ГЛАВА 8. ПОДПРОСТРАНСТВА

§1. СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

Множество L векторов линейного пространства $\mathbf{X}$ называется ***подпространством***, если из того, что

$$x,\ y \in L$$

вытекает, что

$$\alpha x + \beta y \in L$$

при любых комплексных числах $\alpha,\ \beta$.

Тривиальные примеры подпространств:

1) все пространство **X** является подпространством;

2) множество, состоящее только из одного вектора, равного нулю, является подпространством.

.

Поскольку по определению наряду с вектором x подпространству должен принадлежать и вектор

$$0x = 0,$$

то всякое подпространство содержит нулевой вектор.

<u>Упражнения.</u>

1) Пусть

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^m, \quad m \geqslant 1,$$

есть произвольным образом фиксированные векторы пространства $\mathbf{X}$. Докажите что множество всех линейных комбинаций

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m$$

является подпространством. Говорят, что это подпространство <u>***натянуто на векторы***</u> $a^1, a^2, \ldots, a^m$.

.

2) Пусть

$$a^1,\ a^2 \in \mathbf{X}, \quad a_2 \neq 0.$$

Множество L векторов вида

$$a^1 + \alpha a^2,$$

где α пробегает множество всех комплексных чисел, называется ***прямой***, проходящей через точку a^1 в направлении вектора a^2.

Показать, что множество L является подпространством тогда и только тогда, когда векторы a^1, a^2 линейно зависимы.

.

Пусть L_1, L_2 — подпространства пространства $\mathbf{X}$. Множество L всех векторов вида

$$a^1 + a^2, \quad \text{где} \quad a^1 \in L_1,\ a^2 \in L_2$$

называется ***суммой подпространств*** L_1, L_2. Используют обозначение:

$$L = L_1 + L_2.$$

Так определенное множество L — подпространство.

Действительно, пусть

$$x,\ y \in L = L_1 + L_2.$$

Это означает, что существуют векторы

$$a^1,\ b^1 \in L_1, \quad a^2,\ b^2 \in L_2$$

такие, что

$$x = a^1 + a^2, \quad y = b^1 + b^2.$$

Пусть α, β — произвольные комплексные числа. Тогда

$$\alpha x + \beta y = \alpha(a^1 + a^2) + \beta(b^1 + b^2) = (\alpha a^1 + \beta b^1) + (\alpha a^2 + \beta b^2).$$

Поскольку L_1, L_2 — подпространства

$$\alpha a^1 + \beta b^1 \in L_1, \quad \alpha a^2 + \beta b^2 \in L_2,$$

следовательно, $\alpha x + \beta y \in L$.

Пересечение подпространств L_1, L_2, т. е. множество всех векторов, принадлежащих как L_1, так и L_2, также является подпространством.

.

Действительно, пусть

$$x,\ y \in L_1 \cap L_2.$$

Для любого комплексного числа α вектор αx принадлежит как L_1, так и L_2, т. е.

$$\alpha x \in L_1 \cap L_2.$$

Аналогично для любого β вектор

$$\beta y \in L_1 \cap L_2,$$

но тогда, очевидно, и

$$\alpha x + \beta y \in L_1 \cap L_2.$$

.

Система векторов

$$\{e^k\}_{k=1}^m$$

называется <u>*базисом подпространства*</u> L, если она линейно независима и любой вектор

$$x \in L$$

представим в виде линейной комбинации векторов из $\{e^k\}_{k=1}^m$. Число m при этом будем назвать <u>*размерностью подпространства*</u>. Размерность подпространства L обозначают через

$$\dim(L).$$

Подпространству, состоящему только из нулевого вектора будем приписывать размерность, равную нулю. Это подпространство будем обозначать через $\{0\}$ и называть *нулевым подпространством*.

.

Упражнение. Описать всевозможные подпространства пространства $\mathbf{V}_3$.

Упражнение. Описать суммы и пересечения всевозможных подпространств пространства $\mathbf{V}_3$.

.

Для того, чтобы подпространство L конечномерного пространства $\mathbf{X}_n$ совпадало с $\mathbf{X}_n$, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\dim(L) = n.$$

Справедливость этого утверждения сразу следует из того, что любые n линейно независимых векторов пространства $\mathbf{X}_n$ образуют его базис.

Очевидно, что базис

$$\{e^k\}_{k=1}^m$$

любого подпространства L из $\mathbf{X}_n$ можно дополнить до базиса

$$\{e^k\}_{k=1}^n$$

всего пространства $\mathbf{X}_n$.

.

Точно так же, если L_1 и L_2 — подпространства и

$$L_1 \subset L_2,$$

то

$$\dim(L_1) \leqslant \dim(L_2)$$

и базис подпространства L_1 можно дополнить до базиса подпространства L_2.

Сумма подпространств L_1 и L_2 называется ***прямой*** если для любого вектора

$$x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$$

его составляющие

$$x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2$$

определяются однозначно. Прямая сумма подпространств L_1 и L_2 обозначается через

$$L_1 \dot{+} L_2.$$

.

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2 была прямой необходимо и достаточно, чтобы из равенства

$$x^1 + x^2 = 0,$$

для

$$x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2$$

вытекало, что

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть из равенства

$$x^1 + x^2 = 0$$

для

$$x^1 \in \ L_1, \quad x^2 \in L_2$$

следует, что

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0.$$

Покажем, что тогда для любого

$$x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$$

составляющие

$$x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2$$

определяются однозначно.

Предположим, что наряду с

$$x = x^1 + x^2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2$$

существует еще одно разложение вектора x, т. е.

$$x = \widetilde{x}^1 + \widetilde{x}^2, \quad \widetilde{x}_1 \in L_1, \quad \widetilde{x}_2 \in L_2.$$

Тогда, очевидно,

$$(x^1 - \widetilde{x}^1) + (x^2 - \widetilde{x}^2) = 0.$$

Поскольку

$$x^1 - \widetilde{x}^1 \in L_1, \quad x^2 - \widetilde{x}^2 \in L_2,$$

то

$$x^1 - \widetilde{x}^1 = 0, \quad x^2 - \widetilde{x}^2 = 0,$$

следовательно,

$$x^1 = \widetilde{x}^1, \quad x^2 = \widetilde{x}^2.$$

.

Обратно, пусть составляющие любого вектора

$$x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$$

определяются однозначно, и пусть

$$x^1 + x^2 = 0$$

для каких-то

$$x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2.$$

Поскольку,

$$0 + 0 = 0,$$

то отсюда вытекает, что

$$x^1 = x^2 = 0. \ \square$$

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2 была прямой необходимо и достаточно, чтобы

$$L_1 \cap L_2 = \{0\}.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$L_1 \cap L_2 = \{0\}, \quad x^1 + x^2 = 0, \quad x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2.$$

Поскольку

$$x^1 = -x^2,$$

то

$$x^1 \in L_2,$$

значит,

$$x^1 \in L_1 \cap L_2,$$

следовательно,

$$x^1 = 0,$$

но тогда, очевидно, и

$$x^2 = 0.$$

.

Обратно, пусть

$$x \in L_1 \cap L_2.$$

Тогда

$$x \in L_1, \quad x \in L_2,$$

кроме того, очевидно,

$$x + (-x) = \ 0,$$

а так как сумма L_1 и L_2 прямая, то в силу предыдущей теремы получаем, что

$$x = 0,$$

следовательно,

$$L_1 \cap L_2 = \{0\}. \ \square$$

Упражнение. Пусть

$$L \subset \mathbf{X}_n$$

есть произвольное подпространство конечномерного линейного пространства $\mathbf{X}_n$. Докажите, что существует подпространство

$$M \subset \mathbf{X}_n$$

такое, что

$$\mathbf{X}_n = L \dot{+} M.$$

Говорят, что подпространства L_1 и L_2 евклидова пространства ***ортогональны***:

$$L_1 \perp L_2,$$

если

$$(x, y) = 0 \quad \forall x \in L_1, \quad y \in L_2.$$

Сумму ортогональных подпространств называют ***ортогональной*** и обозначают через

$$L_1 \oplus L_2.$$

Ортогональная сумма является прямой. В самом деле, пусть

$$L_1 \perp L_2, \quad x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2, \quad x^1 + x^2 = 0.$$

В силу ортогональности x^1, x^2, очевидно,

$$|x^1 + x^2|^2 = |x^1|^2 + |x^2|^2,$$

поэтому

$$|x^1|^2 + |x^2|^2 = 0,$$

следовательно,

$$x^1 = x^2 = 0.$$

Понятия прямой и ортогональной сумм естественным образом переносятся на случай любого конечного числа подпространств.

Сумма подпространств

$$L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_k$$

называется ***прямой*** если для любого вектора

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k \in (L_1 + L_2 + \ldots + L_k)$$

его составляющие

$$x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2, \ \ldots, \quad x^k \in L_k$$

определяются однозначно.

.

<u>Упражнение.</u> Докажите, что для того, чтобы сумма подпространств $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_k$ была прямой необходимо и достаточно, чтобы из равенства

$$x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0, \quad x^i \in L_i, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k,$$

вытекало, что

$$x^1 = 0,\ x^2 = 0,\ \ldots,\ x^k = 0.$$

Сумма подпространств

$$L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_k$$

называется ***ортогональной***, если она есть множество всех элементов вида

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k, \quad x^j \in L_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

и

$$L_i \perp L_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

.

Упражнение. Покажите, что ортогональная сумма любого числа подпространств является прямой.

.

Упражнение. Верно ли утверждение: сумма подпространств

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \quad k > 2,$$

является прямой, если их пересечение — нулевое подпространство?

§2. РАЗМЕРНОСТЬ СУММЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

Теорема. **Пусть** $L = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \cdots \dotplus L_k$ **— прямая сумма конечномерных подпространств** $L_1,\ L_2, \ldots,\ L_k$ **линейного пространства** $\mathbf{X}$**. Тогда**

$$\dim(L) = \dim(L_1) + \dim(L_2) + \cdots + \dim(L_k).$$

Доказательство. Выполним его для случая $k = 2$. Для произвольного k рассуждения полностью аналогичны. Пусть

$$f^1, f^2, \ldots, f^p; \quad g^1, g^2, \ldots, g^q$$

есть базисы подпространств L_1, L_2, соответственно. Тогда объединение этих систем векторов есть базис подпространства $L_1 \dot{+} L_2$.

