ГЛАВА 13. ОПЕРАТОРЫ В ВЕЩЕСТВЕННОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Отметим некоторые особенности, связанные с рассмотрением линенйных операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$.

В любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ взаимно транспонированы:

$$A_e^* = (A_e)^T.$$

Для того, чтобы оператор был самосопряжен,

$$A^* = A,$$

необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ его матрица была симметрична:

$$(A_e)^T = A_e.$$

Косоэрмитов оператор, действующий в вещественном евклидовом пространстве, обычно называют *кососимметричным*:

$$A^* = -A.$$

Для того, чтобы оператор был кососимметричным,

$$A^* = -A,$$

необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ его матрица была кососимметрична:

$$(A_e)^T = -A_e.$$

.

Любой оператор $\mathcal{A}$ однозначно представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$$

где $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный, $\mathcal{A}_2$ — кососимметричный операторы, причем,

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*).$$

Действительно,

$$\mathcal{A}_1^* = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^* + (\mathcal{A}^*)^*) = \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2^* = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^* - (\mathcal{A}^*)^*) = -\mathcal{A}_2.$$

<u>Теорема</u> Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был кососимметричным, необходимо и достаточно выполнения условия

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

.

Доказательство. Действительно, если

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*,$$

то

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = -(x, \mathcal{A}x) = -(\mathcal{A}x, x),$$

т. е.

$$(\mathcal{A}x, x) = 0.$$

.

Пусть

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Для любых x, $y \in \mathbf{X}_n$ **имеем**

$$(\mathcal{A}(x+y), x+y) = (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + (\mathcal{A}x, y) + (\mathcal{A}y, x) =$$

$$= (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + (\mathcal{A}x, y) + (y, \mathcal{A}^*x) =$$

$$= (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + (\mathcal{A}x + \mathcal{A}^*x, y).$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}x + \mathcal{A}^*x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е.

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*. \ \Box$$

Унитарный оператор, т. е. оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I,$$

действующий в вещественном евклидовом пространстве, называется *ортогональным*. Для него

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1},$$

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I.$$

.

Для того, чтобы оператор был ортогональным,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I,$$

необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе была ортогональной:

$$A_e(A_e)^T = I.$$

Из определения ортогонального оператора сразу же вытекает, что

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, y),$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ не меняет длин векторов,

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)} = |\mathcal{A}x|,$$

и углов между векторами:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)}{|\mathcal{A}x||\mathcal{A}y|} = \cos(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y).$$

.

Определитель ортогонального оператора равен плюс или минус единице.

.

Собственным числом ортогонального оператора может быть только плюс или минус единица.

Напомним, что оператор $\mathcal{A}$ называется нормальным, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Самосопряженный, кососимметричный и ортогональный операторы — нормальные операторы.

Для того, чтобы оператор был нормальным,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе была нормальной:

$$A_e A_e^T = A_e^T A_e.$$

§3. СТРУКТУРА НОРМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В этом параграфе все операторы — операторы, действующие в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$.

Теорема. Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, был нормальным оператором, необходимо и достаточно существования ортонормированного базиса $\mathcal{E}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно диагональна:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

Диагональные блоки этой матрицы могут иметь размеры либо 1×1 — вещественные числа, либо 2×2 — матрицы вида

$$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}.$$

<u>Доказательство.</u> Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть A_e имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & \vdots \\ \vdots & A_k \end{pmatrix}, \quad A_r = \alpha_r \ \text{ либо } \ A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_e^T = \begin{pmatrix} A_1^T & \vdots \\ \vdots & A_k^T \end{pmatrix}, \quad A_r^T = \alpha_r \ \text{ либо } \ A_p^T = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ -\beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_e A_e^T = \begin{pmatrix} A_1 A_1^T & \vdots \\ \vdots & A_k A_k^T \end{pmatrix},$$

где

$$A_r A_r^T = \alpha_r^2 \ \text{ либо } \ A_p A_p^T = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ -\beta_p & \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p^2 + \beta_p^2 & 0 \\ 0 & \alpha_p^2 + \beta_p^2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $A_e A_e^T = A_e^T A_e$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ нормальный.

.

Необходимость. Пусть A_e — матрица нормального оператора $\mathcal{A}$ в произвольно выбранном ортонормированном базисе $\mathcal{E}_n$. Тогда

$$A_e A_e^T = A_e^T A_e.$$

Докажем, что

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & \vdots \\ \vdots & A_k \end{pmatrix}, \quad A_r = \alpha_r \;\text{ либо }\; A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

.

Мы знаем, что по вещественной матрице A_e, удовлетворяющей условию

$$A_e A_e^T = A_e^T A_e,$$

трактуемой как оператор

$$A_e : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$

можно построить ортонормированный базис $\mathcal{F}_n = \{f_k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbb{C}^n$ такой, что

$$A_e f_k = \lambda_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A_e, причем если λ_k — вещественное число, то и вектор f_k можно считать вещественным.

