КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИМПЕРАТОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.И. Ульянова-Ленина

Казанцев А.В.

Вычисление IBNR-резервов по Штраубу

Методическая разработка

Казань 2019

ABSTRACT

Цель работы – разобрать шесть методов алгоритмизации вычисления IBNR-резервов, приведенных в монографии Э. Штрауба «Актуарная математика имущественного страхования» (рус. изд. 1990 г.). Речь идет о трех методах Бюльмана – 1) цепной лестницы, 2) Кейп Код, 3) дополнительной убыточности – и трех вариантах Бенджамина-Иглза метода лондонской цепи – 4) классической, 5) с точным центром и 6) с приближенным центром. Актуальность работы определяется необходимостью введения в учебный обиход одной из важнейших тем рискового (т.е. имущественного) страхования – темы IBNR-резервов, хорошо известной на Западе, но испытывающей дефицит источников в России.

В работе решены следующие задачи: а) реконструирован порядок заполнения треугольника выплат, приведенного в монографии; б) студенткой А. Гафаровой предложен вариант программного обеспечения, автоматизирующего вычисление IBNR-резервов по каждому из указанных методов (на языке программирования Python); в) прояснен ряд теоретических аспектов, лежащих в основе соответствующих алгоритмов. При этом алгоритмическая направленность предпринятого в работе исследования переносит основное внимание с проблемы обоснований на проблему реализации.

Наибольший интерес, как с точки зрения теории, так и в практическом плане, представляет метод лондонской цепи с точным центром, на каждом шаге решающий две задачи минимизации. Данный метод является развитием метода классической лондонской цепи, основанного на отыскании параметров уравнения прямой линии среднеквадратичной регрессии. В настоящей работе символьные преобразования Штрауба, определенные для треугольника выплат, обобщаются на более общий случай трапеции выплат. Приведены реализации соответствующих вычислений.

Обобщающим итогом работы стало формирование адекватных представлений исследователя о характере дальнейших задач, которые предстоит решать с учетом уже сделанного. К числу таких задач можно отнести следующие проблемы.

i) *Проблема вычисления и оценивания* – прежде всего, в применении к коэффициентам развития $C_{i,i+1}$. Точных правил их вычисления вообще нет в книге Штрауба – есть только оценки, которые ничем не обоснованы. А как считать или оценивать среднюю окончательную убыточность, совершенно непонятно. Еще один вопрос: каким образом оказывается, что выражение для $C_{i,i+1}$ в случае цепной лестницы становится оценкой для аналогичного выражения в случае лондонской цепи с точным центром?

ii) *Проблема обоснования* – оно настоятельно требуется, например, для сходимости итерационных процессов лондонских лестниц.

iii) *Проблема эвристики и интерпретаций* – связана с появлением центра в лондонских лестницах. Каким образом специальная замена переменных среди параметров уравнения прямой линии регрессии приводит к ситуации, которую можно интерпретировать как последовательность поворотов некоторой прямой вокруг некоторой оси?

iv) *Проблема сравнения*. Ее ставит и сам Штрауб, и ставит вновь на примере. Какой метод лучше и при каких обстоятельствах?

Рассмотренные проблемы – это, так сказать, «внутренние» проблемы книги Штрауба. Но выход книги Томаса Мака «Математика рискового страхования» сразу породил ряд «внешних» проблем. Например:

v) В книге Мака коэффициенты развития $C_{i,i+1}$ оцениваются по совершенно другой формуле, чем у Штрауба, что порождает совершенно другую реальность, в которой оставшиеся пять методов еще только предстоит распознать. Кейп Код рассматривается довольно поверхностно. В то же время в отечественной литературе по *IBNR*-резервам отмечено появление и других методов вычисления: единственные свидетельства их существования – численные примеры – предполагают наличие формул, которые как раз и предстоит выяснить.

Вычисление IBNR-резервов по Штраубу.

Следуем тексту книги Штрауба [Шт], с. 113-125; это глава 7 «Резервы». Наша цель – разобрать приведенные в конце указанной главы реализации того, что автор называет «шестью» практическими методами вычисления IBNR». Этими методами являются:

1) метод цепной лестницы;
2) метод Кейп Код;
3) метод дополнительной убыточности (Loss Ratio);
4) метод классической лондонской цепи;
5) метод лондонской цепи с точным центром;
6) метод лондонской цепи с приближенным центром.

IBNR = Insured But Not Reported, «произошло, но не вошло в отчет».

Основой для вычисления IBNR является треугольник произведенных выплат страховых возмещений, изображенный ниже как таблица 1.1.

Таблица 1.1

	годы	событий					
годы	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1j}	$\cdots$	X_{1n-1}	X_{1n}
развития		X_{22}	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	X_{2n-1}	X_{2n}
				$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
				X_{jj}		$\vdots$	$\vdots$
						X_{n-1n-1}	
							X_{nn}
	P_1	P_2		P_j		P_{n-1}	P_n

Здесь X_{ij} – та часть убытков по страховым случаям j-го года событий, которая была покрыта страховщиком в течение i-го года развития. При этом самый ранний год событий – это $j = n$, а самый поздний – $j = 1$. Символом P_j обозначена суммарная страховая премия, полученная страховщиком за год событий j.

Разумеется, понятие «самый поздний» имеет условный характер, поскольку жизнь все-таки продолжается, и чисто теоретически, треугольник должен до бесконечности продолжаться на юго-запад. С другой стороны, поскольку «и это пройдет», то за конечное число шагов «все должно быть кончено».

Формируется треугольник выплат следующим образом.

В год $j = n$ (пусть это будет 2001 год) происходит некоторое число страховых случаев, или страховых событий, предусмотренных страховой ответственностью данного страховщика. На этом статус года $j = n$ как *года событий* является исчерпанным: он становится первым в череде *годов развития* и приобретает номер $i = 1$. Дальнейшее изучение последствий событий данного года не выходит за рамки последовательности годов развития.

В 2001 году как году развития $i = 1$ становится известной только часть произошедших страховых случаев, приводящая к убыткам в размере X_{1n}. Считается, что данные убытки владельцев полисов оплачиваются страховщиком в этом же году. Это правило полагается действующим в течение каждого года развития: считается, что убытки, ставшие известными в течение очередного года, оплачиваются страховщиком в том же году. (Во всяком случае, всегда можно считать, что оплаченные к концу текущего года убытки и были известными, а остальные игнорировать во имя торжества абстракции.)

В следующем, 2002 году – это год развития $i=2$ – становится известной и оплаченной страховщиком часть первоначальных убытков в размере X_{2n}. В 2003 году – год развития $i=3$ – размер ставших известными убытков равен X_{3n}, в 2008-м – год развития $i=8$ – соответствующий размер будет равен X_{8n}. В 2018 году – а это год развития $i=18$ – убытки оцениваются в размере X_{18n}.

Поскольку сейчас идет первая половина 2019 года, треугольник выплат должен завершиться 2018 годом, т.е. естественно положить $n=18$. Иногда считается, что все величины X_{in} при $i \ge n+1=19$ равны нулю, иногда этот вопрос замалчивается. Действительно, а что тогда говорить в следующем году? Будем жить настоящим...

Распределение по годам развития убытков от страховых случаев года событий $j=n-1$ – 2002-го года – исследуется точно так же. Разница только в том, что от 2002-го до 2018-го на единицу меньше годов, чем от 2001 до 2018. Этим обусловлено то, что длина вертикали годов развития $X_{i,n-1}$ года события $j=n-1$ на единицу меньше длины вертикали годов развития X_{in} года события $j=n$. Другими словами, этим обусловлена диагональная структура «матрицы затухания выплат», или треугольная форма данных по выплатам.

И так далее до 2018 года событий, т.е. до $j=n-17=1$. Все величины на диагонали соответствуют 2018-му году.

В процессе судорожных попыток все быстро понять данная отрасль актуарного знания обретает черты «эклектической похлебки», которую автор (Штрауб) пытается сварить из кусков теории (статистические оценки, задачи на экстремум) и практических рецептов их применения. При этом маловразумительные обоснования указанных рецептов приносятся в жертву пониманию отдельных прецедентов их применения.

Это все к тому, что сейчас самое время привести ту конкретную таблицу, которой мы будем заниматься в течение всего настоящего раздела, причем шестью способами.

Таблица 1.2

	1985 $j=1$	1984 $j=2$	1983 $j=3$	1982 $j=4$	1981 $j=5$	1980 $j=6$	1979 $j=7$	1978 $j=8$	1977
$i=1$	$X_{11}=0$	$X_{12}=0$	$X_{13}=4$	$X_{14}=9$					
$i=2$		$X_{22}=7$	$X_{23}=12$	$X_{24}=17$	$X_{25}=56$				
$i=3$			$X_{33}=21$	$X_{34}=26$	$X_{35}=70$	$X_{36}=62$			
$i=4$				$X_{44}=35$	$X_{45}=90$	$X_{46}=80$	$X_{47}=70$		
$i=5$					$X_{55}=90$	$X_{56}=80$	$X_{57}=70$	$X_{58}=60$	
$i=6$						$X_{66}=80$	$X_{67}=70$	$X_{68}=60$	
$i=7$							$X_{77}=70$	$X_{78}=60$	
$i=8$								$X_{88}=60$	
премия	60	70	80	90	90	80	70	60	

Эта таблица приведена в [Шт] в начале с. 122. Ее структура представляется довольно неожиданной – не треугольник, а трапеция. Теперь нужно придавать этому смысл. Главный вопрос: что означают пустые ячейки в северо-восточном углу таблицы? С одной стороны, соответствующие величины X_{ij} не могут быть нулями, иначе это было бы отражено в ячейках, как в графах 1985 и 1986 гг. С другой стороны, возможно, было просто лень писать.