Действительно, для любого $x \in L_1 \dot{+} L_2$ справедливо представление

$$x = x^1 + x^2,$$

где

$$x^1 = \alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2 + \cdots + \alpha_p f^p \in L_1,$$

$$x^2 = \beta_1 g^1 + \beta_2 g^2 + \cdots + \beta_q g^q \in L_2,$$

причем, если

$$x = 0,$$

то

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0,$$

поскольку сумма $L_1 \dot{+} L_2$ прямая.

Итак, если

$$x = x^1 + x^2 = 0 \in L_1 \dot{+} L_2,$$

то

$$x^1 = \alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2 + \cdots + \alpha_p f^p = 0 \in L_1,$$

$$x^2 = \beta_1 g^1 + \beta_2 g^2 + \cdots + \beta_q g^q = 0 \in L_2.$$

Вследствие того, что $\{f^k\}_{k=1}^p$, $\{g^k\}_{k=1}^q$ — базисы, отсюда вытекает, что все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ — нули. Таким образом, система векторов

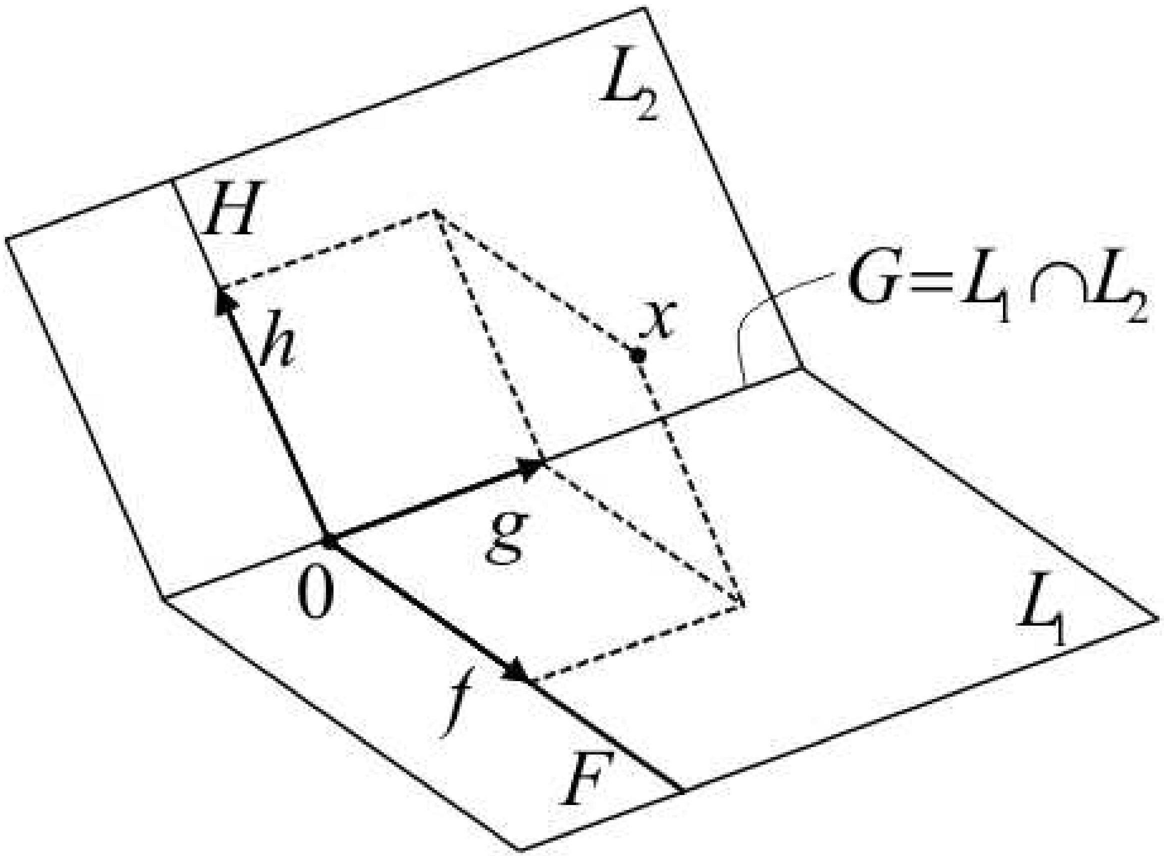
$$f^1, f^2, \ldots, f^p; \quad g^1, g^2, \ldots, g^q$$

линейно независима. Теперь совершенно ясно, что

$$\dim(L_1 \dot{+} L_2) = \ p + q. \ \square$$

<u>Теорема.</u> **Пусть L_1, L_2 — произвольные конечномерные подпространства линейного пространства $\mathbf{X}$. Тогда**

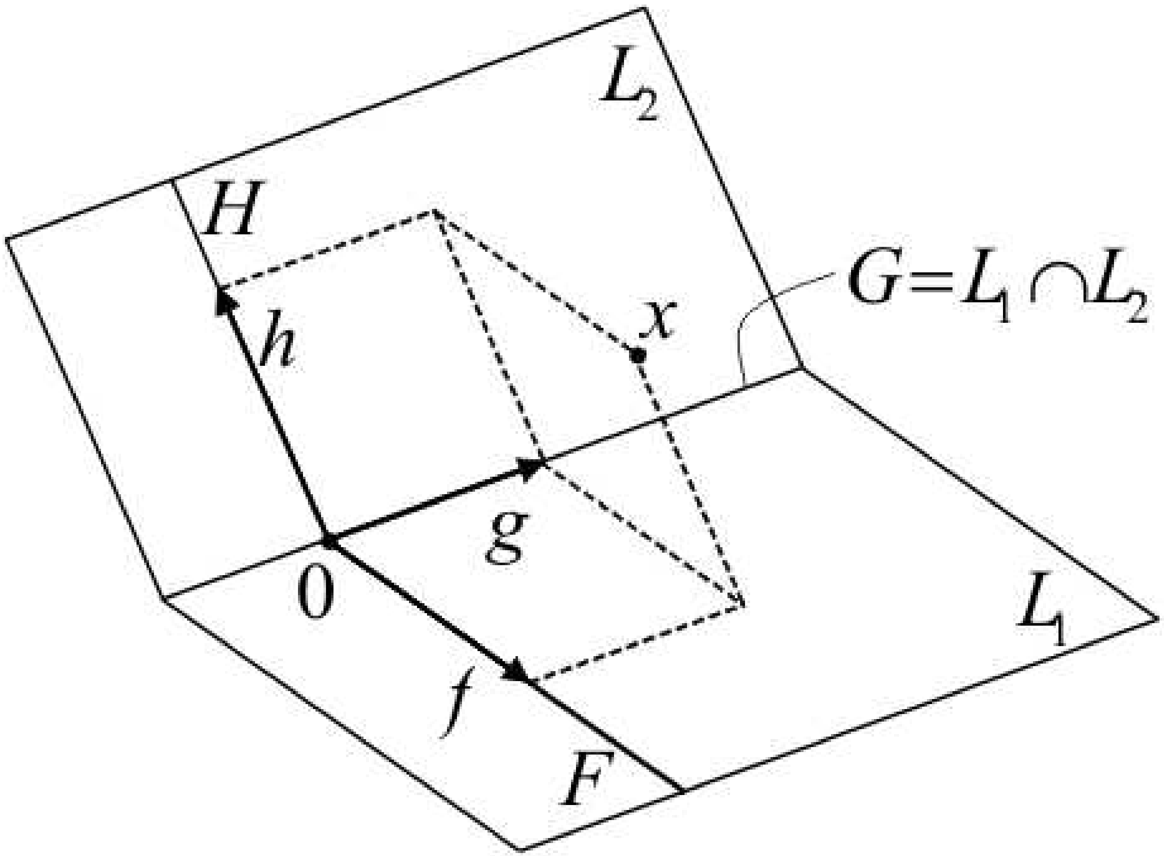
$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2).$$



<u>Доказательство.</u> Пространство

$$G = L_1 \cap L_2,$$

очевидно, конечномерно.

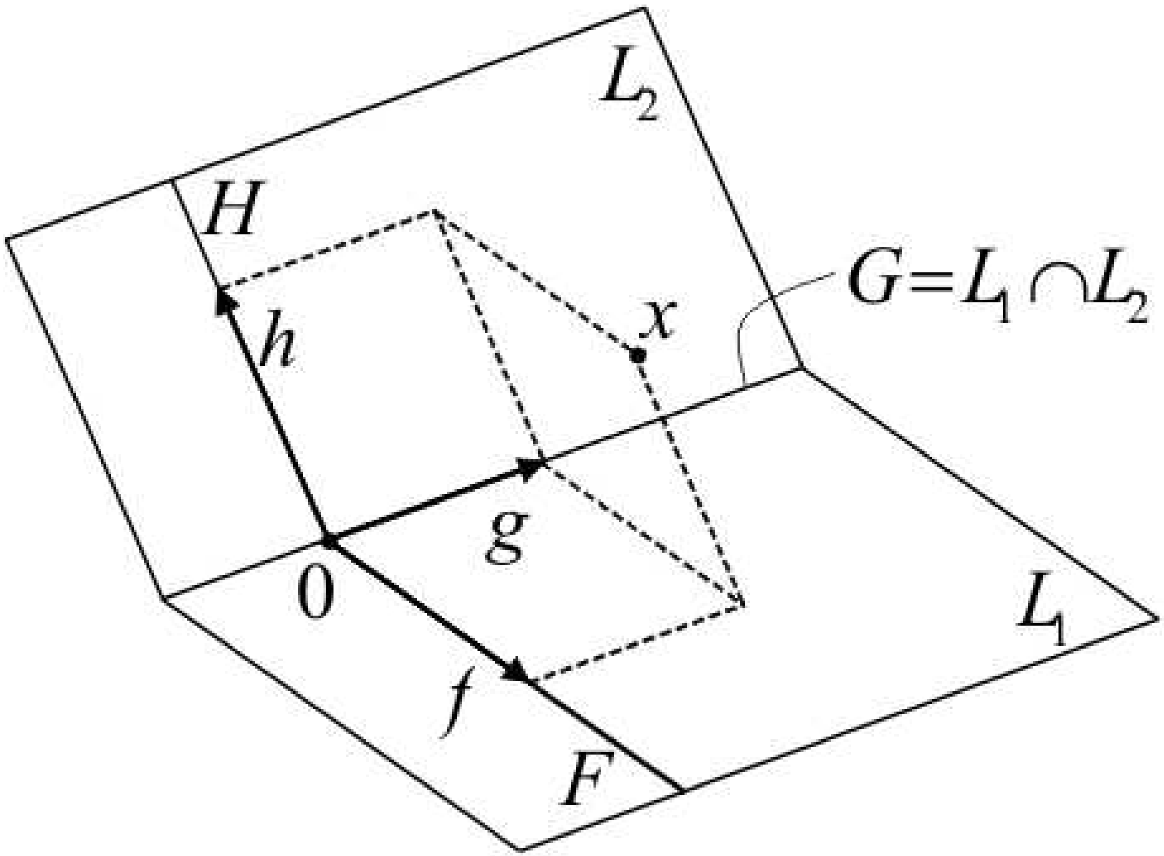


Пусть

$\mathcal{G}_l = \{g^i\}_{i=1}^{l} \subset G$ — **базис** G,

$\mathcal{F}_k = \{f^i\}_{i=1}^{k} \subset L_1$ **дополняют** $\mathcal{G}_l$ **до базиса пространства** L_1,