Будем нумеровать характеристические числа матрицы A_e так, что

$$\lambda_1 = \alpha_1,\ \lambda_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ \lambda_m = \alpha_m \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n,$$

$$\lambda_{m+j} = \alpha_{m+j} + i\beta_{m+j} \in \mathbb{C},$$

$$\overline{\lambda}_{m+j} = \alpha_{m+j} - i\beta_{m+j} \in \mathbb{C},$$

$$j = 1,\, 2,\ \ldots,\, p, \quad p = \frac{n-m}{2}.$$

Тогда собственные векторы

$$f_k, \quad k = 1,\, 2,\ \ldots,\, m,$$

будут вещественными, остальные — комплексными, т. е.

$$f_k = g_k + ih_k, \quad g_k,\ h_k \in \mathbb{R}^n, \quad k > m.$$

.

Так как

$$A_e \in \mathbb{R}^{n \cdot n},$$

то из

$$A_e f_k = \lambda_k f_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{C},$$

вытекает

$$A_e \overline{f}_k = \overline{\lambda}_k \overline{f}_k.$$

Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам λ_k и $\overline{\lambda}_k$ нормального оператора, ортогональны:

$$(f_k, \overline{f_k}) = 0,$$

и из

$$(f_k, \overline{f_k}) = (g_k + ih_k, \overline{g_k + ih_k}) = (g_k + ih_k, g_k - ih_k) =$$

$$= (g_k, g_k - ih_k) + i(h_k, g_k - ih_k) =$$

$$= (g_k, g_k) + i(g_k, h_k) + i(h_k, g_k) + i^2(h_k, h_k) =$$

$$= (g_k, g_k) - (h_k, h_k) + i2(g_k, h_k) = 0$$

вытекает, что

$$(g_k, g_k) = (h_k, h_k),$$

$$(g_k, h_k) = 0.$$

Кроме того,

$$(f_k, f_k) = 1,$$

более подробно,

$$(f_k, f_k) = (g_k + ih_k, g_k + ih_k) =$$

$$= (g_k, g_k + ih_k) + i(h_k, g_k + ih_k) =$$

$$= (g_k, g_k) - i(g_k, h_k) + i(h_k, g_k) - i^2(h_k, h_k) =$$

$$= (g_k, g_k) + (h_k, h_k) = 1.$$

Отсюда и из

$$(g_k, g_k) = (h_k, h_k)$$

получаем

$$(g_k, g_k) = (h_k, h_k) = \frac{1}{2}.$$

Пусть, далее, $f_k, f_l \in \mathcal{F}_n$ есть комплексные векторы $k \neq l$, $f_k \neq \overline{f_l}$. Тогда, они отвечают разным собственным числам λ_k и $\lambda_l \neq \lambda_k$, и, следовательно, ортогональны:

$$(f_k, f_l) = 0.$$

Подробнее,

$$(f_k, f_l) = (g_k + ih_k, g_l + ih_l) =$$

$$= (g_k, g_l + ih_l) + i(h_k, g_l + ih_l) =$$

$$= (g_k, g_l) - i(g_k, h_l) + i(h_k, g_l) - i^2(h_k, h_l) =$$

$$= (g_k, g_l) + (h_k, h_l) + i\left[(h_k, g_l) - (g_k, h_l)\right] = 0.$$

Следовательно,

$$(g_k, g_l) = -(h_k, h_l), \quad (h_k, g_l) = (g_k, h_l).$$

.

Кроме того, векторы f_k и $\overline{f_l}$ отвечают различным собственным числам λ_k и $\overline{\lambda}_l \neq \lambda_k$ и тоже ортогональны:

$$(f_k, \overline{f_l}) = 0.$$

Как следствие из

$$(f_k, \overline{f_l}) = (g_k + ih_k, \overline{g_l + ih_l}) = (g_k + ih_k, g_l - ih_l) =$$

$$= (g_k, g_l - ih_l) + i(h_k, g_l - ih_l) =$$

$$= (g_k, g_l) + i(g_k, h_l) + i(h_k, g_l) + i^2(h_k, h_l) =$$

$$= (g_k, g_l) - (h_k, h_l) + i[(g_k, h_l) + (h_k, g_l)] = 0$$

вытекает, что

$$(g_k, g_l) = (h_k, h_l), \quad (g_k, h_l) = -(h_k, g_l).$$

.

Итак,

$$(g_k, g_l) = -(h_k, h_l), \quad (h_k, g_l) = (g_k, h_l),$$

$$(g_k, g_l) = (h_k, h_l), \quad (h_k, g_l) = -(g_k, h_l),$$

откуда получаем, что

$$(g_k, g_l) = (h_k, h_l) = (g_k, h_l) = (h_k, g_l) = 0.$$

.

Напомним, что если

$$A_e f_k = \lambda_k f_k,$$

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad f_k = g_k + ih_k,$$

то

$$A_e g_k = \alpha_k g_k - \beta_k h_k,$$

$$A_e h_k = \alpha_k g_k + \beta_k h_k.$$

Поставим теперь в соответствие каждому <u>вещественному</u> характеристическому числу λ_k матрицы A_e <u>вещественный</u> вектор

$$f_k \in \mathcal{F}_n,$$

а каждой <u>паре комплексно сопряженных</u> характеристических чисел λ_k, $\overline{\lambda}_k$ матрицы A_e <u>вещественные</u> векторы

$$\widetilde{g}_k = \sqrt{2}\, g_k, \quad \widetilde{h}_k = \sqrt{2}\, h_k.$$

В результате, получим систему

$$\widetilde{\mathcal{F}}_n = \{f_1, f_2,\ \ldots, f_m,\ \widetilde{g}_1, \widetilde{h}_1,\ \widetilde{g}_2, \widetilde{h}_2,\ \ldots,\ \widetilde{g}_p, \widetilde{h}_p\},$$

состоящую из n векторов пространства $\mathbb{R}^n$ и по доказанному выше ортонормированную.

