ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 44

ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ-2011

Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции (Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г.)

Казанское математическое общество
2011

2. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1988. – 336 с.

3. Габдулхаев Б. Г., Душков П. Н. *О полигональном методе решения интегральных уравнений* // Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. – С. 37–57.

4. Агачев Ю. Р. *Сходимость метода подобластей и одного "смешанного" метода для интегральных и дифференциальных уравнений* // Казанск. ун-т. – 48 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.12.1986. – № 9039-В86.

Ю. Р. Агачев, А. И. Леонов, И. П. Семенов, И. Н. Тихонов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

jagachev@ksu.ru

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА КВАДРАТУР РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

Рассматривается интегральное уравнение

$$Kx \equiv x(t) + \int_{-1}^{+1} \mu(s)h(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (1)$$

где $\mu \in L_1(-1,1), h(t,s), y(t)$ – известные функции, $x(t)$ – искомая. Интегральное слагаемое в уравнении (1) задает оператор, который обозначим через H.

Пусть $L_{2,\rho} \equiv L_{2,\rho}(-1,+1)$ – пространство функций, квадратично-суммируемых в промежутке $(-1,+1)$ с весом $\rho(t)$, с нормой

$$\|x\|_{L_{2,\rho}(-1,+1)} \equiv \|x\|_{2,\rho} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{+1} \rho(t)|x(t)|^2 dt}, \quad x \in L_{2,\rho}.$$

Введем в промежутке $(-1,+1)$ равномерную сетку узлов

$$\Delta_n : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = +1, \quad t_k = \frac{2k}{n} - 1, \qquad (2)$$

и множество $S_{\Delta_n,0}$ сплайнов нулевой степени с узлами из сетки Δ_n. Обозначим через $\overline{S}_n^0$ оператор, который любой функции $z(t)$ ставит в соответствие сплайн $(\overline{S}_n^0 z)(t) \equiv \overline{S}_n^0(z;t) \subset S_{\Delta_n,0}$, определяемый про формуле

$$(\overline{S}_n^0 z)(t) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(z)\psi_k(t), \quad \Phi_k(z) = \frac{n}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} z(t)\, dt, \qquad (3)$$

где $\{\psi_k(t)\}_1^n$ – фундаментальные сплайны нулевой степени:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in (t_{k-1}, t_k], \\ 0, & t \notin (t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

причем $\psi_1(t)$ непрерывна в точке $t_0 = -1$ справа.

Аппроксимативные свойства сплайна (3) устанавливаются в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть суммируемая функция $z \in L_{2,\rho}(-1,+1)$. Тогда*

$$\|z - \overline{S}_n^0 z\|_{2,\rho} \leqslant \sqrt{2}\,\omega\left(z; \frac{2}{n}\right)_{2,\rho},$$

где $\omega(z;\delta)_{2,\rho}$ есть интегральный модуль непрерывности функции $z(t)$ с шагом $\delta, 0 < \delta \leqslant 2$, т. е.

$$\omega(z;\delta)_{2,\rho} \equiv \sup_{0<\eta\leqslant\delta} \|z(\cdot + \eta) - z(\cdot)\|_{L_{2,\rho}(-1,1-\eta)}.$$

Доказательство этой леммы может быть проведено по методике, предложенной П.Л. Ульяновым в работе [1].

Если весовую функцию $\rho(t)$ взять равной $|\mu(t)|$, то задача решения уравнения (1) будет корректно поставленной по Адамару, если от известных функций потребовать принадлежности

$$y \in L_{2,\rho}(-1,+1), \quad h \in L_{2,q}([-1,+1]^2), \text{ где } q(t,s)=\rho(t)\rho(s).$$

Указанный факт следует из следующего результата.

Лемма 2. *Если* $h \in L_{2,q}([-1,+1]^2), q(t,s) = \rho(t)\rho(s)$, *то оператор* $H : L_{2,\rho} \to L_{2,\rho}$ *вполне непрерывен.*

Таким образом, однозначная разрешимость уравнения (1) в пространстве $L_{2,\rho}(-1,+1)$ при $h \in L_{2,q}([-1,+1]^2)$ эквивалентна существованию непрерывного двустороннего обратного $K^{-1} : L_{2,\rho} \to L_{2,\rho}$.