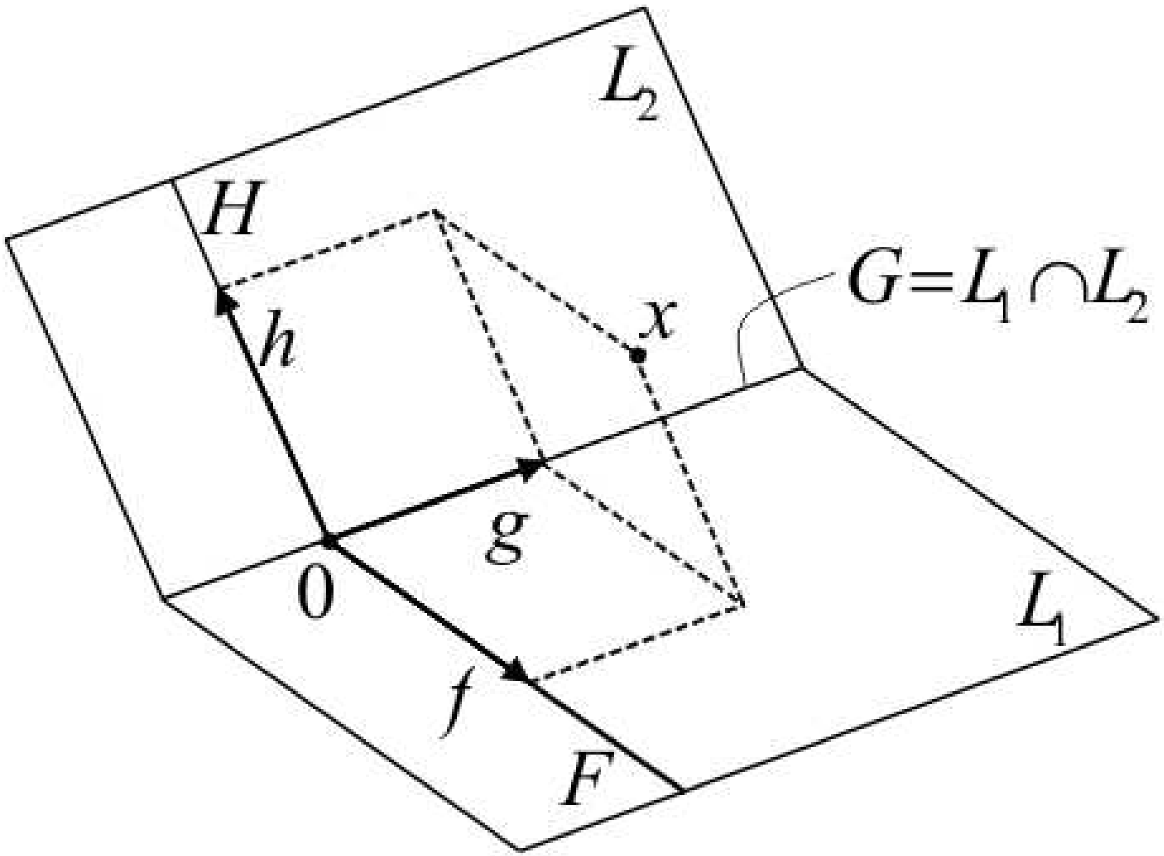
$\mathcal{H}_m = \{h^i\}_{i=1}^{m} \subset L_2$ **дополняют** $\mathcal{G}_l$ **до базиса пространства** L_2.



Пусть

F — подпространство, натянутое на векторы $\mathcal{F}_k$.

H — подпространство, натянутое на векторы $\mathcal{H}_m$.