.

Для векторов системы $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ выполнены равенства

$$A_e f_k = \alpha_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$A_e \widetilde{g}_j = \alpha_j \widetilde{g}_j - \beta_j \widetilde{h}_j$$

$$A_e \widetilde{h}_j = \beta_j \widetilde{g}_j + \alpha_j \widetilde{h}_j,$$

$j = 1, 2, \ldots, p$, из которых, очевидно, вытекает, что в ортонормированном базисе $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$ оператор $\mathcal{A}$ будет иметь матрицу

$$A_{\widetilde{e}} = \begin{pmatrix} A_1 & \vdots \\ \vdots & A_{m+p} \end{pmatrix}, \ A_k = \alpha_k, \ k = 1, \ldots, m, \ \ A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} j = 1, \ldots, p.$$

Блоки этой матрицы образованы соответствующим элементами матрицы A_e. $\square$

Остановимся на некоторых важных частных случаях.

.

Самосопряженный оператор. Матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе симметрична, следовательно, все ее характеристические числа вещественны. Поэтому, в равенствах

$$A_e f_k = \alpha_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$
$$A_e \widetilde{g}_j = \alpha_j \widetilde{g}_j - \beta_j \widetilde{h}_j$$
$$A_e \widetilde{h}_j = \beta_j \widetilde{g}_j + \alpha_j \widetilde{h}_j,$$

$j = 1, 2, \ldots, p$, имеем

$$\beta_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Таким образом, существует ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна.

Кососимметричный оператор. Матрица кососимметричного оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе кососимметрична, следовательно, все ее характеристические числа чисто мнимые. Поэтому, в равенствах

$$A_e f_k = \alpha_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$A_e \widetilde{g}_j = \alpha_j \widetilde{g}_j - \beta_j \widetilde{h}_j$$

$$A_e \widetilde{h}_j = \beta_j \widetilde{g}_j + \alpha_j \widetilde{h}_j,$$

$j = 1, 2, \ldots, p$, имеем

$$\alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m + p.$$

.

Существует ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A_{\widetilde{e}} = \begin{pmatrix} A_1 & \vdots \\ \vdots & A_{m+p} \end{pmatrix}, \; A_k = \alpha_k, \; k = 1, \ldots, m, \;\; A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} j = 1, \ldots, p.$$

Для кососимметричного оператора

$$\alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m + p,$$

значит, все диагональные блоки первого порядка нулевые,

$$A_k = 0, \; k = 1, \ldots, m,$$

а блоки второго порядка кососимметричны:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2 \ldots, p.$$

§4. СТРУКТУРА ОРТОГОНАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе ортогональна, следовательно, все ее характеристические числа по модулю равны единице.

Все характеристические числа по модулю равны единице, поэтому, в равенствах

$$A_e f_k = \alpha_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

имеем

$$\alpha_k = \pm 1, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Равенства

$$A_e\widetilde{g}_j = \alpha_j\widetilde{g}_j - \beta_j\widetilde{h}_j$$

$$A_e\widetilde{h}_j = \beta_j\widetilde{g}_j + \alpha_j\widetilde{h}_j,$$

$j = 1, 2, \ldots, p$, эквивалентны равенствам

$$A_e f_j = \lambda_j f_j, \quad \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad f_j = \widetilde{g}_j + i\widetilde{h}_j.$$

Следовательно, из

$$|\lambda_j| = 1$$

заключаем, что числа α_j, β_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, таковы, что

$$\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1.$$

Числа α_j, β_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, **таковы, что**

$$\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1,$$

следовательно, существуют углы

$$\varphi_j \in [0, 2\pi)$$

такие, что

$$\alpha_j = \cos\varphi_j, \quad \beta_j = \sin\varphi_j.$$

.

Итак, существует ортонормированый базис пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица ортогонального оператора принимает вид

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{m+p} \end{pmatrix}.$$

Все диагональные блоки первого порядка — это числа, равные ± 1,

$$A_k = \pm 1, \quad k = 1,\, 2,\ \ldots,\, m,$$

а блоки второго порядка имеют вид

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix} \quad j = 1,\, 2,\ \ldots,\, p.$$

Всякому ортогональному преобразованию вещественного евклидова пространства можно придать отчетливый геометрический смысл. Начнем с двумерного случая.

.

Как следует из вышеизложенного для любого ортогонального преобразования евклидова пространства $\mathbf{X}_2$ существует ортонормированный базис e^1, e^2, в котором его матрица будет либо

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

либо

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ последняя матрица имеет, соответственно, вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

.

