Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах

Кац Д.Б.

Аннотация

The author introduces certain new characteristics for non-rectifiable curves and uses them for sharpening of known solvability conditions for so called jump boundary value problems on that curves.

Аннотация

В работе вводятся новые характеристики неспрямляемых кривых, позволяющие улучшить ранее известные условия разрешимости так называемой задачи о скачке для таких кривых.

Ключевые слова: неспрямляемые кривые, краевая задача Римана, задача о скачке.

Key words: non-rectifiable curves, Riemann boundary value problem, jump problem.

УДК 517.54

Введение

Краевая задача Римана - это классическая задача комплексного анализа, исследование которой на гладких и кусочно-гладких контурах относится к общепризнанным достижениям советской математики (см. [1, 2]). Решение этой задачи в случае неспрямляемого контура было получено тридцать лет тому назад [3, 4]. Приведем один из основных результатов в этой области, для чего определим некоторые используемые в нем понятия.

Условие Гельдера. Пусть Γ есть компактное множество на комплексной плоскости, $0 < \nu \leq 1$. Заданная на Γ функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем ν, если

$$\sup\left\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in \Gamma, t' \neq t''\right\} := h_\nu(f, \Gamma) < \infty.$$

$H_\nu(\Gamma)$ есть множество всех функций, удовлетворяющих этому условию.

Верхняя метрическая размерность. Обозначим через $N(\varepsilon, \Gamma)$ наименьшее число кругов диаметра ε покрывающих Γ. Тогда верхняя метрическая размерность Γ определяется как предел (см. [5])

$$\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon, \Gamma)}{-\ln \varepsilon}.$$

Задача о скачке. Пусть Γ есть простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая, разбивающая комплексную плоскость на конечную область D^+ и содержащую бесконечно удаленную точку область D^-. Задачей о скачке называют краевую задачу об отыскании голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, которая непрерывна в $\overline{D^+}$ и в $\overline{D^-}$, и предельные значения которой в точках $t \in \Gamma$ из областей D^+ и D^- связаны соотношением

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Это простейший и во многих отношениях важнейший частный случай краевой задачи Римана.

Теперь мы можем сформулировать упомянутый выше результат.

Теорема 1 (see [3, 4]). *Пусть Γ есть простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и $f \in H_\nu(\Gamma)$. Если*

$$\nu > \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma, \tag{2}$$

то задача о скачке (1) имеет решение.

Известен пример (см. [4]), когда условие (2) нарушено и задача о скачке неразрешима. В то же время описаны ситуации (см. [7]), когда она имеет решения несмотря на нарушение условия (2). В связи были введены другие характеристики неспрямляемых кривых, отличные от верхней метрической размерности и позволяющие уточнить условие (2). Так, в работах [7, 8, 9] введены так называемые аппроксимационная размерность и уточненная метрическая размерность. Доказано, что теорема 1 сохраняет силу при замене в условии (2) верхней метрической размерности на любую из этих размерностей, причем каждая из них может оказаться меньше $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$, так что указанная замена усиливает теорему 1. Однако в литературе нет примеров точного вычисления аппроксимативной или уточненной метрической размерности для нетривиальных кривых. В связи с этим в краевых задачах возникает потребность в разработке новых характеристик неспрямляемых кривых.

1 Показатель Марцинкевича

В данной работе мы рассмотрим следующую характеристику. Пусть Γ есть замкнутая жорданова кривая, разбивающая комплексную плоскость на конечную область D^+ и бесконечную область D^-. В дальнейшем мы предполагаем, что эта кривая неспрямляема, но имеет нулевую площадь, так что области D^+ и D^- измеримы. Рассмотрим интеграл

$$I_p(D^+) = \iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{\mathrm{dist}^p(z,\Gamma)}, \quad z = x + iy.$$

Очевидно, что при $p = 0$ этот интеграл конечен - равен площади D^+. При больших p он может оказаться бесконечным. В связи с этим введем величину

$$\mathfrak{me}\,\Gamma = \sup\{p : I_p(D^+) < \infty\}.$$

Аналогично, рассмотрим область D^*, равную $D^- \bigcap \{z : |z| < r\}$, где r настолько велико, что Γ полностью содержится в этом круге. Для этой области также введем характеристику

$$\mathfrak{me}^-\,\Gamma = \sup\{p : I_p(D^*) < \infty\}.$$

Величины $\mathfrak{me}\,\Gamma$ и $\mathfrak{me}^-\,\Gamma$ связаны со свойствами кривой Γ. Характеризация свойств множества через поведение некоторых интегралов по дополнению этого множества восходит к работам Марцинкевича (см. ссылки в [10]). В связи с этим мы будем называть $\mathfrak{me}\,\Gamma$ и $\mathfrak{me}^-\,\Gamma$ показателями Марцинкевича кривой Γ (внутренним и внешним).

