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие условия (5.22) все миноры порядка  $r + 2$  матрицы  $B$  равны нулю. Поэтому  $\mathcal{I}_{r+2}(B) = 0$ , откуда вследствие (5.19) вытекает, что  $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n = 0$ . Тогда, как нетрудно убедиться, все диагональные миноры порядка  $r + 1$  матрицы  $B$ , кроме минора вида (5.23), содержат хотя бы одну нулевую строку.  $\square$

**3.3. Лемма.** Пусть выполнены условия леммы 3.1, матрица  $U$  определена равенством (4.7),  $\tilde{B} = U^T B U$ . Тогда

$$\mathcal{I}_{r+2}(\tilde{B}) = \mathcal{I}_{r+2}(B). \quad (5.24)$$

Если выполнены условия леммы 3.2, то  $\mathcal{I}_{r+1}(\tilde{B}) = \mathcal{I}_{r+1}(B)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$B U = \begin{pmatrix} A & \tilde{a} \\ a^T & \tilde{a}_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{a}_i = a_i + \hat{x}_i^0 a_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (5.25)$$

$$\tilde{a}_i = a_i, \quad i = r + 1, \dots, n, \quad (5.26)$$

$$\tilde{a}_0 = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \hat{x}_i^0. \quad (5.27)$$

Вследствие (5.19), (5.26) справедливо равенство  $\mathcal{I}_{r+2}(BU) = \mathcal{I}_{r+2}(B)$ . Точно так же проверяется, что умножение матрицы вида  $BU$  слева на матрицу  $U^T$  не меняет инварианта  $\mathcal{I}_{r+2}(BU)$ . Отсюда, очевидно, вытекает равенство (5.24). Второе утверждение леммы с использованием соотношений (5.25)–(5.27) доказывается аналогично. При этом надо учесть, что определитель (5.23) не меняется при переходе от матрицы  $B$  к матрице  $\tilde{B}$ .  $\square$

**3.4. Теорема.** Пусть ранг матрицы  $A$  квадратичной функции  $F$  равен  $r$ , ранг матрицы  $B$  не превосходит  $r + 1$ . Пусть при помощи замены переменных  $x = x^0 + Ty$  с ортогональной матрицей  $T$  квадратичная функция  $F$  приведена к виду

$$\hat{F}(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_m y_m^2 + \hat{a}_0. \quad (5.28)$$

Тогда: 1)  $m = r$ ,  $\alpha_i = \lambda_i$ , где  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , — все ненулевые собственные числа матрицы  $A$ ; 2) справедливо равенство

$$\hat{a}_0 = \mathcal{I}_{r+1}(B)/\mathcal{I}_r(A). \quad (5.29)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Используем формулы (4.4)–(4.8), связывающие исходную и приведенную формы квадратичной функции. В рассматриваемом случае  $T^T A T = \hat{A} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ . Поскольку матрица  $T$  ортогональна, то матрицы  $A$ ,  $\hat{A}$  подобны, откуда вытекает справедливость утверждения 1). Используем теперь тот факт, что в рассматриваемом случае  $\hat{a} = 0$ . Поэтому по лемме 3.2 получаем, что  $\mathcal{I}_{r+1}(\hat{B}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r \hat{a}_0$ . Матрица  $A$  имеет ровно  $r$  ненулевых собственных чисел, следовательно,  $\mathcal{I}_r(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$  (см. п. 2, с. 192). Таким образом,  $\hat{a}_0 = \mathcal{I}_{r+1}(\hat{B})/\mathcal{I}_r(A)$ . Матрица  $Q^T B Q$  подобна матрице  $B$ . Поэтому все их инварианты совпадают. С другой стороны, матрица  $Q^T B Q$  удовлетворяет условиям леммы 3.3, значит,  $\mathcal{I}_{r+1}(Q^T B Q) = \mathcal{I}_{r+1}(\hat{B})$ , т. е.  $\mathcal{I}_{r+1}(\hat{B}) = \mathcal{I}_{r+1}(B)$ , и утверждение 2) также доказано.  $\square$

**3.5. Теорема.** Пусть ранг матрицы  $A$  квадратичной функции  $F$  равен  $r$ ,  $r \leq n - 1$ , ранг матрицы  $B$  равен  $r + 2$ . Пусть при помощи замены переменных  $x = x^0 + Ty$  с ортогональной матрицей  $T$  квадратичная функция  $F$  приведена к виду

$$\hat{F}(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_m y_m^2 + 2by_{m+1}. \quad (5.30)$$

Тогда: 1)  $m = r$ ,  $\alpha_i = \lambda_i$ , где  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , — все ненулевые собственные числа матрицы  $A$ ; 2) выполнено равенство

$$b^2 = -\mathcal{I}_{r+2}(B)/\mathcal{I}_r(A). \quad (5.31)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Справедливость утверждения 1) обосновывается точно так же, как и при доказательстве теоремы 3.4. В рассматриваемом случае лишь одна компонента вектора  $\hat{a}$  отлична от нуля. Поэтому по лемме 3.1 получаем, что  $b^2 = -\mathcal{I}_{r+2}(\hat{B})/\mathcal{I}_r(A)$ . Равенство  $\mathcal{I}_{r+2}(\hat{B}) = \mathcal{I}_{r+2}(B)$  получаем аналогично доказательству предыдущей теоремы, используя подобие матриц  $B$  и  $Q^T B Q$ , а также лемму 3.3.  $\square$

---

---

ГЛАВА 15  
Кривые второго порядка

**§ 1. Приведение уравнения кривой к простейшему виду**

1. Как и в § 6, гл. 4, будем рассматривать плоскость, отнесенную к декартовой системе координат  $x_1, x_2$ .

Множество всех точек  $x = (x_1, x_2)$  плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0, \quad (1.1)$$

называют *кривой второго порядка*. Здесь  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , — вещественные числа, называемые *коэффициентами уравнения*.

Для сокращения записей, как и в предыдущей главе, введем в рассмотрение симметричную ненулевую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

и вектор  $a = (a_1, a_2)$ . Тогда уравнение (1.1) запишется в виде<sup>1)</sup>

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0. \quad (1.3)$$

2. В соответствии с общей теорией квадратичных функций (см. § 4, § 5, гл. 14) упрощение этого уравнения мы будем выполнять с помощью замены переменных

$$x = x^0 + Ty, \quad (1.4)$$

где  $T$  — ортогональная матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Геометрически эта замена переменных может быть интерпретирована как поворот координатных осей против часовой стрелки на угол  $\varphi$ , если считать при этом, что исходная декартова система координат правая, т. е. поворот от оси  $x_1$  к оси  $x_2$  — поворот против часовой

---

<sup>1)</sup>В этой главе под скалярным произведением всюду понимается стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^2$ .



стрелки (см. п. 2, с. 252), и последующий перенос начала системы координат в точку  $x^0$ .

Выполним сначала поворот координатных осей, т. е. замену переменных

$$x = Tz \quad (1.6)$$

в уравнении (1.3). Проводя элементарные выкладки, получим

$$(T^T ATz, z) + 2(\hat{a}, z) + a_0 = 0, \quad (1.7)$$

где  $\hat{a} = T^T a$ .

Построим ортогональное преобразование  $T$  так, чтобы матрица  $T^T AT$  приняла диагональный вид (см. упражнение 2 на с. 254). С этой целью решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Корни его легко выписываются в явном виде:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}. \quad (1.8)$$

Если  $a_{12} = 0$ , то  $\lambda_1 = a_{11}$ ,  $\lambda_2 = a_{22}$ . Положим в этом случае  $T = I$ . Уравнение (1.7) принимает вид

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2\hat{a}_1 z_1 + 2\hat{a}_2 z_2 + a_0 = 0 \quad (1.9)$$

(здесь  $\hat{a}_1 = a_1$ ,  $\hat{a}_2 = a_2$ ).

Если  $a_{12} \neq 0$ , то, очевидно,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Найдя  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , определим соответствующие им единичные собственные векторы

$$e^k = (\cos \varphi_k, \sin \varphi_k), \quad k = 1, 2,$$

как решения уравнений

$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1, 2,$$

или, более подробно,

$$(a_{11} - \lambda_k) \cos \varphi_k + a_{12} \sin \varphi_k = 0,$$

$$a_{12} \cos \varphi_k + (a_{22} - \lambda_k) \sin \varphi_k = 0,$$

откуда получаем уравнения для определения углов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{a_{11} - \lambda_k}{a_{12}}, \quad k = 1, 2. \quad (1.10)$$

Будем считать, что  $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Причем, поскольку собственные векторы симметричной матрицы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны (см. теорему 8, с. 226), то обязательно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi/2.$$

Элементарные вычисления дают

$$\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_{12}} = \frac{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{a_{12}}. \quad (1.11)$$

В соответствии со знаком  $a_{12}$  занумеруем собственные числа (и соответствующие им углы) так, чтобы  $\operatorname{tg} \varphi_1 \leq \operatorname{tg} \varphi_2$ , т. е.

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2.$$

Используя общие построения (см. упражнение 2 на с. 254), матрицу  $T$  составим из собственных векторов  $e^1, e^2$ :

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 & \sin \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

При указанном выборе матрицы  $T$  получаем

$$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

и уравнение (1.7) вновь принимает вид (1.9).

**3.** Дальнейшие упрощения уравнения (1.3) используют перенос начала системы координат. Будем различать два случая:  $\det(A) \neq 0$  и  $\det(A) = 0$ .

**3.1.** Предположим сначала, что  $\det(A) \neq 0$ . Это условие эквивалентно тому, что  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ . При выполнении этого условия, выделяя полные квадраты, т. е. полагая  $y = \hat{x}^0 + z$ , где  $\hat{x}_1^0 = \hat{a}_1/\lambda_1$ ,  $\hat{x}_2^0 = \hat{a}_2/\lambda_2$ , уравнение (1.9) можно записать в виде

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \hat{a}_0 = 0. \quad (1.14)$$

Здесь  $\hat{a}_0 = a_0 - \hat{a}_1^2/\lambda_1 - \hat{a}_2^2/\lambda_2$ .

**3.2.** Пусть теперь  $\det(A) = 0$ . Напомним, что мы считаем, что  $A \neq 0$ . Понятно, что в этом случае либо  $\lambda_1 = 0$ , либо  $\lambda_2 = 0$ . Одновременно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не могут равняться нулю (почему?). Предположим для определенности, что  $\lambda_1 \neq 0$ . Тогда уравнение (1.9) можно представить в виде

$$\lambda_1 (z_1 + \hat{a}_1/\lambda_1)^2 + 2\hat{a}_2 z_2 + \hat{a}_0 = 0, \quad (1.15)$$

где  $\hat{a}_0 = a_0 - \hat{a}_1^2/\lambda_1$ . Здесь опять надо различать два случая.

1) Если  $\hat{a}_2 = 0$ , положим  $y = \hat{x}^0 + z$ , где  $\hat{x}_1^0 = \hat{a}_1/\lambda_1$ ,  $\hat{x}_2^0 = 0$ . Такая замена переменных приведет уравнение (1.15) к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \hat{a}_0 = 0. \quad (1.16)$$

2) Если  $\hat{a}_2 \neq 0$ , представим уравнение (1.15) в форме

$$\lambda_1(z_1 + \hat{a}_1/\lambda_1)^2 + 2\hat{a}_2(z_2 + \hat{a}_0/(2\hat{a}_2)) = 0$$

и положим  $y = \hat{x}^0 + z$ ,  $\hat{x}_1^0 = \hat{a}_1/\lambda_1$ ,  $\hat{x}_2^0 = \hat{a}_0/2\hat{a}_2$ . Тогда уравнение (1.15) примет вид

$$\lambda_1 y_1^2 + 2\hat{a}_2 y_2 = 0. \quad (1.17)$$

Предполагая, что  $\lambda_1 = 0$ , а  $\lambda_2 \neq 0$ , можно точно так же преобразовать уравнение (1.9) либо к уравнению

$$\lambda_2 y_2^2 + \hat{a}_0 = 0, \quad (1.18)$$

либо к уравнению

$$\lambda_2 y_2^2 + 2\hat{a}_1 y_1 = 0. \quad (1.19)$$

4. Таким образом, полагая, что  $z$  в (1.6) равно  $-\hat{x}^0 + y$ , где в зависимости от свойств собственных чисел матрицы  $A$  вектор  $\hat{x}^0$  выбирается по одной из выше приведенных формул, а  $T$  — матрица вида (1.5) такова, что выполнено (1.13), получим, что общее уравнение (1.1) кривой второго порядка при помощи замены переменных  $x = x^0 + Ty$ , где  $x^0 = -T\hat{x}^0$ , можно преобразовать к одной из следующих форм:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \hat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \quad (1.20)$$

$$\lambda_2 y_2^2 + 2\hat{a}_1 y_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad (1.21)$$

$$\lambda_2 y_2^2 + \hat{a}_0 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad (1.22)$$

$$\lambda_1 y_1^2 + 2\hat{a}_2 y_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad (1.23)$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \hat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0. \quad (1.24)$$

Важно подчеркнуть, что угол  $\varphi$  и вектор  $x^0$  определяются по коэффициентам уравнения (1.1) при помощи простых явных формул. В соответствии с общей теорией квадратичных функций каждое уравнение (1.1) при помощи преобразования вида (1.4) может быть однозначно приведено лишь к одной из форм (1.20)–(1.24).

**5.** Из общих результатов, полученных при изучении квадратичных функций, следует, что коэффициенты уравнений (1.20)–(1.24) однозначно определяются при помощи простых формул по коэффициентами уравнения (1.1). Таким образом, построение преобразования (1.4), фактически, требуется лишь для того, чтобы установить, как располагается исследуемая кривая по отношению к исходной декартовой системе координат.

Наряду с матрицей  $A$ , определяемой соотношением (1.2), введем в рассмотрение матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

соответствующую квадратичной функции, определяемой левой частью уравнения (1.1), и выпишем выражения для коэффициентов уравнений (1.20)–(1.24) (см. теоремы 3.4, 3.5, с. 270):

$$\hat{a}_0 = \mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_2(A), \quad \hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \sqrt{-\mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_1(A)}, \quad \hat{a}_{01} = \mathcal{I}_2(B)/\mathcal{I}_1(A).$$

Здесь (см. общие формулы для инвариантов оператора, с. 191)

$$\mathcal{I}_3(B) = \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{I}_2(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{I}_1(A) = \operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}, \quad \mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

По сравнению с (7.5), с. 192, в выражении  $\mathcal{I}_2(B)$  на одно слагаемое меньше, поскольку в рассматриваемом случае  $\det A = 0$ .

## § 2. Геометрические свойства кривых второго порядка

Опираясь на уравнения (1.20)–(1.24), исследуем геометрические свойства кривых второго порядка.

Для упрощения записей в дальнейшем изменим очевидным образом обозначения декартовых координат и коэффициентов уравнений. В результате получим, что нам предстоит исследовать три различных типа уравнений

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \quad (2.1)$$

$$y^2 = 2px, \quad (2.2)$$

$$y^2 + d = 0. \quad (2.3)$$

1. Начнем с уравнения (2.3). Возможны три случая:  $d = 0$ , кривая совпадает с осью  $y$ ;  $d < 0$ , кривая распадается на две параллельные прямые  $y = \sqrt{-d}$ ,  $y = -\sqrt{-d}$ ;  $d > 0$ , множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению (2.3), пусто; говорят, что в этом случае кривая распадается на *две мнимые параллельные прямые*.

2. Исследуем уравнение (2.1). Здесь нужно различать такие случаи:

- 1) знаки собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  совпадают, при этом, не ограничивая общности, можно считать, что  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ;
- 2) знаки собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  различны.

Кривые, соответствующие первому случаю, называют *эллипсами*. Здесь опять нужно различать три случая:  $d = 0$ , кривая вырождается в точку, совпадающую с началом координат;  $d > 0$ , уравнение определяет так называемый *мнимый эллипс*;  $d < 0$ , в этом случае уравнение (2.1) запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.4)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую уравнением (2.4), называют *эллипсом*.

Кривые, соответствующие случаю, когда  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют различные знаки, называют *гиперболами*. Будем для определенности считать, что  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  и рассмотрим три случая. Если  $d = 0$ , то уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\sqrt{\lambda_1}x = \pm \sqrt{-\lambda_2}y,$$

т. е. в данном случае кривая распадается на две прямые, пересекающиеся в начале координат. Случаи  $d < 0$ ,  $d > 0$ , фактически, можно не различать, так как они сводятся один к другому за счет переименования осей координат.

Будем для определенности считать, что  $d < 0$ . Тогда уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.5)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{-\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую уравнением (2.5), называют *гиперболой*.

3. Опишем геометрические свойства эллипса (см. рис. 1). Непосредственно из уравнения (2.4) вытекает, что для всех точек эллипса справедливы неравенства:  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$ , т. е. эллипс — ограниченная кривая, расположенная в соответствующем прямоугольнике.

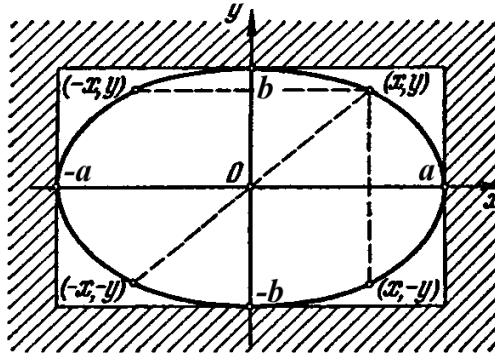


Рис. 1. К описанию геометрических свойств эллипса

Точками пересечения этой кривой с осями координат являются точки  $(\pm a, 0)$ ,  $(0, \pm b)$ . Они называются *вершинами* эллипса. Оси координат — *оси симметрии* эллипса, так как если точка  $(x, y)$  принадлежит эллипсу, то точки  $(-x, y)$ ,  $(x, -y)$  также лежат на эллипсе. Начало координат — *центр симметрии* эллипса, так как если точка  $(x, y)$  принадлежит эллипсу, то и точка  $(-x, -y)$  лежит на эллипсе.

Числа  $a$ ,  $b$  называют длинами *полуосей* эллипса. Будем для определенности считать, что  $a \geq b$ . Понятно, что при  $a = b$  эллипс превращается в окружность (радиуса  $a$ ). Положим  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Величина  $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} \in [0, 1)$  характеризует степень вытянутости эллипса вдоль большой полуоси и называется *эксцентриситетом* эллипса.

Точки  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$  называются *фокусами* эллипса. Пусть  $(x, y)$  — произвольная точка эллипса. Тогда, как ниже будет показано,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) означает, что сумма расстояний от точки эллипса до фокусов одна и та же для всех точек эллипса (см. рис. 2). Это свойство эллипса можно принять за его определение, так как, исходя из (2.6), очевидно, можно получить уравнение эллипса.

Докажем справедливость равенства (2.6) для точек, принадлежащих эллипсу. Используя равенства  $c^2 = a^2 - b^2$ ,  $y^2 = b^2 - b^2x^2/a^2$ , можем написать

$$(x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + a^2 - b^2 + b^2 - b^2x^2/a^2 =$$

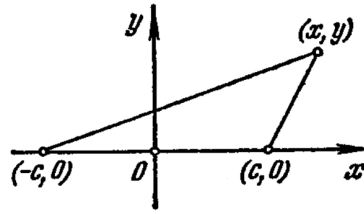


Рис. 2. К определению эллипса и гиперболы

$$\begin{aligned}
 &= x^2(1 - b^2/a^2) + 2cx + a^2 = x^2c^2/a^2 + 2cx + a^2 = \\
 &= (xc/a + a)^2. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Точно так же

$$(x - c)^2 + y^2 = (-xc/a + a)^2.$$

Заметим, что  $c < a$ . Учтем также, что  $|x| \leq a$  для любой точки эллипса. Поэтому справедливы неравенства

$$xc/a + a > 0, \quad -xc/a + a > 0,$$

следовательно,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = xc/a + a, \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -xc/a + a,$$

откуда непосредственно вытекает (2.6).

4. Опишем геометрические свойства гиперболы (см. рис. 3). Из уравнения (2.5) непосредственно вытекает, что если точка  $(x, y)$  лежит на гиперболе, то  $x^2 \geq a^2$ ,  $y^2 \leq b^2x^2/x^2$ , т. е. кривая, описываемая уравнением (2.5), лежит вне полосы  $|x| < a$  и внутри соответствующих (вертикальных) углов, образованных прямыми  $y = \pm(b/a)x$ .

Как и в случае эллипса, проверяется, что кривая симметрична относительно осей координат. Начало координат — *центр симметрии* кривой. Точки  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  пересечения с осью  $x$  называются *вершинами* гиперболы.

Прямые  $y = \pm(b/a)x$  — *асимптоты* соответствующих ветвей гиперболы (рис. 3). Покажем это применительно к ветви, определяемой уравнением

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a, \quad (2.8)$$

и прямой  $y = (b/a)x$ . Для остальных ветвей выкладки полностью аналогичны. В соответствии с определением асимптоты (см. курс математического анализа) достаточно проверить справедливость следующих равенств:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right) = 0.$$

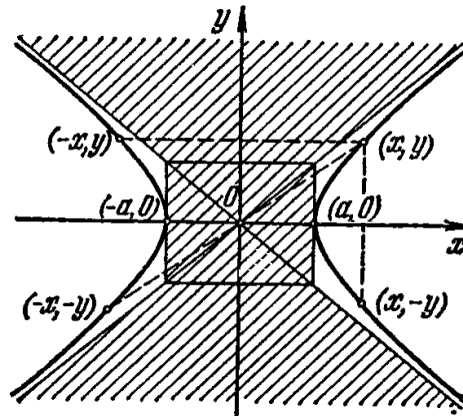


Рис. 3. К описанию геометрических свойств гиперболы

Проверка первого из этих равенств элементарна. При проверке второго полезно заметить, что

$$\sqrt{x^2 - a^2} - x = -\frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \rightarrow 0$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

Положим  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Точки  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$  называются *фокусами* гиперболы.

Для любой точки  $(x, y)$ , лежащей на гиперболе,

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a, \quad (2.9)$$

т. е. модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов постоянен (см. рис. 2). Это свойство гиперболы можно было бы принять за ее определение.

Проверим справедливость равенства (2.9), считая, что выполнены соотношения (2.8). Для остальных ветвей гиперболы все рассуждения полностью аналогичны. Следуя выкладкам, выполненным в предыдущем пункте (см. (2.7)), получаем

$$(x+c)^2 + y^2 = (cx/a + a)^2, \quad (x-c)^2 + y^2 = (cx/a - a)^2.$$

Для рассматриваемой ветви гиперболы, как нетрудно убедиться, справедливы неравенства

$$cx/a + a > 0, \quad cx/a - a > 0.$$

Поэтому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx/a + a - (cx/a - a) = 2a,$$

т. е. (2.9) доказано.