В случае

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$A_e\xi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

следовательно, всякий вектор

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 \in \mathbf{X}_2$$

переводится оператором $\mathcal{A}$ в вектор

$$\mathcal{A}x = -\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2,$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ осуществляет зеркальное отражение относительно координатной оси ξ_2 (сделайте рисунок!).

.

Проверим, что в случае

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

справедливо равенство

$$(\mathcal{A}x, x) = |x||\mathcal{A}x|\cos\varphi.$$

Действительно,

$$A_e\xi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi \\ \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В силу ортонормированности базиса e^1, e^2 **для** $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2$ **имеем**

$$(\mathcal{A}x, x) = (A_e\xi, \xi) =$$

$$= \xi_1\left(\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi\right) + \xi_2\left(\xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi\right) =$$

$$= \xi_1^2\cos\varphi - \xi_1\xi_2\sin\varphi + \xi_2\xi_1\sin\varphi + \xi_2^2\cos\varphi =$$

$$= \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\cos\varphi.$$

Далее, для

$$A_e\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \cos\varphi - \xi_2 \sin\varphi \\ \xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi \end{pmatrix}$$

имеем

$$|\mathcal{A}x| = \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)} = \sqrt{(A_e\xi, A_e\xi)} =$$

$$= [(\xi_1 \cos\varphi - \xi_2 \sin\varphi)^2 + (\xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi)^2]^{1/2} =$$

$$= [\xi_1^2 \cos^2\varphi - 2\xi_1\xi_2 \cos\varphi \sin\varphi + \xi_2^2 \sin^2\varphi +$$

$$+ \xi_1^2 \sin^2\varphi + 2\xi_1\xi_2 \sin\varphi \cos\varphi + \xi_2^2 \cos^2\varphi]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Кроме того,

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{(\xi, \xi)} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

.

Итак,

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) \cos\varphi,$$

$$|x| = |\mathcal{A}x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

следовательно,

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) \cos\varphi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cos\varphi = |x||\mathcal{A}x| \cos\varphi.$$

.

Косинус угла между векторами $\mathcal{A}x$ и x вычисляется по формуле

$$\cos(\mathcal{A}x, x) = \frac{(\mathcal{A}x, x)}{|x||\mathcal{A}x|},$$

следовательно, из равенства

$$(\mathcal{A}x, x) = |x||\mathcal{A}x| \cos\varphi$$

заключаем, что

$$\cos(\mathcal{A}x, x) = \cos\varphi$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ осуществляет поворот вектора $x \in \mathbf{X}_2$ на угол φ.

Направление поворота (при $\varphi > 0$) совпадает с направлением кратчайшего поворота от e^1 к e^2 (сделайте рисунок!). Действительно, для оператора $\mathcal{A}$ с матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

имеем

$$\mathcal{A}e^1 = e^1\cos\varphi + e^2\sin\varphi,$$

$$\mathcal{A}e^2 = -e^1\sin\varphi + e^2\cos\varphi.$$

В трехмерном случае у любого ортогонального оператора $\mathcal{A}$ существует хотя бы одно (вещественное) собственное число, поскольку соответствующее характеристическое уравнение есть алгебраическое уравнение третьего порядка с вещественными коэффициентами.

Поэтому с точностью до перенумерации векторов ортонормированного базиса e^1, e^2, $e^3 \in \mathbf{X}_3$ матрица A_e может принять одну из следующих форм

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Поясним, что если оператор $\mathcal{A}$ имеет три собственных числа, то эти представления получаются за счет выбора угла $\varphi = 0$, или $\varphi = \pi$.

.

Оператор $\mathcal{A}$ с матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

осуществляет поворот пространства $\mathbf{X}_3$ вокруг оси ξ_1 на угол φ. Определитель оператора $\mathcal{A}$ равен единице.

.

Оператор $\mathcal{A}$ с матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

осуществляет поворот пространства $\mathbf{X}_3$ вокруг оси ξ_1 на угол φ с последующим отражением относительно плоскости, ортогональной вектору e^1. Определитель оператора $\mathcal{A}$ равен минус единице.

Определитель оператора, как мы знаем, не зависит от выбора базиса пространства. Поэтому все ортогональные преобразования трехмерного пространства можно разбить на два класса:

1) *собственные вращения* — это преобразования с положительным определителем, они осуществляют поворот пространства вокруг некоторой оси;

.

2) *несобственные вращения* — это преобразования с отрицательным определителем, они осуществляют поворот пространства вокруг некоторой оси с последующим отражением относительно плоскости, ортогональной этой же оси.

Евклидово пространство $\mathbf{X}_n$ произвольной размерности можно представить в виде ортогональной суммы некоторого количества одномерных инвариантных подпространств и некоторого количества двумерных инвариантных подпространств ортогонального оператора $\mathcal{A}$.

В двумерных инвариантных подпространствах оператор $\mathcal{A}$ выполняет поворот, в каждом, вообще говоря, на свой угол, а в одномерных инвариантных подпространствах может изменится лишь направление координатной оси.

Упражнение. Показать, что всякая вещественная симметричная матрица A ортогонально подобна диагональной, т. е.

$$Q^T A Q = \Lambda,$$

где Λ — диагональная, Q — ортогональная матрицы. Столбцы матрицы Q — собственные векторы матрицы A, по диагонали матрицы Λ расположены все собственные числа матрицы A.