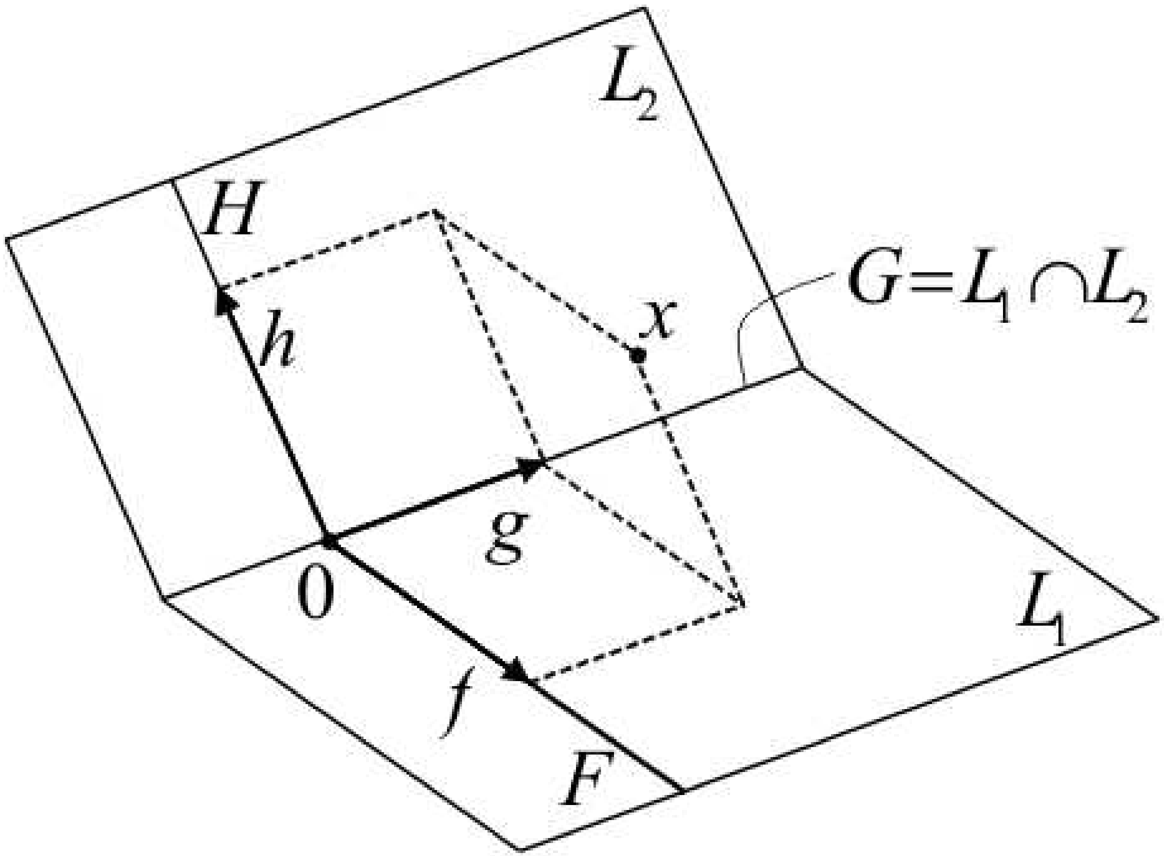


Покажем, что

$$L_1 + L_2 = F + G + H,$$

где

$$G = L_1 \cap L_2.$$

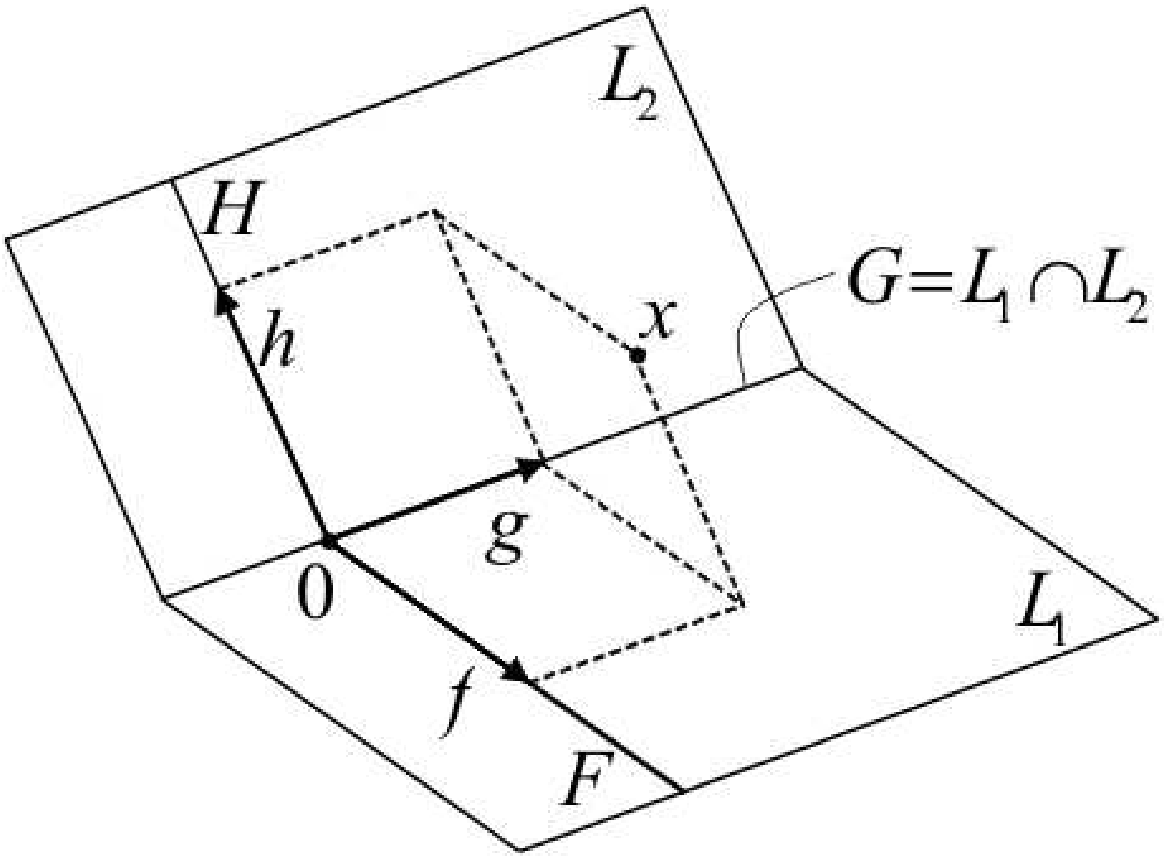


Действительно, если

$$x \in L_1 + L_2,$$

то

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2.$$

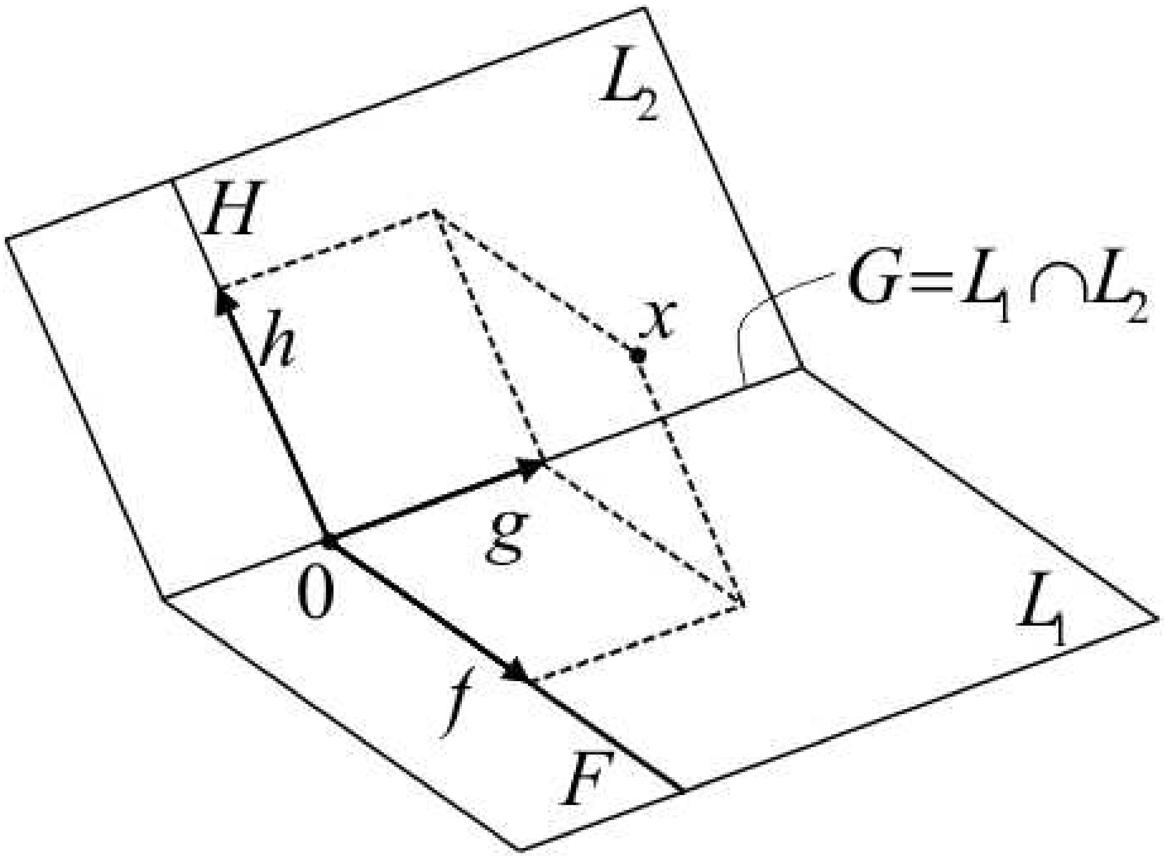


Ясно, что

$$x^1 = f + g^-, \quad x^2 = h + g^+,$$

где

$$f \in F, \quad h \in H, \quad g^+, g^- \in G = L_1 \cap L_2.$$

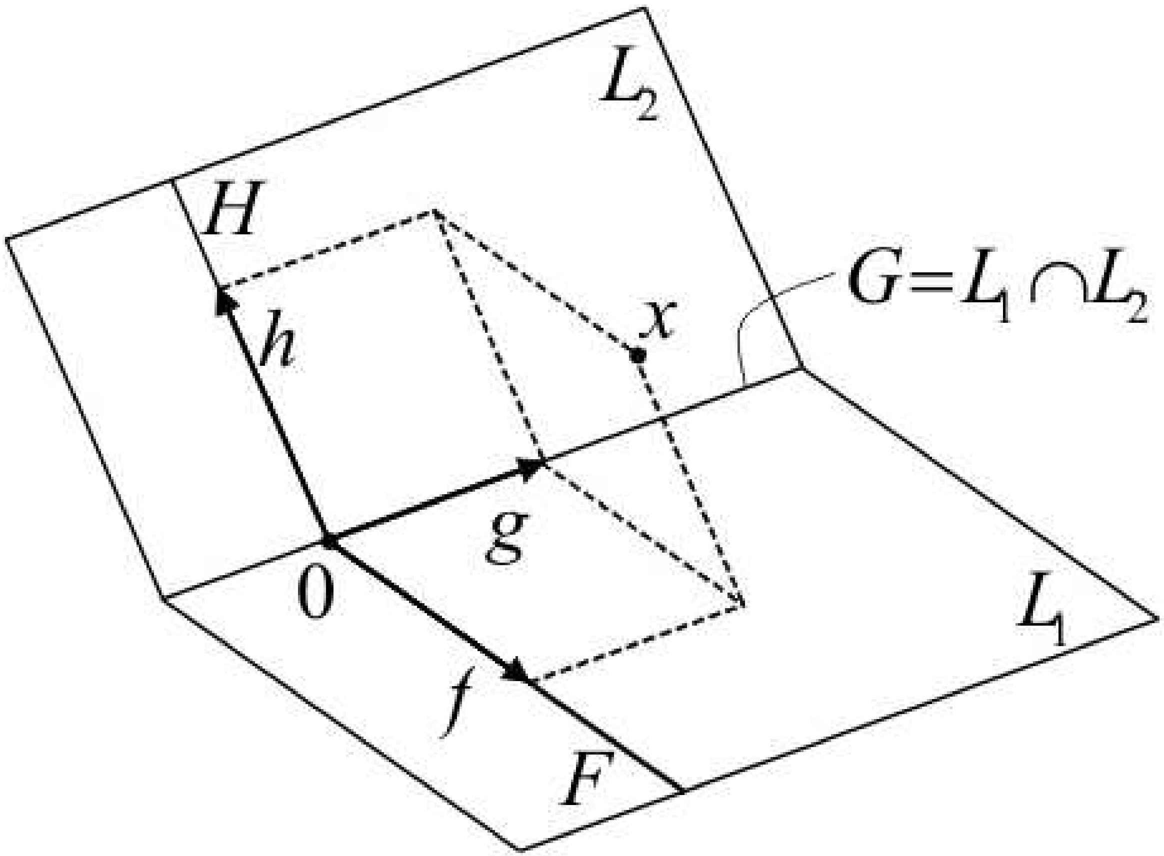


Следовательно,

$$x = f + g + h, \quad f \in F, \quad h \in H, \quad g = g^+ + g^- \in G.$$

Таким образом,

$$x \in F + G + H.$$

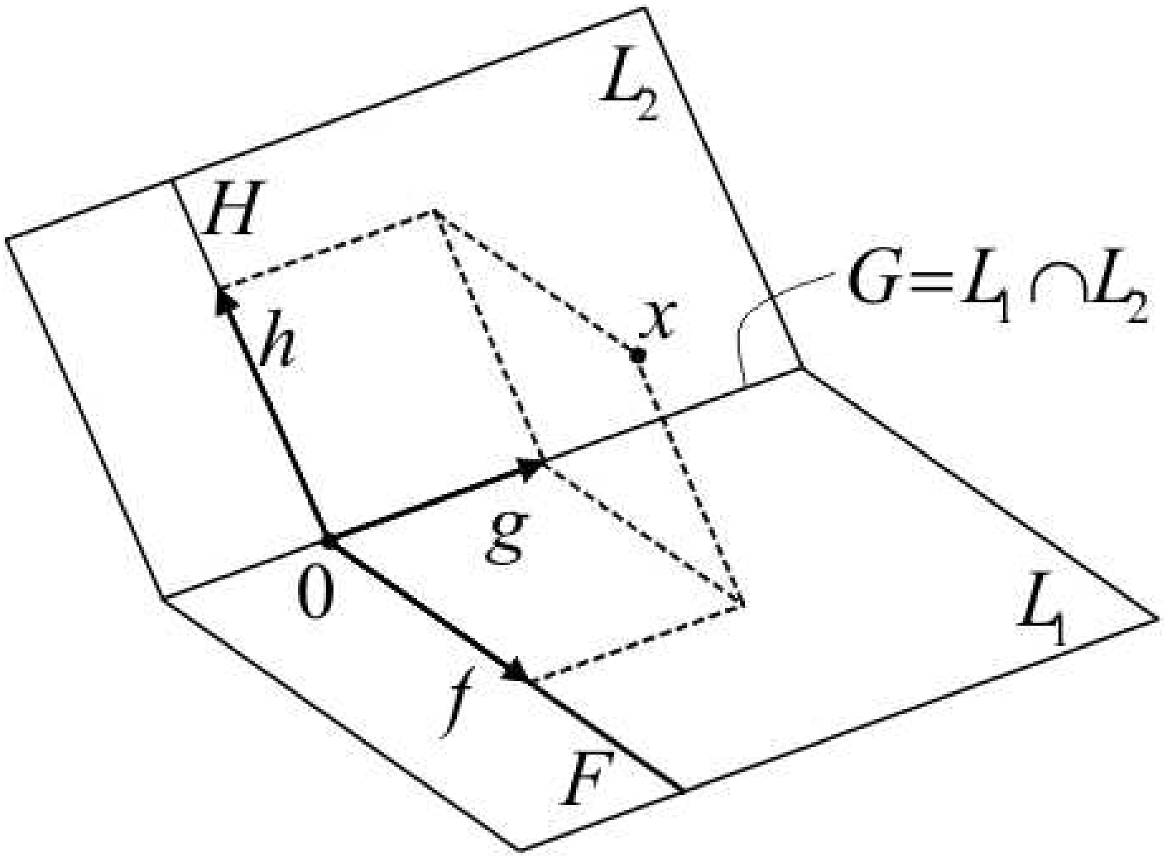


Еще проще доказывается, что если

$$x \in F + G + H,$$

то

$$x \in L_1 + L_2.$$

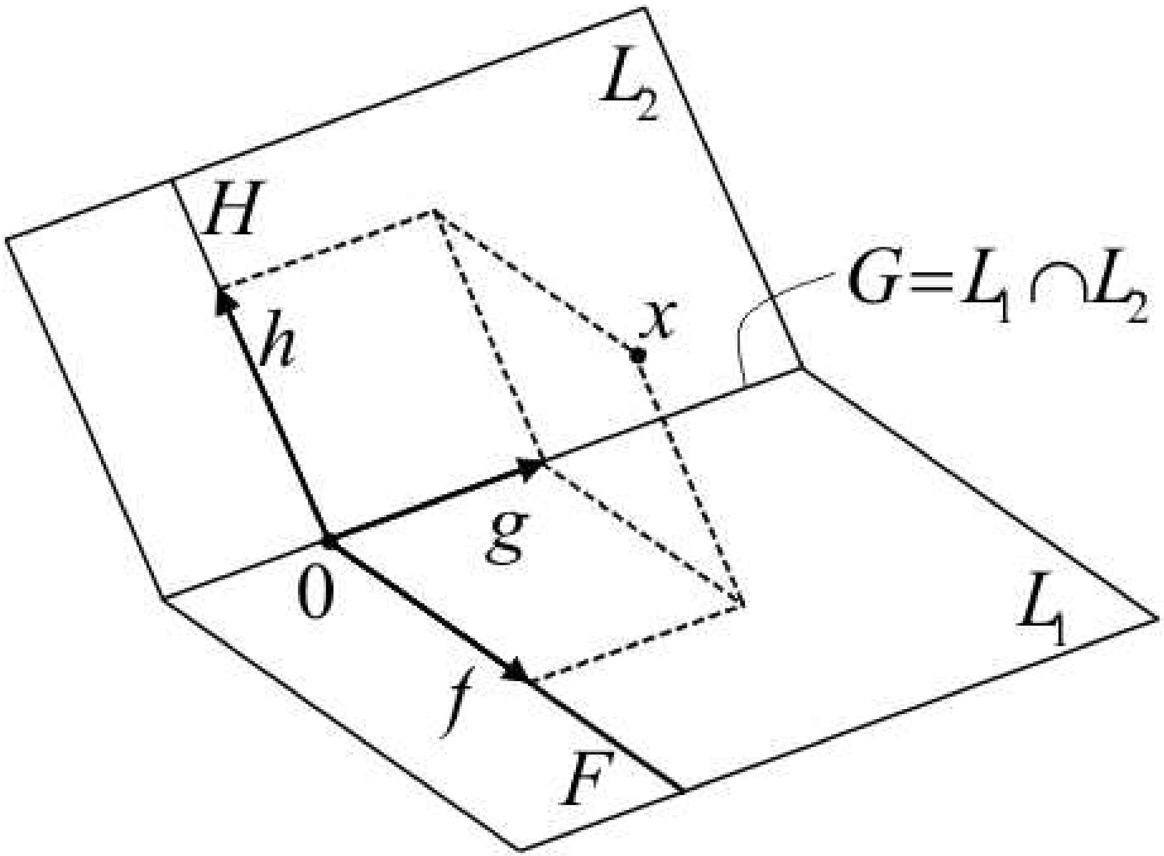


Действительно, если

$$x = f + g + h, \quad f \in F, \quad g \in G, \quad h \in H,$$

то

$$x = (f + g) + h, \quad (f + g) \in L_1, \quad h \in L_2.$$

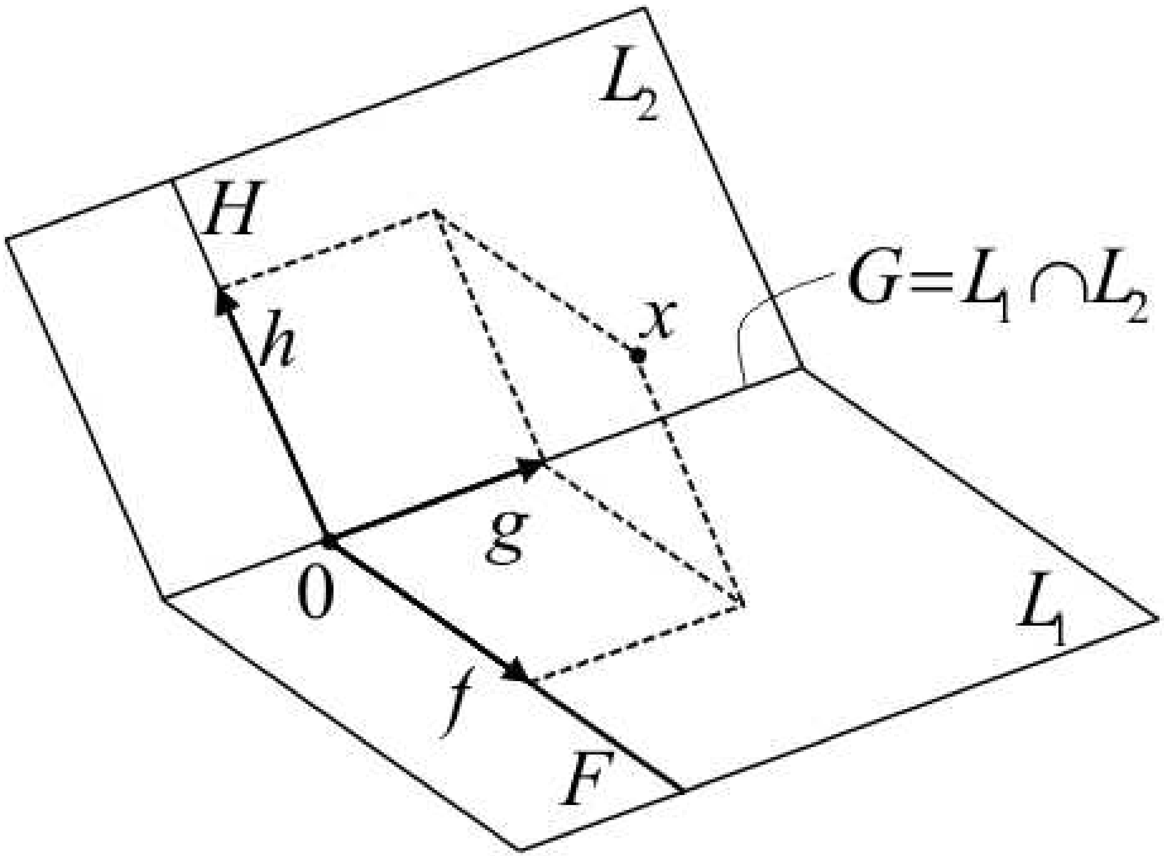


Докажем теперь, что сумма $F+G+H$ прямая. Пусть

$$f+g+h=0, \quad f\in F, \quad g\in G, \quad h\in H.$$

Покажем, что тогда

$$f,\ g,\ h=0.$$



Из $f + g + h = 0$ **следует, что**

$$f + g = -h.$$

Ясно, что

$$-h \in L_2, \quad f + g \in L_1.$$

Итак,

$$f + g = -h$$

и

$$-h \in L_2, \quad f + g \in L_1,$$