Штрауб ([Шт], с. 122) объясняет ситуацию так. Приведенный выше треугольник – говорит он – заведомо неполный, так как в данном случае компания начала накапливать статистику по годам событий только в 1982 г. И все же – добавляет маэстро – все шесть способов работают.

Действительно, верхняя диагональ таблицы соответствует 1982 году.

Попробуем порассуждать. Рассмотрим год событий 1981. Ячейка пустая – ничего не происходит. И вдруг уже на втором году развития пошла оплата (= 56) убытков по каким-то страховым случаям. Эти страховые случаи могут относиться только к 1981-му году событий. Вспомним определение: $X_{25} = 56$ – та часть убытков по страховым случаям $j = 1981$-го года событий, которая была покрыта страховщиком в течение $i = 2$-го года развития. Чтобы не выходить из заданного этим определением контекста, можно просто положить $X_{15} = 0$ – и вообще, обнулить все ячейки северо-восточного угла таблицы 1.2. А если не полагать и не обнулять?

А если не трогать содержимое ячеек, то в определении нужно оговорить возможность пустых ячеек как отражение отсутствия данных. Соответствующие X_{ij} будут считаться при этом несуществующими. Ведь для ячеек ниже главной диагонали это так!

Необходимые формулы.

«Тупо» перепишем ряд символов из [Шт], с. 114, которые Штрауб называет «стандартной терминологией в соответствии с [Бю]».

Символы такие:

$C_{i,i+1}$ – коэффициент развития (фактор нарастания) от года развития i к году развития $i+1$;

H_i – окончательный фактор развития от года развития i, он же фактор нарастания для перехода от года развития i к окончательному урегулированию, имеет место связь

$$H_i = \prod_{k \geq i} C_{k,k+1} .$$

L_i – фактор запаздывания для года развития i, другими словами, та доля конечной стоимости страхового возмещения, которая известна на конец года развития i, все это маловразумительно, но имеется формула

$$L_i = \frac{1}{H_i};$$

X_j – окончательный убыток года событий j с формулой $X_j = \lim_{i \to \infty} X_{ij}$, которая выглядит несколько обескураживающей – разве такой предел не равен нулю? – ведь все покрытия убытков года событий j когда-то да исчерпаются, и для любого фиксированного j последовательность $(X_{ij})_{i \geq 1}$, начиная с некоторого i, стабилизируется и становится стационарной – состоящей из нулей;

Y_j – *IBNR*-резервы года событий j,

$$Y_j = X_j - X_{j,j} .$$

Выражения для основной величины – коэффициента развития $C_{i,i+1}$ – Штрауб не приводит (должно быть, щадит читателя-нематематика, подкладывая тем самым неплохо откормленную свинью читателю-математику). Дело в том, что для вычислений ему нужны не сами величины, а их оценки, которые, к счастью, приводятся. Для коэффициентов развития используется оценка

$$\hat{C}_{i,i+1} = \frac{\sum\limits_{j\ge i+1} X_{i+1,j}}{\sum\limits_{j\ge i+1} X_{i,j}}, \qquad (1.1)$$

которая соответствует таблице вида таблицы 1.1, имеющей стопроцентную заполненность данными выше главной диагонали. ***Условие корректности***: $\sum_{j\ge i+1} X_{i,j} > 0$.

Но мы хотим работать с таблицей 1.2, а для этого нужно немного подкорректировать конструкцию для вычисления $\hat{C}_{i,i+1}$. Величины X_{ij}, соответствующие ячейкам в северо-восточной части таблицы 1.2 выше диагонали 1982 г., считаем несуществующими, как и те, которые соответствуют ячейкам ниже диагонали 1985 г. Таким образом, здесь мы выходим за рамки руководства [Шт].

Для любого фиксированного $i \in Z_n = \{1,2,\dots,n\}$ введем множество $N_i = \{ j \in Z_i : \exists X_{ij} \}$, а для любых последовательных $i, i+1 \in Z_n$ – множество $Q_i = N_i \bigcap N_{i+1}$. Вместо формулы (1.1) будем использовать обобщающую ее формулу

$$\hat{C}_{i,i+1} = \frac{\sum\limits_{j\in Q_i} X_{i+1,j}}{\sum\limits_{j\in Q_i} X_{i,j}}. \qquad (1.2)$$

Условие корректности: $\sum_{j\in Q} X_{i,j} > 0$. Вот мы уже что-то и обобщили. Достижение!

Что касается оценок величин H_i, L_i, X_j и Y_j, то здесь имеет смысл отметить только соотношения

$$\hat{H}_i = \prod_{k\ge i} \hat{C}_{k,k+1}, \quad \hat{L}_i = \frac{1}{\hat{H}_i} \quad \text{и} \quad \hat{Y}_j = \hat{X}_j - X_{j,j}.$$

Остальные будут рассматриваться по каждому методу в отдельности.

1. *Метод цепной лестницы.*

Алгоритм:

I. Вычисляем $\hat{C}_{i,i+1}$ по формуле (1.2).

II. Вычисляем $\hat{H}_i = \prod\limits_{k\ge i} \hat{C}_{k,k+1}$, а также $\hat{L}_i = 1/\hat{H}_i$, хотя представляется, что без формулы для $\hat{L}_i$ можно и обойтись.

III. Оценка окончательного убытка вычисляется как произведение $\hat{X}_j = \hat{H}_j \cdot X_{j,j}$, откуда оценка *IBNR*-резервов года событий j имеет вид $\hat{Y}_j = \hat{X}_j - X_{j,j} = (\hat{H}_j - 1) X_{j,j}$. Для конкретных подсчетов порядок такой: сначала находим j-*IBNR*-резервы $\hat{Y}_j = (\hat{H}_j - 1) X_{j,j}$, а затем окончательный убыток по формуле $\hat{X}_j = X_{j,j} + \hat{Y}_j$. Формулу $\hat{X}_j = \hat{H}_j \cdot X_{j,j}$ можно использовать для проверки.

Заполним следующую таблицу на основе таблицы 1.2 и формулы (1.2).

Таблица 1

i год	$\hat{C}_{i,i+1}$	$\hat{H}_i$	$\hat{L}_i$	*IBNR* $\hat{Y}_i$	$\hat{X}_j = X_{j,j} + \hat{Y}_j$
$i=1$ 1985	$\hat{C}_{12} = 2,7692$	$\hat{H}_1 = \hat{C}_{12} \ldots \hat{C}_{89} = 4,9456$	0,2022	0 (т.к. $X_{11} = 0$)	$\hat{X}_1 = 0+0=0$
$i=2$ 1984	$\hat{C}_{23} = 1,3765$	$\hat{H}_2 = \hat{C}_{23} \ldots \hat{C}_{89} = 1,7859$	0,5599	$\hat{Y}_2 = (\hat{H}_2 - 1) X_{22} \approx 6$	$\hat{X}_2 = 7+6=13$
$i=3$ 1983	$\hat{C}_{34} = 1,2975$	$\hat{H}_3 = \hat{C}_{34} \ldots \hat{C}_{89} = 1,2975$	0,7707	$\hat{Y}_3 = (\hat{H}_3 - 1) X_{33} \approx 6$	$\hat{X}_3 = 21+6=27$
$i=4$ 1982	$\hat{C}_{45} = 1,0000$	$\hat{H}_4 = \hat{C}_{45} \ldots \hat{C}_{89} = 1$	1	$\hat{Y}_4 = 0$	$\hat{X}_4 = 35+0=35$
$i=5$ 1981	$\hat{C}_{56} = 1,0000$	$\hat{H}_5 = \hat{C}_{56} \ldots \hat{C}_{89} = 1$	1	$\hat{Y}_5 = 0$	$\hat{X}_5 = 90+0=90$
$i=6$ 1980	$\hat{C}_{67} = 1,0000$	$\hat{H}_6 = \hat{C}_{67} \hat{C}_{78} \hat{C}_{89} = 1$	1	$\hat{Y}_6 = 0$	$\hat{X}_6 = 80+0=80$
$i=7$ 1979	$\hat{C}_{78} = 1,0000$	$\hat{H}_7 = \hat{C}_{78} \hat{C}_{89} = 1$	1	$\hat{Y}_7 = 0$	$\hat{X}_7 = 70+0=70$
$i=8$ 1978	$\hat{C}_{89} = 1,0000$	$\hat{H}_8 = \hat{C}_{89} = 1$	1	$\hat{Y}_8 = 0$	$\hat{X}_8 = 60+0=60$

Суммарный *IBNR* = 12

Сначала мы считаем $\hat{C}_{i,i+1}$ по таблице 1.2 и по формуле (1.2). Начинаем с $i=1$:

$$\hat{C}_{12} = \frac{X_{22} + X_{23} + X_{24}}{X_{12} + X_{13} + X_{14}} = \frac{7+12+17}{0+4+9} = \frac{36}{13} = 2,7692307 \approx 2,7692\,,$$

а потом продолжаем для всех $i \le 7$ – возможности таблицы 1.2 позволяют получить все $\hat{C}_{i,i+1}$, когда i растет только до семерки. Однако в соответствующей таблице из [Шт] откуда-то взялось и $\hat{C}_{89} = 1$. Наверное, всегда можно сказать, что это какая-то особая экстраполяция.

Во втором столбце считаем $\hat{H}_i$ – формулы в самом столбце. Для $\hat{L}_i$ приводим только значения. Порядок вычисления искомых резервов и окончательных убытков установлен перед таблицей 1. Штрауб еще вычисляет суммарный *IBNR* – мы его тоже вычислили и приписали снизу таблицы к соответствующей колонке.