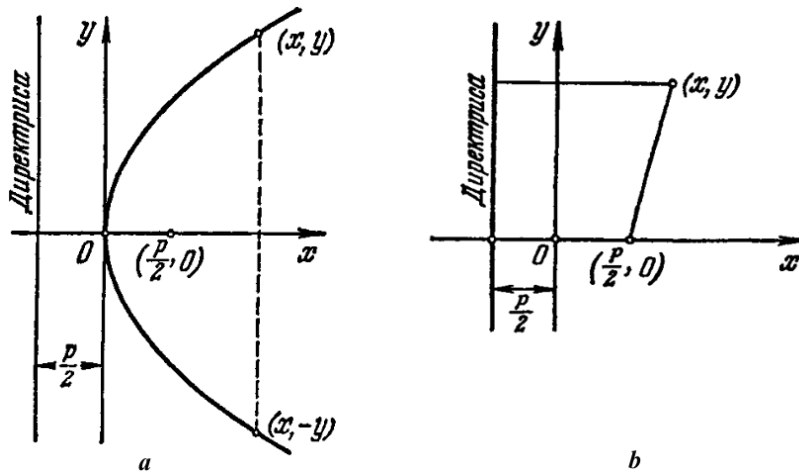


Рис. 4. К описанию геометрических свойств параболы (а). К определению параболы (б)

5. Кривая, задаваемая уравнением (2.2), называется *параболой*. Опишем ее геометрические свойства (см. рис. 4, а). Большинство из них хорошо известны читателю из школьного курса математики. Будем считать, что  $p > 0$ . Рассмотрение случая  $p < 0$  требует очевидных изменений.

Непосредственно из уравнения (2.2) вытекает, что парабола расположена в правой полуплоскости, симметрична относительно оси  $x$ . Единственной точкой пересечения с осями координат является начало координат. Эта точка называется *вершиной* параболы. Парабола не имеет асимптот (докажите!).

Точка  $(p/2, 0)$  называется *фокусом* параболы. Прямая  $x = -p/2$  называется *директрисой* параболы (см. рис. 4, а). Для любой точки  $(x, y)$ , принадлежащей параболе,

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2, \quad (2.10)$$

т. е. расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию этой точки до директрисы (см. рис. 4, б). Это свойство параболы можно было бы принять за ее определение.

Докажем равенство (2.10). Имеем

$$(x - p/2)^2 + y^2 = x^2 - px + p^2/4 + 2px = (x + p/2)^2,$$

причем, очевидно,  $x + p/2 > 0$  для любой точки параболы, следовательно, (2.10) выполнено.

6. ПРИМЕР. Привести к простейшему виду уравнение

$$3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0 \quad (2.11)$$

и построить кривую в исходной декартовой системе координат  $x_1x_2$ .

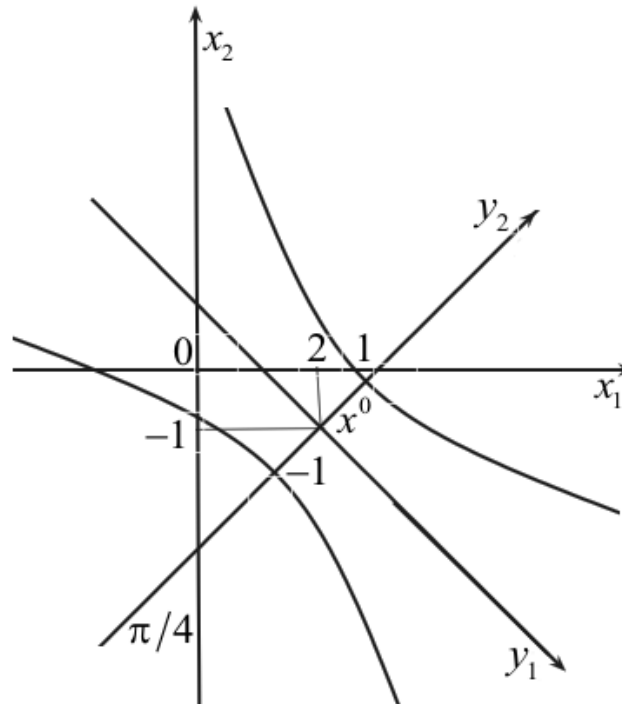


Рис. 5. К примеру исследования уравнения кривой второго порядка

РЕШЕНИЕ. В данном случае  $a_{11} = a_{22} = 3$ ,  $a_{12} = 5$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = -7$ ,  $a_0 = -13$ . По формуле (1.8), с. 273, имеем  $\lambda_1 = 8$ ,  $\lambda_2 = -2$ , по формуле (1.10), с. 273, получаем  $\operatorname{tg} \varphi_1 = 1$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_2 = -1$ . Далее действуем в соответствии с предписаниями § 1, т. е. нумеруем углы и соответствующие им собственные числа так, чтобы выполнялись условия  $-\pi/2 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \pi/2$ . Таким образом, получаем  $\lambda_1 = -2$ ,  $\varphi_1 = -\pi/4$ ,  $\lambda_2 = 8$ ,  $\varphi_2 = \pi/4$ . По формуле (1.12), с. 274,

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Выполнив замену переменных

$$x = Tz, \quad (2.13)$$

в соответствии с (1.7), с. 273, получаем

$$-2z_1^2 + 8z_2^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{16}{\sqrt{2}}z_2 - 13 = 0.$$

Используя теперь формулы пункта 3.1, с. 274, приходим к уравнению

$$-2y_1^2 + 8y_2^2 - 8 = 0, \quad (2.14)$$

или

$$-\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{1} = 1, \quad (2.15)$$

где

$$y_1 = z_1 - 3/\sqrt{2}, \quad y_2 = z_2 - 1/\sqrt{2}. \quad (2.16)$$

Из (2.13), (2.16) получаем, что  $x = x^0 + Ty$ , где  $x^0 = (2, -1)$ . Таким образом, кривая, задаваемая уравнением (2.11), есть гипербола, описываемая уравнением (2.15) в декартовой системе координат  $y_1y_2$ , оси которой повернуты на угол  $-\pi/4$  против часовой

стрелки ( $\pi/4$  — по часовой стрелке) по отношению к осям декартовой системы координат  $x_1x_2$ , а начало системы координат  $y_1y_2$  расположено в точке  $(2, -1)$  относительно системы координат  $x_1x_2$  (см. рис. 5).

Отметим, что если оставить в стороне вопрос о расположении кривой по отношению к исходной системе координат, то уравнение (2.14) может быть выписано непосредственно по формулам п. 5, с. 276. Для этого учтем, что уравнению (2.11) соответствуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\det(A) = -16 \neq 0$ , собственные числа матрицы  $A$  есть  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 8$ ,  $\det(B) = 128$ , то приведенной формой уравнения (2.11) будет уравнение (2.14).

---

---

ГЛАВА 16  
Поверхности второго порядка

**§ 1. Приведение уравнения поверхности к простейшему виду**

1. Отнесем трехмерное евклидово пространство  $\mathbf{V}_3$  к декартовой системе координат (см. п. 1, с. 43). *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих уравнению<sup>1)</sup>

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0, \quad (1.1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

есть заданная симметричная ненулевая матрица,  $a = (a_1, a_2, a_3)$  — заданный вектор,  $a_0$  — заданное число.

Простейший пример: уравнение сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ , как известно (см. с. 57), имеет вид

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 - R^2 = 0.$$

После элементарных преобразований получаем

$$(x, x) - 2(x^0, x) + |x^0|^2 - R^2 = 0,$$

т. е. в данном случае  $A = I$ ,  $a = -x^0$ ,  $a_0 = |x^0|^2 - R^2$ .

Упрощение уравнения (1.1) опирается на общую теорию квадратичных функций и проводится по той же схеме, что и для кривых второго порядка. Оно основано на замене переменных

$$x = x^0 + Ty, \quad (1.3)$$

где  $T$  — некоторая ортогональная матрица. Геометрически эта замена переменных состоит в переносе начала координат в точку  $x^0$ ,

---

<sup>1)</sup>В этой главе под скалярным произведением всюду понимается стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

повороте системы координат вокруг некоторой оси и, возможно, последующем изменении направления этой координатной оси (см. п. 3, с. 253). Однако построение матрицы  $T$  не может быть выполнено в общем случае с той же степенью подробности, как для кривых второго порядка, поскольку задача приведения симметричной матрицы третьего порядка ортогональным преобразованием подобия к диагональному виду не допускает решения по простым явным формулам.

**2.** Из общей теории квадратичных функций вытекает, что, выбирая соответствующим образом начало  $x^0$  новой декартовой системы координат и ортогональную матрицу  $T$ , уравнение (1.1) поверхности второго порядка можно преобразовать к одному из следующих пяти видов:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \hat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, \quad (1.4)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\hat{a}_3 x_3 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad (1.5)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \hat{a}_{0,1} = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad (1.6)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\hat{a}_2 x_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2, \lambda_3 = 0, \quad (1.7)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \hat{a}_{0,2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2, \lambda_3 = 0. \quad (1.8)$$

**3.** Аналогично случаю кривых второго порядка коэффициенты уравнений (1.4)–(1.8) могут быть однозначно выражены через коэффициенты исходного уравнения (1.1). Введем в рассмотрение наряду с матрицей  $A$ , определенной равенством (1.2), матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

и выпишем, используя теоремы 3.4, 3.5, с. 270, выражения для коэффициентов уравнений (1.4)–(1.8):

$$\hat{a}_0 = \mathcal{I}_4(B)/\mathcal{I}_3(A) = \det(B)/\det(A), \quad \hat{a}_3 = \sqrt{-\det(B)/\mathcal{I}_2(A)}$$

$$\hat{a}_{0,1} = \mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_2(A), \quad \hat{a}_2 = \sqrt{-\mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_1(A)}, \quad \hat{a}_{0,2} = \mathcal{I}_2(B)/\mathcal{I}_1(A).$$

Здесь (см. формулы (7.5), с. 192)

$$\mathcal{I}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{I}_1(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Выписывая формулы для  $\mathcal{I}_3(B)$ ,  $\mathcal{I}_2(B)$ , мы опустили нулевые слагаемые, учитывая, что в первом случае ранг матрицы  $A$  не превосходит двух (см. (1.6), (1.7)) и, следовательно, ее определитель равен нулю, а во втором случае ранг матрицы  $A$  равен единице (см. (1.8)) и, следовательно, все ее миноры второго порядка — нули.

## § 2. Геометрические свойства поверхностей второго порядка

Опираясь на уравнения (1.4)–(1.8), исследуем геометрические свойства поверхностей второго порядка. Для удобства записей в дальнейшем изменим очевидным образом обозначения для декартовых координат и некоторых коэффициентов. Таким образом, нам предстоит исследовать поверхности, описываемые следующими уравнениями:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, \quad (2.1)$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \quad (2.2)$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \quad (2.3)$$

$$y^2 = 2px, \quad (2.4)$$

$$y^2 + d = 0. \quad (2.5)$$

**1.** Начнем с уравнения (2.5). Здесь возможны три случая:  $d < 0$ , поверхность распадается на две параллельные плоскости  $y = \sqrt{-d}$ ,  $y = -\sqrt{-d}$ ;  $d = 0$ , поверхность представляет собой плоскость  $y = 0$ ;  $d > 0$ , нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей уравнению. В последнем случае говорят, что уравнение описывает пару параллельных *мнимых плоскостей*.

**2.** Как показано в предыдущей главе, уравнение (2.4) описывает параболу на плоскости переменных  $(x, y)$ , поэтому соответствующая поверхность есть так называемый *параболический цилиндр* с образующей, параллельной оси  $z$ . Любое сечение этой поверхности плоскостью  $z = \text{const}$  — парабола (см. рис. 1).

**3.** Уравнение (2.3) в зависимости от знаков  $\lambda_1, \lambda_2, d$  может описывать эллипс или гиперболу в декартовой плоскости  $x, y$ . Соответствующие поверхности — *эллиптический* или *гиперболический цилиндр* (см. рис. 1). Понятно, что здесь возможны случаи вырождения, аналогичные изученным в пункте 2, с. 277.

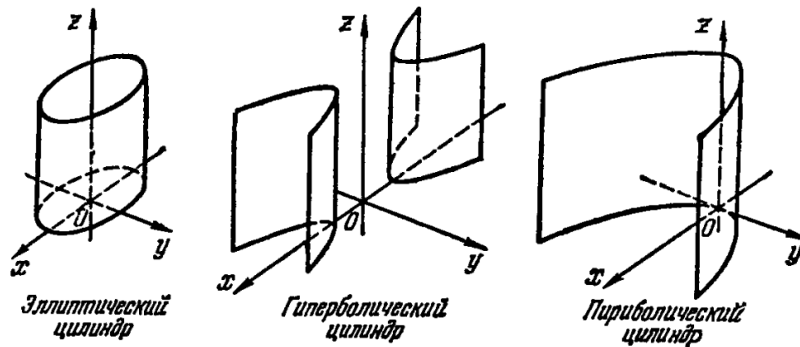


Рис. 1. Цилиндры

4. Обратимся к уравнению (2.2). Здесь нужно различать два случая: 1) числа  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют одинаковые знаки, 2) знаки чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  различны.

Пусть числа  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют одинаковые знаки. Для определенности будем считать, что они положительны. Будем считать, что  $b_3 < 0$ . Если принять, что  $b_3 > 0$ , то получим, очевидно, такую же поверхность, но симметричную относительно плоскости  $x, y$ . Если  $b_3 = 0$ , то мы приходим к одной из поверхностей, рассмотренных в предыдущих пунктах. При сделанных предположениях уравнение (2.2) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \quad (2.6)$$

Здесь  $a^2 = 2|b_3|/\lambda_1, b^2 = 2|b_3|/\lambda_2$ . При  $z < 0$  уравнение (2.2) противоречиво, т. е. вся поверхность расположена в полупространстве  $z \geq 0$ . Единственная точка плоскости  $z = 0$ , принадлежащая поверхности, — начало координат. Координатные плоскости  $x = 0, y = 0$  являются *плоскостями симметрии*, ось  $z$  является *осью симметрии*, так как если точка  $(x, y, z)$  принадлежит поверхности, то точки  $(-x, y, z), (x, -y, z), (-x, -y, z)$  также принадлежат поверхности. Записывая уравнение (2.2) при  $z > 0$  в виде

$$\frac{x^2}{za^2} + \frac{y^2}{zb^2} = 1, \quad (2.7)$$

получаем, что сечения этой поверхности плоскостями  $z = \text{const} > 0$  — эллипсы, полуоси которых увеличиваются с ростом  $z$  (см. рис. 2). Сечения этой поверхности плоскостям  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$ , как нетрудно убедиться, — параболы (см. рис. 2). Описанную поверхность называют *эллиптическим параболоидом*.

Пусть числа  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют разные знаки. Будем считать, что

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, b_3 < 0.$$

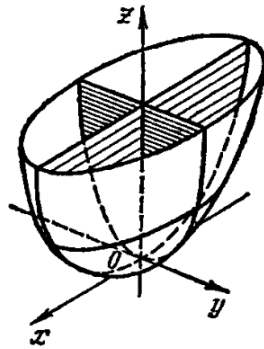


Рис. 2. Эллиптический параболоид

Любое другое допустимое сочетание знаков рассматривается аналогично. Уравнение (2.2) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \quad (2.8)$$

Здесь  $a^2 = 2|b_3|/|\lambda_1|$ ,  $b^2 = 2|b_3|/|\lambda_2|$ . Вновь координатные плоскости  $x = 0$ ,  $y = 0$  являются *плоскостями симметрии*, ось  $z$  является *осью симметрии*.

Проанализируем сечения этой поверхности плоскостями, параллельными координатной плоскости  $x, y$  (см. рис. 3, *b*). При  $z = 0$  из (2.2) получаем

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0,$$

т. е. сечение поверхности плоскостью  $z = 0$  — пара прямых (см. рис. 3, *b*)

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

При  $z = h \neq 0$  запишем уравнение (2.2) в виде

$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1. \quad (2.9)$$

При  $h > 0$  уравнение (2.9) — уравнение гиперболы, ветви которой вытянуты вдоль оси  $x$ . При  $h < 0$  получаем гиперболу, ветви которой вытянуты вдоль оси  $y$  (см. рис. 3, *b*).

Пересекая поверхность плоскостью  $x = h$ , получаем параболу

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \quad (2.10)$$

ветви которой направлены противоположно оси  $z$ . Пересекая поверхность плоскостью  $y = h$ , очевидно, получим параболу, ветви которой



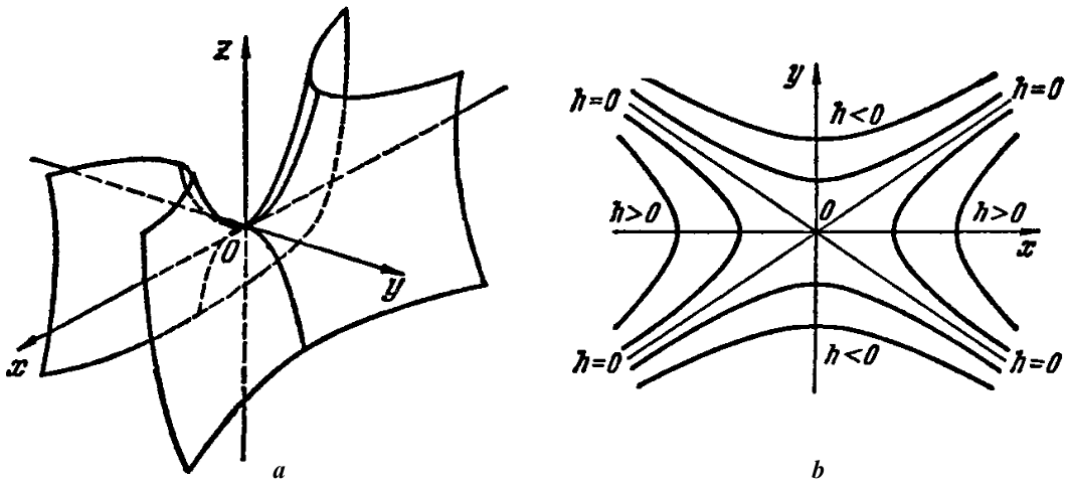


Рис. 3. Гиперболический параболоид (а). Сечения гиперболического параболоида плоскостями  $z = h$  при различных значениях  $h$  (b)

направлены вдоль оси  $z$ . Описанную седлообразную поверхность называют *гиперболическим параболоидом* (см. рис. 3, а).

5. Обратимся, наконец, к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, \quad (2.11)$$

Не ограничивая общности, здесь можно различать два случая:

- 1)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ , это условие эквивалентно условию положительной определенности матрицы  $A$  (см. с. 222);
- 2)  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ .

В случае 1) возможны три ситуации:  $d = 0$ , единственная точка, удовлетворяющая (2.11), — начало координат;  $d > 0$ , нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей этому уравнению;  $d < 0$ . При выполнении последнего условия уравнение (2.11) запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.12)$$

Здесь  $a^2 = -d/\lambda_1, b^2 = -d/\lambda_2, c^2 = -d/\lambda_3$ . Поверхность, описываемая уравнением (2.12), называется *эллипсоидом* (см. рис. 4, а).

Эллипсоид, очевидно, симметричен относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Вся поверхность заключена в параллелепипеде

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c$$

и, следовательно, ограничена.

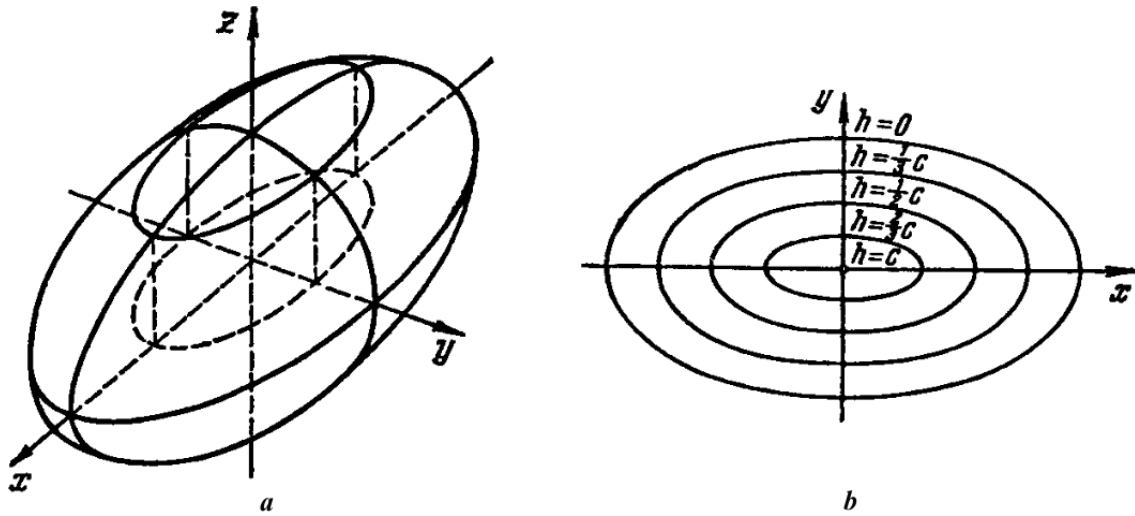


Рис. 4. Эллипсоид (а). Сечения эллипсоида плоскостями  $z = h$  при различных значениях  $h$  (b)

Изучим сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным. Вследствие симметрии поверхности достаточно ограничиться, например, плоскостями, параллельными плоскости  $x, y$ . Нетрудно убедиться, что кривая, получающаяся при пересечении эллипсоида с плоскостью  $z = h$ , где  $|h| \leq c$ , является эллипсом с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

При возрастании  $h$  от 0 до  $c$  полуоси  $a_1, b_1$  убывают. При  $h = \pm c$  эллипс вырождается в точку (см. рис. 4, b).

Полезно отметить, что сечение эллипсоида любой плоскостью дает эллипс. В самом деле, это сечение — кривая второго порядка. Она ограничена, так как эллипсоид ограничен, но единственной ограниченной кривой второго порядка (см. § 2 настоящей главы) является эллипс.

Обратимся к случаю 2). Пусть при этом  $d = 0$ . Запишем уравнение (2.11) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (2.13)$$

Здесь  $a^2 = 1/\lambda_1$ ,  $b^2 = 1/\lambda_2$ ,  $c^2 = -1/\lambda_3$ . Поверхность, описываемая уравнением (2.13), называется *эллиптическим конусом*. Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Ее сечение плоскостью  $z = h$  — эллипс с полуосями  $a_1 = a|h|/c$ ,  $b_1 = b|h|/c$  (см. рис. 5).

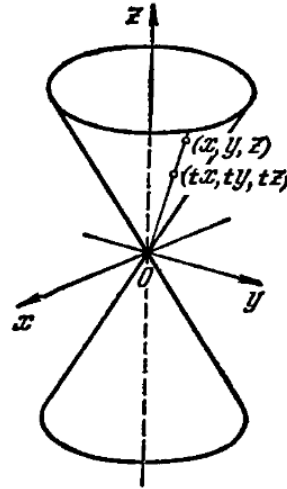


Рис. 5. Эллиптический конус

При  $a = b$  получаем прямой круговой конус с вершиной в начале координат.

