§3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ СЛАУ

Опишем элементарный способ построения общего решения СЛАУ

$$Ax = b.$$

Начнем с построения частного решения системы

$$Ax = b.$$

Предположим, что условие разрешимости выполнено и положим

$$r = \operatorname{rank}(A, b).$$

.

Приведем матрицу

$$(A, b)$$

к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы будет отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы (A, b), начиная с $(r+1)$-й есть линейные комбинации первых r строк.

Эти преобразования приводят к эквивалентной системе линейных уравнений, причем последние $m - r$ уравнений преобразованной системы — следствия первых r уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{r+11}x_1 + \ldots + a_{r+1n}x_n = b_{r+1}, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

.

Отбросим эти последние уравнения, а в оставшихся r уравнениях перенесем слагаемые, содержащие переменные с $(r+1)$-й до n-й (эти переменные принято называть ***свободными***), в правую часть:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Придадим любые значения свободным переменным в системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Чаще всего, нет никаких причин не брать их равными нулю:

$$x_{r+1} = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

В результате получим систему из r уравнений с r неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r. \end{cases}$$

Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем

$$x_1, \ \dots, \ x_r.$$

Таким образом, будет построен вектор

$$x = (x_1, \ \dots, \ x_r, \ x_{r+1}, \ \dots, \ x_n),$$

являющийся решением системы

$$Ax = b.$$

Пример. Найдем частное решение системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20.$$

Имеем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b) = 2.$$

Чтобы найти частное решение исходной системы, достаточно решить систему из первых двух ее уравнений:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8.$$

придавая x_3, x_4 произвольные значения. Положим $x_3 = x_4 = 0$:

$$x_1 - x_2 = 4,$$

$$x_1 + x_2 = 8.$$

Находим

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 2,$$

следовательно, решение исходной системы:

$$x = (6,\ 2,\ 0,\ 0).$$

Обратимся теперь к задаче построения фундаментальной системы решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0.$$

Пусть

$$\mathrm{rank}(A) = r.$$

Вследствие

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rank}(A)$$

достаточно построить любые

$$n - r$$

линейно независимых решений. Естественно, предположим, что

$$n > r.$$

.

Приведем систему уравнений

$$A(m,n)\,x(n,1)=0$$

к эквивалентной системе вида

$$A(r,r)\,x(r,1)+B(r,(n-r))\,y((n-r),1)=0.$$

Здесь $A(r,r)$ — невырожденная матрица, столбец

$$y((n-r),1)$$

соответствует свободным переменным.

.

Выберем векторы

$$y^1((n-r),1), \quad y^2((n-r),1), \ \ldots, \quad y^{n-r}((n-r),1)$$

так, чтобы они были линейно независимы (проще всего их взять как векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^{(n-r)}$).

.

По этим векторам из уравнений

$$A(r,r)\,x^k(r,1) = -B(r,(n-r))\,y^k((n-r),1), \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r,$$

однозначно определятся векторы

$$x^k(r,1), \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r.$$

Образуем теперь векторы $z^k(n,1)$, приписывая к компонентам векторов $x^k(r,1)$ компоненты векторов $y^k((n-r),1)$:

$$z^k(n,1) = (x^k(r,1),\ y^k((n-r),1)), \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r.$$

По построению

$$A(m,n)\,z^k(n,1) = 0, \quad k = 1, \ \dots, \ n-r,$$

кроме того, очевидно, векторы

$$z^k(n,1), \quad k = 1, \ \dots, \ n-r,$$

линейно независимы, так как векторы

$$y^k((n-r),1), \quad k = 1, \ \dots, \ n-r,$$

линейно независимы.

Таким образом, векторы

$$z^k, \quad k = 1, \ \ldots, \ n - r,$$

образуют фундаментальную систему линейно независимых решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0.$$

.

Пример. Найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0.$$

Ранг матрицы этой системы равен двум. Поэтому нужно построить два линейно независимых решения этой системы.

.

Последнее уравнение системы — следствие первых двух. Полагая

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 0$$

в уравнениях

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

получим

$$x_1 - x_2 = -1,$$

$$x_1 + x_2 = -2,$$

откуда

$$x_1 = -3/2, \quad x_2 = -1/2.$$

.

Полагая же

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 1$$

в уравнениях

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

будем иметь

$$x_1 - x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 = -3,$$

откуда

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2.$$

Поэтому векторы

$$x^1 = (-3/2,\ -1/2,\ 1,\ 0),$$

$$x^2 = (-1,\ -2,\ 0,\ 1)$$

образуют фундаментальную систему решений системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0.$$

Любой вектор

$$x = c_1(-3/2,\ -1/2,\ 1,\ 0) + c_2(-1,\ -2,\ 0,\ 1),$$

где c_1, c_2 — произвольные числа, есть решение системы

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0,$$

и наоборот, любое ее решение представимо в этом виде при некоторых $c_1,\ c_2$.

Общее решение СЛАУ
Матрица системы

A =

1	-1	1	-1
1	1	2	3
2	4	5	10

Минор 2 порядка

A2 =

1	-1
1	1

M2 = 2

A =

1	-1	1	-1
1	1	2	3
2	4	5	10

Окаймляющие миноры 3 порядка

A3 =

1	-1	1
1	1	2
2	4	5

M3 = 0

A4 =

1	-1	-1
1	1	3
2	4	10

M4 = 0

Ранг матрицы

r =

```
     2
```

Частное решение неоднородной системы

A2 =

```
     1    -1
     1     1
```

b2 =

```
     4
     8
```

x2 =

```
     6
     2
```

x =

```
     6
     2
     0
     0
```

ФСР однородной системы

Ker =

```
[ -3/2,   -1]
[ -1/2,   -2]
[    1,    0]
[    0,    1]
```

Общее решение неоднородной системы

```
[ 6 - 3/2 c1 - c2  ]
[                  ]
[2 - 1/2 c1 - 2 c2]
[                  ]
[      c1          ]
[                  ]
[      c2          ]
>>
```

```matlab
% General solution of SLAE
%  x_1- x_2+ x_3-  x_4=4,
%  x_1+ x_2+2x_3+ 3x_4=8,
% 2x_1+4x_2+5x_3+10x_4=20.
close all
clear all
clc
disp('Общее решение СЛАУ')
disp('Матрица системы')
A=[1 -1 1 -1; 1 1 2 3; 2 4 5 10]
disp('Минор 2 порядка')
A2=A([1 2], [1 2])
M2=det(A2)
A
disp('Окаймляющие миноры 3 порядка')
A3=A([1 2 3], [1 2 3])
M3=det(A3)
A4=A([1 2 3], [1 2 4])
M4=det(A4)
disp('Ранг матрицы')
r=rank(A)
disp('Частное решение неоднородной системы')
A2
b2=[4; 8]
x2=A2\b2
x=[x2(1); x2(2); 0; 0]
disp('ФСР однородной системы')
syms Ker xgen c1 c2
Ker = sym(null(A,'r'))
disp('Общее решение неоднородной системы')
pretty(sym(x)+c1*Ker(:,1)+c2*Ker(:,2))
```