2. *Метод Кейп Код.*

Сначала приведем таблицу вычисления *IBNR*-резервов методом Кейп Код. Мы перенесем ее сюда со страницы 123 из [Шт]. Вот она:

Таблица 2

i год	$R[i]$	$H[i]$	$L[i]$	*IBNR*	Окончательный убыток
$i=1$ 1985	0,7217	$\hat{H}_1 = \hat{C}_{12} \ldots \hat{C}_{89} = 4,9456$	0,2022	35	35
$i=2$ 1984	0,7217	$\hat{H}_2 = \hat{C}_{23} \ldots \hat{C}_{89} = 1,7859$	0,5599	22	29
$i=3$ 1983	0,7217	$\hat{H}_3 = \hat{C}_{34} \ldots \hat{C}_{89} = 1,2975$	0,7707	13	34
$i=4$ 1982	0,7217	$\hat{H}_4 = \hat{C}_{45} \ldots \hat{C}_{89} = 1$	1,0000	0	35
$i=5$ 1981	0,7217	$\hat{H}_5 = \hat{C}_{56} \ldots \hat{C}_{89} = 1$	1,0000	0	90
$i=6$ 1980	0,7217	$\hat{H}_6 = \hat{C}_{67} \hat{C}_{78} \hat{C}_{89} = 1$	1,0000	0	80
$i=7$ 1979	0,7217	$\hat{H}_7 = \hat{C}_{78} \hat{C}_{89} = 1$	1,0000	0	70
$i=8$ 1978	0,7217	$\hat{H}_8 = \hat{C}_{89} = 1$	1,0000	0	60

Суммарный *IBNR* = 70

По сравнению с оригиналом мы изменили немного: ликвидировали пятый (слева) столбец, содержимое которого (годы) переправили построчно в первый – к «нумерам».

Величины $H[i] = \hat{H}_i$ и $L[i] = \hat{L}_i$ – те же, что и в соответствующих столбцах таблицы 1. Поэтому мы их оставляем без изменений. Столбец с $R[i]$ в оригинале почему-то озаглавлен $C[i]$ – видимо, чтобы было труднее понять, как считать $\hat{R}_i = R[i]$. Остановимся на этом подробнее.

$\hat{R}_j$ – это коэффициент коррекции, определяемый с помощью соотношения

$$\hat{R}_j = \frac{\sum_{s \in S_j} X_{ss}}{\sum_{s \in S_j} L_s P_s} = \frac{\textit{сумма зарегистрированных страховых возмещений}}{\textit{премия за период наблюдения}}$$

Словесное описание – это скорее дань уважения оригиналу, ну, пусть будет, если это принято у буржуев. Какая нам разница, возмещение, премия, Крокус-Т, Крокус-Сити, все равно ведь это все проекции из другого мира...

Сбросим этот морок и вернемся к коэффициенту коррекции. Штрауб рассматривает две возможности для множества S_j:

1) $S_j = \{j\}$. В этом случае

$$\hat{R}_j = \frac{X_{jj}}{\hat{L}_j P_j},$$

а поскольку в методе Кейп Код средний *IBNR*-резерв оценивается как

$$\hat{Y}_j = (1 - \hat{L}_j)\hat{R}_j P_j, \tag{2.1}$$

то в рассматриваемом случае будет

$$\hat{Y}_j = (1 - \hat{L}_j)\hat{R}_j P_j = (1 - \hat{L}_j)\frac{X_{jj}}{\hat{L}_j P_j} P_j = (\hat{H}_j - 1) X_{jj}$$

– как в методе цепной лестницы. У Штрауба «Эль итые» то с крышечкой, то нет. Это раздражает.

2) S_j – множество всех годов событий. Забегая вперед, сразу скажем, что это то самое, чего мы так ждем.

Таблица 2.1

i	X_{ii}	$\hat{L}_i$	P_i	$\hat{L}_i P_i$
1 1985	0	0,2021981≈0,2022	60	12,131886
2 1984	7	**0,5599**333	70	39,195331
3 1983	21	**0,7707**317	80	61,658536
4 1982	35	**1**	90	90
5 1981	90	**1**	90	90
6 1980	80	**1**	80	80
7 1979	70	**1**	70	70
8 1978	60	**1**	60	60
Суммы:	363			502,98575

В графе для $\hat{L}_i$ приведены полные значения этих величин, вычислявшиеся по формуле $\hat{L}_i = 1/\hat{H}_i$ для цепной лестницы...

Итак, $\hat{R}_j$ не зависит от j и равен

$$\hat{R} = \hat{R}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ii}}{\sum_{i=1}^{n} L_i P_i} = \frac{363}{502,98575} = 0,7216904 \approx 0,7217\,. \qquad (2.2)$$

Именно это число и фигурирует в оригинальной таблице Штрауба по Кейп Коду.

В итоге имеем следующий алгоритм:

I. У Штрауба «считается, что факторы запаздывания $\hat{L}_i$ заданы». Мы считаем, что они вычисляются так же, как в цепной лестнице. Потому, что они действительно так вычисляются!

II. Вычисляем коэффициент коррекции по формуле (2.2), разумеется, используя ее символьную, а не числовую часть.

III. Оцениваем средний *IBNR*-резерв по формуле (2.1), окончательный убыток – по уже известной (и, как окажется, используемой во всех оставшихся методах) формуле $\hat{X}_j = X_{j,j} + \hat{Y}_j$.

Такие пироги!

3. *Метод дополнительной убыточности.*

Как и в предыдущем подразделе, приведем таблицу вычисления *IBNR*-резервов методом дополнительной убыточности. Эта таблица расположена в [Шт] на той же странице 123. И так же, как и для Кейп Код, мы объединяем два столбца – с годами и с номерами годов развития.

Таблица 3

Окончательная убыточность = 1,0000

i	$M[i]$	*IBNR*	Конечный убыток
1 1985	0,0433	57	57
2 1984	0,2788	50	57
3 1983	0,5265	38	59
4 1982	0,8333	15	50
5 1981	1,0000	0	90
6 1980	1,0000	0	80
7 1979	1,0000	0	70
8 1978	1,0000	0	60

Суммарный *IBNR*: 161

Алгоритм:

I. Оценивается окончательная убыточность M_i на конец i-го года развития:

$$\hat{M}_i = \frac{\sum_{j \ge i} X_{ij}}{\sum_{j \ge i} P_j}\,. \qquad (3.1)$$

II. С помощью какой-нибудь подходящей экстраполяции на основе $\hat{M}_i$ принять решение о значении средней окончательной убыточности $\hat{R}$.

III. Оценить средний *IBNR*-резерв как $\hat{R}P_i - \hat{M}_iP_i = (\hat{R} - \hat{M}_i)P_i$, где $\hat{R} - \hat{M}_i$ – оцениваемый остаток или дополнительная убыточность (отсюда, видимо, и название метода).

Прокомментируем.

I. Ввиду специфики исходной таблицы 1.2 вместо формул вида (1.1) используются формулы вида (1.2). В рассматриваемом случае это означает, что вместо формулы (3.1) должна использоваться формула

$$\hat{M}_i = \frac{\sum_{j \in N_i} X_{ij}}{\sum_{j \in N} P_j}, \qquad (3.2)$$

где $N_i = \{ j \in Z_i : \exists X_{ij} \}$.

Важное замечание, пока не забыл. Нужно предусмотреть построение программ вычисления *IBNR*-резервов отдельно для треугольного случая (формулы вида (1.1) или (3.1)) и для трапециевидного случая (формулы вида (1.2) или (3.2)).

Вычисления $\hat{M}_i$ просты, как хлеб:

$$\hat{M}_1 = \frac{0+0+4+9}{60+70+80+90} = \frac{13}{300} = \mathbf{0{,}0433}333,$$

$$\hat{M}_2 = \frac{7+12+17+56}{70+80+90+90} = \frac{92}{330} = 0{,}2787878 \approx \mathbf{0{,}2788},$$

$$\hat{M}_3 = \frac{21+26+70+62}{80+90+90+80} = \frac{179}{340} = 0{,}5264705 \approx \mathbf{0{,}5265},$$

$$\hat{M}_4 = \frac{35+90+80+70}{90+90+80+70} = \frac{275}{330} = \mathbf{0{,}8333}333,$$

$$\hat{M}_5 = \frac{90+80+70+60}{90+80+70+60} = 1$$

$$\hat{M}_6 = \frac{80+70+60}{80+70+60} = 1$$

$$\hat{M}_7 = \frac{70+60}{70+60} = 1$$

$$\hat{M}_8 = \frac{60}{60} = 1$$

II. Запись «Окончательная убыточность = 1,0000» над таблицей 3 означает, что $\hat{R} = 1$. Поскольку ни подходящих экстраполяций, ни критериев принятия решений по ним в нашем распоряжении нет, то нам только и остается, что считать $\hat{R}$ внешним параметром задачи. И пытаться как-то рационально истолковать то или иное используемое значение $\hat{R}$.

III. Средний *IBNR*-резерв есть $\hat{Y}_j = (\hat{R} - \hat{M}_i)P_i$, окончательный убыток есть $\hat{X}_j = X_{j,j} + \hat{Y}_j$. Больше тут нечего комментировать.

В следующей таблице приведем все оставшиеся вычисления.