следовательно,

$$f + g \in G, \quad h \in G = L_1 \cap L_2.$$

Положим

$$h + g = \widetilde{g}.$$

Из $f + g + h = 0$ получаем

$$f + \widetilde{g} = 0,$$

причем

$$f \in F \quad \widetilde{g} \in G.$$

Поскольку система векторов $\mathcal{F}_k \cup \mathcal{G}_l$ линейно независима, отсюда вытекает, что

$$f = 0, \quad \widetilde{g} = 0.$$

Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что

$$h = 0, \quad g = 0.$$

.

По предыдущей теореме теперь имеем, что

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(F \dot{+} G \dot{+} H) =$$

$$= \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) = k + l + m,$$

но

$$\dim(L_1) = k + l, \quad \dim(L_2) = l + m, \quad \dim(L_1 \cap L_2) = l.$$

Остается заметить, что

$$k + l + m = (k + l) + (l + m) - l.$$

Следовательно,

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2). \ \square$$

Следствие. **Пусть L_1, L_2 — подпространства n-мерного пространства $\mathbf{X}_n$, причем**

$$\dim L_1 + \dim L_2 > n.$$

Тогда

$$L_1 \cap L_2 \neq \{0\}.$$

Доказательство. **Поскольку** $L_1 + L_2$ — **подпространство пространства** $\mathbf{X}_n$, **то**

$$\dim(L_1 + L_2) \leqslant n.$$

По предположению следствия

$$\dim(L_1) + \dim(L_2) > n,$$

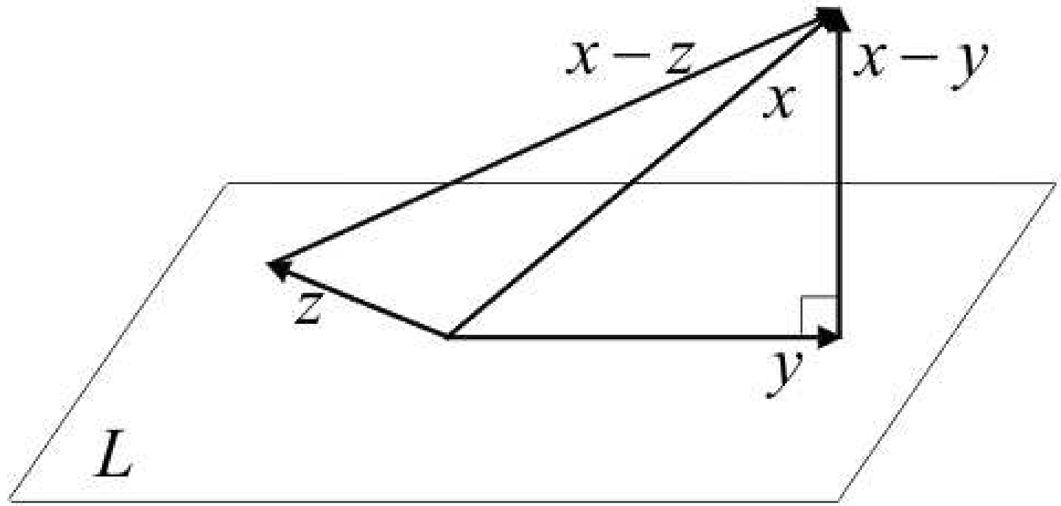
т. е.