Заметим, что если точка  $(x, y, z)$  лежит на конусе, то и точка  $(tx, ty, tz)$  при любом  $t \in (-\infty, \infty)$  лежит на конусе, т. е. вместе с любой точкой  $(x, y, z)$ , лежащей на конусе, конусу принадлежит и вся прямая, проходящая через эту точку и начало координат (см. рис. 5).

Можно сказать, таким образом, что эллиптический конус получается при движении прямой (*образующей*), закрепленной в одной точке, по эллиптической *направляющей*.

Пусть теперь  $d < 0$ . Запишем уравнение (2.11) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.14)$$

Здесь  $a^2 = -d/\lambda_1$ ,  $b^2 = -d/\lambda_2$ ,  $c^2 = -d/|\lambda_3|$ . Поверхность, описываемая уравнением (2.14), называется *одноплостным гиперболоидом* (см. рис. 6, а). Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Сечение поверхности плоскостями  $x = h$ ,  $y = h$  дает гиперболы.

Сечением поверхности плоскостью  $z = h$  является эллипс с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

При  $h = 0$  получаем так называемый *горловой эллипс* (см. рис. 6, б).

Рассмотрим, наконец, случай  $d > 0$ . Уравнение (2.11) представим в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (2.15)$$

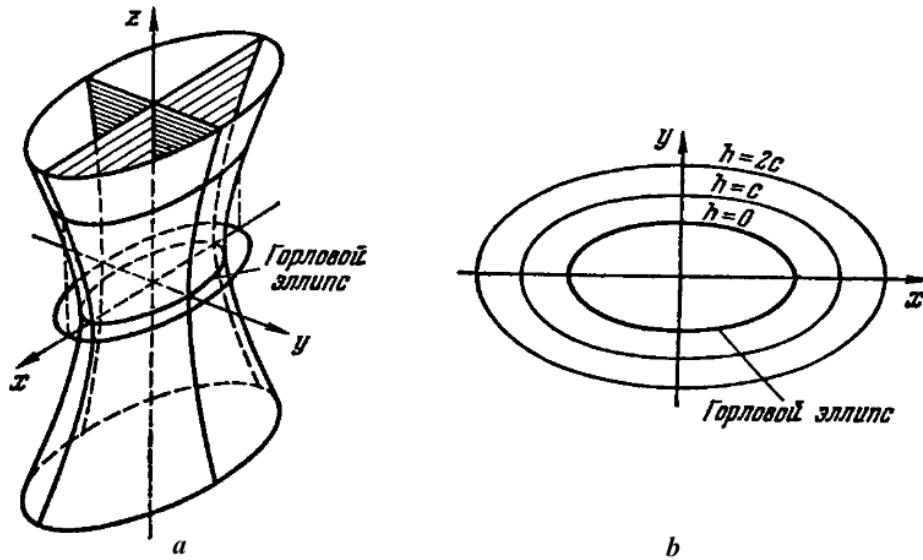


Рис. 6. Однополостный гиперboloид (а). Сечения однополостного гиперboloида плоскостями  $z = h$  при различных значениях  $h$  (b)

где  $a^2 = d/\lambda_1$ ,  $b^2 = d/\lambda_2$ ,  $c^2 = d/|\lambda_3|$ . Уравнение (2.15) описывает *двуполостный гиперboloид* (см. рис. 7, а).

Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Заметим, что при  $|z| < c$  не существует вещественных  $x, y$ , удовлетворяющих уравнению (2.15). При  $|z| = c$  уравнению (2.15) удовлетворяют лишь  $x = 0$ ,  $y = 0$ , т. е. вся поверхность лежит вне плоского слоя  $|z| < c$ . Сечениями поверхности плоскостями  $z = \pm h$  при  $h > c$  являются эллипсы (см. рис. 7, b) с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Сечение поверхности плоскостями  $x = h$ ,  $y = h$  дает гиперболы.

**6.** Однополостный гиперboloид представляет собой *линейчатую поверхность*, т. е. через каждую точку, лежащую на однополостном гиперboloиде, можно провести две различные прямые, целиком принадлежащие этому же однополостному гиперboloиду (см. рис. 8, а). Аналогичным свойством обладает гиперболический параболоид (см. рис. 8, b).

Проведем доказательство этого утверждения применительно к случаю однополостного гиперboloида. Определим прямую  $l$  как результат пересечения двух плоскостей, задаваемых уравнениями

$$\alpha \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta \left( 1 - \frac{y}{b} \right), \quad \beta \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha \left( 1 + \frac{y}{b} \right), \quad (2.16)$$

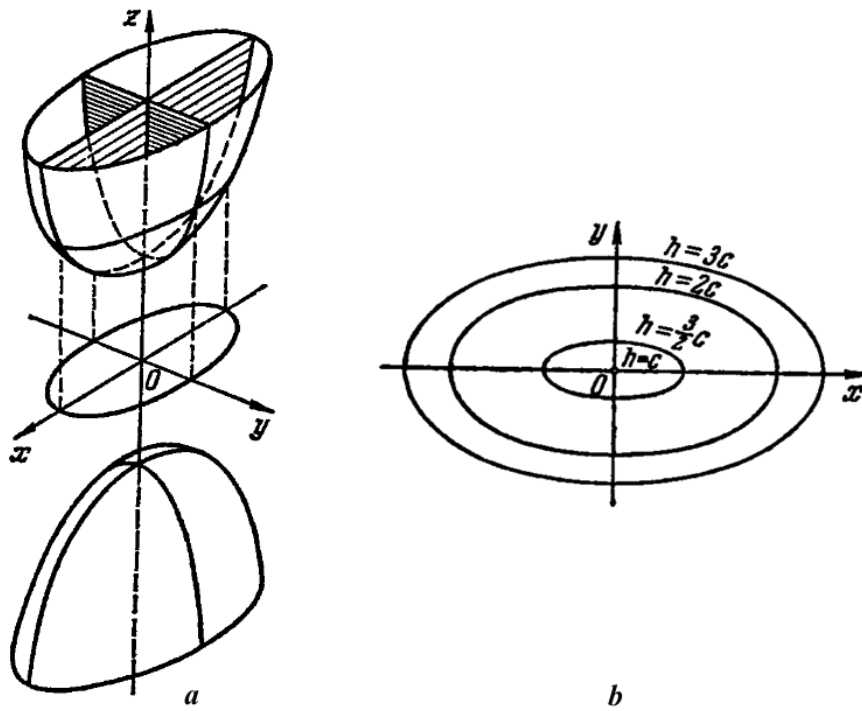


Рис. 7. Двуполостный гиперboloид (а). Сечения двуполостного гиперboloида плоскостями  $z = h$  при различных значениях  $h$  (b)

где  $a, b, c$  — параметры однополостного гиперboloида  $\Gamma$ , описываемого уравнением (2.14). Пусть точка  $(x_0, y_0, z_0)$  лежит на  $\Gamma$ . Подберем  $\alpha, \beta$  так, чтобы точка  $(x_0, y_0, z_0)$  принадлежала прямой  $l$ . Для этого нужно, чтобы числа  $\alpha, \beta$  удовлетворяли системе линейных уравнений

$$\alpha \left( \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) = \beta \left( 1 - \frac{y_0}{b} \right), \quad \beta \left( \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right) = \alpha \left( 1 + \frac{y_0}{b} \right). \quad (2.17)$$

Понятно, что если  $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ , то определитель системы уравнений (2.17) равен нулю, значит, существует нетривиальное решение  $\alpha_0, \beta_0$  этой системы. Нетрудно убедиться также, что при любых  $\alpha, \beta$ , не равных нулю одновременно, плоскости, описываемые уравнениями (2.16), не параллельны. Поэтому прямая  $l$  по найденным значениям  $\alpha_0, \beta_0$  определяется однозначно. Пусть теперь  $(x, y, z)$  — произвольная точка прямой  $l$ . Очевидно, ее координаты должны удовлетворять системе уравнений

$$\alpha_0 \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta_0 \left( 1 - \frac{y}{b} \right), \quad \beta_0 \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha_0 \left( 1 + \frac{y}{b} \right), \quad (2.18)$$

и, поскольку среди чисел  $\alpha_0, \beta_0$  хотя бы одно не нуль, то определитель системы (2.18) равен нулю, следовательно  $(x, y, z) \in \Gamma$ .

Аналогичные рассуждения показывают, что через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  можно провести прямую  $l'$ , определяемую как пересечение плоско-

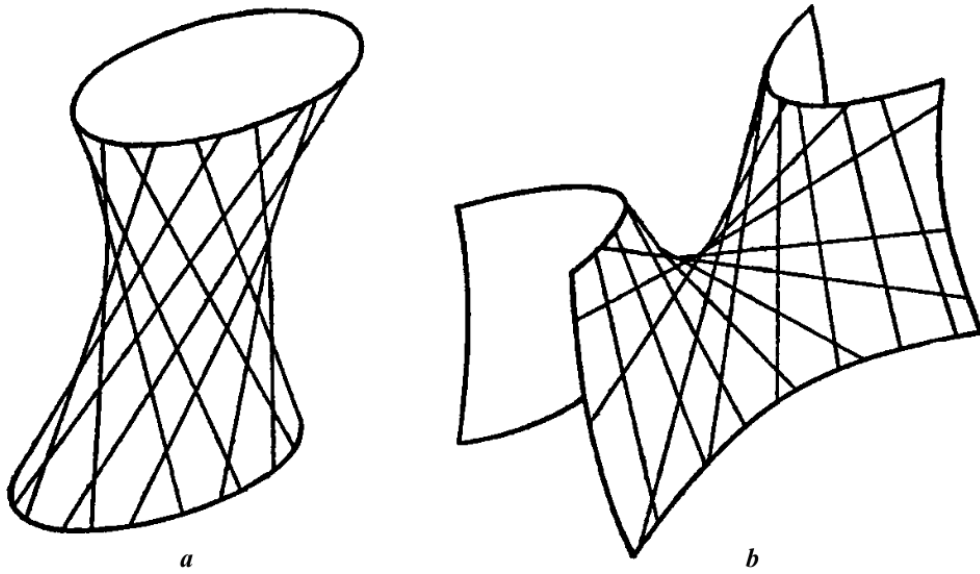


Рис. 8. Однополостный гиперboloид (a) и гиперболический параболоид (b) как линейчатые поверхности

стей, описываемых уравнениями вида

$$\nu \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \lambda \left( 1 + \frac{y}{b} \right), \quad \lambda \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \nu \left( 1 - \frac{y}{b} \right),$$

и целиком лежащую на  $\Gamma$ . Используя результаты п. 6, с. 69, нетрудно убедиться, что прямые  $l$  и  $l'$  не параллельны.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Показать, что через каждую точку гиперболического параболоида, описываемого уравнением (2.8), можно провести две различные прямые, целиком лежащие на этом параболоиде и задаваемые как пересечение плоскостей

$$\alpha z = \beta \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \quad \beta = \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \quad \text{и} \quad \nu z = \lambda \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right), \quad \lambda = \nu \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

Линейчатость поверхностей широко используется в инженерной практике, так как позволяет создавать соответствующие конструкции в виде простых стержневых систем. Такова, например, знаменитая телевизионная шуховская башня в Москве<sup>1)</sup>.

**7.** Приведем в заключение сводку уравнений и названий поверхностей второго порядка:

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{— эллипсоид,}$$

<sup>1)</sup>Владимир Григорьевич Шухов (1853 — 1939) — русский, советский инженер. Ему принадлежит идея использования однополостных гиперboloидов в строительстве.

$$2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ — эллиптический конус,}$$

$$3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — однополостный гиперболоид,}$$

$$4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — двуполостный гиперболоид,}$$

$$5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \text{ — эллиптический параболоид,}$$

$$6) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \text{ — гиперболический параболоид,}$$

$$7) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — эллиптический цилиндр,}$$

$$8) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперболический цилиндр,}$$

$$9) \quad y^2 = 2px \text{ — параболический цилиндр.}$$

### 8. ПРИМЕРЫ.

1) Привести к простейшему виду уравнение

$$4x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \quad (2.19)$$

и построить поверхность, описываемую этим уравнением в декартовой системе координат  $x_1x_2x_3$ .

РЕШЕНИЕ. В обозначениях п. 1, § 1, имеем

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = (-1, 3, 1), \quad a_0 = 0.$$

Будем опираться на описанный в § 5, с. 266, способ построения приведенной формы квадратичной функции. Характеристическое уравнение матрицы  $A$ , как нетрудно убедиться, имеет вид

$$P_3(\lambda) \equiv \lambda^3 - 16\lambda^2 + 69\lambda - 54 = 0.$$

Очевидно  $\lambda_1 = 1$  — корень этого уравнения. Далее, поделив полином  $P_3(\lambda)$  на  $\lambda - 1$ , получим  $P_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 15\lambda + 54)$ . Корнями уравнения  $\lambda^2 - 15\lambda + 54 = 0$  являются числа  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = 9$ .

Таким образом, все собственные числа матрицы  $A$  отличны от нуля, и они попарно различны. Соответствующие им собственные векторы матрицы  $A$  по теореме 8, с. 226, образуют ортогональную систему в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  со стандартным скалярным произведением.

Вычислим собственные векторы матрицы  $A$ . Собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_1 = 1$ , есть решение однородной системы линейных алгебраических уравнений  $(A - I)x = 0$ . Записывая эту систему подробнее, получим

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,$$

$$x_1 + 7x_2 + x_3 = 0,$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0.$$

Определитель матрицы этой системы по построению равен нулю. Главный минор вто-

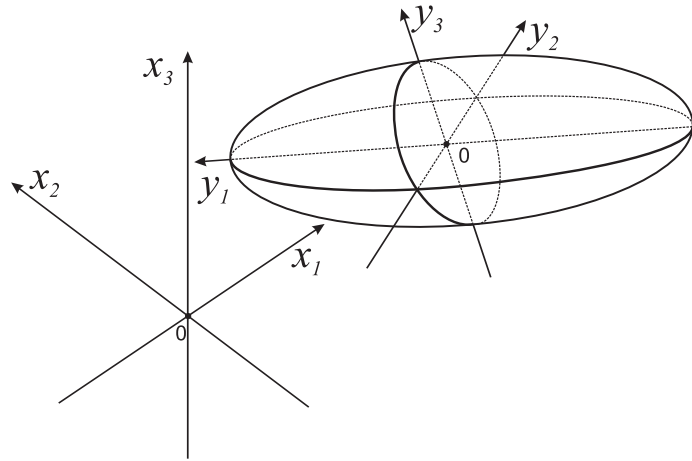


Рис. 9. К примеру 1) исследования уравнения поверхности второго порядка

рого порядка матрицы этой системы отличен от нуля, поэтому последнее уравнение системы — следствие первых двух уравнений, и искомый собственный вектор можно вычислить, полагая  $x_3 = 1$  и определяя затем  $x_1$ ,  $x_2$  из первых двух уравнений системы. В результате получим, что собственному числу  $\lambda_1 = 1$  соответствует собственный вектор  $x^1 = (-1, 0, 1)$ . Точно так же находим, что собственному числу  $\lambda_2$  соответствует собственный вектор  $x^2 = (1, -1, 1)$ , собственному числу  $\lambda_3$  соответствует собственный вектор  $x^3 = (1, 2, 1)$ . Нормируя эти векторы, получим столбцы ортогональной матрицы  $T$ :

$$T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Используя теперь формулу (4.6), с. 265, найдем

$$\hat{a} = T^T a = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{6}),$$

по формуле (5.4), с. 266, вычисляем  $\hat{a}_0 = a_0 - \sum_{k=1}^3 \hat{a}_k^2 / \lambda_k = -19/6$ . Затем по формуле (5.5), с. 266, находим  $\hat{x}^0 = (-\sqrt{2}, 1/6\sqrt{3}, -1/9\sqrt{6})$  и, наконец, по формуле (5.8), с. 267,

$$x^0 = T\hat{x}^0 = (19/18, -7/18, -17/18).$$



Таким образом, замена переменных  $x = x^0 + Ty$  приводит уравнение (2.19) к виду

$$y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 - 19/6 = 0,$$

откуда получаем, что

$$(6/19)y_1^2 + (36/19)y_2^2 + (54/19)y_3^2 = 1. \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) — это уравнение эллипсоида с полуосями  $\sqrt{19/6}$ ,  $\sqrt{19/6}$ ,  $\sqrt{19/6}/3$ , отнесенного к декартовой системе координат  $y_1y_2y_3$ , которая получается из исходной системы координат  $x_1x_2x_3$  переносом начала в точку  $x^0$  и поворотом таким, что оси  $y_k$  оказываются направленными вдоль векторов  $x^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , соответственно (см. рис. 9).

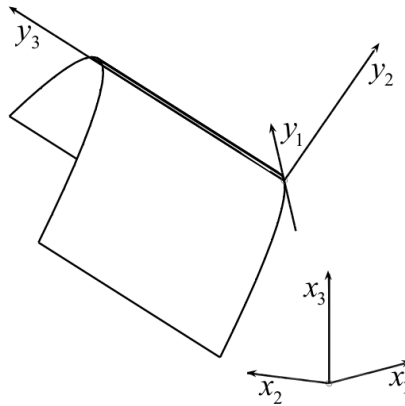


Рис. 10. К примеру 2) исследования уравнения поверхности второго порядка

2) Привести к простейшему виду уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 183 = 0 \quad (2.21)$$

и построить поверхность, описываемую этим уравнением в декартовой системе координат  $x_1x_2x_3$ .

РЕШЕНИЕ. В обозначениях п. 1, § 1, имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = (2, -1, 3), \quad a_0 = 183.$$

Собственные числа матрицы  $A$ , как нетрудно убедиться, есть  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Ранг матрицы

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

равен двум. Все ненулевые решения системы уравнений  $(A - 2I)x = 0$ , очевидно, пропорциональны вектору  $e^1 = (1, 1, 0)$ . Ранг матрицы  $A$  равен единице. Поэтому размерность фундаментальной системы решений однородного уравнения  $Ax = 0$  равна двум. Полагая сначала  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$ , а затем  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ , получим, что векторы  $e^2 = (-1, 1, 0)$ ,  $e^3 = (0, 0, 1)$  образуют базис собственного подпространства матрицы  $A$ , отвечающего

нулевому собственному числу. Векторы  $e^1, e^2, e^3$  попарно ортогональны. Нормируя их, получаем ортогональную матрицу  $T$  собственных векторов матрицы  $A$ :

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что  $\hat{a} = T^T a = (\sqrt{1/2}, -3\sqrt{1/2}, 3)$ , поэтому, выполняя замену переменных  $x = Tu$  в уравнении (2.21), получим

$$2(u_1^2 + \sqrt{1/2}u_1) + 2(-3\sqrt{1/2}u_2 + 3u_3) + 183 = 0. \quad (2.22)$$

В соответствии с методикой, описанной в п. 1, §5, гл. 14 (см. с. 266, 267), построим матрицу отражения  $R$ , преобразующую вектор  $b = (-3\sqrt{1/2}, 3)$  в вектор, параллельный вектору  $e = (1, 0)$ . Для этого (см. п. 2, п. 2.1, с. 255) сначала вычислим вектор

$$w = (b - |b|e)/|b - |b|e| = ((1 + \sqrt{3})/(6 + 2\sqrt{3}), 1/\sqrt{3 + \sqrt{3}}),$$

затем матрицы

$$R = I - 2ww^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \\ \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

и выполним в уравнении (2.23) замену переменных  $u = \tilde{R}v$ . В результате, получим

$$2(v_1^2 + \sqrt{1/2}v_1) + 3\sqrt{6}v_2 + 183 = 0, \quad (2.23)$$

или

$$2(v_1 + \sqrt{1/2}/2)^2 + 3\sqrt{6}(v_2 + (183 - 1/4)/(3\sqrt{6})) = 0. \quad (2.24)$$

Наконец, полагая  $y_1 = v_1 + \sqrt{1/2}/2$ ,  $y_2 = v_2 + (183 - 1/4)/(3\sqrt{6})$ ,  $y_3 = v_3$ , приходим к уравнению

$$y_1^2 = -3\sqrt{3/2}y_2. \quad (2.25)$$

Переменные  $x, y$  связаны соотношением  $x = \tilde{x}^0 + \tilde{T}y$ . Вектор  $\tilde{x}^0$  и ортогональная матрица  $\tilde{T}$  могут быть найдены при помощи последовательных вычислений по формулам (5.4), (5.5), (5.8), (5.12), (5.14), гл. 14:  $\hat{a}_0 = 183 - 1/4$ ,  $\hat{x}^0 = (1/2\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $x^0 = T\hat{x}^0 = (1/4, 1/4, 0)$ ,  $x^1 = (0, 2(183 - 1/4)/(3\sqrt{6}), 0)$ ,

$$\tilde{T} = T\tilde{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & -\sqrt{1/3} \\ \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} \\ 0 & 2\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} \end{pmatrix},$$

$\tilde{x}^0 = x^0 - \tilde{T}x^1 = (-361/18, 185/9, -731/18)$ . Таким образом, уравнение (2.25) — это уравнение параболического цилиндра, отнесенного к декартовой системе координат  $y_1y_2y_3$ , которая получается из исходной системы координат  $x_1x_2x_3$  переносом начала в точку  $\tilde{x}^0$  и поворотом таким, что оси  $y_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , оказываются направленными вдоль векторов, образованных столбцами матрицы  $\tilde{T}$  (см. рис. 10).

**УПРАЖНЕНИЕ.** Получите уравнения (2.20), (2.25) непосредственно из уравнений (2.19), (2.21), используя формулы п. 3, с. 285.

### § 3. Гиперповерхности второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$ и их классификация

1. *Гиперповерхностью второго порядка* в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется множество всех точек пространства  $\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих уравнению

$$F(x) \equiv (Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0. \quad (3.1)$$

Здесь  $A$  — заданная симметричная матрица порядка  $n$ ,  $a$  — заданный вектор из  $\mathbb{R}^n$ ,  $a_0$  — фиксированное число, под скалярным произведением понимается стандартное скалярным произведение в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Выполним в уравнении (3.1) замену переменных, полагая

$$x = x^0 + Ty. \quad (3.2)$$

В дальнейшем на протяжении данного параграфа будем предполагать, что  $T$  — ортогональная матрица.

Замена переменных (3.2) может быть интерпретирована как замена естественного базиса пространства  $\mathbb{R}^n$  на ортонормированный базис, образованный столбцами матрицы  $T$ , и перенос начала отсчета в точку  $x^0$ .

Как показано в § 5 гл. 14, матрица  $T$  и вектор  $x^0$  могут быть выбраны так, что уравнение (3.1) примет одну и только одну из следующих *приведенных форм*:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + \hat{a}_0 = 0, \quad (3.3)$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2b_{r+1} y_{r+1} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь, как и раньше,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  — все ненулевые собственные числа матрицы  $A$ ,  $b_{r+1} > 0$ . Условимся в дальнейшем считать, что числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  положительны,  $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_r$  отрицательны.