§5. МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ

Остановимся на двух часто используемых в приложениях типах ортогональных матриц.

Вещественная матрица

$$Q_{st}(\varphi) = \{q_{ij}(\varphi)\}_{i,j=1}^{n}, \quad 1 \leqslant s < t \leqslant n,$$

называется ***матрицей вращения***, если

$$q_{ss}(\varphi) = q_{tt}(\varphi) = \cos\varphi,$$

$$q_{st}(\varphi) = -\sin\varphi, \quad q_{ts}(\varphi) = \sin\varphi,$$

$$q_{ii}(\varphi) = 1, \quad i \neq s,\, t,$$

а все остальные элементы матрицы $Q_{st}(\varphi)$ — нули, например,

$$Q_{23}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $Q = Q_{st}(\varphi)$ ортогональна:

$$Q^T Q = I.$$

Например,

$$Q_{23}^T Q_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Порождаемое матрицей Q преобразование евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, например,

$$Q_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

есть поворот на угол φ в двумерном подпространстве (плоскости), натянутом на векторы i^s, i^t естественного базиса пространства $\mathbb{R}^n$.

Матрица Q^T, обратная к Q, выполняет поворот в той же плоскости в обратном направлении, например,

$$Q_{23}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

получается из

$$Q_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

заменой φ на $-\varphi$.

Пусть x — произвольный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Ясно, что

$$(Qx)_i = \; x_i, \quad i \neq s,\, t,$$

$$(Qx)_s = x_s \cos\varphi - x_t \sin\varphi,$$

$$(Qx)_t = x_s \sin\varphi + x_t \cos\varphi.$$

Например,

$$Q_{23}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \cos\varphi - x_3 \sin\varphi \\ x_2 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

.

Положим

$$\rho = (x_s^2 + x_t^2)^{1/2}.$$

Пусть

$$\varphi = 0, \quad \textbf{если} \quad \rho = 0,$$

и

$$\cos\varphi = \frac{x_s}{\rho}, \quad \sin\varphi = -\frac{x_t}{\rho}, \quad \textbf{если} \quad \rho > 0.$$

Тогда

$$(Qx)_s = x_s\cos\varphi - x_t\sin\varphi = x_s\frac{x_s}{\rho} + x_t\frac{x_t}{\rho} = \frac{x_s^2 + x_t^2}{\rho} = \frac{\rho^2}{\rho} = \rho,$$

$$(Qx)_t = x_s\sin\varphi + x_t\cos\varphi = -x_s\frac{x_t}{\rho} + x_t\frac{x_s}{\rho} = 0.$$

.

Значит, для любого вектора

$$0 \neq x \in \mathbb{R}^n,$$

можно так выбрать угол φ_n, что

$$(Q_{1,n}(\varphi_n)x)_1 = (x_1^2 + x_n^2)^{1/2},$$

$$(Q_{1,n}(\varphi_n)x)_n = 0.$$

Для вектора $Q_{1,n}(\varphi_n)x$ можно подобрать такой угол φ_{n-1}, что

$$(Q_{1,n-1}(\varphi_{n-1})Q_{1,n}(\varphi_n)x)_1 = (x_1^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2)^{1/2},$$

$$(Q_{1,n-1}(\varphi_{n-1})Q_{1,n}(\varphi_n)x)_{n-1} = 0,$$

$$(Q_{1,n-1}(\varphi_{n-1})Q_{1,n}(\varphi_n)x)_n = 0.$$

Продолжая этот процесс, выбирая последовательно углы

$$\varphi_n, \ \varphi_{n-1}, \ \ldots, \ \varphi_2,$$

можно построить матрицы вращения

$$Q_{1,n}(\varphi_n), \ Q_{1,n-1}(\varphi_{n-1}), \ \ldots, \ Q_{1,2}(\varphi_2)$$

такие, что

$$Qx = |x| \, i^1.$$

Здесь

$$Q = Q_{1,2}(\varphi_2) \cdots Q_{1,n-1}(\varphi_{n-1}) Q_{1,n}(\varphi_n).$$

Таким образом, любой ненулевой вектор при помощи ортогональной матрицы можно преобразовать в вектор, совпадающий по направлению с первым вектором естественного базиса

$$Qx = |x|\, i^1.$$

Пусть теперь x, y два произвольных ненулевых вектора пространства $\mathbb{R}^n$. Как только что было показано, существуют ортогональные матрицы Q_x и Q_y такие, что

$$Q_x x = |x| i^1, \quad Q_y y = |y| i^1.$$

Умножим левые и правые части этих равенств на $Q_y^T = Q_y^{-1}$:

$$Q_y^T Q_x x = |x| Q_y^T i^1, \quad y = |y| Q_y^T i^1.$$

Отсюда вытекает, что

$$Qx = \frac{|x|}{|y|} y, \quad Q = Q_y^T Q_x,$$

т. е. для любой пары ненулевых векторов найдется ортогональная матрица, преобразующая первый вектор в вектор, совпадающий по направлению со вторым.

.