Таблица 3.1

Окончательная убыточность $\hat{R}$ = 1,0000

i	$M[i]$	X_{ii}	*IBNR*	Окончательный убыток
1 1985	0,0433333	0	$(\hat{R}-\hat{M}_1)P_1 = (1-0,0433333)\cdot 60 = 57,400002 \approx 57$	0 + 57 = 57
2 1984	0,2787878	7	$(\hat{R}-\hat{M}_2)P_2 = (1-0,2787878)\cdot 60 = 50,484854 \approx 50$	7 + 50 = 57
3 1983	0,5264705	21	$(\hat{R}-\hat{M}_3)P_3 = (1-0,5264705)\cdot 60 = 37,88236 \approx 38$	21 + 38 = 59
4 1982	0,8333333	35	$(\hat{R}-\hat{M}_4)P_4 = (1-0,8333333)\cdot 60 = 15,000003 \approx 15$	35 + 15 = 50
5 1981	1,0000000	90	$(\hat{R}-\hat{M}_5)P_5 = (1-1)\cdot 60 = 0$	90 + 0 = 90
6 1980	1,0000000	80	$(\hat{R}-\hat{M}_6)P_6 = (1-1)\cdot 60 = 0$	80 + 0 = 80
7 1979	1,0000000	70	$(\hat{R}-\hat{M}_7)P_7 = (1-1)\cdot 60 = 0$	70 + 0 = 70
8 1978	1,0000000	60	$(\hat{R}-\hat{M}_7)P_7 = (1-1)\cdot 60 = 0$	60 + 0 = 60

Суммарный *IBNR*: 161

Вот еще вопрос: когда говорить «конечный убыток», а когда «окончательный убыток»?

....

Мы рассмотрели три классических метода исчисления *IBNR*-резервов – метод цепной лестницы, метод Кейп Код и метод дополнительной убыточности.

Сейчас 14.39 2 июня 2019 года.

4. *Метод классической лондонской цепи.*

Вначале перепишем кусочек текста из [Шт] со страницы 118:

«С. Бенджамин и Л.М. Иглз в своих исследованиях резервов страховых возмещений Ллойдс и Лондон Маркет [6] подбирали прямые линии (для каждого года развития – своя прямая), проведенные через набор точек с **x**-координатой, равной окончательной величине возмещений и **y**-координатой, равной конечной величине страховых возмещений; при этом каждый достаточно развитый андеррайтерский год дает в плоскости **xy** некоторую точку. Конечно, практическое препятствие в таком подходе заключается в том, что многие андеррайтерские годы (или годы событий) развиты не вполне хорошо (и именно те, которыми мы особенно интересуемся), поэтому их y-координаты, т.е. конечные стоимости убытков, неизвестны и должны заменяться оценками. Получение же оценок конечной стоимости возмещений как раз и является целью всех IBNR-исследований.

Отмеченное препятствие можно легко преодолеть введением для каждого года развития i коэффициентов b_i и c_i таких, что

$$\phi(b_i, c_i) = \sum_{j=i+1}^{n} \left(X_{i+1,j} - b_i - c_i X_{ij} \right)^2 = minimum \text{»} \qquad (4.0)$$

И т.д.

Еще раз: **x**-координата равна *окончательной* величине возмещений,

y-координата равна *конечной* величине страховых возмещений.

Кто-нибудь может это расшифровать? Поэтому и нужен оригинал Штрауба.

Соотношение (4.0) – это условие отыскания параметров (b_i и c_i) уравнения прямой линии среднеквадратичной регрессии (название по складам переписал из [Гм], с. 255). Для каждого i, очевидно, будет своя прямая.

Но мы пока хотим воздержаться от обсуждения обоснованности применения уравнения регрессии к вычислению *IBNR*-резервов. Мы хотим понять, как действует алгоритм классической лондонской цепи, и получить с его помощью соответствующую таблицу из Штрауба. Она там расположена на с. 124. Вот она (мы пишем $b[i]$ и $c[i]$ вместо штраубовских $B[i]$ и $C[i]$):

Таблица 4

i	$b[i]$	$c[i]$	*IBNR*	Конечный убыток
1 1985	7,2049	1,1066	22	22
2 1984	7,2898	1,1192	14	21
3 1983	2,5000	1,2500	8	29
4 1982	0,0000	1,0000	0	35
5 1981	0,0000	1,0000	0	90
6 1980	0,0000	1,0000	0	80
7 1979	0,0000	1,0000	0	70
8 1978	0,0000	1,0000	0	60

Суммарный IBNR: 44

Алгоритм классической лондонской цепи извлекается из условия минимизации (4.0), но самое это условие формулируется для треугольника выплат, а у нас трапеция (таблица 2.1). Выше на с. 5 мы уже обсуждали этот вопрос. Напомним то, что нам нужно, и добавим еще.

Для любого фиксированного $i \in Z_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ мы ввели множество $N_i = \{j \in Z_i : \exists X_{ij}\}$, а для любых последовательных $i, i+1 \in Z_n$ – множество $Q_i = N_i \bigcap N_{i+1}$. Пусть $k_i = \# Q_i$ – число элементов множества Q_i. Введем обозначения

$$A_i = \sum_{j \in Q_i} X_{ij}\,, \quad B_i = \sum_{j \in Q_i} X_{ij}^2\,, \quad C_i = \sum_{j \in Q_i} X_{i+1,j}\,, \quad D_i = \sum_{j \in Q_i} X_{i+1,j} X_{ij}\,. \qquad (4.1)$$

Вместо (4.0) рассмотрим задачу

$$\phi(b_i, c_i) = \sum_{j \in Q_i} \left(X_{i+1,j} - b_i - c_i X_{ij} \right)^2 \to \min \qquad (4.2)$$

Берем первые производные функции $\phi(b_i, c_i)$ по b_i и по c_i, $i = 1, \ldots, n = 8$; с учетом (4.1) имеем

$$\frac{1}{2}\phi_{b_i}(b_i, c_i) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b_i}\phi(b_i, c_i) = k_i b_i + A_i c_i - C_i\,, \qquad (4.3)$$

$$\frac{1}{2}\phi_{c_i}(b_i, c_i) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial c_i}\phi(b_i, c_i) = A_i b_i + B_i c_i - D_i\,, \qquad (4.4)$$

и приравниваем их нулю, получается линейная система второго порядка:

$$\begin{cases} k_i b_i + A_i c_i = C_i \\ A_i b_i + B_i c_i = D_i \end{cases}. \qquad (4.5)$$

Считаем, что

$$k_i \ge 2,\ i = 1,\dots,n = 8. \qquad (4.6)$$

Естественный вопрос: что будет при $k_i = 1$ (для всех i, для некоторых i)?

Определитель системы (4.5) есть

$$\Delta_i = k_i B_i - A_i^2$$
$$= k_i \sum_{j\in Q_i} X_{ij}^2 - \left(\sum_{j\in Q_i} X_{ij} \right)^2 \ge 0;$$

неотрицательность следует из неравенства Коши-Буняковского-Шварца. Считаем, что для всех i имеет место строгое неравенство

$$\Delta_i > 0. \qquad (4.7)$$

Естественный вопрос: что будет при $\Delta_i = 0$ (для всех i, для некоторых i)?

При условии (4.7) система (4.5) однозначно разрешима; формулы Крамера дают

$$b_i = \frac{1}{\Delta_i}\left[B_i C_i - A_i D_i \right],\ c_i = \frac{1}{\Delta_i}\left[k_i D_i - A_i C_i \right]. \qquad (4.8)$$

Вычислим b_1 и c_1. Имеем $N_1 = \{1,2,3,4\}$, $N_2 = \{2,3,4,5\}$, $Q_1 = N_1 \cap N_2 = \{2,3,4\}$, $k_1 = 3$ (неравенство (4.6) выполняется), поэтому

$$A_1 = X_{12} + X_{13} + X_{14} = 0 + 4 + 9 = 13, \qquad B_1 = X_{12}^2 + X_{13}^2 + X_{14}^2 = 0 + 16 + 81 = 97,$$
$$C_1 = X_{22} + X_{23} + X_{24} = 7 + 12 + 17 = 36, \qquad D_1 = X_{12}X_{22} + X_{13}X_{23} + X_{14}X_{24} = 0 + 48 + 153 = 201,$$
$$\Delta_1 = k_1 B_1 - A_1^2 = 3\cdot 97 - 169 = 122,$$
$$b_1 = \frac{1}{\Delta_1}\left[B_1 C_1 - A_1 D_1 \right] = \frac{1}{122}\left[97\cdot 36 - 13\cdot 201 \right] = 7,204918 \approx 7,2049$$

– совпадает с приведенным в таблице 4,

$$c_1 = \frac{1}{\Delta_1}\left[k_1 D_1 - A_1 C_1 \right] = \frac{1}{122}\left[3\cdot 201 - 13\cdot 36 \right] = 1,1065573 \approx 1,1066$$

– также совпадает. В соответствии с проведенными вычислениями создадим новую таблицу:

Таблица 4.1

i	A_i	B_i	C_i	D_i	Δ_i	b_i	c_i
1	13	97	36	201	122	7,2049	1,1066
2	85	3569	117	4614	3482	7,2898	1,1192
3	158	9420	205	12170	3296	2,5000	1,2500
4	240	19400	240	19400	600	0	1
5	210	14900	210	14900	600	0	1
6	130	8500	130	8500	100	0	1
7	60	3600	60	3600	0	числит = 0	числит = 0
8							

По всей видимости, заполненность в таблице 4 двух последних строк, отвечающих 7-му и 8-му годам развития, обусловлена какими-то вещами, которые мы не знаем и, возможно, никогда не узнаем. В общем, работаем до $i = 6$ включительно.