2. Приведенные формы гиперповерхностей позволяют выполнить их классификацию. Мы будем при этом использовать результаты п. 3, § 4, гл. 14, об ортогональных инвариантах квадратичных функций. Как и в главе 14, через  $B$  будем обозначать квадратную матрицу порядка  $n + 1$ , определенную равенством (4.2), с. 264.

2.1. Пусть  $r = n$  (это условие эквивалентно тому, что  $\det(A) \neq 0$ ). Форма (3.4) в этом случае, очевидно, невозможна. Таким образом, в рассматриваемом случае возможны лишь следующие ситуации:

1) Определитель матрицы  $B$  не нуль, и  $\hat{a}_0 = \det(B)/\det(A) < 0$ . Тогда уравнение (3.3) можно записать в виде

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} = 1. \quad (3.5)$$

2) Определитель матрицы  $B$  не нуль,  $\hat{a}_0 = \det(B)/\det(A) > 0$ . Уравнение (3.3) принимает вид

$$-\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} - \dots - \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} + \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} + \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} + \dots + \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} = 1. \quad (3.6)$$

3) Определитель матрицы  $B$  равен нулю. Уравнение (3.3) можно записать в виде

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} = 0. \quad (3.7)$$

Коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , в уравнениях (3.5)–(3.7) очевидным образом выражаются через собственные числа матрицы  $A$  и определитель матрицы  $B$ .

Гиперповерхность, описываемая уравнением (3.5) при  $k = n$  (уравнением (3.6) при  $k = 0$ ), называется *эллипсоидом*.

Гиперповерхность, описываемая уравнением (3.5) при  $k = 0$  (уравнением (3.6) при  $k = n$ ), называется *мнимым эллипсоидом*. Нет ни одной точки пространства  $\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющей этому уравнению.

Уравнения (3.5), (3.6) при  $1 < k < n$  описывают гиперповерхности, называемые *гиперболоидами*.

Гиперповерхности, описываемые уравнением (3.7) при  $1 < k < n$ , называются *конусами*. При  $k = 0$  и  $k = n$  уравнение (3.7) вырождается. Ему удовлетворяет единственная точка  $x = 0$  пространства  $\mathbb{R}^n$ .

**2.2.** Пусть  $r = n - 1$ . В этом случае  $\det(A) = 0$ . Ранг матрицы  $B$ , очевидно, может принимать при этом следующие значения:  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$ .

Если  $\text{rank}(B) = n - 1$ , то приведенная форма уравнения гиперповерхности принимает вид (3.3) с  $\hat{a}_0$  равным нулю, и ее можно представить так:

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}^2} = 0. \quad (3.8)$$

Если  $\text{rank}(B) = n$ , то  $\hat{a}_0 \neq 0$ , и в зависимости от знака  $\hat{a}_0$  приходим либо к уравнению вида

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}^2} = 1, \quad (3.9)$$

либо к уравнению вида

$$-\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} - \dots - \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} + \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} + \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} + \dots + \frac{y_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}^2} = 1, \quad (3.10)$$

Если  $\text{rank}(B) = n + 1$ , то реализуется приведенная форма (3.4), которую можно представить в виде

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}^2} = 2py_n, \quad p > 0. \quad (3.11)$$

**2.3.** Пусть, наконец,  $0 < r < n - 1$ . Ранг матрицы  $B$  может при этом принимать значения:  $r$ ,  $r + 1$ ,  $r + 2$ . Аналогично предыдущему случаю приходим к уравнениям вида

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_r^2}{\alpha_r^2} = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_r^2}{\alpha_r^2} = 1, \quad (3.13)$$

или

$$-\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} - \dots - \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} + \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} + \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} + \dots + \frac{y_r^2}{\alpha_r^2} = 1, \quad (3.14)$$

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_r^2}{\alpha_r^2} = 2py_{r+1}, \quad p > 0. \quad (3.15)$$

Уравнения (3.8)–(3.10), (3.12)–(3.15) описывают гиперповерхности, называемые *цилиндрами*, уравнение (3.11) описывает *параболоид*.

Уравнения (3.5)–(3.15) исчерпывают все так называемые *канонические формы* уравнения гиперповерхности второго порядка. Геометрическая интерпретация этих уравнений может быть выполнена аналогично тому, как это делалось для поверхностей в трехмерном пространстве.

## Итерационные методы

### § 1. Итерационные методы решения систем линейных уравнений

1. В этом параграфе изучаются простейшие итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b. \quad (1.1)$$

Матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  предполагается невырожденной и, вообще говоря, комплексной. Под скалярным произведением векторов  $x, y \in \mathbb{C}^n$  понимается стандартное скалярное произведение  $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$ , соответственно  $|x| = (x, x)^{1/2}$ .

Читателю из курса математического анализа хорошо известно понятие предела последовательности векторов из пространства  $\mathbb{R}^n$ . Это определение, фактически, без изменений переносится на последовательности векторов из пространства  $\mathbb{C}^n$ , а именно, будем говорить, что вектор  $x \in \mathbb{C}^n$  является *пределом последовательности* векторов  $\{x^k\} \subset \mathbb{C}^n$ , если  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x^k - x| = 0$ . Из очевидных неравенств

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^k| \leq |x - x^k| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^k|$$

вытекает, что последовательность векторов  $\{x^k\}$  сходится к вектору  $x$  тогда и только тогда, когда для любого  $j = 1, 2, \dots, n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_j - x_j^k| = 0,$$

т. е.  $x_j^k \rightarrow x_j$  при  $k \rightarrow \infty$  для всех  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Отметим, что если  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} Ax^k = Ax$  для любой матрицы  $A$  (проверьте!).

2. Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разбить на два класса: прямые и итерационные. Прямые методы характеризуются тем, что если пренебречь ошибками округления, то решение системы может быть получено за конечное число

арифметических операций (зависящее лишь от порядка системы). Таков, например, метод Гаусса (см. § 8, с. 99).

При реализации прямых методов важно, чтобы все данные располагались в оперативной (быстрой) памяти компьютера. Если порядок системы настолько велик, что ее матрица может быть сохранена только с использованием внешней (медленной) памяти, например, жесткого диска, то время, затрачиваемое на решение системы, существенно увеличивается.

Для больших систем предпочтительнее оказываются итерационные методы. Основная идея этих методов состоит в построении последовательности векторов  $x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходящейся к решению  $x$  системы (1.1). За приближенное решение принимается вектор  $x^k$  при достаточно большом  $k$ . Всюду в дальнейшем через  $z^k$  будем обозначать вектор  $x^k - x$ , т. е. *погрешность приближения* с номером  $k$ .

При реализации итерационных методов обычно достаточно уметь вычислять вектор  $Ax$  при любом заданном векторе  $x$ .

**3. Метод Якоби<sup>1)</sup>.** Будем считать, что все диагональные элементы матрицы  $A$  отличны от нуля. Перепишем систему (1.1), разрешая каждое уравнение относительно переменной, стоящей на диагонали:

$$x_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Выберем некоторое начальное приближение  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  и построим последовательность векторов  $x^1, x^2, \dots$ , определяя вектор  $x^{k+1}$  по уже найденному вектору  $x^k$  при помощи соотношений:

$$x_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Формулы (1.3) определяют итерационный метод решения системы (1.1), называемый *методом Якоби*.

Укажем легко проверяемое достаточное условие сходимости этого метода. Будем говорить, что для матрицы  $A$  выполнено *условие диагонального преобладания*, если

$$q = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1. \quad (1.4)$$

<sup>1)</sup>Карл Густав Якоб Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi; 1804 — 1851) — немецкий математик.

**3.1. Теорема.** Пусть матрица  $A$  системы (1.1) — матрица с диагональным преобладанием. Тогда итерационный метод Якоби сходится при любом начальном приближении  $x^0$ ; справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k| \leq q^k \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^0|. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $x$  — решение системы уравнений (1.1). Вычитая почленно из равенства (1.3) равенство (1.2), получим

$$z_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^k - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} |z_i^{k+1}| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} |z_j^k| + \sum_{j=i+1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} |z_j^k| \leq \left( \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right) \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k| = \\ &= q \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k|, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ , откуда вытекает, что

$$\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^{k+1}| \leq q \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k|$$

для любого  $k = 0, 1, \dots$ , поэтому

$$\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k| \leq q^k \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^0| \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ , поскольку  $0 < q < 1$ , а это и означает, что  $x^k \rightarrow x$ .  $\square$

Оценка (1.5) показывает, что, чем меньше  $q$ , т. е. чем выше диагональное преобладание матрицы  $A$ , тем быстрее сходится метод Якоби.

**4. Метод Зейделя.** Формулы (1.3) допускают естественную модификацию. Именно, при вычислении  $x_i^{k+1}$  будем использовать уже найденные компоненты вектора  $x^{k+1}$ , т. е.  $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ . В результате приходим к итерационному методу Зейделя<sup>1)</sup>:

$$x_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

<sup>1)</sup>Филипп Людвиг Зейдель (Philipp Ludwig von Seidel; 1821 — 1896) — немецкий математик и астроном.



Метод Зейделя позволяет более экономно расходовать память компьютера, поскольку в данном случае вновь получаемые компоненты вектора  $x^{k+1}$  можно размещать на месте соответствующих компонент вектора  $x^k$ , в то время как при реализации метода Якоби все компоненты векторов  $x^k$ ,  $x^{k+1}$  должны одновременно находиться в памяти компьютера.

Достаточное условие сходимости и оценку скорости сходимости метода Зейделя дает

**4.1. Теорема.** Пусть матрица  $A$  — матрица с диагональным преобладанием. Тогда метод Зейделя сходится при любом начальном приближении  $x^0$ ; справедлива оценка скорости сходимости:

$$\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k| \leq q^k \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^0|. \quad (1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычитая почленно из равенства (1.6) равенство (1.2), получим

$$z_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.8)$$

Пусть  $\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^{k+1}| = |z_l^{k+1}|$ . Из  $l$ -того уравнения системы (1.8) вытекает, что

$$|z_l^{k+1}| \leq \alpha_l \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^{k+1}| + \beta_l \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k|,$$

где

$$\alpha_l = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{|a_{lj}|}{|a_{ll}|}, \quad \beta_l = \sum_{j=l+1}^n \frac{|a_{lj}|}{|a_{ll}|},$$

следовательно,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^{k+1}| \leq \frac{\beta_l}{1 - \alpha_l} \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k|.$$

Из условия (1.4) получаем, что  $\alpha_l + \beta_l \leq q < 1$ , но тогда и  $q\alpha_l + \beta_l \leq q$ , таким образом,  $\beta_l / (1 - \alpha_l) \leq q$ , поэтому  $\max_{1 \leq j \leq n} |z_j^{k+1}| \leq q \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^k|$ .

Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующими рассуждениями из доказательства предыдущей теоремы.  $\square$

**5. Метод релаксации.** Зачастую существенного ускорения сходимости можно добиться за счет введения в расчетные формулы числового параметра. В качестве примера приведем итерационный процесс

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega)x_i^k + \omega \left( - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}} \right), \quad (1.9)$$

$i = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots$ . Этот метод называется *методом релаксации*, число  $\omega$  — *релаксационным параметром*. При  $\omega = 1$  метод переходит в метод Зейделя.

Ясно, что по затратам памяти и объему вычислений на каждом шаге итераций метод релаксации не отличается от метода Зейделя.

## § 2. Элементы общей теории итерационных методов

1. Придадим итерационным методам, рассмотренным в предыдущих пунктах, матричные формулировки. Начнем с метода Якоби. Нетрудно видеть, что равенства (1.3) можно записать в матричном виде

$$D(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = b, \quad (2.1)$$

где  $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ . Для того, чтобы придать матричную форму записи методам Зейделя и релаксации, обозначим через  $L$  нижнюю треугольную матрицу, поддиагональные элементы которой совпадают с соответствующими элементами матрицы  $A$ , а все диагональные элементы равны нулю. Через  $R$  обозначим верхнюю треугольную матрицу такую, что  $A = L + D + R$ . Равенства (1.9) могут быть переписаны тогда в следующем виде:

$$\frac{1}{\omega}(D + \omega L)(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = b. \quad (2.2)$$

Будем рассматривать общий класс итерационных методов, определяемых соотношениями

$$\frac{1}{\tau}B(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = b, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

Здесь  $B$  — невырожденная матрица,  $\tau > 0$  — число, называемое *итерационным параметром*. Для того, чтобы найти вектор  $x^{k+1}$  по уже известному вектору  $x^k$ , нужно решить систему линейных уравнений

$$Bx^{k+1} = f^k, \quad (2.4)$$

где  $f^k = Bx^k - \tau(Ax^k - b)$ .

Очевидно, при построении итерационного метода (2.3) матрица  $B$  должна выбираться так, чтобы решение системы уравнений вида (2.4) выполнялось намного быстрее, чем решение исходной системы уравнений (1.1).

Итерационные методы Якоби, Зейделя и релаксации являются частными случаями метода (2.3). Например, в случае метода Якоби  $B = D, \tau = 1$ .

Наша ближайшая цель — получить условия на матрицу  $B$  и параметр  $\tau$ , обеспечивающие сходимость метода (2.3).

Если  $x$  — решение системы (1.1), то, очевидно,

$$\frac{1}{\tau}B(x - x) + Ax = b. \quad (2.5)$$

Вычитая почленно равенства (2.3), (2.5), получим

$$\frac{1}{\tau}B(z^{k+1} - z^k) + Az^k = 0, \quad (2.6)$$

откуда  $z^{k+1} = Sz^k$ , где

$$S = I - \tau B^{-1}A. \quad (2.7)$$

и, следовательно,

$$z^k = S^k z^0, \quad (2.8)$$

Понятно, что сходимость итерационного метода (2.3) определяется свойствами матрицы  $S$ .

**2. Теорема.** *Для того, чтобы итерационный метод (2.3) сошелся при любом начальном приближении  $x^0$ , необходимо и достаточно, чтобы спектральный радиус  $\rho(S)$  матрицы  $S$  был меньше единицы.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** **Н е о б х о д и м о с т ь.** Пусть  $\lambda$  — собственное число матрицы  $S$  такое, что  $|\lambda| \geq 1$ ,  $e$  — соответствующий этому собственному числу нормированный собственный вектор матрицы  $S$ . Выберем в качестве начального приближения в итерационном методе (2.3) вектор  $x^0 = x + e$ , где  $x$  — решение уравнения (1.1). Тогда в соответствии с (2.8) имеем  $z^k = \lambda^k e$ , следовательно,  $|z^k| = |\lambda|^k$ . Очевидно, либо  $|z^k| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , либо  $|z^k| = 1$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ , т. е. метод (2.3) не сходится.

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Из теоремы 3, с. 213, вытекает, что, если спектральный радиус матрицы  $S$  меньше единицы, то она — сходящаяся матрица, т. е.  $S^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , и тогда из (2.8) вытекает, что  $z^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

Опираясь на теорему 2, получим часто используемое условие сходимости итерационного процесса (2.3).

**3. Теорема Самарского<sup>1)</sup>.** *Пусть матрица  $A$  положительно определена и пусть для любого не равного нулю вектора  $x$  из  $\mathbb{C}^n$  выполнено неравенство*

$$(B_1 x, x) > (\tau/2)(Ax, x), \quad (2.9)$$

<sup>1)</sup> Александр Андреевич Самарский (1919 — 2008) — советский, российский математик.

где  $B_1 = (1/2)(B + B^*)$ . Тогда матрица  $B$  невырождена, и итерационный процесс (2.3) сходится при любом начальном приближении  $x^0$ . Обратно, если матрица  $A$  положительно определена и итерационный процесс (2.3) сходится при любом начальном приближении  $x^0$ , то выполнено условие (2.9).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Невырожденность матрицы  $B$  сразу же следует из условия (2.9) и положительной определенности матрицы  $A$  (см. упражнение 3 на с. 223). Покажем, что если выполнено условие (2.9), то  $\rho(S) < 1$ , где  $S$  — матрица, определенная равенством (2.7). Вследствие теоремы 2 отсюда будет вытекать сходимость итерационного метода (2.3). Пусть  $\lambda, x$  — собственная пара матрицы  $S$ . Тогда  $Bx - \tau Ax = \lambda Bx$ , поэтому

$$\lambda = \frac{(Bx, x) - \tau(Ax, x)}{(Bx, x)}.$$

Используя формулу (10.1), с. 107, представим матрицу  $B$  в виде

$$B = B_1 + iB_2, \quad (2.10)$$

где  $B_1 = (1/2)(B + B^*)$ ,  $B_2$  — эрмитовы матрицы. Тогда

$$\lambda = \frac{(B_1x, x) - \tau(Ax, x) + i(B_2x, x)}{(B_1x, x) + i(B_2x, x)},$$

следовательно,

$$|\lambda|^2 = \frac{((B_1x, x) - \tau(Ax, x))^2 + (B_2x, x)^2}{(B_1x, x)^2 + (B_2x, x)^2}.$$

Запишем последнее равенство в виде

$$|\lambda|^2 = \frac{(1 - a)^2 + b^2}{1 + b^2}, \quad (2.11)$$

где  $a = \tau(Ax, x)/(B_1x, x)$ ,  $b = (B_2x, x)/(B_1x, x)$ . Из условия (2.9) получаем, что  $0 < a < 2$ , поэтому  $|1 - a| < 1$ , откуда, очевидно, вытекает, что  $|\lambda| < 1$ . Для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что если итерационный процесс (2.3) сходится при любом начальном приближении, то по теореме 2 все собственные числа матрицы  $S$  по модулю строго меньше единицы, и тогда из представления (2.11) получаем, что  $0 < a < 2$ , следовательно, условие (2.9) выполнено.  $\square$

**4. Теорема.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для погрешностей итерационного процесса (2.3) при любом  $k \geq 0$  выполнено неравенство

$$(Az^{k+1}, z^{k+1}) < (Az^k, z^k), \quad (2.12)$$

если  $z^k \neq 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя тривиальное тождество

$$z^k = (1/2)(z^{k+1} + z^k) - (1/2)(z^{k+1} - z^k),$$

перепишем уравнение (2.6) в виде

$$\frac{1}{\tau}(B - (\tau/2)A)(z^{k+1} - z^k) + (1/2)A(z^{k+1} + z^k) = 0.$$

Умножая теперь скалярно обе части последнего равенства на вектор  $2(z^{k+1} - z^k)$  и используя представление (2.10), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\tau}((B_1 - (\tau/2)A)(z^{k+1} - z^k), z^{k+1} - z^k) + \\ & + i \frac{2}{\tau}(B_2(z^{k+1} - z^k), z^{k+1} - z^k) + \\ & + (Az^{k+1}, z^{k+1}) - (Az^k, z^k) + i \operatorname{Im}(Az^k, z^{k+1}) = 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\tau}((B_1 - (\tau/2)A)(z^{k+1} - z^k), z^{k+1} - z^k) + \\ & + (Az^{k+1}, z^{k+1}) - (Az^k, z^k) = 0. \quad (2.13) \end{aligned}$$

Если  $z^k \neq 0$ , то вследствие невырожденности оператора  $B$  из (2.6) вытекает, что  $z^{k+1} - z^k \neq 0$ . Тогда на основании условия (2.9) из равенства (2.13) получаем, что  $(Az^{k+1}, z^{k+1}) - (Az^k, z^k) < 0$ .  $\square$

**5.** Если матрица  $A$  положительно определена, то уравнение (1.1), с. 302, эквивалентно задаче минимизации функции (функционала)

$$F(x) = (Ax, x) - 2 \operatorname{Re}(x, b)^1. \quad (2.14)$$

Действительно, пусть  $\hat{x}$  — решение уравнения (1.1), с. 302. Тогда

$$F(x) = (Ax, x) - 2 \operatorname{Re}(x, A\hat{x}) =$$

<sup>1)</sup>Функционал  $F$  часто называют *энергетическим*. Это связано с задачами физики, в которых возникают уравнения с положительно определенными матрицами.

$$\begin{aligned}
&= (Ax, x) - 2 \operatorname{Re}(x, A\hat{x}) + (A\hat{x}, \hat{x}) - (A\hat{x}, \hat{x}) = \\
&= (A(x - \hat{x}), x - \hat{x}) - (A\hat{x}, \hat{x}), \quad (2.15)
\end{aligned}$$

следовательно, функции  $F(x)$  и  $F_0(x) = (A(x - \hat{x}), x - \hat{x})$  отличаются на постоянное слагаемое. Поскольку матрица  $A$  положительно определена, то единственной точкой минимума функции  $F_0$ , а стало быть, и функции  $F$  является  $\hat{x}$ . Вследствие (2.15) неравенство (2.12) можно записать в виде

$$F(x^{k+1}) < F(x^k). \quad (2.16)$$

Таким образом, можно сказать, что при выполнении условий теоремы 3 итерационный процесс (2.3) является *релаксационным*<sup>2)</sup>: каждое последующее приближение уменьшает значение функционала  $F$ .

**6.** Используя полученные в предыдущем пункте общие результаты, исследуем сходимость метода релаксации (2.2).

**6.1. Теорема.** Пусть матрица  $A$  положительно определена,

$$0 < \omega < 2. \quad (2.17)$$

Тогда итерационный метод (2.2) сходится при любом начальном приближении  $x^0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем опираться на теорему 3. В рассматриваемом случае  $B = D + \omega L$ ,  $\tau = \omega$ ,  $B_1 = D + (\omega/2)(L + L^*)$ ,  $A = D + L + L^*$ , и условие (2.9) принимает вид  $(Dx, x) > (\omega/2)(Dx, x)$  для любого  $x \neq 0$ . Все диагональные элементы положительно определенной матрицы положительны (см. упражнение 3 на с. 223), поэтому матрица  $D$  положительно определена, и условие (2.9) выполнено, если выполнено условие (2.17).  $\square$

**6.2. Теорема.** Условие (2.17) необходимо для сходимости итерационного процесса (1.9).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Запишем равенство (2.7) в виде

$$(D + \omega L)S = (D + \omega L) - \omega A = (1 - \omega)D - \omega R. \quad (2.18)$$

Поскольку  $L$  и  $R$  — строго треугольные матрицы, а  $D$  — диагональная матрица, все диагональные элементы которой отличны от нуля, то, вычисляя определители левой и правой частей равенства (2.18), получим, что  $\det(S) = (1 - \omega)^n$ , следовательно (см. (7.7), с. 193),

$$\prod_{k=1}^n |\lambda_k| = |1 - \omega|^n, \quad (2.19)$$

<sup>2)</sup>Релаксация (лат. relaxatio) — уменьшение напряжения, ослабление.