Пусть $w = \{w_i\}_{i=1}^n$ — произвольно выбранный вектор единичной длины пространства $\mathbb{R}^n$. Матрица

$$R = I - 2ww^T$$

называется ***матрицей отражения***. Поясним, что w трактуется здесь как вектор столбец, так что

$$R = \{\delta_{ij} - 2w_i w_j\}_{i,j=1}^n,$$

$$R = \begin{pmatrix} 1-2w_1^2 & -2w_1w_2 & \dots & -2w_1w_n \\ -2w_2w_1 & 1-2w_2^2 & \dots & -2w_2w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2w_nw_1 & -2w_nw_2 & \dots & 1-2w_n^2 \end{pmatrix}.$$

.

Матрица R симметрична:

$$R = R^T = \begin{pmatrix} 1 - 2w_1^2 & -2w_1w_2 & \dots & -2w_1w_n \\ -2w_2w_1 & 1 - 2w_2^2 & \dots & -2w_2w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2w_nw_1 & -2w_nw_2 & \dots & 1 - 2w_n^2 \end{pmatrix}.$$

.

Покажем, что матрица R ортогональна. Действительно,

$$R^T R = R^2 = (I - 2ww^T)(I - 2ww^T) =$$

$$= I - 4ww^T + 4ww^T ww^T = I,$$

так как

$$w^T w = (w, w) = |w|^2 = 1.$$

.

Заметим, далее, что для оператора

$$R = I - 2ww^T$$

имеем

$$Rw = w - 2ww^T w = -w,$$

так как

$$w^T w = 1.$$

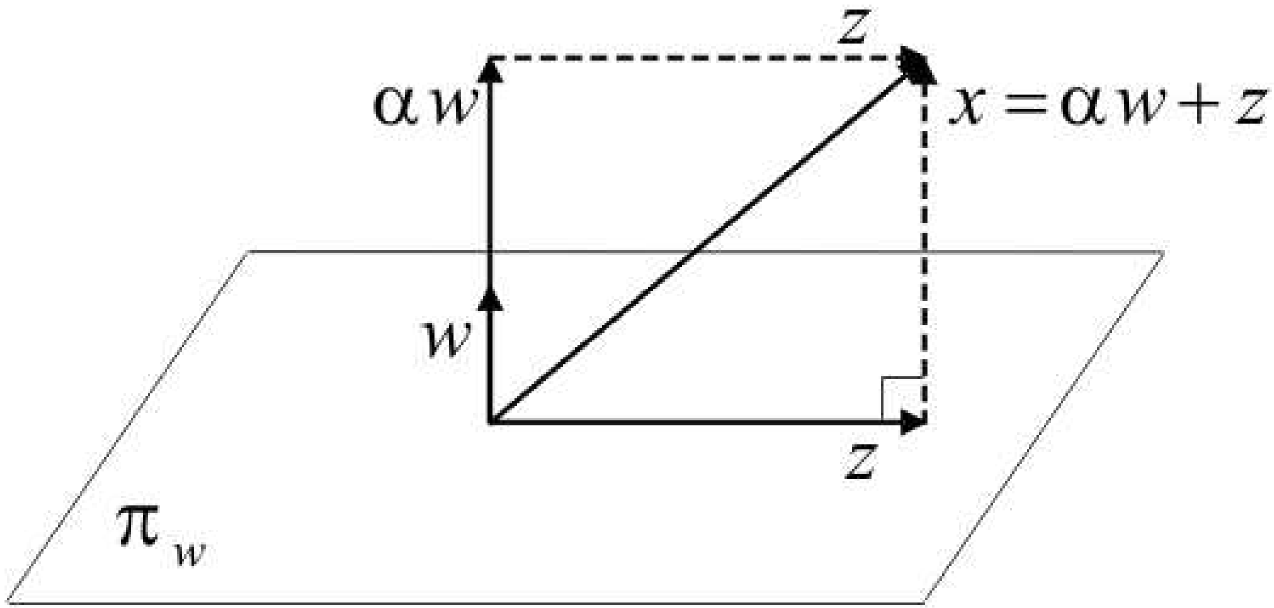
Кроме того,

$$Rz = z - 2ww^T z = z,$$

если

$$w^T z = (w, z) = 0,$$

т. е. векторы w и z ортогональны.



Напомним, что имеет место следующая

<u>Теорема.</u> Пусть x — произвольный, $w \neq 0$ векторы евклидова пространства $\mathbf{X}_n$. Существуют вектор $z \in \pi_w$ и число α такие, что

$$x = \alpha w + z,$$

причем α и z однозначно определяются по вектору x. Здесь π_w — гиперплоскость, ортогональная вектору w.