Теперь запускаем итеративный процесс:

$$\hat{X}_{jj} = X_{jj},\ \hat{X}_{i+1,j} = b_j + c_j \hat{X}_{ij},\ i \ge j.$$

$i = 1:$

$$\hat{X}_{11} = X_{11} = 0$$

$b_1 = 7,2049 \quad c_1 = 1,1066 \qquad \hat{X}_{21} = b_1 + c_1\hat{X}_{11} = 7,2049$

$b_2 = 7,2898 \quad c_2 = 1,1192 \qquad \hat{X}_{31} = b_2 + c_2\hat{X}_{21} = 15,353524$

$b_3 = 2,5000 \quad c_3 = 1,2500 \qquad \hat{X}_{41} = b_3 + c_3\hat{X}_{31} = 21,691905$

$b_4 = 0,0000 \quad c_4 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{51} = b_4 + c_4\hat{X}_{41} = 21,691905$

$b_5 = 0,0000 \quad c_5 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{61} = b_5 + c_5\hat{X}_{51} = 21,691905$

$b_6 = 0,0000 \quad c_6 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{71} = b_6 + c_6\hat{X}_{61} = 21,691905$

$\Rightarrow \hat{X}_1 = 21,691905 \approx 22$ – окончательный убыток

$\Rightarrow IBNR = \hat{X}_1 - \hat{X}_{11} = 22$

Таким образом, последовательность $\hat{X}_{ij}$, продолжающая трапецию (треугольник) вниз по столбцам, стабилизируется и дает значение окончательного убытка, по которому восстанавливается соответствующий *IBNR*-резерв. Две эти величины, вычисляемые для каждого из годов событий итерациями по следующим за ним годам развития, заполняют два последних столбца таблицы 4.

Осталось пройтись по оставшимся годам событий.

$i = 2:$

$$\hat{X}_{22} = X_{22} = 7$$

$b_2 = 7,2898 \quad c_2 = 1,1192 \qquad \hat{X}_{32} = b_2 + c_2\hat{X}_{22} = 15,1242$

$b_3 = 2,5000 \quad c_3 = 1,2500 \qquad \hat{X}_{42} = b_3 + c_3\hat{X}_{32} = 21,40525$

$b_4 = 0,0000 \quad c_4 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{52} = b_4 + c_4\hat{X}_{42} = 21,40525$

$b_5 = 0,0000 \quad c_5 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{62} = b_5 + c_5\hat{X}_{52} = 21,40525$

$b_6 = 0,0000 \quad c_6 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{72} = b_6 + c_6\hat{X}_{62} = 21,40525$

$\Rightarrow \hat{X}_2 = 21, 40525 \approx 21$ – окончательный убыток

$\Rightarrow IBNR = \hat{X}_2 - \hat{X}_{22} = 21$

$i = 3:$

$$\hat{X}_{33} = X_{33} = 21$$

$b_3 = 2,5000 \quad c_3 = 1,2500 \qquad \hat{X}_{43} = b_3 + c_3\hat{X}_{33} = 28,75$

$b_4 = 0,0000 \quad c_4 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{53} = b_4 + c_4\hat{X}_{43} = 28,75$

$b_5 = 0,0000 \quad c_5 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{63} = b_5 + c_5\hat{X}_{53} = 28,75$

$b_6 = 0,0000 \quad c_6 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{73} = b_6 + c_6\hat{X}_{63} = 28,75$

$\Rightarrow \hat{X}_3 = 28,75 \approx 29$ – окончательный убыток

$\Rightarrow IBNR = \hat{X}_3 - \hat{X}_{33} = 8$

$i = 4$:

$$\hat{X}_{44} = X_{44} = 35$$

$b_4 = 0,0000 \quad c_4 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{54} = b_4 + c_4\hat{X}_{44} = 35$

$b_5 = 0,0000 \quad c_5 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{64} = b_5 + c_5\hat{X}_{54} = 35$

$b_6 = 0,0000 \quad c_6 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{74} = b_6 + c_6\hat{X}_{64} = 35$

$\Rightarrow \ \hat{X}_4 = 35$ – окончательный убыток

$\Rightarrow \ IBNR = \hat{X}_4 - \hat{X}_{44} = 0$

$i = 5$:

$$\hat{X}_{55} = X_{55} = 90$$

$b_5 = 0,0000 \quad c_5 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{65} = b_5 + c_5\hat{X}_{55} = 90$

$b_6 = 0,0000 \quad c_6 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{75} = b_6 + c_6\hat{X}_{65} = 90$

$\Rightarrow \ \hat{X}_5 = 90$ – окончательный убыток

$\Rightarrow \ IBNR = \hat{X}_5 - \hat{X}_{55} = 0$

$i = 6$:

$$\hat{X}_{66} = X_{66} = 80$$

$b_6 = 0,0000 \quad c_6 = 1,0000 \qquad \hat{X}_{76} = b_6 + c_6\hat{X}_{66} = 80$

$\Rightarrow \ \hat{X}_6 = 90$ – окончательный убыток

$\Rightarrow \ IBNR = \hat{X}_6 - \hat{X}_{66} = 0$

Больше тут ничего не вычислишь.

Нам осталось только одно: понять, почему решение задачи (4.2) есть именно максимум?

Выше мы дошли до формул (4.8) для решения и тут же занялись вычислениями. Вернемся к «общей теории» и сформулируем, что, собственно, нам надо.

Для любого $i = 1, \ldots, n = 8$ нам нужно минимизировать функцию

$$\phi(b_i, c_i) = \sum_{j \in Q_i} \left(X_{i+1,j} - b_i - c_i X_{ij} \right)^2 .$$

Ее первые производные вычислены в (4.3) и (4.4). Дальнейшее дифференцирование приводит к выражениям

$$\phi_{b_i b_i}(b_i, c_i) \equiv \frac{\partial^2}{\partial b_i^2}\phi(b_i, c_i) = 2k_i \ , \ \phi_{c_i c_i}(b_i, c_i) \equiv \frac{\partial^2}{\partial c_i^2}\phi(b_i, c_i) = 2B_i \, , \ \phi_{b_i c_i}(b_i, c_i) \equiv \frac{\partial^2}{\partial b_i \partial c_i}\phi(b_i, c_i) = 2A_i \, .$$

Воспользуемся известным достаточным условием минимума (надо подобрать ссылку). Имеем

$$\phi_{b_i b_i}(b_i, c_i) = 2k_i > 0 \, , \quad \begin{vmatrix} \phi_{b_i b_i}(b_i, c_i) & \phi_{b_i c_i}(b_i, c_i) \\ \phi_{b_i c_i}(b_i, c_i) & \phi_{c_i c_i}(b_i, c_i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k_i & 2A_i \\ 2A_i & 2B_i \end{vmatrix} = 4\Delta_i > 0 \, .$$

Значит, функция ϕ имеет в своей критической точке (b_i, c_i) локальный минимум, а так как эта критическая точка у ϕ единственная, то максимум будет глобальным.

5. *Метод лондонской цепи с точным центром.*

Мы не хотим пока ничего обосновывать, мотивировать и вводить, начиная издалека. Мы будем минимизировать две функции. А именно, для любого фиксированного $i=1,\ldots,n=8$ и любого фиксированного $a\in\mathbf{R}$ функцию

$$\psi(c_i,a)=\phi(c_i a-a,c_i)=\sum_{j\in Q_i}\left(X_{i+1,j}+a-c_i\left(X_{ij}+a\right)\right)^2 \tag{5.0}$$

будем минимизировать по c_i, где $\phi(b_i,c_i)$ – функция (4.0). Функцию

$$\chi(a)=\sum_{i=1}^{n}\psi(c_i,a)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in Q_i}\left(X_{i+1,j}+a-c_i\left(X_{ij}+a\right)\right)^2 \tag{5.1}$$

будем минимизировать по $a\in\mathbf{R}$ при произвольных фиксированных $c_1,\ldots,c_n$. Вначале решим две эти задачи минимизации.

1) *Задача* $\psi(c_i,a)\to\min$.

Имеем

$$\frac{1}{2}\psi_{c_i}(c_i,a)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial c_i}\psi(c_i,a)=c_i\sum_{j\in Q_i}(X_{ij}+a)^2-\sum_{j\in Q_i}(X_{i+1,j}+a)(X_{ij}+a).$$

Равенство $\psi_{c_i}(c_i,a)=0$ влечет за собой представление

$$c_i=c_i(a)=\frac{\sum_{j\in Q_i}(X_{i+1,j}+a)(X_{ij}+a)}{\sum_{j\in Q_i}(X_{ij}+a)^2}=\frac{k_i a^2+(A_i+C_i)a+D_i}{k_i a^2+2A_i a+B_i} \tag{5.2}$$

в силу

$$A_i=\sum_{j\in Q_i}X_{ij},\quad B_i=\sum_{j\in Q_i}X_{ij}^2,\quad C_i=\sum_{j\in Q_i}X_{i+1,j},\quad D_i=\sum_{j\in Q_i}X_{i+1,j}X_{ij}. \tag{4.1}$$

(мы переписали сюда (4.1) для удобства). ***Условие корректности***: $\forall i=\overline{1,n}\quad \sum_{j\in Q_i}(X_{ij}+a)^2>0$.

2) *Задача* $\chi(a)\to\min$.

Имеем

$$\frac{1}{2}\chi'(a)=a\sum_{i=1}^{n}k_i\left(c_i-1\right)^2-\sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\left[\sum_{j\in Q_i}X_{i+1,j}-c_i\sum_{j\in Q_i}X_{ij}\right].$$

Равенство $\chi'(a)=0$ дает выражение для a:

$$a=\tilde a(c_1,\ldots,c_n)\equiv\frac{\sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\left[\sum_{j\in Q_i}X_{i+1,j}-c_i\sum_{j\in Q_i}X_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{n}k_i\left(c_i-1\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(c_i-1)[C_i-c_iA_i]}{\sum_{i=1}^{n}k_i\left(c_i-1\right)^2}. \tag{5.3}$$

Условие корректности: $\sum_{i=1}^{n}k_i\left(c_i-1\right)^2>0$.