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — характеристические числа матрицы  $S$ . Если условие (2.17) нарушено, то  $|1 - \omega| > 1$ , и среди собственных чисел  $\lambda_k$  матрицы  $S$  есть хотя бы одно, модуль которого больше единицы, но тогда по теореме 2 найдется начальное приближение  $x^0$ , при котором итерационный процесс (1.9) не сходится.  $\square$

**7.** Пример решения задачи об оптимальном выборе итерационного параметра. Из доказательства теоремы 2 видно, что итерационный процесс (2.3) сходится тем быстрее, чем меньше спектральный радиус матрицы  $S = I - \tau B^{-1}A$ . В связи с этим возникает задача отыскания такого (*оптимального*) значения итерационного параметра  $\tau$ , при котором величина  $\rho(S)$  принимает минимальное значение.

Наиболее просто эта задача решается в случае, когда матрицы  $A, B$  положительно определены. Поскольку в рассматриваемом случае  $B = B^*$ , т. е. в представлении (2.10) матрица  $B_2$  равна нулю, то из (2.11) получаем, что для любой собственной пары  $\lambda, x$  матрицы  $S$  справедливо равенство

$$|\lambda| = \left| 1 - \tau \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} \right|. \quad (2.20)$$

Нетрудно видеть, что если  $x$  — собственный вектор матрицы  $S$ , то  $x$  — собственный вектор матрицы  $B^{-1}A$  и, следовательно (см. §13, с. 237),  $x$  — собственный вектор обобщенной проблемы собственных значений

$$Ax = \lambda Bx. \quad (2.21)$$

Очевидно, справедливо и обратное: любой собственный вектор задачи (2.21) есть собственный вектор оператора  $S$ .

Для любой собственной пары  $x, \lambda$  задачи (2.21) справедливо равенство  $(Ax, x) = \lambda(Bx, x)$ . Поэтому все собственные числа задачи (2.21) положительны. Пусть  $m$  — минимальное, а  $M$  максимальное из этих чисел. Тогда для любого собственного вектора  $x$  оператора  $S$  справедливы неравенства

$$m \leq \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} \leq M. \quad (2.22)$$

Полученные оценки являются точными, поскольку соответствующие неравенства (2.22) превращаются в равенства, если в качестве  $x$  взять собственный вектор, отвечающий  $m$  или  $M$ .

Нетрудно видеть, что функция  $g(\mu) = |1 - \tau\mu|$  вещественного переменного  $\mu$  на любом ограниченном отрезке вещественной оси достигает максимального значения на одном из концов этого отрезка. Поэтому, используя соотношения (2.20), (2.22), получаем, что

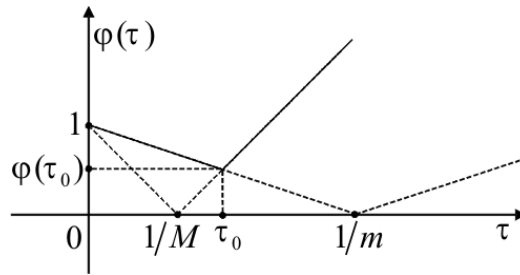


Рис. 1. К выбору оптимального итерационного параметра

$$\rho(S) = \varphi(\tau) = \max\{|1 - \tau m|, |1 - \tau M|\}. \quad (2.23)$$

График функции  $\varphi(\tau)$  при  $\tau \geq 0$  изображен на рис. 1. Нетрудно убедиться, что

$$\min_{\tau \geq 0} \varphi(\tau) = \varphi(\tau_0) = (1 - \xi)/(1 + \xi), \quad (2.24)$$

где  $\tau_0 = 2/(M + m)$ ,  $\xi = m/M$ .

Таким образом, итерационный процесс (2.3) при оптимальном значении итерационного параметра  $\tau = \tau_0$  сходится тем быстрее, чем больше  $m/M$ , т. е. чем меньше разброс собственных чисел задачи (2.21).

### § 3. Метод Якоби решения задач на собственные значения

В этом параграфе излагается приближенный *метод Якоби*, который можно применять для приближенного отыскания собственных чисел и собственных векторов эрмитовых матриц. Как и все методы, используемые в настоящее время для приближенного решения задач на собственные значения, метод Якоби является итерационным. В самых общих чертах, идея его состоит в следующем. Пусть  $A$  — диагональная матрица. Тогда собственные числа матрицы  $A$  есть ее диагональные элементы. Метод Якоби для любой эрмитовой матрицы  $A$  дает способ построения последовательности матриц  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$  таких, что каждая из матриц этой последовательности эрмитова, подобна матрице  $A$  и с увеличением номера  $k$  становится все более близкой к диагональной. В качестве приближенных значений собственных чисел матрицы  $A$  берутся диагональные элементы матрицы  $A_k$ , как только все ее внедиагональные элементы оказываются достаточно малыми.

1. Итак, пусть  $A$  — эрмитова матрица порядка  $n$ ,  $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — матрица, отличающаяся от единичной лишь четырьмя элементами:

$$q_{k,k} = \cos \varphi, \quad q_{ll} = \cos \varphi, \quad q_{kl} = -q \sin \varphi, \quad q_{lk} = \bar{q} \sin \varphi, \quad (3.1)$$



где  $1 \leq k < l \leq n$ ,  $\varphi$  — вещественное число,  $q$  — вообще говоря, комплексное число,  $|q| = 1$ . Очевидно,  $Q$  — унитарная матрица.

Образую по матрице  $A$  матрицу  $\hat{A} = Q^T A Q$  и попытаемся выбрать параметры матрицы  $Q$ , т. е. числа  $k, l, \varphi, q$ , так, чтобы матрица  $\hat{A}$  была максимально близка к диагональной.

Нетрудно убедиться, что матрица  $\tilde{A} = Q^T A$  отличается от матрицы  $A$  лишь элементами строк с номерами  $k, l$ , причем

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{k,j} &= a_{kj} \cos \varphi + a_{lj} \bar{q} \sin \varphi, \\ \tilde{a}_{l,j} &= -a_{kj} q \sin \varphi + a_{lj} \cos \varphi, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Аналогично, матрица  $\hat{A} = \tilde{A} Q$  отличается от матрицы  $\tilde{A}$  лишь элементами столбцов с номерами  $k, l$ , причем

$$\begin{aligned}\hat{a}_{j,k} &= \tilde{a}_{jk} \cos \varphi + \tilde{a}_{jl} q \sin \varphi, \\ \hat{a}_{j,l} &= -\tilde{a}_{jk} \bar{q} \sin \varphi + \tilde{a}_{jl} \cos \varphi, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Из (3.2), (3.3) сразу же следует, что

$$|\tilde{a}_{k,j}|^2 + |\tilde{a}_{l,j}|^2 = |a_{k,j}|^2 + |a_{l,j}|^2, \quad |\hat{a}_{j,k}|^2 + |\hat{a}_{j,l}|^2 = |a_{j,k}|^2 + |a_{j,l}|^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

$$\hat{a}_{kl} = \bar{q}(a_{ll} - a_{kk}) \cos \varphi \sin \varphi + a_{kl} \cos^2 \varphi - \bar{q}^2 a_{lk} \sin^2 \varphi. \quad (3.5)$$

Вычислим сумму квадратов модулей внедиагональных элементов матрицы  $\hat{A}$ . Используя соотношения (3.2)–(3.4), нетрудно получить, что

$$\sum_{i \neq j} |\hat{a}_{ij}|^2 = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 - 2|a_{kl}|^2 + |\hat{a}_{kl}|^2. \quad (3.6)$$

Определим теперь числа  $k, l$  из условия

$$|a_{kl}| = \max_{i \neq j} |a_{ij}|. \quad (3.7)$$

Поскольку  $A$  — эрмитова матрица, то  $a_{lk} = \bar{a}_{kl}$ , и из (3.5) с учетом того, что  $1/\bar{q} = q$ , будем иметь, что

$$\hat{a}_{kl} = \bar{q} \left( \frac{a_{ll} - a_{kk}}{2} \sin 2\varphi + q a_{kl} \cos^2 \varphi - \bar{q} \bar{a}_{kl} \sin^2 \varphi \right).$$

Будем считать, что  $a_{kl} \neq 0$ . В противном случае матрица диагональна, и ее собственные числа определяются тривиальным образом. Положим

$$q = |a_{kl}|/a_{kl}. \quad (3.8)$$

Тогда

$$\hat{a}_{kl} = \bar{q} \left( \frac{a_{ll} - a_{kk}}{2} \sin 2\varphi + |a_{kl}| \cos 2\varphi \right). \quad (3.9)$$

Выберем затем угол  $\varphi$  так, чтобы

$$|a_{kl}| \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{ll} - a_{kk}) \sin 2\varphi = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2|a_{kl}|}{a_{kk} - a_{ll}}. \quad (3.10)$$

При указанном выборе параметров, определяющих матрицу  $Q$ , сумма квадратов модулей внедиагональных элементов матрицы  $\hat{A}$  принимает наименьшее значение.

Теперь можно описать метод Якоби. Пусть  $A_0 = A$ . Образует последовательность матриц  $A_1, A_2, \dots$  при помощи рекуррентной формулы

$$A_{p+1} = Q_p^T A_p Q_p, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (3.11)$$

где параметры матрицы  $Q_p$  определяются так, чтобы сделать сумму квадратов внедиагональных элементов матрицы  $A_{p+1}$  минимально возможной, т. е. по формулам вида (3.7), (3.8), (3.10).

Вычисления проводят до тех пор, пока все внедиагональные элементы матрицы  $A_p$  не станут достаточно малыми. Тогда в качестве приближений к собственным числам матрицы  $A$  принимают диагональные элементы матрицы  $A_p$ , а столбцы матрицы  $Q_0 Q_1 \dots Q_p$  считают приближениями к собственным векторам матрицы  $A$ .

#### § 4. Исследование сходимости метода Якоби

**1. Лемма.** Пусть параметры матрицы  $Q$  определяются согласно формулам (3.7), (3.8), (3.10). Тогда

$$\sum_{i \neq j} |\hat{a}_{ij}|^2 \leq \rho \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2, \quad (4.1)$$

где

$$0 < \rho = 1 - \frac{2}{n(n-1)} < 1$$

при  $n > 2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вследствие (3.10) из (3.6) получаем

$$\sum_{i \neq j} |\hat{a}_{ij}|^2 = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 - 2|a_{kl}|^2, \quad (4.2)$$

а на основании (3.7)

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 \leq |a_{kl}|^2 n(n-1). \quad (4.3)$$

Здесь учтено, что матрица порядка  $n$  имеет  $n^2 - n$  внедиагональных элементов. Из (4.2), (4.3) очевидным образом следует (4.1).  $\square$

Докажем сходимость метода Якоби. Пусть  $A_p = \{a_{ij}^{(p)}\}_{i,j=1}^n$ . Из рекуррентной формулы (3.11) и леммы 1 вытекает, что

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(p)}|^2 \leq \rho \sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(p-1)}|^2 \leq \rho^p \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

Это означает, что по любому заданному  $\varepsilon > 0$  можно указать целое положительное число  $p$  такое, что

$$|a_{ij}^{(p)}| \leq \varepsilon/n, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Обозначим через  $\Lambda_p$  диагональную матрицу, на диагонали которой расположены диагональные элементы матрицы  $A_p$ . В соответствии с оценками (4.4), а также (11.4), с. 232, можем написать:

$$|\lambda_k(A_p) - \lambda_k^{(p)}| \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\lambda_k^{(p)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , — диагональные элементы матрицы  $\Lambda_p$ , упорядоченные по неубыванию,  $\lambda_k(A_p)$  — так же упорядоченные собственные числа матрицы  $A_p$ . Вследствие (3.11) имеем  $A_p = T_p^T A T_p$ , где  $T_p = Q_0 Q_1 \dots Q_p$ , т. е. матрицы  $A_p$  и  $A$  подобны, а значит, их собственные числа совпадают, поэтому

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k^{(p)}| \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

Таким образом, выполнив определенное количество итераций, мы получим приближенные значения собственных чисел матрицы  $A$  с любой наперед заданной точностью.

**2.** Применяя метод Якоби для приближенного отыскания собственных чисел и собственных векторов симметричной вещественной матрицы, в формулах (3.1) параметр  $q$  следует положить равным единице. Соответственно в формуле (3.10) нужно заменить  $|a_{kl}|$  на  $a_{kl}$ . Все выше полученные оценки при этом сохраняются. Матрица  $Q$ , определенная на с. 312, при  $q = 1$  есть матрица, осуществляющая поворот на угол  $\varphi$  в двумерной плоскости, натянутой на векторы  $i^k, i^l$  естественного базиса пространства  $\mathbb{R}^n$ . Поэтому метод Якоби часто называют *методом вращений*.

---

---

ГЛАВА 18  
Нормы векторов и матриц

§ 1. Основные неравенства

1. Вещественная функция  $f$  вещественной переменной называется *выпуклой* на интервале  $(a, b)$ , если для любых точек  $x_1, x_2$  из этого интервала и для любого  $t \in [0, 1]$  выполнено неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \quad (1.1)$$

Геометрически это означает, что любая точка графика функции  $f$  на отрезке  $[x_1, x_2]$  лежит ниже хорды, стягивающей точки  $(x_1, f(x_1))$ ,  $(x_2, f(x_2))$ , или на этой же хорде.

2. **Теорема.** Пусть функция  $f$  непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , вторая производная  $f$  неотрицательна на интервале  $(a, b)$ . Тогда  $f$  — выпуклая функция на интервале  $(a, b)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с определением выпуклой функции нужно установить, что при любых  $x_1, x_2 \in (a, b)$  функция  $\varphi$  вещественной переменной  $t$ , задаваемая равенством

$$\varphi(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2) - tf(x_1) - (1-t)f(x_2),$$

неположительна для всех  $t$  из отрезка  $[0, 1]$ . Нетрудно видеть, что  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi''(t) = f''(tx_1 + (1-t)x_2)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$  для всех  $t \in [0, 1]$ . Пусть  $t$  — произвольным образом фиксированная точка из интервала  $(0, 1)$ . Используя формулу конечных приращений Лагранжа, получим  $\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) = t\varphi'(t_1)$ , где  $t_1$  — некоторая точка из интервала  $(0, t)$ . Аналогично,  $\varphi(t) = -(1-t)\varphi'(t_2)$ , где  $t_2$  — точка из интервала  $(t, 1)$ . Отсюда, очевидно, следует, что  $\varphi(t) = -t(1-t)(\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1))$ . Вновь применяя формулу Лагранжа, получим, что  $\varphi(t) = -t(1-t)(t_2 - t_1)\varphi''(t_3)$ , где  $t_3 \in (t_2, t_1)$ . Таким образом,  $\varphi(t) \leq 0$ .  $\square$

3. При помощи теоремы 2 легко доказывается, что функция  $-\ln(x)$  выпукла на интервале  $(0, \infty)$ . Поэтому для любых положительных чисел  $a, b$  и любых  $p, q > 1$  и таких, что  $1/p + 1/q = 1$ ,

$$\ln(a^p/p + b^q/q) \geq \ln(a^p)/p + \ln(b^q)/q = \ln(ab),$$

следовательно,  $ab \leq a^p/p + b^q/q$ . Очевидно, что последнее неравенство верно и при  $ab = 0$ . Далее, поскольку  $|ab| = |a||b|$ , то

$$|ab| \leq |a|^p/p + |b|^q/q \quad (1.2)$$

для любых, вообще говоря, комплексных чисел  $a, b$ . Неравенство (1.2) называют *неравенством Юнга*<sup>1)</sup>.

**4. Теорема (неравенство Гёльдера<sup>2)</sup>).** Пусть  $x, y \in \mathbb{C}^n$ ,  $p > 1$ ,  $1/p + 1/q = 1$ . Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}. \quad (1.3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказываемое неравенство выполнено, если хотя бы один из векторов  $x, y$  равен нулю. Для ненулевых  $x, y$ , используя неравенство Юнга, получим при  $l = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{|x_l|}{\left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}} \frac{|y_l|}{\left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}} \leq \frac{|x_l|^p}{p \sum_{k=1}^n |x_k|^p} + \frac{|y_l|^q}{q \sum_{k=1}^n |y_k|^q}.$$

Суммируя все эти неравенства, будем иметь

$$\sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q},$$

откуда, очевидно, следует (1.3).  $\square$

При  $p = 2$  неравенство (1.3) называют *неравенством Коши*.

**5. Теорема (неравенство Минковского).** Пусть  $x, y \in \mathbb{C}^n$ ,  $p > 1$ . Тогда

$$\left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}. \quad (1.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем считать  $x, y$  такими, что левая часть неравенства (1.4) положительна, так как в противном случае неравенство (1.4) выполняется очевидным образом. Ясно, что

<sup>1)</sup>Уильям Генри Юнг (William Henry Young; 1863 — 1942) — английский математик.

<sup>2)</sup>Отто Людвиг Гёльдер (Otto Ludwig Hölder; 1859 — 1937) — немецкий математик.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| + \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |y_k|. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Оценим суммы в правой части последнего неравенства, используя неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad (1.6)$$

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}, \quad (1.7)$$

где  $1/p + 1/q = 1$  и, следовательно,  $(p-1)q = p$ . Поэтому из (1.5)–(1.7) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q} \left( \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \right),$$

откуда, учитывая равенство  $1 - 1/q = 1/p$ , получим (1.4).  $\square$

## § 2. Нормы на пространстве $\mathbb{C}^n$

1. В этом и последующем параграфах мы будем широко использовать понятие сходимости последовательности векторов из пространства  $\mathbb{C}^n$ , введенное в § 1, гл. 17.

Мы будем рассматривать также в дальнейшем вещественные функции, определенные на  $\mathbb{C}^n$ , иначе говоря, вещественные функции  $n$  комплексных переменных. При этом, аналогично случаю функции, определенной на  $\mathbb{R}^n$  (см. курс математического анализа), функция  $f$  называется непрерывной в точке  $x \in \mathbb{C}^n$ , если из сходимости последовательности  $\{x^k\}$  к  $x$  вытекает сходимость  $f(x^k)$  к  $f(x)$ .

Читатель может без труда убедиться, что все используемые в дальнейшем свойства непрерывных вещественных функций многих комплексных переменных доказываются точно так же, как и для непрерывных функций на пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**2.** Наряду с введенным выше понятием длины (или модуля) вектора  $x \in \mathbb{C}^n$  во многих случаях оказывается удобным использовать более общее понятие, а именно, понятие нормы вектора.

Будем говорить, что на пространстве  $\mathbb{C}^n$  введена *норма*, если каждому вектору  $x \in \mathbb{C}^n$  однозначно поставлено в соответствие вещественное число  $\|x\|$  (читается: норма  $x$ ). При этом должны быть выполнены следующие условия (*аксиомы нормы*):

1)  $\|x\| \geq 0$  для любого  $x \in \mathbb{C}^n$ , равенства  $\|x\| = 0$  и  $x = 0$  эквивалентны;

2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  для любых  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ;

3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых  $x, y \in \mathbb{C}^n$ .

Условие 3) обычно называют *неравенством треугольника*.

Отметим неравенство

4)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$ ,

которое вытекает из аксиомы 3). В самом деле,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

Аналогично,

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\|.$$

Неравенство 4) есть просто более краткая запись этих неравенств.

**3.** Приведем примеры норм на пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

1) Пусть  $p \geq 1$ . Равенство  $\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$  определяет норму. Действительно, аксиомы 1), 2) выполнены очевидным образом, а неравенство 3) при  $p = 1$  непосредственно вытекает из свойств модуля, а при  $p > 1$  совпадает с неравенством Минковского (1.4). Отметим, что  $\|x\|_2 = |x| = (x, x)^{1/2}$  для любого  $x \in \mathbb{C}^n$ . Здесь и далее в этой главе  $(\cdot, \cdot)$  — стандартное скалярное произведение на пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

2) Положим  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ . Элементарно проверяется, что это равенство определяет норму.

3) Пусть  $A$  — эрмитова положительно определенная матрица. Функция  $\|x\|_A = (Ax, x)^{1/2}$  есть норма на пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Для обоснования этого факта достаточно вспомнить, что соотношение  $(x, y)_A = (Ax, y)$  определяет скалярное произведение на пространстве  $\mathbb{C}^n$  (см. упражнение 1, с. 223, а также п. 3, с. 132).

4. Любая норма непрерывна на всем пространстве  $\mathbb{C}^n$ . В самом деле, пусть  $x, y$  — произвольные точки  $\mathbb{C}^n$ . Представим их в виде разложений по естественному базису пространства  $\mathbb{C}^n$ :  $x = \sum_{k=1}^n x_k i^k$ ,  $y = \sum_{k=1}^n y_k i^k$ . Используя теперь неравенство треугольника, получим  $\|x - y\| \leq \sum_{k=1}^n \|i^k\| |x_k - y_k|$ , откуда, очевидно, вытекает, что если  $x$  стремится к  $y$ , то  $\|x - y\|$  стремится к нулю.

5. Будем говорить, что последовательность  $\{x^k\} \subset \mathbb{C}^n$  *сходится* к вектору  $x \in \mathbb{C}^n$  *по норме*, если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x^k\| = 0$ . В п. 4, фактически, показано, что если последовательность векторов *сходится покомпонентно*, то она *сходится* и по любой норме, введенной на пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Ниже будет установлено, что справедливо и обратное утверждение.

Говорят, что нормы  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  *эквивалентны*, если существуют положительные постоянные  $c_1$  и  $c_2$  такие, что

$$c_1 \|x\|_{(1)} \leq \|x\|_{(2)} \leq c_2 \|x\|_{(1)} \quad \forall x \in \mathbb{C}^n. \quad (2.1)$$

**5.1. Теорема.** *Любые две нормы на пространстве  $\mathbb{C}^n$  эквивалентны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Отношение эквивалентности норм, очевидно, транзитивно. Поэтому достаточно показать, что любая норма  $\|\cdot\|$  эквивалентна норме  $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ , т. е. показать, что существуют положительные постоянные  $c_1, c_2$  такие, что

$$c_1 |x| \leq \|x\| \leq c_2 |x| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n. \quad (2.2)$$

Пусть  $S_1(0)$  — множество всех векторов из пространства  $\mathbb{C}^n$ , удовлетворяющих условию  $|x| = 1$  ( $S_1(0)$  — сфера единичного радиуса с центром в нуле). Это множество ограничено и замкнуто в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Функция  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x\|$ , как показано в п. 4, непрерывна на  $\mathbb{C}^n$ . Поэтому по теореме Вейерштрасса (см. курс математического анализа) существуют точки  $x^1, x^2$ , принадлежащие  $S_1(0)$ , и такие, что  $\|x^1\| = \min_{x \in S_1(0)} \|x\|$ ,  $\|x^2\| = \max_{x \in S_1(0)} \|x\|$ . Положим  $c_1 = \|x^1\|$ ,  $c_2 = \|x^2\|$ . Ясно, что  $0 \leq c_1 \leq c_2$ . Причем  $c_1$  не может равняться нулю, так как в противном случае  $x^1 = 0$ , но, с другой стороны,  $x^1 \in S_1(0)$ , поэтому  $|x^1| = 1$ , и, стало быть,  $x^1 \neq 0$ . Итак, для любого  $x \in S_1(0)$  выполнены неравенства  $0 < c_1 \leq \|x\| \leq c_2$ . Пусть теперь  $x$  —



произвольный вектор из  $\mathbb{C}^n$ , не равный нулю. Тогда, очевидно, вектор  $(1/|x|)x$  принадлежит  $S_1(0)$ , следовательно,  $c_1 \leq \|(1/|x|)x\| \leq c_2$ , откуда вытекает, что для вектора  $x$  выполнены неравенства (2.2). Если  $x$  равен нулю, то неравенства (2.2) выполняются очевидным образом.  $\square$

**5.2.** Из теоремы 5.1 вытекает, что всякая норма на пространстве  $\mathbb{C}^n$  эквивалентна норме  $\|\cdot\|_2$ , поэтому из сходимости последовательности векторов по любой норме вытекает ее покомпонентная сходимость.