Пусть x — произвольный вектор. По этой теореме он однозначно представим в виде

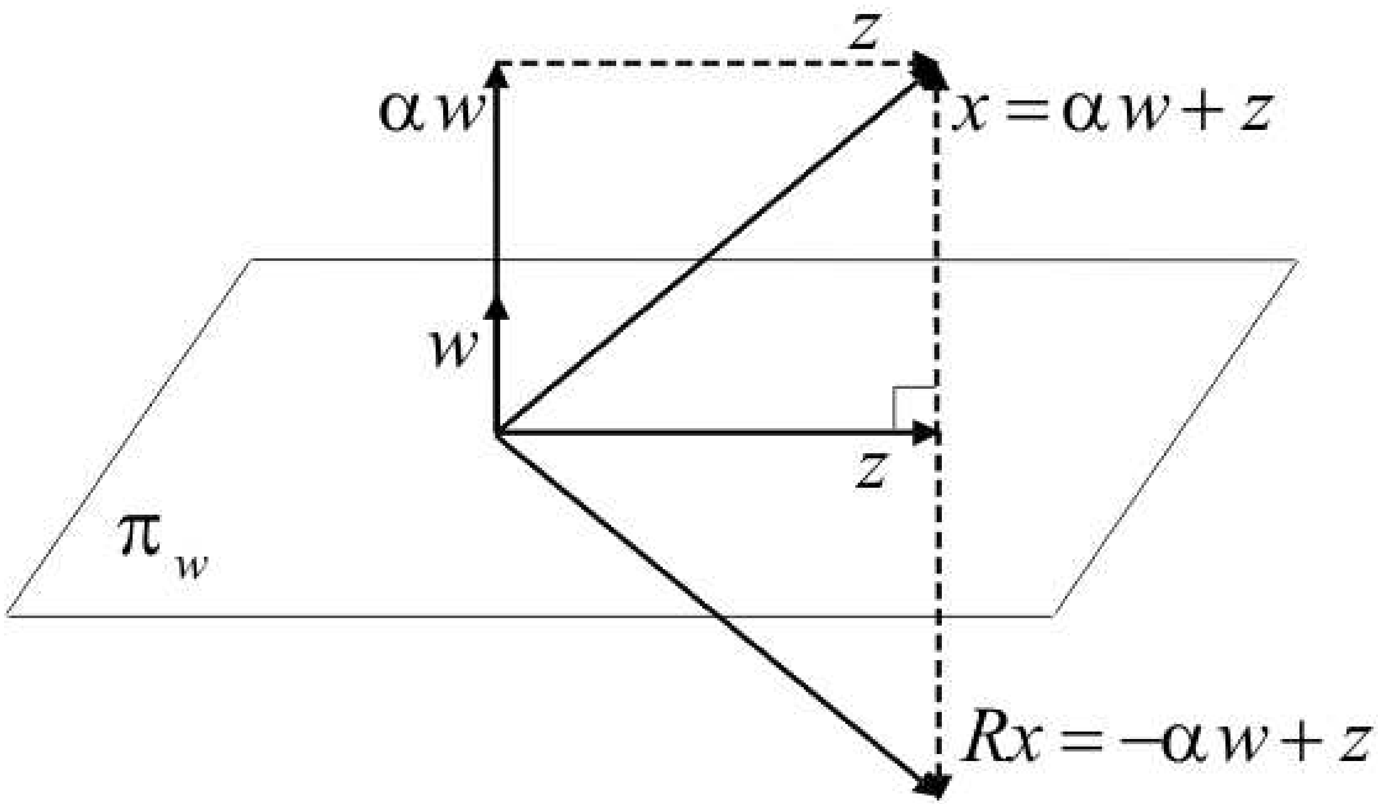
$$x = \alpha w + z,$$

где α некоторое число, z — некоторый вектор, ортогональный w. Из равенств

$$Rw = -w, \quad Rz = z,$$

вытекает, что

$$Rx = R(\alpha w + z) = -\alpha w + z.$$



Можно сказать, что матрица R выполняет отражение вектора

$$x = \alpha w + z$$

относительно $(n-1)$-мерной гиперплоскости, ортогональной w:

$$Rx = -\alpha w + z.$$

.

Рассмотрим следующую задачу.

Даны ненулевой вектор a и вектор единичной длины e. Требуется построить матрицу отражения R, такую, что

$$Ra = \mu e,$$

где μ — число.

.