Замечание о минимумах. Имеем

$$\frac{1}{2}\psi_{c_i c_i}(c_i,a)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial c_i^2}\psi(c_i,a)=\sum_{j\in Q_i}(X_{ij}+a)^2>0\,,\quad \frac{1}{2}\chi''(a)=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(c_i-1\right)^2>0\,.$$

Поэтому все найденные критические точки c_i (при фиксированном a) и a (при фиксированных c_i) соответствующих функций будут точками минимума.

Алгоритм.

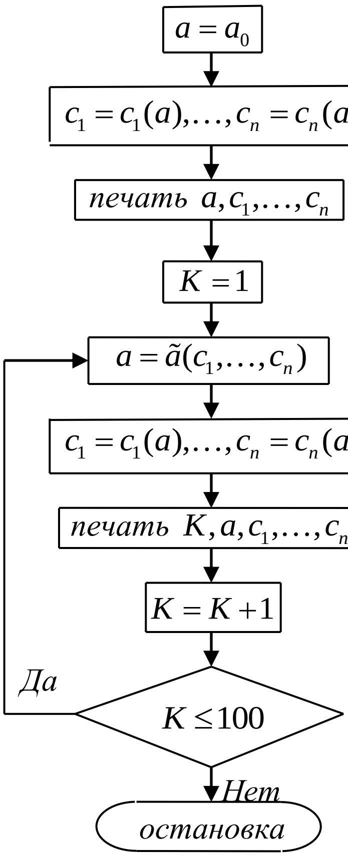
Простыми словами: берем начальное значение $a=a_0$.

Затем вычисляем $c_i=c_i(a_0)$ по формуле (5.2).

Затем вычисляем $a_1=\tilde{a}(c_1,\ldots,c_n)$ по формуле (5.3).

И т.д.

Тряхнем стариной и попытаемся нарисовать блок-схему.



Вспомнить про блок-схемы помогли книги [ЛДО] (с. 72) и [ССК] (с. 94).

Реализация алгоритма в части, касающейся a, дана в Приложении 1.

Штраубовскую таблицу, «конспектирующую» указанную реализацию ([Шт], с. 124), не приводим. Значения a, участвующие в упомянутой таблице, в Приложении 1 отмечены красным.

Разумеется, речь идет о реализации алгоритма для данных из нашей трапеции выплат в таблице 1.2. В данном случае формулы (4.2) и (4.3) переходят в следующие:

$$c_1(a) = \frac{a(7+a)+(4+a)(12+a)+(9+a)(17+a)}{a^2+(4+a)^2+(9+a)^2},$$

$$c_2(a) = \frac{(12+a)(21+a)+(17+a)(26+a)+(56+a)(70+a)}{(12+a)^2+(17+a)^2+(56+a)^2},$$

$$c_3(a) = \frac{(26+a)(35+a)+(70+a)(90+a)+(62+a)(80+a)}{(26+a)^2+(70+a)^2+(62+a)^2},$$

$c_4(a)=1,\ c_5(a)=1,\ c_6(a)=1,\ c_7(a)=1$ (у Штрауба в таблице, с. 125, c_8 также равно 1),

$$\tilde{a}(c_1,c_2,c_3) = \frac{(c_1-1)[36-13c_1]+(c_2-1)[117-85c_2]+(c_3-1)[205-158c_3]}{3[(c_1-1)^2+(c_2-1)^2+(c_3-1)^2]}.$$

Вот по этим формулам и получены данные в Приложении 1.

Теперь надо посмотреть, чему равны $c_1(a)$, $c_2(a)$, $c_3(a)$ при $a = a_{100} = 34.613467$. Это и будут первые «неформальные» значения в штраубовской таблице ([Шт], с. 125).

Но здесь нас ждет небольшой сюрприз. Как показала студентка А. Гафарова, теми самыми значениями $C[i]$ в таблице Штрауба будут значения $c_1(a)$, $c_2(a)$, $c_3(a)$ при $a = a_{99} = 34.603158$.

Давайте перерисуем эту таблицу (давно не рисовали; [Шт], с. 125).

Таблица 5

Используется центр 34,6135

i		$C[i]$	*IBNR*	Окончат-й убыток
1	1985	1,1961	22	22
2	1984	1,1650	16	23
3	1983	1,1828	10	31
4	1982	1,0000	0	35
5	1981	1,0000	0	90
6	1980	1,0000	0	80
7	1979	1,0000	0	70
8	1978	1,0000	0	60

Суммарный *IBNR*: 48

Теперь сравним две колонки:

$a_{99} = 34.603158$	$a_{100} = 34.613467$
$c_1(a_{99}) = 1{,}196100984 \approx 1{,}1961$	$c_1(a_{100}) = 1{,}196049956 \approx 1{,}1960$
$c_2(a_{99}) = 1{,}165007193 \approx 1{,}1650$	$c_2(a_{100}) = 1{,}164983338 \approx 1{,}1650$
$c_3(a_{99}) = 1{,}182753375 \approx 1{,}1828$	$c_3(a_{100}) = 1{,}182732501 \approx 1{,}1827$

Ясно, что штраубовские значения соответствуют первой колонке.

Теперь надо получить оставшиеся значения в таблице 5. Принцип вычисления величин $\hat{H}_i$ указывается соотношением $\hat{H}_i = \prod_{k \ge i} \hat{C}_{k,k+1}$. Применительно к нашей конкретике это соотношение удобнее записать так:

$$\hat{H}_i = (c_8)c_7\ldots c_i .$$

Еще удобнее. Пусть i_0 – наименьший номер такой, что $c_i = 1$ при $i \geq i_0$. Пусть $i_0 > 1$.Тогда легко показать, что

$$\hat{H}_i = \begin{cases} c_{i_0-1}\ldots c_i, & i < i_0, \\ 1, & i \geq i_0. \end{cases}$$

Таким образом, для рассматриваемого примера будет $i_0 = 4$, и в результате имеем (c_i – из первой колонки, т.е. для $a = a_{99}$)

$$\hat{H}_1 = c_3c_2c_1 = 1,3779159 \cdot 1,196100984 = 1,6481264$$
$$\hat{H}_2 = c_3c_2 = 1,182753375 \cdot 1,165007193 = 1,3779159$$
$$\hat{H}_3 = c_3 = 1,182753375$$
$$\hat{H}_4 = 1 \quad \hat{H}_5 = 1 \quad \hat{H}_6 = 1$$
$$\hat{H}_7 = 1$$

Поэтому и говорим, что $\hat{H}_i$ вычисляются снизу.

Принцип вычисления окончательных убытков дается формулой $\hat{X}_j = \hat{H}_j \cdot X_{j,j}$ (см. раздел 1, посвященный цепной лестнице). В рассматриваемом случае к величинам убытков $\hat{X}_j$ и $\hat{X}_{jj}$ надо прибавлять значение центра a. Чтобы обосновать это, нужно погрузиться в контекст, формируемый соотношением (5.2) и развиваемый на с. 119-121 в книге [Шт]. Погружаться туда мы пока не будем. Вернемся к прибавлению центра. Выглядит это так: $\hat{X}_j + a = \hat{H}_j \cdot (X_{j,j} + a)$, или

$$\hat{X}_j = \hat{H}_j \cdot (X_{j,j} + a) - a .$$

Таким образом, при $a = a_{99} = 34.603158$:

Окончательный убыток	*IBNR*
$\hat{X}_1 = \hat{H}_1 \cdot (0 + 34.603158) - 34.603158 = 0,6481264 \cdot 34,603158 = 22,42722 \approx 22$	$\hat{X}_1 - \hat{X}_{11} = 22 - 0 = 22$
$\hat{X}_2 = \hat{H}_2 \cdot (7 + 34,603158) - 34,603158 = 1,3779159 \cdot 41,603158 - 34,603158 = 22,722494 \approx 23$	$\hat{X}_2 - \hat{X}_{22} = 23 - 7 = 16$
$\hat{X}_3 = \hat{H}_3 \cdot (21 + 34,603158) - 34,603158 = 1,182753375 \cdot 55,603158 - 34,603158 = 31,16166 \approx 31$	$\hat{X}_3 - \hat{X}_{33} = 31 - 21 = 10$
$\hat{X}_4 = \hat{H}_4 \cdot (35 + 34,603158) - 34,603158 = 35$	$\hat{X}_4 - \hat{X}_{44} = 35 - 35 = 0$
$\hat{X}_5 = \hat{H}_5 \cdot (90 + 34,603158) - 34,603158 = 90$	$\hat{X}_5 - \hat{X}_{55} = 90 - 90 = 0$
$\hat{X}_6 = \hat{H}_6 \cdot (80 + 34,603158) - 34,603158 = 80$	$\hat{X}_6 - \hat{X}_{66} = 80 - 80 = 0$
$\hat{X}_7 = \hat{H}_7 \cdot (70 + 34,603158) - 34,603158 = 70$	$\hat{X}_7 - \hat{X}_{77} = 70 - 70 = 0$
Если $\hat{H}_8 = 1$, то $\hat{X}_8 = \hat{H}_8 \cdot (60 + 34,603158) - 34,603158 = 60$	$\hat{X}_8 - \hat{X}_{88} = 60 - 60 = 0$

С результатами таблицы в конце Приложения 1 приведенные данные вполне согласуются.