**6.** Важно иметь в виду, что постоянные  $c_1, c_2$ , вообще говоря, зависят от  $n$ , т. е. от размерности пространства  $\mathbb{C}^n$ . Приведем, например, следующие оценки:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \text{ при любом } p \geq 1; \quad (2.3)$$

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \text{ если } p \geq q \geq 1; \quad (2.4)$$

$$\|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \text{ если } q > p \geq 1; \quad (2.5)$$

$$\|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \text{ при любом } p \geq 1. \quad (2.6)$$

Прежде чем доказывать эти неравенства заметим, что они являются точными, т. е. для каждого из них можно указать такой ненулевой вектор  $x$ , на котором неравенство превращается в равенство. Именно, первые два неравенства обращаются в равенства, например, при  $x = (1, 0, \dots, 0)$ , а последние два — при  $x = (1, 1, \dots, 1)$ .

Приведем теперь соответствующие доказательства.

1) Пусть  $\|x\|_\infty \equiv \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |x_i|$ . Очевидно, что

$$|x_i| = (|x_i|^p)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p.$$

2) Выполнив очевидные выкладки, получим

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^q |x_k|^{p-q} \right)^{1/p} \leq \|x\|_\infty^{(p-q)/p} \|x\|_q^{q/p},$$

откуда, используя (2.3), приходим к (2.4).

3) Представим  $|x_k|^p$  в виде  $|x_k|^p \cdot 1$  и используем для оценки  $\|x\|_p$  неравенство Гёльдера с показателями  $t = q/p > 1$  и  $r = t/(t-1) =$

$= q/(q - p)$ . Получим

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{1/q} \left( \sum_{k=1}^n 1 \right)^{(q-p)/(pq)} = n^{1/p-1/q} \|x\|_q.$$

Доказательство неравенства (2.6) читатель легко выполнит самостоятельно.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Показать, что для любого  $x \in \mathbb{C}^n$  выполнено предельное соотношение  $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$ .

**7.** Норма вектора называется *абсолютной*, если она зависит только от модулей компонент вектора. Например, норма  $\|\cdot\|_p$  при любом  $p \geq 1$  абсолютна, норма на пространстве  $\mathbb{C}^2$ , определяемая равенством  $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 - \operatorname{Re}(x_1 \bar{x}_2))^{1/2}$ , не абсолютна.

**7.1.** Пусть  $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ,  $0 \leq d_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$ . Тогда для любой абсолютной нормы  $\|Dx\| \leq \|x\|$ . Очевидно, достаточно убедиться в этом, когда  $D = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, d_k, 1, \dots, 1)$ ,  $d_k \in [0, 1]$ . Имеем

$$Dx = \frac{1}{2}(1 - d_k)(x_1, x_2, \dots, -x_k, \dots, x_n) + \frac{1}{2}(1 + d_k)(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n),$$

следовательно,  $\|Dx\| \leq \frac{1}{2}(1 - d_k)\|x\| + \frac{1}{2}(1 + d_k)\|x\| = \|x\|$ .

**7.2.** Норма на пространстве  $\mathbb{C}^n$  называется *монотонной*, если из неравенств  $|x_k| \leq |y_k|$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , следует, что  $\|x\| \leq \|y\|$ . Всякая монотонная норма является абсолютной. Действительно, если норма монотонна, то для любого вектора  $x$  выполнены неравенства

$$\|(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)\| \leq \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq \|(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)\|.$$

Обратно, всякая абсолютная норма монотонна. В самом деле, если для векторов  $x, y$  имеем, что  $|x_k| \leq |y_k|$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , то существует матрица  $D = \operatorname{diag}(d_1 q_1, d_2 q_2, \dots, d_n q_n)$ ,  $q_k = \cos \varphi_k + i \sin \varphi_k$ ,  $0 \leq d_k \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , такая, что  $x = Dy$ . Используя теперь определение абсолютной нормы и неравенство, установленное в п. 7.1, нетрудно убедиться, что  $\|x\| \leq \|y\|$ .

### § 3. Нормы на пространстве матриц

**1.** Обозначим через  $M_n$  множество всех квадратных матриц порядка  $n$  с комплексными, вообще говоря, элементами. Определив на

множестве  $M_n$  обычным образом операции сложения двух матриц и умножения матрицы на число, мы превратим его в линейное пространство  $\mathbb{C}^{n^2}$ . На этом линейном пространстве введем норму, т. е. поставим в соответствие каждой матрице  $A \in M_n$  число  $\|A\|$  так, что:

1)  $\|A\| \geq 0$  для любой матрицы  $A \in M_n$ , равенства  $\|A\| = 0$  и  $A = 0$  эквивалентны;

2)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  для любой матрицы  $A \in M_n$  и любого  $\alpha \in \mathbb{C}$ ;

3)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  для любых матриц  $A, B \in M_n$ .

Говорят в этом случае, что на пространстве матриц  $M_n$  введена *векторная норма*. Понятно, что она обладает всеми свойствами, которые были изучены в предыдущем параграфе применительно к норме векторов.

Чаще на пространстве  $M_n$  вводят так называемую *матричную норму*. При этом дополнительно к 1)–3) должна выполняться аксиома

4)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  для любых матриц  $A, B \in M_n$ .

Не всякая векторная норма на  $M_n$  является матричной. Пусть, например,  $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ . Очевидно, это — векторная норма, но она не является матричной. Действительно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } AA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

причем  $\|A\| = 1$ ,  $\|AA\| = 2$ , и неравенство  $\|AA\| \leq \|A\| \|A\|$  не выполнено.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Пусть  $\|\cdot\|$  — матричная норма на  $M_n$ ,  $S \in M_n$  — произвольная невырожденная матрица. Покажите, что формула  $\|A\|_{(s)} = \|SAS^{-1}\| \quad \forall A \in M_n$  определяет матричную норму на  $M_n$ .

**2.** Приведем примеры матричных норм.

1) Положим  $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ . Очевидно, три первых аксиомы нормы выполнены. Проверим аксиому 4). По определению для  $A, B \in M_n$  имеем

$$\|AB\|_1 = \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|,$$

следовательно,

$$\|AB\|_1 \leq \sum_{i,j,k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}|.$$

Добавляя к сумме в правой части последнего неравенства неотрицательные слагаемые, усилим неравенство:

$$\|AB\|_1 \leq \sum_{i,j,k,m=1}^n |a_{ik}| |b_{mj}|.$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{i,j,k,m=1}^n |a_{ik}| |b_{mj}| = \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j,m=1}^n |b_{mj}| = \|A\|_1 \|B\|_1.$$

2) Положим  $\|A\|_E = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ . Эта норма порождается

естественным скалярным произведением на пространстве  $\mathbb{C}^{n^2}$ , поэтому три первых аксиомы для нее выполняются. Норму  $\|A\|_E$  обычно называют *евклидовой* нормой или нормой *Фробениуса*<sup>1)</sup>. Докажем справедливость четвертой аксиомы для этой нормы, опираясь на неравенство Коши (см. с. 317):

$$\begin{aligned} \|AB\|_E^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 = \\ &= \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{m,j=1}^n |b_{mj}|^2 = \|A\|_E^2 \|B\|_E^2. \end{aligned}$$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Доказать, что норма  $\|A\| = n \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$  является матричной.

**3.** Пусть  $A \in M_n$  — произвольная квадратная матрица,  $\|\cdot\|$  — некоторая норма на пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Тогда существует неотрицательное число  $N_A$  такое, что

$$\|Ax\| \leq N_A \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n. \quad (3.1)$$

Действительно, поскольку всякая норма на  $\mathbb{C}^n$  эквивалентна норме  $\|\cdot\|_\infty$ , т. е.  $c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_\infty$  для любого  $x \in \mathbb{C}^n$ , где  $c_1, c_2$  — положительные не зависящие от  $x$  постоянные, то справедлива следующая цепочка неравенств:

<sup>1)</sup>Фердинанд Георг Фробениус (Ferdinand Georg Frobenius; 1849 — 1917) — немецкий математик.

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq c_2 \|Ax\|_\infty = c_2 \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq c_2 \|x\|_\infty \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \\ &\leq (c_2/c_1) \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\nu(A)$  точную нижнюю грань всех чисел  $N_A$ , для которых выполнено (3.1). Очевидно, что можно дать и другое, эквивалентное, определение функции  $\nu$  на пространстве  $M_n$

$$\nu(A) = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|=1} \|Ax\|. \quad (3.2)$$

Очевидно, что

$$\|Ax\| \leq \nu(A) \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что для функции  $\nu$  выполнены все аксиомы матричной нормы.

Итак, всякая норма, заданная на пространстве  $M_n$  при помощи равенства  $\|A\| = \nu(A)$ , определяет матричную норму на пространстве  $M_n$ . Матричную норму, сконструированную таким образом, называют *подчиненной* нормой векторов.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что при любом определении нормы на пространстве  $\mathbb{C}^n$  существует вектор  $x^0 \in \mathbb{C}^n$  такой, что  $\|x^0\| = 1$  и

$$\|Ax^0\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|=1} \|Ax\|,$$

т. е. в определении (3.2) символ точной верхней грани можно заменить на символ максимума.

**4.** Приведем примеры вычисления подчиненных матричных норм.

1) Пусть норма на пространстве  $\mathbb{C}^n$  определена, как в п. 3, с. 319, равенством  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ . Тогда подчиненная норма матрицы есть

$$\|A\|_1 = \max_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Ax\|_1.$$

Нетрудно видеть, что для любого вектора  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|x\|_1 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Предположим, что  $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$ , и положим, что  $\tilde{x}$  есть вектор естественного базиса пространства  $\mathbb{C}^n$  такой, что  $\tilde{x}_k = 1$ , а все остальные координаты вектора  $\tilde{x}$  равны нулю. Ясно, что  $\|\tilde{x}\|_1 = 1$ , а  $\|A\tilde{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$ . Таким образом, доказано, что

$$\|A\|_1 = \max_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Поэтому норму  $\|A\|_1$  часто называют *столбцовой* нормой матрицы  $A$ .

2) Определим норму на  $\mathbb{C}^n$  равенством  $\|x\|_\infty = \max_{k \leq 1 \leq n} |x_k|$ . Тогда для любого  $x \in \mathbb{C}^n$  такого, что  $\|x\|_\infty = 1$ ,

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Положим, что  $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$  и определим вектор  $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$  при помощи соотношений

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} \bar{a}_{kj}/|a_{kj}|, & a_{kj} \neq 0, \\ 1, & a_{kj} = 0, \end{cases}$$

где  $j = 1, 2, \dots, n$ , черта, как обычно, есть знак комплексного сопряжения. Ясно, что  $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ , причем элементарные выкладки показывают, что для любого  $i = 1, 2, \dots, n$  выполнено неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{x}_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{kj}|,$$

а для  $i = k$

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|,$$

т. е.  $\|A\tilde{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ . Таким образом,

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Норму  $\|A\|_\infty$  часто называют *строчной* нормой матрицы  $A$ .

3) Введем теперь на пространстве  $\mathbb{C}^n$  норму, согласованную со стандартным скалярным произведением, т. е. положим  $\|x\|_2 = |x|$ . Для любого  $x \in \mathbb{C}^n$  имеем  $\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x)$ . Матрица  $A^*A$  эрмитова и неотрицательна. Поэтому существует ортонормированный базис  $\{e^k\}_{k=1}^n$  такой, что  $A^*Ae^k = \rho_k^2 e^k$ ,  $\rho_k = \rho_k(A)$  — неотрицательные числа, сингулярные числа матрицы  $A$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  (см. по этому поводу п. 2, с. 239, и приводимые там ссылки). Представим вектор  $x$  в виде разложения по базису  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$  и предполо-

жим, что  $\|x\|_2 = 1$ . Тогда  $\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1$ ,  $\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \rho_k^2 |\xi_k|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} \rho_k^2$ .

Пусть  $\rho_j = \max_{1 \leq k \leq n} \rho_k$ . Полагая  $\tilde{x} = e^j$ , получим  $\|A\tilde{x}\|_2^2 = \rho_j^2$ . Таким образом, доказано, что  $\max_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \rho_k$ , т. е.

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \rho_k(A).$$

**4.1.** Отметим следующий интересный для многих приложений частный случай. Будем считать, что матрица  $A$  эрмитова, т. е.  $A = A^*$ . Тогда очевидно, что  $\rho_k(A) = |\lambda_k(A)|$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , где через  $\lambda_k(A)$  обозначены собственные числа матрицы  $A$ . Таким образом, для любой эрмитовой матрицы

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k(A)| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{(x, x)} = \rho(A),$$

где  $\rho(A)$  — спектральный радиус матрицы  $A$  (см. с. 212). Норму  $\|A\|_2$  в связи с этим часто называют *спектральной*.

**4.2.** Вычисление сингулярных чисел матрицы, вообще говоря, — довольно сложная задача. Поэтому полезно получить некоторую оценку величины  $\|A\|_2$ , просто выражаемую через элементы матрицы  $A$ . Докажем, что для любой квадратной матрицы  $A$  справедливо неравенство  $\|A\|_2 \leq \|A\|_E$ . С этой целью заметим, что элементарные выкладки приводят к равенству<sup>1)</sup>  $\operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$ .

С другой стороны,  $\operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{k=1}^n \rho_k^2(A) \geq \max_{1 \leq k \leq n} \rho_k^2(A)$ , следовательно,

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \rho_k(A) \leq \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \|A\|_E. \quad (3.3)$$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Докажите, что для любой матрицы  $A$ : 1) нормы  $\|A\|_2$  и  $\|A\|_E$  не меняются при умножении  $A$  на любую унитарную матрицу; 2)  $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ .

**5.** Знание матричной нормы матрицы оказывается, в частности, полезным при оценке ее спектрального радиуса, а именно, для любой квадратной матрицы  $A$  справедливо неравенство

$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad (3.4)$$

где  $\|A\|$  — любая матричная норма матрицы  $A$ . В самом деле, пусть  $\lambda, x$  — собственная пара матрицы  $A$ , а  $X$  — квадратная матрица, столбцами (одинаковыми) которой служит вектор  $x$ . Тогда, очевидно,  $AX = \lambda X$  и

$$|\lambda| \|X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\|$$

для любой матричной нормы, причем  $\|X\| \neq 0$ , так как вектор  $x$  по определению собственного вектора не равен нулю. Таким образом, для любого собственного числа  $\lambda$  матрицы  $A$  верно неравенство  $|\lambda| \leq \|A\|$ , а это эквивалентно (3.4).

Из теоремы 3, с. 213, и оценки (3.4) очевидным образом вытекает

**5.1. Следствие.** Если некоторая матричная норма матрицы  $A$  меньше единицы, то  $A$  — сходящаяся матрица.

**6. Теорема.** Для любой матричной нормы, определенной на пространстве  $M_n$ , и для любой матрицы  $A \in M_n$  справедливо равенство

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}. \quad (3.5)$$

<sup>1)</sup>Здесь след матрицы вычисляется как сумма элементов ее главной диагонали, см. п. 5, с. 193.



**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $\lambda$  — собственное число матрицы  $A$ , то  $\lambda^k$  для любого целого положительного  $k$  есть собственное число матрицы  $A^k$ . Поэтому, применяя неравенство (3.4), получим  $(\rho(A))^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$ , следовательно,  $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$  для любого целого положительного  $k$ . Далее, пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Тогда матрица  $(\rho(A) + \varepsilon)^{-1}A$  сходящаяся, так как все ее собственные числа по модулю меньше единицы. Следовательно,  $(\rho(A) + \varepsilon)^{-k}A^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку любая норма — непрерывная функция (см. п. 4, с. 320, п. 1, с. 322), то  $\|(\rho(A) + \varepsilon)^{-k}A^k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Отсюда вытекает, что можно указать такое  $N > 0$ , что для всех  $k \geq N$  выполнено неравенство  $\|(\rho(A) + \varepsilon)^{-k}A^k\| \leq 1$ , или  $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ . Таким образом, при любом  $\varepsilon > 0$  для всех достаточно больших  $k$  справедливы оценки  $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ , а это утверждение эквивалентно (3.5).  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Опираясь на формулу (3.5), докажите, что

$$\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B), \quad \rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$$

для любых перестановочных матриц  $A$  и  $B$ .

**7. Теорема.** Для любой матрицы  $A \in M_n$

$$\rho(A) = \inf_{S \in M_n, \det(S) \neq 0} \|SAS^{-1}\|_1 = \inf_{S \in M_n, \det(S) \neq 0} \|SAS^{-1}\|_\infty. \quad (3.6)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проведем рассуждения применительно к норме  $\|\cdot\|_1$ . Для нормы  $\|\cdot\|_\infty$  все рассуждения, фактически, дословно повторяются. Матрицы  $A$  и  $SAS^{-1}$  подобны. Поэтому их спектры совпадают, следовательно,  $\rho(A) = \rho(SAS^{-1})$ . Отсюда, используя (3.4), получаем, что

$$\rho(A) \leq \|SAS^{-1}\|_1 \quad \forall S \in M_n, \det(S) \neq 0. \quad (3.7)$$

По теореме Шура, с. 198, существует унитарная матрица  $U$  такая, что

$$U^*AU = T, \quad (3.8)$$

где  $T$  — верхняя треугольная матрица, по диагонали которой расположены  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — все собственные числа матрицы  $A$ . Пусть

$$D = \text{diag}(d, d^2, \dots, d^n),$$

где  $d$  — положительное число. Положим

$$Q = DTD^{-1}. \quad (3.9)$$

Нетрудно убедиться, что

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d^{-1}t_{12} & d^{-2}t_{13} & \dots & d^{-(n-2)}t_{1,n-1} & d^{-(n-1)}t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & d^{-1}t_{23} & \dots & d^{-(n-3)}t_{2,n-1} & d^{-(n-2)}t_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & d^{-(n-4)}t_{3,n-1} & d^{-(n-3)}t_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & d^{-1}t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Фиксируем теперь некоторое положительное число  $\varepsilon$ . Выбирая  $d$  достаточно большим, можно добиться того, что сумма модулей элементов каждого столбца матрицы  $Q$  будет не больше  $\rho(A) + \varepsilon$ . Вследствие (3.8), (3.9) получаем  $SAS^{-1} = Q$ , где  $S = DU^{-1}$ , причем  $\|SAS^{-1}\|_1 = \|Q\|_1 \leq \rho(A) + \varepsilon$ . Поскольку выполнения последнего неравенства можно добиться за счет выбора  $d$  для произвольного положительного  $\varepsilon$ , то вместе с (3.7) это обеспечивает справедливость первого равенства в (3.6).  $\square$

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Как следствие теоремы 7 докажите, что для любой матрицы  $A \in M_n$

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\|} \|A\|. \quad (3.11)$$

Поясним, что здесь точная нижняя грань берется по всем матричным нормам на  $M_n$ .

2) Докажите, что в равенстве (3.11) символ точной нижней грани, вообще говоря, нельзя заменить на символ минимума.

#### § 4. Элементы теории возмущений

Пусть  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — произвольная квадратная матрица. Положим

$$R_i(A) = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$C_j(A) = \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Будем говорить, что  $A$  — матрица с диагональным преобладанием по строкам, если

$$|a_{ii}| > R_i(A) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

и  $A$  — матрица с диагональным преобладанием по столбцам, если

$$|a_{ii}| > C_i(A) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Напомним, что определение диагонального преобладания по строкам нами уже использовалось (см. (1.4), с. 303).

**1. Теорема.** *Если  $A$  — матрица с диагональным преобладанием по строкам, то она невырождена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что уравнение  $Ax = 0$  имеет только тривиальное решение. Предположим противное, и пусть  $x_i$  — максимальная по модулю компонента нетривиального решения. Запишем соответствующее уравнение исследуемой системы в виде

$$a_{ii} = - \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} a_{ij} x_j / x_i,$$

откуда, очевидно, получим, что  $|a_{ii}| \leq R_i(A)$ , но это неравенство противоречит условию (4.1).  $\square$

Поскольку определители матриц  $A$  и  $A^T$  совпадают, то матрица с диагональным преобладанием по столбцам также невырождена.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что если выполнено условие (4.1), или (4.2), то все главные миноры матрицы  $A$  отличны от нуля.

**2. Теорема (Гершгорин<sup>1)</sup>).** *Все характеристические числа произвольной квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  лежат в объединении кругов*

$$G_i^R = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\lambda, x$  — собственная пара матрицы  $A$ , и пусть  $x_i$  — максимальная по модулю компонента вектора  $x$ . Очевидно,  $x_i \neq 0$ . Из определения собственной пары вытекает равенство

$$(a_{ii} - \lambda)x_i = - \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} a_{ij} x_j,$$

следовательно,  $|a_{ii} - \lambda||x_i| \leq R_i(A)|x_i|$ , и  $|a_{ii} - \lambda| \leq R_i(A)$ . Таким образом, каждое характеристическое число матрицы  $A$  принадлежит одному из кругов  $G_i^R$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

Поскольку все характеристические числа матриц  $A$ ,  $A^T$  совпадают, то все они лежат также в объединении кругов

$$G_i^C = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq C_i(A)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Это есть так называемый столбцовый вариант теоремы Гершгорина.

<sup>1)</sup> Семён Аронович Гершгорин (1901–1933) — советский математик.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите теорему Гершгорина, опираясь на теорему 1, и, наоборот, докажите теорему 1, опираясь на теорему Гершгорина.

Теоремы 1, 2 можно трактовать как теоремы о возмущениях диагональной матрицы  $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ . Первая из них показывает, что достаточно малые возмущения диагональной невырожденной матрицы приводят также к невырожденной матрице, а вторая показывает, что малые возмущения такой матрицы приводят к малым возмущениям ее характеристических чисел.

Следующие две теоремы, называемые теоремами Бауэра — Файка, в определенном смысле, распространяют теорему Гершгорина на более общий класс матриц, подобных диагональным, иначе говоря, на матрицы простой структуры (см. §6, гл. 11).