Основные свойства этих показателей описывает

Теорема 2 *Внутренний и внешний показатели Марцинкевича любой кривой удовлетворяют неравенствам* $\mathfrak{me}\,\Gamma \geq 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$, $\mathfrak{me}^-\,\Gamma \geq 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$. *Если кривая* Γ *спрямляема, то её внутренний и внешний показатели Марцинкевича оба равны единице.*

Автором построены примеры, показывающие, что: (а) показатель Марцинкевича неспрямляемой кривой может быть больше единицы; (б) существует неспрямляемая кривая Γ, показатель Марцинкевича которой (внутренний или внешний) строго больше $2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$; (в) существует неспрямляемая кривая Γ для которой $\mathfrak{me}\,\Gamma \neq \mathfrak{me}^-\,\Gamma$.

2 Задача о скачке и показатели Марцинкевича.

Основным результатом работы является

Теорема 3 *Пусть* Γ *есть простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и* $f \in H_\nu(\Gamma)$. *Если выолнено хотя бы одно из двух условий*

$$\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{me}\,\Gamma, \tag{3}$$

$$\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{me}^-\,\Gamma. \tag{4}$$

то задача о скачке (1) имеет решение.

Из упомянутых выше примеров следует, что установленные в этих теоремах условия разрешимости задачи о скачке менее ограничительны (вообще говоря) чем условие (2) из приведенной выше теоремы 1.

Теперь обсудим единственность полученных нами решений задачи о скачке. Пусть Φ_1 и Φ_2 – какие-то два ее решения в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в замыканиях областей D^+ и D^-, $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$. Непосредственно из краевого условия (1) следует, что функция $\Psi(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. Кроме того, она удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ в окрестности кривой Γ. Как установил Е.П.Долженко [12], такая функция будет голоморфной в точках кривой Γ если $\mu > \mathrm{dmh}\,\Gamma - 1$, где $\mathrm{dmh}\,\Gamma$ – размерность

Хаусдорфа кривой Γ (см., напр., [6]). Но тогда она голоморфна в замкнутой комплексной плоскости, то есть постоянна. С учетом приведенных выше результатов получаем

Следствие 1 *Пусть выполнены условия Теоремы 3 и хотя бы одно из двух условий*

$$\mathrm{dmh}\,\Gamma < \mu < 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{me}\,\Gamma},$$

$$\mathrm{dmh}\,\Gamma < \mu < 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{me}^-\,\Gamma}.$$

Тогда решение задачи о скачке (1) в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в замыканиях областей D^+ и D^-, единственно с точностью до аддитивной постоянной.

На основе этих результатов можно также получить условия разрешимости однородной и неоднородной краевых задач Римана на неспрямляемой кривой по схеме, предложенной в работах [3, 4, 7].

Список литературы

[1] Гахов Ф.Д., Краевые задачи, Москва, Наука, 1977. - 640 с.

[2] Н.И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Москва, Наука, 1962.

[3] Кац Б.А. Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой. Доклады АН СССР. 1982. Т.267, №4. С. 789—792

[4] Кац Б.А., Задача Римана на замкнутой жордановой кривой. Известия ВУЗов. Математика. 1983, №4. С. 68-80

[5] Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М., $\varepsilon-$энтропия и емкость множеств в функциональных пространствах, Успехи Мат. Наук, 14 (1959), С. 3–86.

[6] Федер Е., Фракталы, Москва, Мир, 1991.

[7] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B.A. Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. 380, Issue 1, 2011, P. 177-187

[8] Кац Б.А. Метрические характеристики неспрямляемых дуг и задача о скачке. Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. 2008 т.150 кн.1 с. 56-64

[9] Kats B.A. The Refined Metric Dimension with Applications. Computation Methods and Function Theory No.1 (2007), 77–89.

[10] Стейн И., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойств функций, Москва, Мир, 1973. - 342 с.

[11] Векуа И.Н., Обобщенные аналитические фукции, Москва, Наука, 1988. - 512 с.

[12] Долженко Е.П., О "стирании"особенностей аналитических функций, Успехи Матем. Наук, 18(1963), No 4, С. 135-142