6. *Метод лондонской цепи с приближенным центром.*

Сразу перепишем соответствующую таблицу из [Шт] (с. 125):

Таблица 6

Используется центр 35,0000

i	$C[i]$	*IBNR*	Конечный убыток
1 1985	1,1949	23	23
2 1984	1,1684	16	23
3 1983	1,1787	10	31
4 1982	1,0000	0	35
5 1981	1,0000	0	90
6 1980	1,0000	0	80
7 1979	1,0000	0	70
8 1978	1,0000	0	60

Суммарный *IBNR*: 49

Формула для вычисления c_i, $i=1,\dots,n$ = 7 (проблему «7 или 8» в штраубовских таблицах мы уже обсуждали) дана на с. 121 в [Шт] и имеет вид

$$c_i = c_i(a) = \frac{\sum_{j\in Q_i}\left(X_{i+1,j}+a\right)}{\sum_{j\in Q_i}\left(X_{ij}+a\right)}. \qquad (6.1)$$

В рассматриваемом случае таблицы 1.2 формулы (6.1) переходят в следующие:

$$c_1 = c_1(a) = \frac{(7+a)+(12+a)+(17+a)}{(0+a)+(4+a)+(9+a)} = \frac{36+3a}{13+3a},$$

$$c_2 = c_2(a) = \frac{(21+a)+(26+a)+(70+a)}{(12+a)+(17+a)+(56+a)} = \frac{117+3a}{85+3a},$$

$$c_3 = c_3(a) = \frac{(35+a)+(90+a)+(80+a)}{(26+a)+(70+a)+(62+a)} = \frac{205+3a}{158+3a},$$

$$c_4 = c_4(a) = 1,\ c_5 = c_5(a) = 1,\ c_6 = c_6(a) = 1,\ c_7 = c_7(a) = 1.$$

Выбор центра a = 35,0000 дает значения

$$c_1 = \frac{141}{118} = \mathbf{1{,}1949}152,\ c_2 = \frac{222}{190} = \mathbf{1{,}1684}21,\ c_3 = \frac{310}{263} = \mathbf{1{,}1787}072,$$

совпадающие (в очевидном смысле) с табличными.

Восстановим вычисления, которые формируют таблицу 6. Как и в предыдущем разделе, воспользуемся соотношением $\hat{X}_j = \hat{H}_j \cdot X_{j,j}$, которое в случае лондонских цепей приобретает вид

$$\hat{X}_j + a = \hat{H}_j \cdot (X_{j,j}+a). \qquad (6.2)$$

Имеем

$c_1 = 1,1949152$ $\hat{H}_1 = 1,1949152 \cdot 1,3772262 = 1,6456685$

$c_2 = 1,168421$ $\hat{H}_2 = 1,168421 \cdot 1,1787072 = 1,3772262$

$c_3 = 1,1787072$ $\hat{H}_3 = 1,1787072$

$c_4 = 1,000000$ $\hat{H}_4 = 1,000000$

$c_5 = 1,000000$ $\hat{H}_5 = 1,000000$

$c_6 = 1,000000$ $\hat{H}_6 = 1,000000$

$c_7 = 1,000000$ $\hat{H}_7 = 1,000000$ ($\hat{H}_i$ считаем снизу)

Окончательный убыток считаем по формуле (6.2) *IBNR*

$\hat{X}_1 = \hat{H}_1 \cdot (0+35) - 35 = 0,6456685 \cdot 35 = 22,598397 \approx 23$ $\hat{X}_1 - \hat{X}_{11} = 23 - 0 = 23$

$\hat{X}_2 = \hat{H}_2 \cdot (7+35) - 35 = 42 \cdot 1,3772262 - 35 = 22,8435 \approx 23$ $\hat{X}_2 - \hat{X}_{22} = 23 - 7 = 16$

$\hat{X}_3 = \hat{H}_3 \cdot (21+35) - 35 = 56 \cdot 1,1787072 - 35 = 31,007603 \approx 31$ $\hat{X}_3 - \hat{X}_{33} = 31 - 21 = 10$

$\hat{X}_4 = \hat{H}_4 \cdot (35+35) - 35 = 35$ $\hat{X}_4 - \hat{X}_{44} = 35 - 35 = 0$

$\hat{X}_5 = \hat{H}_5 \cdot (90+35) - 35 = 90$ $\hat{X}_5 - \hat{X}_{55} = 90 - 90 = 0$

$\hat{X}_6 = \hat{H}_6 \cdot (80+35) - 35 = 80$ $\hat{X}_6 - \hat{X}_{66} = 80 - 80 = 0$

$\hat{X}_7 = \hat{H}_7 \cdot (70+35) - 35 = 70$ $\hat{X}_7 - \hat{X}_{77} = 70 - 70 = 0$

Если еще и $\hat{H}_8 = 1$, то

$\hat{X}_8 = \hat{H}_8 \cdot (60+35) - 35 = 60$ $\hat{X}_8 - \hat{X}_{88} = 60 - 60 = 0$

Вот, кажется, пока все!

ЛИТЕРАТУРА

[Шт] Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования. – М.: «Крокус-Т», 1990. – 147 с.

[Бю] Buhlmann H. *Chain Ladder, Cape Cod and Complementary Loss Ratio*. International Summer School 1983, unpublished.

[Гм] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.: ил.

[ЛДО] Лепин-Дмитрюков Г.А., Овчаренко Е.К. Сборник задач по программированию на языке ПЛ/1. – М.: Советское радио, 1980. – 304 с., ил.

[ССК] Светозарова Г.И., Сигитов Е.В., Козловский А.В. Практикум по программированию на алгоритмических языках. М.: Наука, ГРФМЛ, 1980. – 320 с. с илл.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Гафарова Аделя. Итерации по методу лондонской цепи с точным центром

a_{0} = 0.000000
a_{1} = 3.042695
a_{2} = 5.042425
a_{3} = 6.750799
a_{4} = 8.296759
a_{5} = 9.728758
a_{6} = 11.069652
a_{7} = 12.331852
a_{8} = 13.522989

a_{9} = 14.648367
a_{10} = 15.712120

a_{11} = 16.717764
a_{12} = 17.668475
a_{13} = 18.567215
a_{14} = 19.416795
a_{15} = 20.219901
a_{16} = 20.979097
a_{17} = 21.696836
a_{18} = 22.375451

a_{19} = 23.017159
a_{20} = 23.624063

a_{21} = 24.198153
a_{22} = 24.741304
a_{23} = 25.255288
a_{24} = 25.741772
a_{25} = 26.202323
a_{26} = 26.638417
a_{27} = 27.051439
a_{28} = 27.442694

a_{29} = 27.813403
a_{30} = 28.164718

a_{31} = 28.497719
a_{32} = 28.813421
a_{33} = 29.112778
a_{34} = 29.396688
a_{35} = 29.665995
a_{36} = 29.921492
a_{37} = 30.163927
a_{38} = 30.394004

a_{39} = 30.612384
a_{40} = 30.819692

a_{41} = 31.016516
a_{42} = 31.203410
a_{43} = 31.380899
a_{44} = 31.549475
a_{45} = 31.709604
a_{46} = 31.861726
a_{47} = 32.006256
a_{48} = 32.143588

a_{49} = 32.274091
a_{50} = 32.398118

a_{51} = 32.515998
a_{52} = 32.628047
a_{53} = 32.734560
a_{54} = 32.835820
a_{55} = 32.932092
a_{56} = 33.023627
a_{57} = 33.110666
a_{58} = 33.193433

a_{59} = 33.272142
a_{60} = 33.346998

a_{61} = 33.418193
a_{62} = 33.485908
a_{63} = 33.550317
a_{64} = 33.611585
a_{65} = 33.669867
a_{66} = 33.725312
a_{67} = 33.778058
a_{68} = 33.828240

a_{69} = 33.875984
a_{70} = 33.921409

a_{71} = 33.964631
a_{72} = 34.005757
a_{73} = 34.044889
a_{74} = 34.082126
a_{75} = 34.117561
a_{76} = 34.151281
a_{77} = 34.183370
a_{78} = 34.213908

a_{79} = 34.242970
a_{80} = 34.270628

a_{81} = 34.296952
a_{82} = 34.322004
a_{83} = 34.345848
a_{84} = 34.368543
a_{85} = 34.390143
a_{86} = 34.410701
a_{87} = 34.430270
a_{88} = 34.448895

a_{89} = 34.466624
a_{90} = 34.483499

a_{91} = 34.499562
a_{92} = 34.514852
a_{93} = 34.529406
a_{94} = 34.543261
a_{95} = 34.556448
a_{96} = 34.569002
a_{97} = 34.580953
a_{98} = 34.592329

a_{99} = 34.603158
a_{100} = 34.613467

Таблица:

Окончательный фактор развития	Окончательные убытки	IBNR
h_0 = 1.64813	x_0 = 22.42726	22.42726
h_1 = 1.37792	x_1 = 22.72252	15.72252
h_2 = 1.18275	x_2 = 31.16167	10.16167
h_3 = 1.00000	x_3 = 35.00000	0.00000
h_4 = 1.00000	x_4 = 90.00000	0.00000
h_5 = 1.00000	x_5 = 80.00000	0.00000
h_6 = 1.00000	x_6 = 70.00000	0.00000

Суммарный IBNR = 48.31144

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Гафарова Аделя. Итерации по методу лондонской цепи с точным центром. Расширенная версия.