**3. Теорема.** Пусть для квадратной матрицы  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  существует невырожденная матрица  $V$  такая, что

$$V^{-1}AV = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad (4.5)$$

$B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — произвольная квадратная матрица. Тогда все характеристические числа матрицы  $A + B$  лежат в объединении кругов

$$G_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leq \|B\| \|V\| \|V^{-1}\|\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Под нормой матрицы здесь может пониматься любая норма, подчиненная абсолютной норме векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\lambda, x$  есть собственная пара матрицы  $A + B$ . Тогда  $(\lambda I - \Lambda)V^{-1}x = V^{-1}BVV^{-1}x$ , откуда (см. п 7, с. 322) получаем  $\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda - \lambda_i| \|V^{-1}x\| \leq \|B\| \|V^{-1}\| \|V\| \|V^{-1}x\|$ , но  $V^{-1}x \neq 0$ ,

следовательно,  $\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda - \lambda_i| \leq \|B\| \|V^{-1}\| \|V\|$ , поэтому  $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n G_i$ .  $\square$

**4. Теорема.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда все характеристические числа матрицы  $A + B$  лежат в объединении кругов

$$G_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leq ns_i \|B\|_2\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.7)$$

где  $s_i = \|u^i\|_2 \|v^i\|_2 / |(u^i, v^i)|$ ,  $v^i$  —  $i$ -й столбец матрицы  $V$ ,  $u^i$  —  $i$ -й столбец матрицы  $U = (V^{-1})^*$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что  $v^i, \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ , — собственные пары матрицы  $A$ ,  $u^i, \bar{\lambda}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , — собственные пары матрицы  $A^*$ . Каждое из чисел  $s_i, i = 1, 2, \dots, n$ , не меньше единицы. Их

называют *коэффициентами перекоса* соответствующих собственных векторов матрицы  $A$ . Если  $\lambda$  — алгебраически простое характеристическое число матрицы  $A$ , то, очевидно,  $\bar{\lambda}$  — алгебраически простое характеристическое число матрицы  $A^*$ . Отвечающие им собственные подпространства одномерны и, следовательно, соответствующий коэффициент перекоса определяется однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4. Характеристические числа матриц  $A + B$  и  $\Lambda + V^{-1}BV = \Lambda + \tilde{B}$ , где  $\tilde{B} = U^*BV$ , совпадают. Используя столбцовую теорему Гершгорина, получим, что все собственные числа матрицы  $\Lambda + \tilde{B}$  лежат в объединении кругов

$$G'_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i - \tilde{b}_{ii}| \leq C_i(\tilde{B})\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим теперь, что  $|z - \lambda_i - \tilde{b}_{ii}| \geq |z - \lambda_i| - |\tilde{b}_{ii}|$ ,  $C_i(\tilde{B}) + |\tilde{b}_{ii}| = \|\tilde{b}^i\|_1$ , где, как обычно,  $\tilde{b}^i$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\tilde{B}$ . Отсюда вытекает, что все собственные числа матрицы  $A + B$  лежат в объединении кругов

$$G''_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_k| \leq \|\tilde{b}^k\|_1\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Оценим  $\|\tilde{b}^k\|_1$ . Введем в рассмотрение векторы  $t^k \in \mathbb{C}^n$  с компонентами

$$t_j^k = \begin{cases} \tilde{b}_j^k / |\tilde{b}_j^k|, & \tilde{b}_j^k \neq 0, \\ 0, & \tilde{b}_j^k = 0. \end{cases}$$

Элементарно проверяется равенство  $\|\tilde{b}^k\|_1 = (\tilde{B}i^k, t^k)$ , где  $i^k$  — столбец единичной матрицы. Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\|\tilde{b}^k\|_1 = (BVi^k, Ut^k) \leq \|B\|_2 \|U\|_2 \|v^k\|_2 \|t^k\|_2. \quad (4.8)$$

Нетрудно убедиться, что  $\|t^k\|_2 \leq \sqrt{n}$ . Далее, вследствие (3.3), с. 328, имеем  $\|U\|_2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \|u^k\|_2^2\right)^{1/2}$ . Столбцы матрицы  $U$  определяются, очевидно, с точностью до постоянных ненулевых множителей. Нормируем их так, чтобы  $\|u^k\|_2 = 1$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Очевидно, при этом столбцы матрицы  $V$  должны быть нормированы так, чтобы  $(v^k, u^k) = 1$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . При этом будем иметь  $\|v^k\|_2 = \|v^k\|_2 \|u^k\|_2 / |(u^k, v^k)| = s_k$ . Таким образом, из (4.8) получаем, что  $\|\tilde{b}^k\|_1 \leq ns_k \|B\|_2$ .  $\square$

При сравнении оценок (4.6), (4.7) полезной оказывается

**5. Теорема.** При любой нормировке столбцов матрицы  $V$ , определенной соотношением (4.5), выполнено неравенство

$$\|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \geq \max_{1 \leq k \leq n} s_k. \quad (4.9)$$

Столбцы матрицы  $V$  можно нормировать так, что

$$\|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \leq \sum_{k=1}^n s_k. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что  $Vv^k = v^k$  для любого  $k = 1, 2, \dots, n$ . Поэтому  $\|V\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Vx\|_2 \geq \|v^k\|_2$ . Точно так же

$\|V^{-1}\|_2 = \|U\|_2 \geq \|u^k\|_2$ , и неравенство (4.9) доказано. Нормируем теперь столбцы матрицы  $V$  так, чтобы  $\|v^k\|_2 = s_k^{1/2}$ . Тогда вследствие равенства  $(v_k, u_k) = 1$  получаем, что  $\|u^k\|_2 = s_k^{1/2}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . От-

сюда, очевидно, вытекает, что  $\|V^{-1}\|_E = \|V\|_E = \left( \sum_{k=1}^n s_k \right)^{1/2}$ . Оценка (4.10) следует теперь из неравенства (3.3), с. 328.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Матрица  $V$ , столбцы которой образуют базис пространства  $\mathbb{C}^n$ , состоящий из собственных векторов матрицы  $A$ , не определяется однозначно. При любом выборе  $V$  справедливо неравенство  $\|V\| \|V^{-1}\| \geq 1$ . Равенство здесь достигается, например, тогда, когда в качестве нормы матриц выбрана спектральная норма, а матрица  $V$  унитарна. По теореме 9, с. 226, матрица унитарно подобна диагональной тогда и только тогда, когда она — нормальная матрица. Таким образом, если  $A$  — нормальная матрица,  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — ее характеристические числа, то при любой матрице  $B$  все характеристические числа матрицы  $A + B$  лежат в объединении кругов  $G_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leq \|B\|_2\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

---

---

ГЛАВА 19  
Неотрицательные матрицы

В этой главе изучаются спектральные свойства матриц с неотрицательными элементами. Совокупность излагаемых здесь результатов принято называть *теорией Перрона — Фробениуса*<sup>1)</sup>.

**§ 1. Простейшие свойства неотрицательных матриц**

**1.** Вектор  $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$  называется *неотрицательным* (пишут  $x \geq 0$ ), если  $x_k \geq 0$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  называется *положительным* ( $x > 0$ ), если  $x_k > 0$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Аналогично, матрица  $A$  называется *неотрицательной* ( $A \geq 0$ ), если  $a_{kl} \geq 0$  для всех  $k, l$ , *положительной* ( $A > 0$ ), если  $a_{kl} > 0$  для всех  $k, l$ .

По определению  $x \geq y$  ( $x > y$ ) для  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , если  $x_k \geq y_k$  ( $x_k > y_k$ ) для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Для матриц  $A, B$  одинакового порядка полагаем  $A \geq B$  ( $A > B$ ), если  $a_{kl} \geq b_{kl}$  ( $a_{kl} > b_{kl}$ ) для всех  $k, l$ .

Аналогично понимаются неравенства противоположного смысла для векторов и матриц.

В дальнейшем будем использовать обозначения:  $|x| = \{|x_k|\}_{k=1}^n$  для  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $|A| = \{|a_{kl}|\}$  для любой матрицы  $A$ <sup>2)</sup>.

**2.** Отметим некоторые простейшие свойства неотрицательных векторов и матриц: если  $A > 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$ , то  $Ax > 0$ ; если  $A \geq 0$ ,  $x \geq y$ , то  $Ax \geq Ay$ ; если  $A \geq 0$ ,  $x > 0$ ,  $Ax = 0$ , то  $A = 0$ .

**3.** Если  $A > 0$ ,  $\rho(A) < 1$ , то  $(I - A)^{-1} > 0$ . Действительно, если  $\rho(A) < 1$ , то  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$  (см. с. 214).

**4. Лемма.** Для любой квадратной матрицы  $A$  справедливо неравенство  $\rho(A) \leq \rho(|A|)$ . Если  $|A| \leq B$ , то  $\rho(|A|) \leq \rho(B)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нетрудно видеть, что  $|AB| \leq |A||B|$  для любых матриц  $A, B$ ;  $\|A\|_E \leq \|B\|_E$ , если  $|A| \leq |B|$ . Поэтому из нера-

---

<sup>1)</sup>Оскар Перрон (Oskar Perron; 1880 — 1975) — немецкий математик.

<sup>2)</sup>Некоторые обозначения и термины, введенные в настоящей главе, не совпадают с использованными в предыдущих главах.

венства  $|A| \leq B$  вытекает, что  $\|A^k\|_E \leq \| |A|^k \|_E \leq \|B^k\|_E$  для любого  $k \geq 1$ , следовательно,

$$\|A^k\|_E^{1/k} \leq \| |A|^k \|_E^{1/k} \leq \|B^k\|_E^{1/k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Воспользуемся теперь теоремой 6, с. 328, и перейдем к пределу в неравенствах (1.1).  $\square$

**5.** Квадратная матрица  $P$  порядка  $n \geq 1$  называется матрицей *перестановок*, если каждая ее строка и каждый ее столбец содержат ровно по одному ненулевому элементу, равному единице. Ясно, что матрица  $P$  ортогональна, т. е.  $P^{-1} = P^T$ . Для любого  $x \in \mathbb{C}^n$  векторы  $x$  и  $Px$  отличаются лишь порядком следования элементов.

Квадратная матрица  $A$  называется *разложимой*, если найдется такая матрица перестановок  $P$ , что

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  — квадратные матрицы. В противном случае матрица  $A$  называется *неразложимой*. Матрицы  $A$  и  $PAP^T$  различаются лишь перестановкой строк и столбцов (с одинаковыми номерами).

**5.1. Лемма.** *Если матрица  $A$  неотрицательна и неразложима, то ее спектральный радиус положителен.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Неразложимая матрица, очевидно, не может содержать нулевых строк, поэтому  $Ay > 0$  для любого положительного вектора  $y$ . Но тогда  $A^p y > 0$  для любого целого  $p \geq 1$ . Поэтому матрица  $A$  не нильпотентна и, следовательно, среди ее характеристических чисел есть ненулевые.  $\square$

**5.2. Следствие.** *Спектральный радиус положительной матрицы положителен.*

**5.3. Лемма** *Если неотрицательная матрица  $A$  порядка  $n$  неразложима, то  $(I + A)^{n-1} > 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно установить, что

$$(I + A)^{n-1} y > 0 \quad \forall y \geq 0, y \neq 0. \quad (1.3)$$

Ясно, что если  $y \geq 0$ ,  $y \neq 0$ , то

$$z = (I + A)y \quad (1.4)$$

есть ненулевой неотрицательный вектор, причем ненулевых компонент у него не меньше чем у вектора  $y$ . Очевидно также, что нулевые



компоненты вектора  $z$  имеют те же номера, что и нулевые компоненты вектора  $y$ . Если матрица  $A$  такова, что для любого ненулевого неотрицательного вектора  $y$  вектор  $z$  имеет больше ненулевых компонент чем вектор  $y$ , то соотношение (1.3) доказано. В противном случае можно указать такую матрицу перестановок  $P$ , что  $Py = (y^1, 0)$ ,  $Pz = (z^1, 0)$ , где  $y^1, z^1$  — положительные векторы одинаковой длины  $n_1 < n$ . Из (1.4) в результате элементарных выкладок получаем

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ 0 \end{pmatrix} + PAP^T \begin{pmatrix} y^1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Представим матрицу  $B = PAP^T$  в блочном виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где  $B_{11}$  — квадратная матрица размера  $n_1$ . Из (1.5) следует, что  $B_{21}y^1 = 0$ . Поскольку  $y^1 > 0$ ,  $B_{21} \geq 0$ , отсюда вытекает, что  $B_{21} = 0$ , т. е. матрица  $A$  разложима.  $\square$

## § 2. Положительные матрицы

**1. Теорема.** Пусть  $A > 0$ . Тогда  $\rho(A) > 0$ , и существует положительный вектор  $x$  такой, что

$$Ax = \rho(A)x. \quad (2.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положительность  $\rho(A)$  непосредственно вытекает из положительности матрицы  $A$  (см. следствие 5.2). Очевидно, существует характеристическое число  $\lambda$  матрицы  $A$  такое, что  $|\lambda| = \rho(A)$ . Найдется не равный нулю вектор  $u \in \mathbb{C}^n$  такой, что  $Au = \lambda u$ . Тогда  $\rho(A)|u| \leq A|u|$ , и  $y = A|u| - \rho(A)|u| \geq 0$ . Если при этом  $y = 0$ , то  $\rho(A)$  — собственное число матрицы  $A$ , причем, поскольку  $|u| \geq 0$  и  $|u| \neq 0$ , то  $A|u| > 0$  и поэтому  $|u| > 0$ , т. е. теорема доказана. Если принять, что  $y \neq 0$ , то вследствие положительности матрицы  $A$  получаем, что  $Ay > 0$ . Пусть  $z = A|u|$ . Ясно, что  $z > 0$ . С другой стороны,  $Ay = Az - \rho(A)z > 0$ . Поэтому существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $Az - (\rho(A) + \varepsilon)z > 0$ . Последнее неравенство можно записать в виде  $(I - (1/(\rho(A) + \varepsilon))A)z < 0$ , но матрица  $(I - (1/(\rho(A) + \varepsilon))A)^{-1}$  существует и положительна (см. п. 3, с. 335), следовательно,  $z < 0$ . Получили противоречие. Остается принять, что  $y = 0$ .  $\square$

**2. Теорема.** Пусть  $A > 0$ . Тогда собственное подпространство матрицы  $A$ , отвечающее  $\rho(A)$ , одномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть не равные нулю векторы  $x, y$  таковы, что  $Ax = \rho(A)x, Ay = \rho(A)y$ . Как следует из доказательства предыдущей теоремы, тогда  $|x| > 0, |y| > 0$ . Положим  $z = y_1x - x_1y$ . Получим  $z_1 = 0, Az = \rho(A)z$ . Вектор  $z$  не может быть собственным вектором, отвечающим  $\rho(A)$ , так как имеет нулевую компоненту. Значит,  $z = 0$ , т. е. векторы  $x, y$  пропорциональны.  $\square$

**3. Лемма.** Пусть  $A > 0$ . Тогда все жордановы клетки жордановой формы матрицы  $A$ , отвечающие  $\rho(A)$ , имеют первый порядок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно установить, что все жордановы клетки жордановой формы матрицы  $B = \rho(A)^{-1}A$ , отвечающие ее собственному числу, равному единице, имеют первый порядок. Предположим противное, и пусть  $J = SBS^{-1}$  — жорданова форма матрицы  $B$ . Из формулы (15.3), с. 213, тогда сразу же следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|J^k\|_\infty = \infty$ , но  $J^k = SB^kS^{-1}, \|J^k\|_\infty \leq \|S\|_\infty \|B^k\|_\infty \|S^{-1}\|_\infty$ , поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\|_\infty = \infty$ . С другой стороны, по теореме 1 существует положительный вектор  $x$  такой, что  $Bx = x$ , и тогда  $B^kx = x$  при любом целом неотрицательном  $k$ . Поскольку  $B > 0, x > 0$ , то, как нетрудно убедиться,  $\|x\|_\infty = \|B^kx\|_\infty \geq \min_{1 \leq i \leq n} x_i \|B^k\|_\infty$ , т. е.  $\|B^k\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i / \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ .  $\square$

Как известно (см. п. 1.3, с. 210), количество жордановых клеток, отвечающих характеристическому числу матрицы, совпадает с его геометрической кратностью. Поэтому из теоремы 2 и леммы 3 сразу же следует

**4. Теорема.** Пусть  $A > 0$ . Тогда алгебраическая кратность характеристического числа  $\rho(A)$  матрицы  $A$  равна единице.

**5. Теорема.** Положительная матрица  $A$  не может иметь характеристических чисел, равных по модулю  $\rho(A)$  и отличных от  $\rho(A)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует ненулевой вектор  $x \in \mathbb{C}^n$  такой, что  $Ax = \lambda x, |\lambda| = \rho(A), \lambda \neq \rho(A)$ . Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что  $A|x| = \rho(A)|x|, |x| > 0$ . Очевидно также, что  $|Ax| = \rho(A)|x|$ , следова-

тельно,  $|Ax| = A|x|$ . В частности,  $\left| \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{1j}|x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{1j}x_j|$  (здесь  $n$  — порядок матрицы  $A$ ). Модуль суммы ненулевых комплексных чисел может быть равен сумме их модулей лишь при условии, что существуют положительные числа  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  такие, что  $a_{1j}x_j = \alpha_j a_{11}x_1$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$ <sup>1)</sup>. Следовательно,

$$x = x_1 y, \quad (2.2)$$

где  $y = (1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $y_j = \alpha_j a_{11}/a_{1j} > 0$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$ . Поэтому  $Ax = x_1 Ay = \lambda x = \lambda x_1 y$  и, поскольку  $x_1 \neq 0$ , то  $Ay = \lambda y$ . Отсюда вследствие положительности  $y$  получаем, что  $Ay = \rho(A)y$ . Таким образом  $x$  и  $y$  — собственные векторы матрицы  $A$ , отвечающие различным собственным числам. Вопреки (2.2) они не могут быть пропорциональными (см. теорему 2, с. 186).  $\square$

**6. Теорема.** Пусть  $A > 0$ . Если собственный вектор матрицы  $A$  неотрицателен, то он отвечает ее собственному числу  $\rho(A)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть  $x \neq 0$ ,  $x \geq 0$  и  $Ax = \lambda x$ . Матрица  $A^T$  положительна, поэтому существует положительный вектор  $y$  такой, что  $A^T y = \rho(A^T)y$ . Спектральные радиусы взаимно транспонированных матриц, очевидно, совпадают, следовательно,  $A^T y = \rho(A)y$ . Умножим почленно это равенство скалярно<sup>2)</sup> на вектор  $x$ . После очевидных преобразований получим  $\lambda(x, y) = \rho(A)(x, y)$ . Ясно, что  $(x, y) > 0$ , поэтому  $\lambda = \rho(A)$ .  $\square$

### § 3. Неотрицательные матрицы

**1. Теорема.** Пусть  $A \geq 0$ . Тогда существует вектор  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$ , такой, что  $Ax = \rho(A)x$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $A_k = A + (1/k)B$ , где  $B$  — положительная матрица,  $k$  — положительное целое число. Матрица  $A_k$  положительна. По теореме 1, с. 337, существует вектор  $x^k > 0$  такой, что  $A_k x^k = \rho(A_k)x^k$ . Можно считать также, что  $\|x^k\|_2 = 1$ . Множество векторов  $x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ограничено в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . По теореме Больцано — Вейерштрасса существует подпоследовательность  $\{x^{k_i}\}$ , сходящаяся к некоторому вектору  $x$ . Очевидно, что  $x \geq 0$

<sup>1)</sup>Сделайте рисунок!

<sup>2)</sup>Здесь и далее под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

и  $\|x\|_2 = 1$ , т. е.  $x \neq 0$ . В силу леммы 4, с. 335, последовательность  $\{\rho(A_k)\}$  не возрастает и ограничена снизу числом  $\rho(A)$ . Поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A_k) = r \geq \rho(A)$ . Переходя к пределу в равенствах  $A_{k_i} x^{k_i} = \rho(A_{k_i}) x^{k_i}$  при  $i \rightarrow \infty$ , получим  $Ax = rx$ , т. е.  $r$  — характеристическое число матрицы  $A$ , поэтому  $r \leq \rho(A)$ , следовательно,  $r = \rho(A)$ .  $\square$

**2. Теорема.** Пусть  $A$  — неотрицательная матрица порядка  $n$ . Тогда

$$\rho(A) = \max_{x \geq 0, x \neq 0} \min_{1 \leq i \leq n, x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $f(x) = \min_{1 \leq i \leq n, x_i \neq 0} (Ax)_i / x_i$  для  $x \geq 0, x \neq 0$ . Нетрудно убедиться, что  $f(x)x \leq Ax$ . Тем более,

$$f(x)x \leq A_k x, \quad (3.2)$$

где  $A_k$  — матрица, определенная в доказательстве предыдущей теоремы. Как мы уже знаем, существует положительный вектор  $y$  такой, что  $A_k^T y = \rho(A_k)y$ . Из (3.2) очевидным образом получаем, что  $f(x)(x, y) \leq (A_k x, y) = \rho(A_k)(x, y)$ . Отсюда вследствие положительности  $(x, y)$  вытекает, что  $f(x) \leq \rho(A_k)$ . Как было установлено при доказательстве предыдущей теоремы,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A_k) = \rho(A)$ , поэтому  $f(x) \leq \rho(A)$  для любого  $x \geq 0, x \neq 0$ . В то же время, теорема 1 гарантирует существование неотрицательного ненулевого вектора  $z$  такого, что  $Az = \rho(A)z$ . Очевидно, что  $f(z) = \rho(A)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что

$$\rho(A) = \min_{x \geq 0, x \neq 0} \max_{1 \leq i \leq n, x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

#### § 4. Неразложимые неотрицательные матрицы

**1. Теорема.** Пусть  $A$  — неразложимая неотрицательная матрица. Тогда существует положительный вектор  $x$  такой, что  $Ax = \rho(A)x$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 предыдущего параграфа вытекает существование ненулевого неотрицательного вектора  $x$  такого, что  $Ax = \rho(A)x$ . Покажем, что на самом деле  $x > 0$ . Пусть  $n$  —

порядок матрицы  $A$ . Для выбранного нами вектора  $x$  выполнено равенство  $(I + A)^{n-1}x = (1 + \rho(A))^{n-1}x$ . По лемме 5.3, с. 336, матрица  $(I + A)^{n-1}$  положительна, следовательно, вектор  $y = (I + A)^{n-1}x$  положителен, но тогда и вектор  $x = (1 + \rho(A))^{1-n}y$  положителен.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что теорема 6, с. 339, справедлива и для неотрицательных неразложимых матриц.