$$\dim(L_1) + \dim(L_2) \geqslant n + 1.$$

Тогда

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 + L_2) \geqslant (n+1) - n = 1. \ \square$$

§3. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ПОДПРОСТРАНСТВО



Пусть L — подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$, x — вектор из $\mathbf{X}$. Вектор $y \in L$ назовем ***наилучшим приближением*** к вектору x, если

$$|x - y| \leqslant |x - z| \quad \text{для любого} \quad z \in L.$$

<u>Теорема.</u> Для любого $x \in \mathbf{X}$ и любого конечномерного подпространства $L \subset \mathbf{X}$ существует единственное наилучшее приближение.

Доказательство. Если $L = \{0\}$, единственным наилучшим приближением к x будет нулевой вектор. Поэтому далее полагаем, что

$$L \neq \{0\}.$$

.

Пусть

$$y,\ z \in L.$$

Представим z в виде

$$z = y + h, \qquad h \in L.$$

Тогда

$$(x - z, x - z) = (x - y - h, x - y - h) =$$

$$= (x - y, x - y) - (x - y, h) - (h, x - y) + (h, h).$$

Из полученного равенства

$$|x-y|^2 \underline{\underline{-(x-y,h)-(h,x-y)}} + |h|^2 = |x-z|^2$$

заключаем, что если

$$(x-y,h)=0 \quad \textbf{для любого} \quad h \in L,$$

то условие

$$|x-y| \leqslant |x-z| \quad \textbf{для любого} \quad z \in L$$

выполнено.

Обратно, если выполнено условие

$$|x-y| \leqslant |x-z| \quad \text{для любого} \quad z \in L,$$

то из равенства

$$|x-y|^2 \underline{-(x-y,h)-(h,x-y)+(h,h)} = |x-z|^2$$

следует, что

$$\underline{-(x-y,h)-(h,x-y)+(h,h)} \geqslant 0 \quad \text{для любого} \quad h \in L.$$

Заменим в условии

$$-(x-y,h)-(h,x-y)+(h,h)\geqslant 0 \quad \textbf{для любого} \quad h\in L$$

вектор h **на**

$$h_1=\frac{(x-y,h)}{|h|^2}h.$$

Получим

$$-\left(x-y,\frac{(x-y,h)}{|h|^2}h\right)-\left(\frac{(x-y,h)}{|h|^2}h,x-y\right)+\left(\frac{(x-y,h)}{|h|^2}h,\frac{(x-y,h)}{|h|^2}h\right)=$$

$$=-\frac{\overline{(x-y,h)}}{|h|^2}(x-y,h)-\frac{(x-y,h)}{|h|^2}\overline{(x-y,h)}+\frac{|x-y,h|^2}{|h|^4}(h,h)=$$

$$=-2\frac{|(x-y,h)|^2}{|h|^2}+\frac{|(x-y,h)|^2}{|h|^2}=-\frac{|(x-y,h)|^2}{|h|^2}\geqslant 0.$$

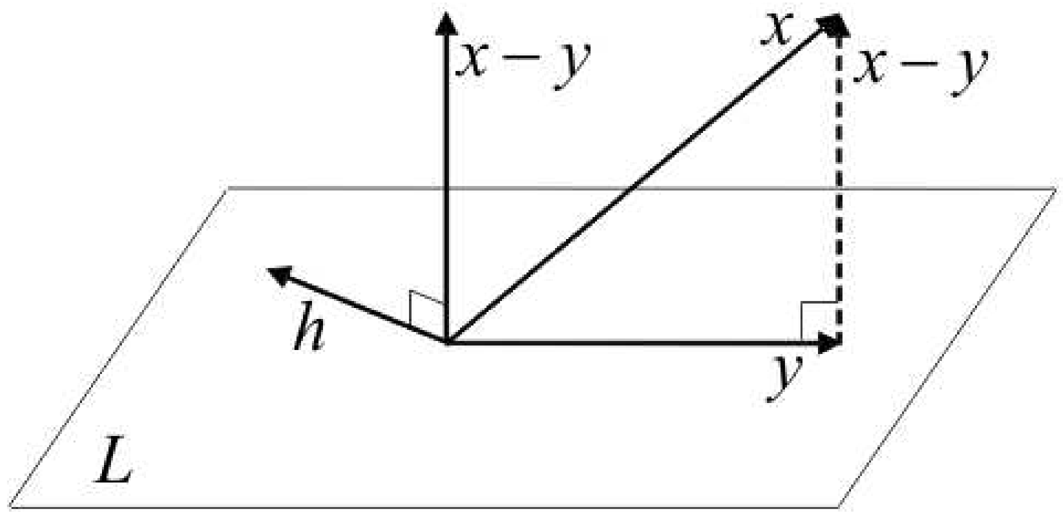
Полученное неравенство

$$-\frac{|(x-y,h)|^2}{|h|^2} \geqslant 0$$

выполняется лишь при

$$(x-y,h)=0.$$

.



Итак, для того чтобы вектор $y \in L$ был наилучшим приближением к вектору $x \in \mathbf{X}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(x-y,h)=0 \quad \forall\ h \in L,$$

иными словами вектор $x-y$ должен быть ортогонален подпространству L.

Докажем, что вектор y, удовлетворяющий условию

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall\ h \in L,$$

однозначно определяется по вектору x.

.

Пусть

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall\ h \in L,$$

и существует еще один вектор $\widetilde{y} \in L$ такой, что

$$(x - \widetilde{y}, h) = 0 \quad \forall\ h \in L.$$

Тогда

$$(y - \widetilde{y}, h) = 0 \quad \forall\ h \in L.$$

Полагая

$$h = y - \widetilde{y},$$

получим, что

$$(y - \widetilde{y}, y - \widetilde{y}) = 0 \implies y = \widetilde{y}.$$

.

Докажем теперь, что существует вектор $y \in L$, удовлетворяющий условию

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall\ h \in L.$$

.

Пусть $\{e^k\}_{k=1}^m$ **— базис подпространства** L**. Условие**

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall\ h \in L,$$

эквивалентно тому, что

$$(x - y, e^k) = 0, \quad k = 1,\ \ldots,\ m.$$

.

Будем искать y в виде разложения по базису:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i e^i.$$

Тогда из

$$(x - y, e^k) = 0, \quad k = 1, \ \ldots, \ m,$$

получаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \eta_i e^i, e^k \right) = (x, e^k), \quad k = 1, \ \ldots, \ m.$$

Более подробная запись условий

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i e^i, e^k\right) = (x, e^k), \quad k = 1, \ \ldots, \ m,$$

дает систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\eta_i (e^i, e^k) = (x, e^k), \quad k = 1, \ \ldots, \ m.$$

для отыскания $\eta_1, \ \ldots, \eta_m$.

Матрица системы

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i(e^i, e^k) = (x, e^k), \quad k = 1, \ \ldots, \ m,$$

есть матрица Грама, соответствующая базису $\{e^k\}_{k=1}^{m}$. Эта матрица невырождена, и система однозначно разрешима при любом

$$x \in \mathbf{X},$$

.

Итак, условие

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall\ h \in L,$$

позволяет построить единственный вектор

$$y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i e^i. \ \square$$

Вектор y вычисляется наиболее просто, когда базис $\{e^k\}_{k=1}^m$ ортонормирован. Тогда система

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i (e^i, e^k) = (x, e^k), \quad k = 1, \ \dots, \ m,$$

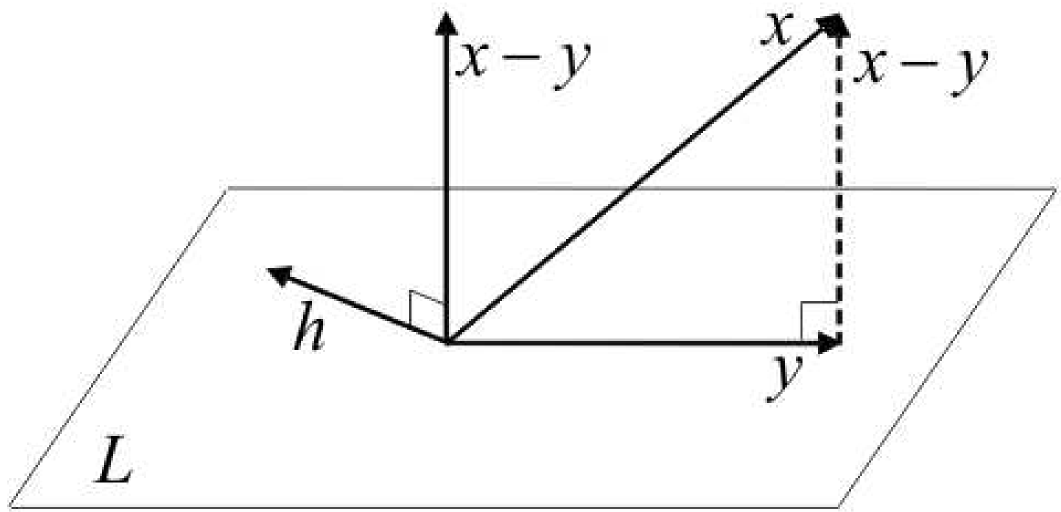
имеет единичную матрицу, и

$$\eta_k = (x, e^k), \quad k = 1, \ \dots, \ m.$$

В этом случае

$$y = \sum_{k=1}^{m} \eta_k e^k = \sum_{k=1}^{m} (x, e^k) e^k.$$

.