Будем решать уравнение (1) методом механических квадратур. Поскольку известные функции не являются непрерывными, обычная вычислительная схема метода здесь не применима. Поэтому ее будем строить из следующих соображений.

Возьмем квадратурную формулу вида

$$\int_{-1}^{+1} \mu(s)z(s)\,ds \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi_k(z), \quad A_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mu(s)\,ds. \tag{4}$$

Заметим, что формула (4) построена путем замены $z(s)$ на сплайн $\overline{S}_n^0(z;s)$. Поэтому она является сходящейся на всем пространстве $L_{2,\rho}(-1,+1)$.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде сплайна из $S_{\Delta_n,0}$:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \psi_k(t), \tag{5}$$

неизвестные коэффициенты которого определим, заменив, после подстановки вместо $x(t)$ сплайна $x_n(t)$, интеграл в (1) квадратурной суммой (4). В результате относительно $\{c_k\}_1^n$ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_j + \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi_j(\Phi_k^s(h)) c_k = \Phi_j(y), \quad j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где Φ_k^s есть функционал Φ_k, примененный по переменной s.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполнены предположения:*

1) $\mu \in L_1(-1,+1)$;

2) $y \in L_{2,\rho}(-1,+1)$, $h \in L_{2,q}([-1,+1]^2), \rho(t) = |\mu(t)|$, $q(t,s) = \rho(t)\rho(s)$;

3) уравнение (1) имеет единственное решение при любой правой части из $L_{2,\rho}$.

Тогда система (6) однозначно разрешима, хотя бы при всех n, *достаточно больших. Приближенные решения, построенные по формуле (5), сходятся к точному решению уравнения (1) в метрике* $L_{2,\rho}$ *со скоростью*

$$\|x - x_n\|_{2,\rho} = O\left\{\omega\left(y; \frac{2}{n}\right)_{2,\rho} + \omega_t\left(h; \frac{2}{n}\right)_{2,\rho} + \omega_s\left(h; \frac{2}{n}\right)_{2,\rho}\right\}. \tag{7}$$

Заметим, что доказательство теоремы может быть проведено с помощью варианта общей теории приближенных методов, предложенного Б.Г. Габдулхаевым (см. [2], теорема 7 на стр. 19), при этом порядок сходимости, определяемый оценкой (7), окончательный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ульянов П. Л. *О рядах по системе Хаара* // Матем. сб. – 1964. – Т. 63. – № 3. – С. 356–391.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

Г. Р. Адиятуллина

Казанский (Приволжский) федеральный университет, gulshaton@mail.ru

РЕАЛИЗАЦИЯ ОБМЕНА ДАННЫМИ МЕЖДУ MAPLET-ПРИЛОЖЕНИЕМ И ФАЙЛАМИ ФОРМАТА .TXT И .XLS

В [1] описаны принципы моделирования системы аналитического тестирования [2] на основе математического пакета Maple. В качестве средства создания интерактивной среды тестирования были предложены маплеты. При работе над системой возникла необходимость организации обмена данными системы с внешними приложениями. В этой работе мы рассмотрим неисследованные в литературе вопросы импорта и экспорта данных в `txt`- и `xls`-файлы из маплетов.

СКМ Maple обладает возможностью обмена информацией с текстовыми файлами. Для работы с ними в Maple имеется пакет `FileTools`. Кроме работы с текстовыми файлами в Maple имеется возможность работы с файлами офисного приложения MS Excel. Команды, позволяющие осуществить обмен данными между этими приложениями, содержатся в пакете `ExcelTools`. В [1] описана принципиальная схема системы аналитического тестирования, включающая несколько специализированных библиотек. Мы расширили систему, включив в нее текстовые файлы, содержащие наборы индивидуальных заданий по темам, файлы приложения MS Excel, содержащие