**2. Теорема.** Пусть  $A$  — неразложимая неотрицательная матрица. Тогда алгебраическая кратность характеристического числа  $\rho(A)$  матрицы  $A$  равна единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — характеристические числа матрицы  $A$  (с учетом их кратностей). Существует невырожденная матрица  $T$  такая, что  $A = TJT^{-1}$ , где  $J$  — треугольная матрица с диагональными элементами, равными  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (например,  $J$  — жорданова форма  $A$ ). Очевидно,  $(I + A)^{n-1} = T(I + J)^{n-1}T^{-1}$  и, следовательно, все характеристические числа матрицы  $(I + A)^{n-1}$  совпадают с диагональными элементами треугольной матрицы  $(I + J)^{n-1}$ , т. е. вычисляются по формулам  $(1 + \lambda_k)^{n-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Нетрудно убедиться (сделайте рисунок!), что  $|1 + \lambda_k| \leq 1 + \rho(A)$ , для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\lambda_k = \rho(A)$ . По теореме 1 среди характеристических чисел матрицы  $A$  есть равные  $\rho(A)$ . Поэтому спектральный радиус матрицы  $(I + A)^{n-1}$  равен  $(1 + \rho(A))^{n-1}$ . Матрица  $(I + A)^{n-1}$  при принятых нами условиях положительна, следовательно,  $(1 + \rho(A))^{n-1}$  — ее алгебраически простое характеристическое число, значит, среди всех характеристических чисел матрицы  $A$  (с учетом их кратностей) найдется только одно, равное  $\rho(A)$ .  $\square$

**3.** Через  $S(A)$  будем далее обозначать окружность с центром в начале координат радиуса  $\rho(A)$ . Окружность  $S(A)$  называют *спектральной окружностью* матрицы  $A$ . Если матрица  $A$  неразложима и неотрицательна, то среди ее характеристических чисел может оказаться несколько, лежащих на  $S(A)$ . Такова, например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристические числа этой матрицы делят ее спектральную окружность пополам.

Оказывается, что характеристические числа любой неразложимой неотрицательной матрицы распределяются по ее спектральной окружности аналогично.

Чтобы установить это, нам потребуется

**4. Теорема.** Пусть  $A$  — неразложимая неотрицательная матрица,  $|B| \leq A$ . Если при этом  $\rho(B) = \rho(A)$ , и  $\mu$  — характеристическое число матрицы  $B$  такое, что  $\mu = q_0\rho(A)$ ,  $|q_0| = 1$ , то матрицы  $B$  и  $q_0A$  подобны.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По условию теоремы существует не равный нулю вектор  $x$  такой, что  $Bx = \mu x$ . Справедлива цепочка соотношений

$$\rho(A)|x| = |\mu x| = |Bx| \leq |B||x| \leq A|x|. \quad (4.1)$$

Покажем, что  $z = A|x| - \rho(A)|x| = 0$ . Прежде всего заметим, что  $z \geq 0$ . Далее, поскольку матрица  $A^T$  так же, как и матрица  $A$ , неотрицательна и неразложима, то по теореме 1 существует положительный вектор  $y$  такой, что  $A^T y = \rho(A)y$ . Тогда получаем, что  $(z, y) = (A|x|, y) - \rho(A)(|x|, y) = 0$ , а это невозможно, если  $z \neq 0$ . Таким образом,  $A|x| = \rho(A)|x|$ , и из (4.1) вытекает, что  $(A - |B|)|x| = 0$ . Поскольку  $A - |B| \geq 0$ , а вследствие теорем 1, 2 справедливо неравенство  $|x| > 0$ , отсюда получаем, что  $|B| = A$ . Положим  $q_k = x_k/|x_k|$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $D = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Очевидно, что  $|q_k| = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$D|x| = x, \quad BD|x| = Bx = q_0\rho(A)x = q_0DA|x|,$$

следовательно,  $(q_0^{-1}D^{-1}BD - A)|x| = 0$ . Пусть  $C = q_0^{-1}D^{-1}BD$ . Нетрудно видеть, что  $|C| = |B|$ , значит,  $|C| = A$ , и, таким образом,  $(|C| - C)|x| = 0$ . Отделяя вещественную и мнимую части матрицы  $C - |C|$ , получим, что  $(|C| - \text{Re } C)|x| = 0$ . Очевидно, что  $\text{Re } C \leq |C|$ , следовательно,  $|C| = \text{Re } C$ , т. е.  $C = |C|$ ,  $C = A$ , и  $B = Dq_0AD^{-1}$ .  $\square$

**5. Теорема.** Пусть  $A$  — неразложимая неотрицательная матрица и пусть  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$  — все характеристические числа матрицы  $A$ , принадлежащие  $S(A)$ <sup>1)</sup>. Тогда все они алгебраически простые и

$$\lambda_k = \rho(A) \left( \cos \frac{2\pi k}{p} + i \sin \frac{2\pi k}{p} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1. \quad (4.2)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При  $p = 1$  доказываемое утверждение — очевидное следствие теорем 1, 2. Пусть  $p > 1$ , и пусть  $\lambda = q\rho(A) \in S(A)$  есть характеристическое число матрицы  $A$ . Используем теорему 4, полагая  $B = A$ ,  $\mu = \lambda$ . Получим, что матрицы  $A$  и  $qA$  подобны. Значит, их характеристические числа (с учетом кратностей) совпадают.

<sup>1)</sup>Для определенности считаем их упорядоченными по неубыванию аргумента.

Каждое характеристическое число матрицы  $A$ , принадлежащее  $S(A)$ , есть  $q\rho(A)$  при соответствующем выборе  $q$ ,  $|q| = 1$ . По теореме 2 число  $\rho(A)$  — алгебраически простое характеристическое число матрицы  $A$ . Поэтому все характеристические числа матрицы  $A$ , лежащие на  $S(A)$ , алгебраически простые. Пусть  $q\rho(A), \tilde{q}\rho(A) \in S(A)$  — характеристические числа матрицы  $A$ . Тогда  $A = qDAD^{-1} = \tilde{q}\tilde{D}A\tilde{D}^{-1}$ , следовательно,

$$A = \tilde{D}D\tilde{q}qAD^{-1}\tilde{D}^{-1} = (\tilde{D}D)\tilde{q}qA(\tilde{D}D)^{-1}, \quad A = D^{-1}q^{-1}AD.$$

Отсюда вытекает, что  $(\tilde{q}q)\rho(A), q^{-1}\rho(A)$  — характеристические числа матрицы  $A$ . Таким образом, если  $\rho(A), q_1\rho(A), \dots, q_{p-1}\rho(A)$  — все характеристические числа матрицы  $A$ , принадлежащие  $S(A)$ , то множество чисел  $G = \{q_0 = 1, q_1, \dots, q_{p-1}\}$  таково, что если  $q \in G$ , то  $q^{-1} \in G$ , если  $q, \tilde{q} \in G$ , то  $q\tilde{q} \in G$ . Упорядочим все числа из  $G$  по возрастанию аргумента. Ясно, что  $q_k \in G$  лишь если  $q_k/q_1 = q_{k-1}$ ,  $k = 2, 3, \dots, p-1$ ;  $q_{p-1}q_1 \in G$  лишь при условии, что  $q_{p-1}q_1 = 1$ . Отсюда следует, что  $\arg q_k = (2\pi/p)k$ ,  $k = 0, 1, \dots, p-1$ , т. е. формула (4.2) доказана.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Из доказательства теоремы 5 следует, что если на спектральной окружности лежат  $p$  характеристических чисел неразложимой неотрицательной матрицы  $A$ , то матрицы  $A$  и  $q_1A$ , где  $q_1 = \cos(2\pi/p) + i \sin(2\pi/p)$  подобны. Поэтому вся система характеристических чисел матрицы  $A$  инвариантна относительно поворота плоскости на угол  $2\pi/p$ .

**УПРАЖНЕНИЕ.** Сделайте рисунок, показывающий расположение всех характеристических чисел неразложимой неотрицательной матрицы  $A$ . Особо разберите случай, когда матрица  $A$  невырождена, а  $n$  — простое число.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В ходе доказательства теоремы 5 установлено, что множество  $G$  — конечная абелева группа. Обоснование на языке теории групп того, что точки  $G$  — корни степени  $p$  из единицы см., например, в [10] (по списку дополнительной литературы), задача 1637.

---

---

## Предметный указатель

- Аксиомы
  - линейного пространства, 113, 115
  - нормы
    - векторной, 319
    - матричной, 323
  - скалярного произведения (в вещественном пространстве), 127
  - скалярного произведения (в комплексном пространстве), 128
- Алгебраическое дополнение, 77
- Базис
  - в пространстве полиномов
  - естественный, 126
  - взаимный, 56, 139
  - декартов
    - обобщенный, 47
  - жорданов, 203
  - Лагранжа, 126
  - Ньютона, 126
  - основной, 56, 139
  - пространства, 47
    - $\mathbb{C}^n$  естественный, 122
    - конечномерного, 123
    - сингулярный, 238
  - Тейлора, 165
  - Фурье, 140
- Базиса
  - ориентация, 51
- Блок
  - жорданов, 202
- Вектор, 43, 112, 115
  - единичный, 113, 114
  - неотрицательный, 335
  - нулевой, 43, 112, 114
  - положительный, 335
  - циклический, 210
- Вектора
  - декартовы координаты, 44
  - компоненты, 112
    - ковариантные, 139
    - контравариантные, 139
  - координаты, 47, 123
  - модуль, 44, 128, 132
  - умножение на число, 44, 113
- Вектора циклического
  - высота, 210
- Векторов
  - векторное произведение, 51
  - внешнее произведение, 245
  - вычитание, 46
  - диада, 244
  - линейная комбинация, 118
    - нетривиальная, 118
  - подсистема максимальная, 121
  - система
    - линейно зависимая, 117
    - линейно независимая, 119
    - ортогональная, 134
    - ортонормированная, 134
  - системы ранг, 122
  - системы эквивалентные, 119
  - скалярное произведение, 48, 129
    - стандартное в пространстве  $\mathbb{C}^n$ , 129
    - стандартное в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , 128
  - сложение, 45, 113
  - смешанное произведение, 54
  - тензорное произведение, 244
- Векторы
  - коллинеарные, 45, 117
  - компланарные, 46
  - ортогональные, 132
  - равные, 113
- Вращение
  - несобственное, 253
  - собственное, 253
- Гипербола, 277
- Гиперболоид, 300
  - двуполостный, 292
  - однополостный, 291
- Гиперболы
  - асимптоты, 279
  - вершины, 279
  - центр симметрии, 279
- Гиперплоскость, 153
- Гиперповерхности второго порядка
  - каноническая форма, 301
  - приведенная форма, 299
- Гиперповерхность второго порядка, 299



- Диагональное преобладание, 303  
— по столбцам, 330
- Дополнение  
— ортогональное, 153
- Замена переменных  
— линейная, 257
- Инверсия, 73
- Клетка  
— жорданова, 202
- Комплексного числа  
— аргумент, 13  
— вещественная часть, 9  
— мнимая часть, 9  
— модуль, 11  
— тригонометрическое представление, 13
- Комплексное число  
— нулевое, 10  
— сопряженное, 11
- Комплексных чисел  
— вычитание, 9  
— деление, 11  
— сложение, 9  
— умножение, 10
- Конус, 300  
— эллиптический, 290
- Корень  
— из оператора, 236  
— из комплексного числа, 16
- Коэффициенты перекося, 333
- Кривая второго порядка, 272
- Критерий  
— Сильвестра, 263
- Матриц  
— произведение, 92  
— сумма, 89
- Матрица  
— блочная, 109  
— вещественная, 108  
— вращения, 254  
— вырожденная, 95  
— Гильберта, 152  
— Грама, 133  
— диагональная, 88  
— единичная, 88  
— жорданова, 202  
— квадратная, 75  
— кососимметричная, 108  
— косоэрмитова, 107  
— невырожденная, 95  
— неотрицательная, 223, 335  
— неразложимая, 336  
— нижняя треугольная  
— — элементарная, 89  
— нильпотентная, 200  
— нормальная, 109  
— нулевая, 88  
— обратная, 96  
— — левая, 96  
— — правая, 96  
— ортогональная, 108  
— отражения, 255  
— перестановки, 88  
— перестановок, 336  
— перехода, 125  
— положительная, 335  
— положительно определенная, 223  
— преобразования переменных, 257  
— присоединенная, 97  
— прямоугольная, 87  
— разложимая, 336  
— симметричная, 108  
— системы линейных алгебраических уравнений, 83  
— сопряженная, 107  
— сходящаяся, 212  
— транспонированная, 78, 94  
— треугольная  
— — верхняя, 80  
— — нижняя, 80  
— унитарная, 108  
— эрмитова, 107
- Матрицы  
— инварианты, 193  
— инерция, 261  
— конгруэнтные, 260  
— норма  
— — векторная, 323  
— — матричная, 323  
— — подчиненная, 325  
— — спектральная, 327  
— — столбцовая, 326  
— — строчная, 327  
— — Фробениуса (евклидова), 324  
— перестановочные, 92  
— подобные, 166  
— разложение  
— — треугольное, 106  
— ранг, 168  
— собственный вектор, 185  
— спектр, 185  
— спектральная окружность, 341

- спектральный радиус, 212
- умножение
- — на число, 89
- характеристические числа, 185
- характеристический полином, 185
- Метод
  - Гаусса, 99
  - Зейделя, 304
  - Лагранжа (выделения полных квадратов), 258
  - релаксации, 306
  - Якоби, 303, 312
- Минор, 77
  - базисный, 171
  - главный, 105
  - диагональный, 191
  - окаймляющий, 171
- Мнимая единица, 8
- Многочлен, 18
  - нулевой, 18
  - приведенный (нормированный), 22
- Многочлена
  - корень, 21
  - — кратный, 21
  - — простой, 21
  - коэффициенты, 18
  - порядок, 18
- Многочленов
  - деление, 20
- Невязка, 219
- Невязки
  - функция (функционал), 219
- Неравенство
  - Бесселя, 150
  - Гёльдера, 317
  - Коши, 50, 317
  - Коши — Буняковского, 131
  - Минковского, 128, 317
  - треугольника, 50, 128, 319
  - треугольника (Минковского), 132
  - Юнга, 317
- Норма
  - на пространстве  $\mathbb{C}^n$ , 319
  - — абсолютная, 322
  - — монотонная, 322
- Нормы
  - эквивалентные, 320
- Оператор
  - единичный, 156
  - кососимметричный, 247
  - косоэрмитов, 220
  - линейный, 155
  - невырожденный, 167
  - неотрицательный, 222
  - нильпотентный, 200
  - нормальный, 224
  - нулевой, 156
  - обратимый, 158
  - обратный, 157
  - ортогональный, 248
  - положительно определенный, 222
  - проектирования, 156
  - — ортогонального, 156
  - простой структуры, 189
  - разложения по базису, 159
  - растяжения
  - — левый, 243
  - — правый, 243
  - самосопряженный (эрмитов), 220
  - скалярный, 163
  - сопряженный, 216
  - унитарный, 223
- Оператора
  - дефект, 161
  - жорданово представление, 202
  - инвариантное подпространство, 181
  - инварианты, 191
  - индекс нильпотентности, 200
  - компоненты
  - — ковариантные, 245
  - — контравариантные, 245
  - — смешанные, 245
  - матрица, 162
  - область значений
  - — образ, 160
  - определитель, 167
  - полярное разложение, 243
  - ранг, 161
  - след, 193
  - собственная пара, 183
  - собственное подпространство, 183
  - собственное число, 183
  - собственный вектор, 183
  - спектр, 186
  - спектральное представление, 190
  - сужение, 183
  - характеристические числа, 186
  - характеристический полином, 186
  - ядро, 160
- Операторов
  - линейная комбинация, 156
  - линейное пространство, 168

- вещественное, 168
- произведение, 156
- пространство
  - евклидово, 243
  - евклидово вещественное, 248
  - скалярное произведение, 243
- Операторы
  - перестановочные, 185
- Определитель, 75
  - Вандермонда, 81
- Определителя
  - разложение
    - по столбцу, 77
    - по строке, 77
  - свойства
    - третьего порядка, 34
- Отображение, 155
  - линейное, 155
- Парабола, 281
- Параболоид, 301
  - гиперболический, 289
  - эллиптический, 287
- Параболы
  - вершина, 281
  - директриса, 281
  - фокус, 281
- Параметр
  - итерационный, 306
  - релаксационный, 306
- Переменные
  - свободные, 178
- Перестановка, 72
  - нечетная, 73
  - четная, 73
- Перестановки
  - сигнатура, 73
- Поверхность
  - линейчатая, 292
- Поверхность второго порядка, 284
- Подпространств
  - пересечение, 145
  - сумма, 144
    - ортогональная, 146
    - прямая, 145
- Подпространства
  - базис, 145
  - ортогональные, 146
  - размерность, 145
- Подпространство, 144
  - корневое, 209
  - нулевое, 145
  - тривиальное, 181
  - циклическое, 209
- Полином, 18
- Полиномы
  - Лежандра, 141
  - Чебышева, 141
- Преобразование
  - переменных
    - аффинное, 265
    - подобия, 166
  - пространства, 155
- Приближение
  - наилучшее, 148
- Приближения
  - наилучшего элемента, 154
- Проекция
  - ортогональная, 150
- Пространства
  - изоморфные, 159
  - размерность, 123
- Пространство
  - $\mathbb{C}^n$ , 114
  - $\mathbb{R}^n$ , 112
  - арифметическое, 128
  - бесконечномерное, 124
  - векторное, 115
  - евклидово
    - вещественное, 129
    - комплексное (унитарное), 130
  - конечномерное, 123
  - линейное
    - вещественное, 115
    - комплексное, 115
- Процесс
  - ортогонализации Грама — Шмидта, 136
- Псевдорешение, 219
  - нормальное, 241
- Разложение
  - ортогональное, 153
  - сингулярное (матрицы), 241
- Расстояние
  - между двумя точками, 56
  - от точки до прямой, 61
- Решение
  - линейного уравнения
    - общее, 174
    - частное, 174
  - однородного линейного уравнения
    - общее, 174
    - тривиальное, 83

- Решений  
 — система фундаментальная  
 — — однородного уравнения, 174
- Символ  
 — Кронекера, 42
- Система координат  
 — декартова, 43
- Система линейных алгебраических уравнений  
 — крамеровская, 83  
 — однородная, 83
- Собственного числа кратность  
 — алгебраическая, 189  
 — геометрическая, 189
- Собственных значений проблема  
 — обобщенная, 237
- Столбец, 87
- Строка, 87
- Схема Горнера, 20
- Сходимость  
 — по норме, 320  
 — покомпонентная, 320
- Теорема  
 — алгебры основная, 22  
 — Безу, 21  
 — Гершгорина, 331  
 — Грама — Шмидта, 135  
 — Кронекера — Капелли, 176  
 — Кэли — Гамильтона, 211  
 — Рисса, 215  
 — Самарского, 307  
 — Фредгольма, 219  
 — — матричная, 176  
 — Шура, 198
- Теоремы  
 — Бауэра — Файка, 332
- Теория Перрона — Фробениуса, 335
- Тождество  
 — Пифагора, 131
- Транспозиция, 73
- Трансформация Гаусса, 220
- Угол  
 — между векторами, 132  
 — между прямыми, 62
- Умножение  
 — матрицы  
 — — на вектор, 90  
 — матриц, 92  
 — строки  
 — — на матрицу, 91  
 — — на столбец, 90
- Уравнение  
 — отрезка прямой, 57  
 — плоскости, 63  
 — — нормальное, 63  
 — — общее, 64  
 — прямой, 59  
 — — в пространстве, 66  
 — — каноническое, 67  
 — — нормальная форма, 60  
 — — общая форма, 60  
 — сферы, 57
- Форм квадратичных  
 — закон инерции, 262
- Форма  
 — квадратичная, 257  
 — — положительно определенная, 263  
 — линейная, 215
- Формула  
 — интерполяционная  
 — — Лагранжа, 86  
 — Муавра, 15  
 — площади треугольника, 58  
 — Родрига, 137  
 — Сильвестра, 190
- Формулы  
 — Вьета, 25  
 — Крамера, 85
- Формы  
 — квадратичной  
 — — инерция, 261  
 — — канонический вид, 258
- Функции квадратичной  
 — инварианты  
 — — аффинные, 265  
 — — ортогональные, 265  
 — форма приведенная, 268
- Функционал  
 — линейный, 215
- Функция  
 — выпуклая, 316  
 — квадратичная, 264
- Фурье  
 — коэффициенты, 138
- Цилиндр, 301  
 — гиперболический, 286  
 — параболический, 286  
 — эллиптический, 286
- Число  
 — комплексное, 9  
 — мнимое, 8  
 — обусловленности, 242

— сингулярное, 238  
Эллипс, 277  
Эллипса  
— вершины, 278  
— оси симметрии, 278

— полуоси, 278  
— фокусы, 278  
— центр симметрии, 278  
— эксцентриситет, 278  
Эллипсоид, 289, 300

---

---

## Литература

### Основная литература

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. — Изд-во «Лань», 2009.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — Изд-во «Лань», 2008.
5. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. — Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

### Дополнительная литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. — Изд-во «МЦНМО», 2011.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. — Изд-во «Добросвет», «КДУ», 2009.
5. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969.
6. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. — Изд-во «Лань», 2006.
7. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — Изд-во «Проспект», 2012.
8. Карчевский Е.М., Карчевский М.М. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — Казань: Казан. ун-т, 2011.
9. Квасов Б.И. Численные методы анализа и линейной алгебры. — Новосиб. гос. ун-т., Новосибирск, 2012.

10. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — Изд-во «Лань», 2009.
11. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. — Изд-во «Лань», 2002.
12. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: «Физматлит», 1996.
13. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. — Москва: БИНОМ. Лаб. знаний, 2005.
14. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
15. Тихомиров В.М., Успенский В.В. Десять доказательств основной теоремы алгебры // Математическое просвещение. — 1997, 1. — С. 50–70.
16. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
17. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Академия, 2007.
18. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970.
19. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. — Изд-во «Лань», 2004.
20. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963.
21. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
22. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные векторные пространства). — М.: Наука, 1969.
23. Allen G.D. Lectures on Linear Algebra and Matrices. Texas A&M University. — URL: [http://www.math.tamu.edu/~dallen/m640\\_03c/readings.htm](http://www.math.tamu.edu/~dallen/m640_03c/readings.htm), свободный, 31.05.2012.
24. Itskov M. Tensor algebra and tensor analysis for engineers. — Springer, 2013.
25. Kuttler K. Elementary linear algebra. — Brigham Young University, 2009.

26. Lau D. Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie. Aufgaben mit Lösungen. — Springer-Verlag, 2007.
27. Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra. With solutions to problems. — SIAM, 2000.
28. Wildon M. A short proof of the existence of Jordan normal form. — URL: <http://www.ma.rhul.ac.uk/~uvah099/Maths/JNFfinal.pdf>, свободный, 20.07.2011.



*Учебное издание*

**Карчевский** Евгений Михайлович  
**Карчевский** Михаил Миронович

**ЛЕКЦИИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ  
И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Редактор  
*Н.И. Андропова*

Дизайн обложки  
*М.А. Ахметов*

Подписано в печать 16.04.2014  
Бумага офсетная. Печать ризографическая  
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 20,46  
Уч.-изд. л. 19,56. Тираж 200 экз. Заказ 41/2

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета  
42008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37  
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28