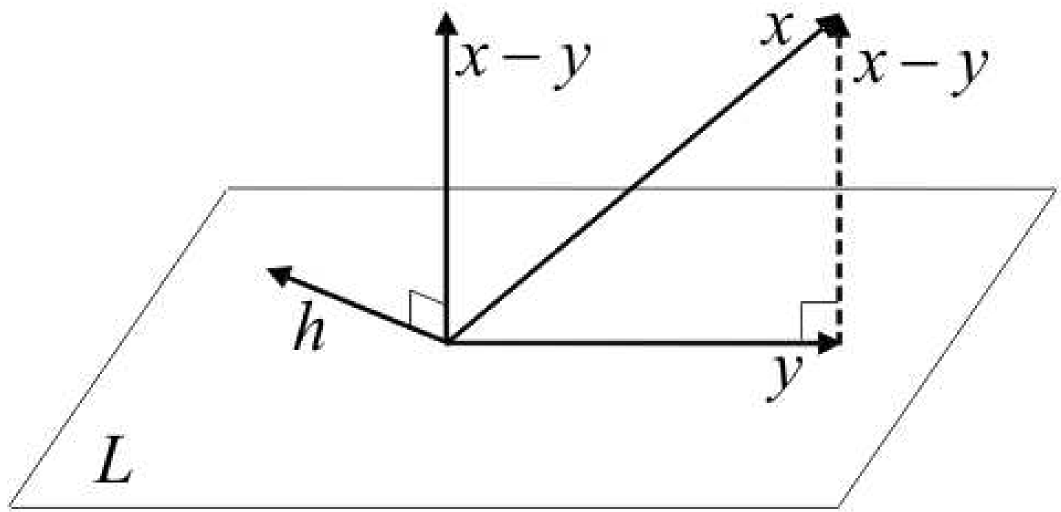


Вектор y, удовлетворяющий условию

$$(x-y,h)=0 \quad \forall\ h \in L,$$

естественно назвать ***ортогональной проекцией*** вектора x на подпространство L, вектор $z=x-y$ — ***перпендикуляром***, опущенным из точки x на подпространство L.

.



Заметим, что $(x-y, y) = 0$, поскольку $y \in L$, следовательно,

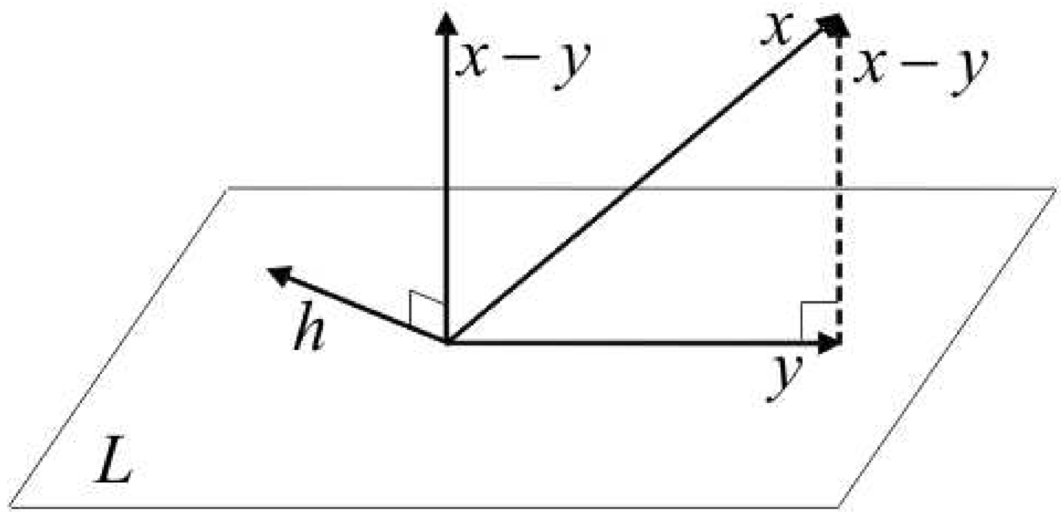
$$(x, x) = (x - y + y, x - y + y) = (x - y, x - y) + (y, y),$$

или

$$|x|^2 = |x - y|^2 + |y|^2.$$

Это — ***тождество Пифагора***.

.



Из

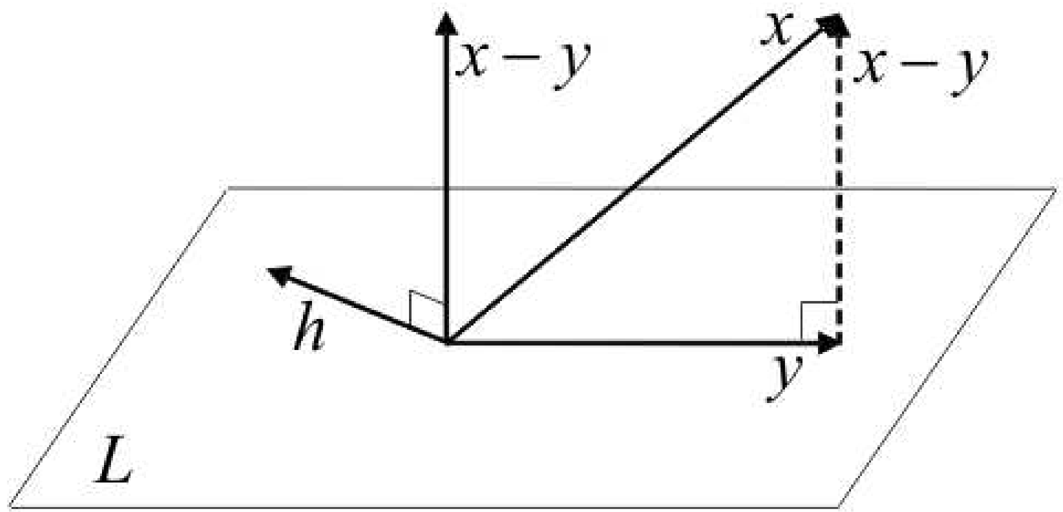
$$|x|^2 = |x-y|^2 + |y|^2$$

следует, что

$$|y|^2 \leqslant |x|^2.$$

Это — так называемое ***неравенство Бесселя***, показывающее, что длина проекции не превосходит длины вектора.

.



Если система векторов $\{e^k\}_{k=1}^m$ ортонормирована, то неравенство Бесселя $|y|^2 \leqslant |x|^2$ принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m} |(x, e^k)|^2 \leqslant |x|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда $x \in L$, т. е. когда $x = \sum\limits_{k=1}^{m} (x, e^k) e^k$.

.

Неравенство Коши — Буняковского

$$|(x,y)| \leqslant |x||y|$$

можно трактовать как частный случай неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{m} |(x,e^k)|^2 \leqslant |x|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{X},$$

когда ортонормированная система векторов состоит только из одного вектора

$$e^1 = \frac{y}{|y|}, \quad y \neq 0.$$

Действительно,

$$|(x,e^1)|^2 = \left|\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right|^2 \leqslant |x|^2 \quad \Longrightarrow \quad |(x,y)|^2 \leqslant |x|^2|y|^2.$$

Фридрих Вильгельм Бессель (Friedrich Wilhelm Bessel; 1784–1846) — немецкий математик и астроном.

<u>Пример.</u> Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы

$$a^1 = (-3, 0, 7, 6),$$

$$a^2 = (1, 4, 3, 2),$$

$$a^3 = (2, 2, -2, -2).$$

Найдем ортогональную проекцию вектора

$$x = (14, -3, -6, -7)$$

на подпространство L и перпендикуляр, опущенный из точки x на подпространство L.

Векторы

$$a^1 = (-3, 0, 7, 6),$$

$$a^2 = (1, 4, 3, 2)$$

линейно независимы (не пропорциональны), вектор

$$a^3 = (2, 2, -2, -2).$$

есть линейная комбинация векторов a^1, a^2, а именно,

$$a^3 = (-1/2)a^1 + (1/2)a^2.$$

Поэтому векторы a^1, a^2 можно принять за базис подпространства L.

Компоненты η_1, η_2 вектора y — проекции вектора x на L в базисе a^1, a^2 — могут быть найдены как решение системы уравнений

$$\eta_1(a^1, a^1) + \eta_2(a^2, a^1) = (x, a^1),$$
$$\eta_1(a^1, a^2) + \eta_2(a^2, a^2) = (x, a^2).$$

.

Вычисляя скалярные произведения, где

$$a^1 = (-3, 0, 7, 6),$$

$$a^2 = (1, 4, 3, 2),$$

$$x = (14, -3, -6, -7),$$

получим

$$(a^1, a^1) = 94,$$

$$(a^2, a^1) = 30,$$

$$(a^2, a^2) = 30,$$

$$(x, a^1) = -126,$$

$$(x, a^2) = -30.$$

Решая систему

$$94\eta_1 + 30\eta_2 = -126,$$

$$30\eta_1 + 30\eta_2 = -30,$$

найдем, что

$$\eta_1 = -3/2, \quad \eta_2 = 1/2,$$

т. е. ортогональная проекция вектора x на подпространство L есть

$$y = (-3/2)a^1 + (1/2)a^2 = (5, 2, -9, -8),$$

где $a^1 = (-3, 0, 7, 6)$, $a^2 = (1, 4, 3, 2)$, а

$$z = x - y = (9, -5, 3, 1)$$

есть перпендикуляр, опущенный из точки $x = (14, -3, -6, -7)$ на подпространство L.

§4. ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Пусть L — подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$. Множество всех векторов из $\mathbf{X}$, ортогональных L, называется ***ортогональным дополнением*** подпространства L и обозначается через $L^{\perp}$:

$$L^{\perp} = \{x \in \mathbf{X} : (x, z) = 0 \quad \forall z \in L\}.$$

Понятно, что

$$(L^{\perp})^{\perp} = \{x \in \mathbf{X} : (x, z) = 0 \ \ \forall z \in L^{\perp}\} = L.$$

Упражнение. Докажите, что $L^{\perp}$ — подпространство пространства $\mathbf{X}$.