Заметим, что поскольку матрица R ортогональна имеем

$$|Ra| = |a|,$$

Так как $|e| = 1$, то

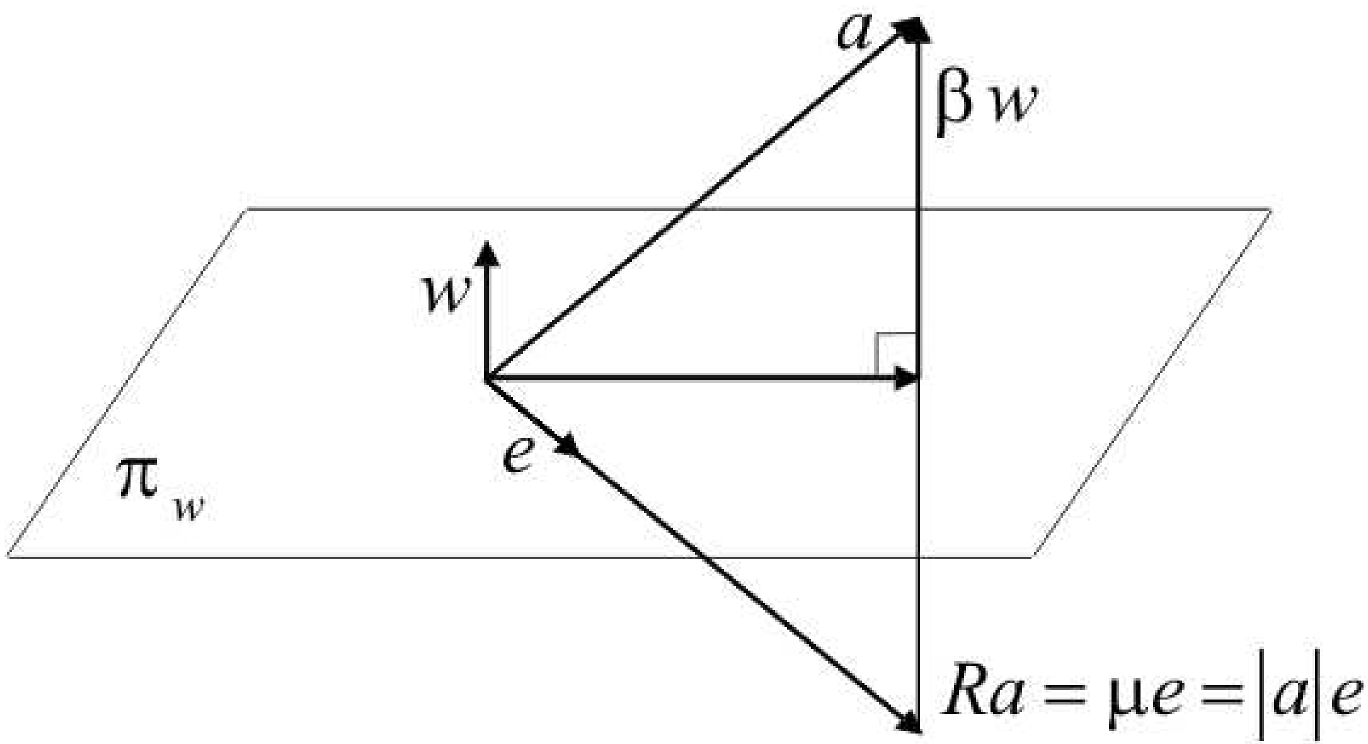
$$|\mu e| = |\mu|.$$

Для оператора R, удовлетворяющего условию

$$Ra = \mu e,$$

имеем

$$|\mu| = |a|.$$



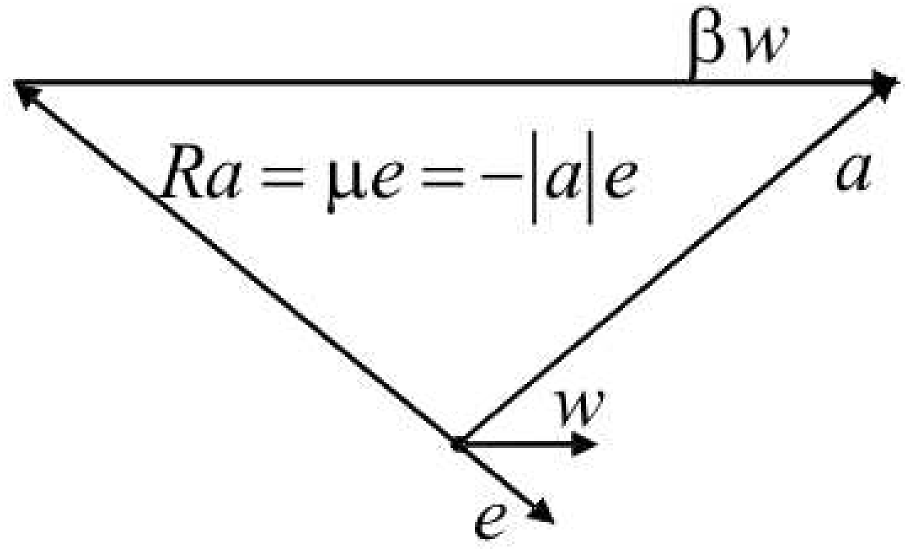
Из рисунка видно, что при $\mu = |a|$ имеем

$$|a|e + \beta w = a.$$

Вектор w должен быть единичной длины, значит,

$$w = \frac{a - |a|e}{|a - |a|e|}.$$

.



Если $\mu = -|a|$, то

$$-|a|e + \beta w = a.$$

Вектор w должен быть единичной длины, значит,

$$w = \frac{a + |a|e}{|a + |a|e|}.$$

.

При вычислениях для минимизации погрешностей округления следует выбрать либо вектор

$$w = \frac{a + |a|e}{|a + |a|e|},$$

либо

$$w = \frac{a - |a|e}{|a - |a|e|},$$

а именно тот, у которого больше знаменатель.

.

Полезно отметить, что если a — произвольный ненулевой вектор то матрица отражения R может быть построена так, что для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$

$$(a, Rx) = |a| x_k,$$

где k — заданное целое число, лежащее в пределах от 1 до n.

.

Для этого, очевидно, в формуле

$$w = \frac{a - |a|e}{|a - |a|e|}$$

нужно положить $e = i^k$. Тогда

$$Ra = |a|i^k,$$

и

$$(a, Rx) = (Ra, x) = (|a|i^k, x) = |a|x_k.$$