<u>Теорема (об ортогональном разложении).</u> Пусть L — конечномерное подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$, $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства L. Тогда

$$\mathbf{X} = L \oplus L^{\perp}.$$

Доказательство. По теореме о наилучшем приближении для любого $x \in \mathbf{X}$ существует $y \in L$ такой, что

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall\ h \in L,$$

следовательно,

$$z = x - y \in L^{\perp}.$$

Итак,

$$x = y + z, \quad (y, z) = 0, \quad y \in L, \quad z \in L^{\perp},$$

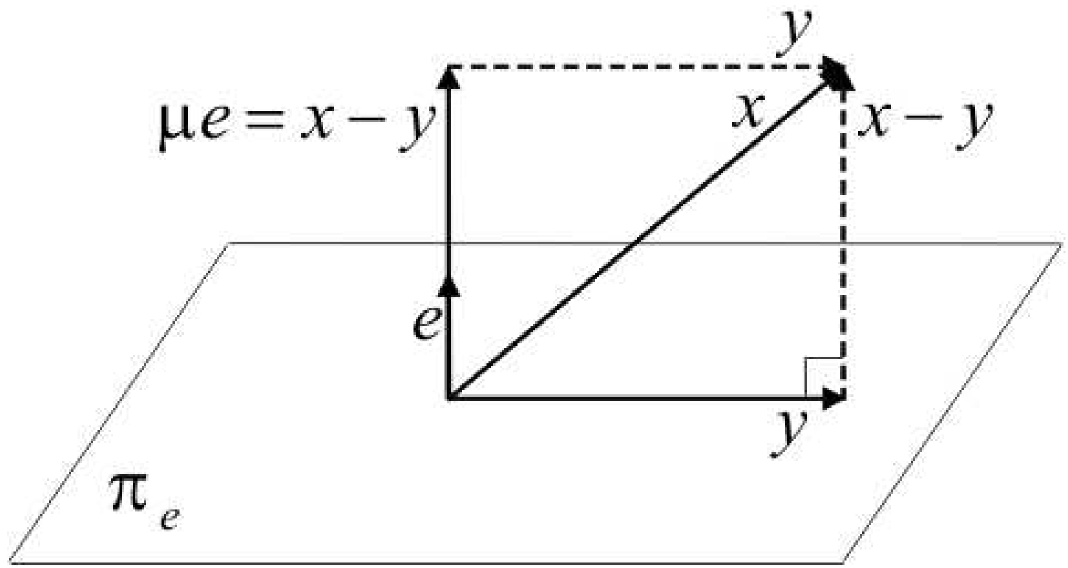
что по определению означает

$$\mathbf{X} = L \oplus L^{\perp}. \ \square$$

Пусть $e \in \mathbf{X}$, $e \neq 0$. Обозначим через π_e множество всех векторов пространства $\mathbf{X}$, ортогональных e.

Упражнение. Докажите, что π_e — подпространство пространства $\mathbf{X}$.

Это подпространство называют *гиперплоскостью*, ортогональной вектору e.



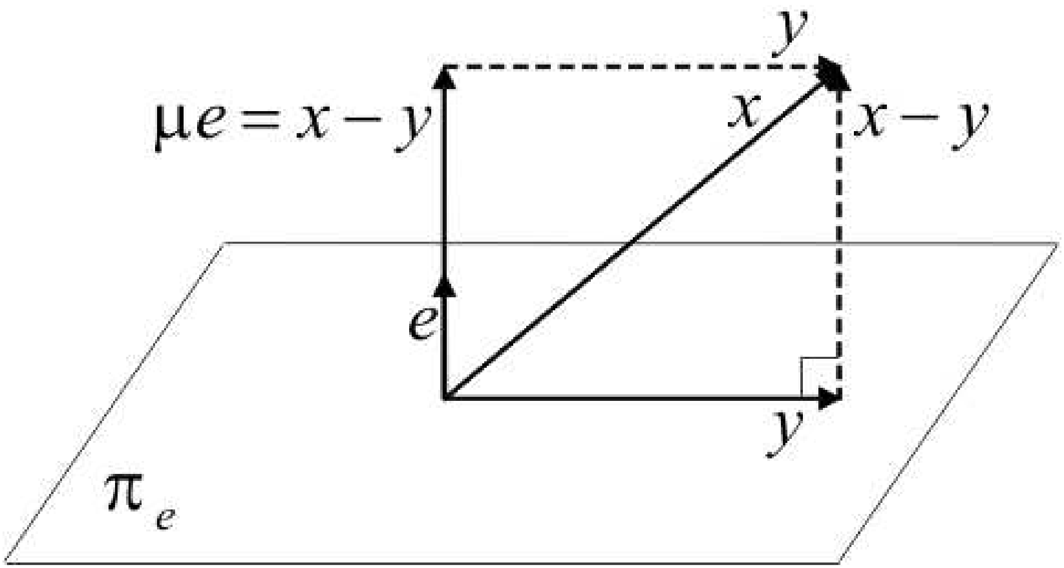
<u>Теорема.</u> Пусть x — произвольный, $e \neq 0$ векторы евклидова пространства $\mathbf{X}_n$. Существуют вектор $y \in \pi_e$ и число μ такие, что

$$x = \mu e + y,$$

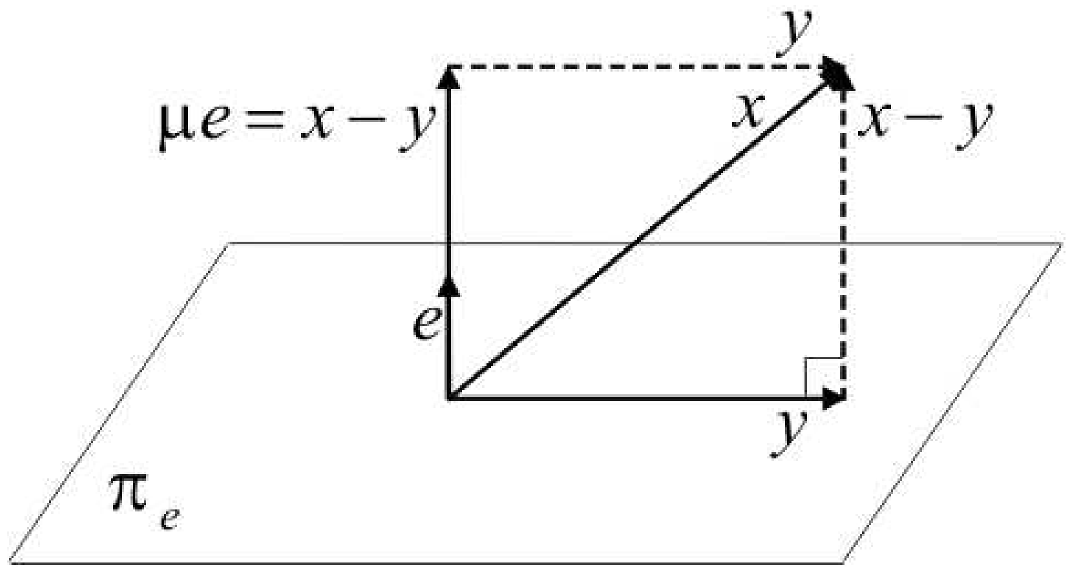
причем μ и y однозначно определяются по вектору x. Кроме того,

$$|x - y| \leqslant |x - z| \quad \text{для любого } z \in \pi_e,$$

т. е. y — элемент наилучшего приближения к x из π_e.

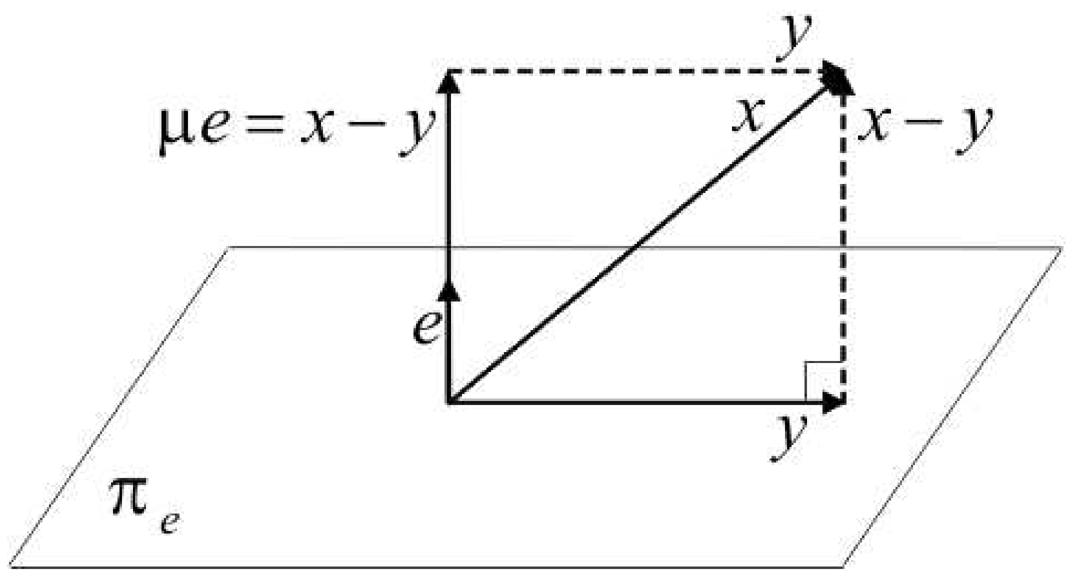


<u>Доказательство.</u> $\mathbf{X}_n$ — конечномерное пространство, следовательно, подпространство π_e конечномерно, и можно воспользоваться теоремой о наилучшем приближении.



По этой теореме для любого $x \in \mathbf{X}_n$ существует единственное наилучшее приближение $y \in \pi_e$, т. е. такой вектор y, что

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall h \in \pi_e.$$



Равенство

$$(x-y,h)=0 \quad \forall h\in\pi_e$$

означает, что

$$x-y\in\pi_e^{\perp}=\{z\in\mathbf{X}:\ \ z=\alpha e,\ \alpha\in\mathbb{C}\}.$$

Значит, существует такое число μ, что

$$x-y=\mu e \quad \Longrightarrow \quad x=\mu e+y.\ \square$$