Во всех строках $c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = 1$

a_0 = 0.000000	**c_1 = 2.072165**	**c_2 = 1.292799**	**c_3 = 1.291932**
a_1 = 3.042695	**c_1 = 1.853338**	**c_2 = 1.277676**	**c_3 = 1.277926**
a_2 = 5.042425	c_1 = 1.722698	c_2 = 1.267931	c_3 = 1.269349
a_3 = 6.750799	c_1 = 1.633535	c_2 = 1.259825	c_3 = 1.262386
a_4 = 8.296759	c_1 = 1.567819	c_2 = 1.252701	c_3 = 1.256358
a_5 = 9.728758	c_1 = 1.517060	c_2 = 1.246298	c_3 = 1.250993
a_6 = 11.069652	c_1 = 1.476597	c_2 = 1.240481	c_3 = 1.246151
a_7 = 12.331852	c_1 = 1.443591	c_2 = 1.235169	c_3 = 1.241747
a_8 = 13.522989	c_1 = 1.416189	c_2 = 1.230302	c_3 = 1.237720
a_9 = 14.648367	**c_1 = 1.393117**	**c_2 = 1.225833**	**c_3 = 1.234027**
a_{10} = 15.712120	**c_1 = 1.373460**	**c_2= 1.221725**	**c_3 = 1.230633**
a_{11} = 16.717764	c_1 = 1.356546	c_2 = 1.217943	c_3 = 1.227506
a_{12} = 17.668475	c_1 = 1.341867	c_2 = 1.214457	c_3 = 1.224622
a_{13} = 18.567215	c_1 = 1.329030	c_2 = 1.211240	c_3 = 1.221957
a_{14} = 19.416795	c_1 = 1.317730	c_2 = 1.208269	c_3 = 1.219491
a_{15} = 20.219901	c_1 = 1.307723	c_2 = 1.205521	c_3 = 1.217207
a_{16} = 20.979097	c_1 = 1.298814	c_2 = 1.202976	c_3 = 1.215087
a_{17} = 21.696836	c_1 = 1.290843	c_2 = 1.200618	c_3 = 1.213119
a_{18} = 22.375451	c_1 = 1.283681	c_2 = 1.198428	c_3 = 1.211289
a_{19} = 23.017159	**c_1 = 1.277219**	**c_2 = 1.196394**	**c_3 = 1.209585**
a_{20} = 23.624063	**c_1 = 1.271368**	**c_2 = 1.194502**	**c_3 = 1.207998**
a_{21} = 24.198153	c_1 = 1.266053	c_2 = 1.192740	c_3 = 1.206516
a_{22} = 24.741304	c_1 = 1.261209	c_2 = 1.191098	c_3 = 1.205133
a_{23} = 25.255288	c_1 = 1.256783	c_2 = 1.189565	c_3 = 1.203840
a_{24} = 25.741772	c_1 = 1.252727	c_2 = 1.188134	c_3 = 1.202630
a_{25} = 26.202323	c_1 = 1.249002	c_2 = 1.186796	c_3 = 1.201497
a_{26} = 26.638417	c_1 = 1.245573	c_2 = 1.185543	c_3 = 1.200435
a_{27} = 27.051439	c_1 = 1.242410	c_2 = 1.184370	c_3 = 1.199440
a_{28} = 27.442694	c_1 = 1.239487	c_2 = 1.183271	c_3 = 1.198505
a_{29} = 27.813403	**c_1 = 1.236782**	**c_2 = 1.182240**	**c_3 = 1.197626**
a_{30} = 28.164718	**c_1 = 1.234272**	**c_2 = 1.181272**	**c_3 = 1.196801**
a_{31} = 28.497719	c_1 = 1.231942	c_2 = 1.180362	c_3 = 1.196025
a_{32} = 28.813421	c_1 = 1.229774	c_2 = 1.179508	c_3 = 1.195294
a_{33} = 29.112778	c_1 = 1.227756	c_2 = 1.178703	c_3 = 1.194606
a_{34} = 29.396688	c_1 = 1.225873	c_2 = 1.177947	c_3 = 1.193957

$a_{35} = 29.665995$	$c_1 = 1.224116$	$c_2 = 1.177234$	$c_3 = 1.193346$
$a_{36} = 29.921492$	$c_1 = 1.222474$	$c_2 = 1.176562$	$c_3 = 1.192769$
$a_{37} = 30.163927$	$c_1 = 1.220937$	$c_2 = 1.175929$	$c_3 = 1.192225$
$a_{38} = 30.394004$	$c_1 = 1.219498$	$c_2 = 1.175332$	$c_3 = 1.191711$
$\mathbf{a_{39} = 30.612384}$	$\mathbf{c_1 = 1.218149}$	$\mathbf{c_2 = 1.174768}$	$\mathbf{c_3 = 1.191226}$
$\mathbf{a_{40} = 30.819692}$	$\mathbf{c_1 = 1.216884}$	$\mathbf{c_2 = 1.174236}$	$\mathbf{c_3 = 1.190768}$
$a_{41} = 31.016516$	$c_1 = 1.215696$	$c_2 = 1.173734$	$c_3 = 1.190334$
$a_{42} = 31.203410$	$c_1 = 1.214580$	$c_2 = 1.173259$	$c_3 = 1.189925$
$a_{43} = 31.380899$	$c_1 = 1.213530$	$c_2 = 1.172810$	$c_3 = 1.189537$
$a_{44} = 31.549475$	$c_1 = 1.212543$	$c_2 = 1.172386$	$c_3 = 1.189170$
$a_{45} = 31.709604$	$c_1 = 1.211613$	$c_2 = 1.171984$	$c_3 = 1.188823$
$a_{46} = 31.861726$	$c_1 = 1.210737$	$c_2 = 1.171605$	$c_3 = 1.188495$
$a_{47} = 32.006256$	$c_1 = 1.209912$	$c_2 = 1.171245$	$c_3 = 1.188183$
$a_{48} = 32.143588$	$c_1 = 1.209134$	$c_2 = 1.170905$	$c_3 = 1.187889$
$\mathbf{a_{49} = 32.274091}$	$\mathbf{c_1 = 1.208399}$	$\mathbf{c_2 = 1.170582}$	$\mathbf{c_3 = 1.187609}$
$\mathbf{a_{50} = 32.398118}$	$\mathbf{c_1 = 1.207706}$	$\mathbf{c_2 = 1.170277}$	$\mathbf{c_3 = 1.187344}$
$a_{51} = 32.515998$	$c_1 = 1.207051$	$c_2 = 1.169988$	$c_3 = 1.187093$
$a_{52} = 32.628047$	$c_1 = 1.206433$	$c_2 = 1.169714$	$c_3 = 1.186855$
$a_{53} = 32.734560$	$c_1 = 1.205848$	$c_2 = 1.169454$	$c_3 = 1.186630$
$a_{54} = 32.835820$	$c_1 = 1.205295$	$c_2 = 1.169207$	$c_3 = 1.186416$
$a_{55} = 32.932092$	$c_1 = 1.204773$	$c_2 = 1.168974$	$c_3 = 1.186213$
$a_{56} = 33.023627$	$c_1 = 1.204278$	$c_2 = 1.168752$	$c_3 = 1.186020$
$a_{57} = 33.110666$	$c_1 = 1.203810$	$c_2 = 1.168542$	$c_3 = 1.185837$
$a_{58} = 33.193433$	$c_1 = 1.203367$	$c_2 = 1.168342$	$c_3 = 1.185663$
$\mathbf{a_{59} = 33.272142}$	$\mathbf{c_1 = 1.202947}$	$\mathbf{c_2 = 1.168153}$	$\mathbf{c_3 = 1.185499}$
$\mathbf{a_{60} = 33.346998}$	$\mathbf{c_1 = 1.202550}$	$\mathbf{c_2 = 1.167973}$	$\mathbf{c_3 = 1.185342}$
$a_{61} = 33.418193$	$c_1 = 1.202173$	$c_2 = 1.167803$	$c_3 = 1.185194$
$a_{62} = 33.485908$	$c_1 = 1.201816$	$c_2 = 1.167641$	$c_3 = 1.185052$
$a_{63} = 33.550317$	$c_1 = 1.201477$	$c_2 = 1.167487$	$c_3 = 1.184918$
$a_{64} = 33.611585$	$c_1 = 1.201157$	$c_2 = 1.167341$	$c_3 = 1.184791$
$a_{65} = 33.669867$	$c_1 = 1.200852$	$c_2 = 1.167202$	$c_3 = 1.184670$
$a_{66} = 33.725312$	$c_1 = 1.200564$	$c_2 = 1.167070$	$c_3 = 1.184555$
$a_{67} = 33.778058$	$c_1 = 1.200290$	$c_2 = 1.166945$	$c_3 = 1.184446$
$a_{68} = 33.828240$	$c_1 = 1.200030$	$c_2 = 1.166826$	$c_3 = 1.184342$
$\mathbf{a_{69} = 33.875984}$	$\mathbf{c_1 = 1.199784}$	$\mathbf{c_2 = 1.166713}$	$\mathbf{c_3 = 1.184244}$
$\mathbf{a_{70} = 33.921409}$	$\mathbf{c_1 = 1.199550}$	$\mathbf{c_2 = 1.166605}$	$\mathbf{c_3 = 1.184150}$
$a_{71} = 33.964631$	$c_1 = 1.199327$	$c_2 = 1.166503$	$c_3 = 1.184061$
$a_{72} = 34.005757$	$c_1 = 1.199116$	$c_2 = 1.166406$	$c_3 = 1.183976$
$a_{73} = 34.044889$	$c_1 = 1.198916$	$c_2 = 1.166314$	$c_3 = 1.183895$
$a_{74} = 34.082126$	$c_1 = 1.198726$	$c_2 = 1.166226$	$c_3 = 1.183819$
$a_{75} = 34.117561$	$c_1 = 1.198545$	$c_2 = 1.166143$	$c_3 = 1.183746$
$a_{76} = 34.151281$	$c_1 = 1.198373$	$c_2 = 1.166063$	$c_3 = 1.183677$
$a_{77} = 34.183370$	$c_1 = 1.198210$	$c_2 = 1.165988$	$c_3 = 1.183611$
$a_{78} = 34.213908$	$c_1 = 1.198055$	$c_2 = 1.165916$	$c_3 = 1.183548$

$a_{79} = 34.242970$	**$c_1 = 1.197908$**	**$c_2 = 1.165848$**	**$c_3 = 1.183489$**
$a_{80} = 34.270628$	**$c_1 = 1.197768$**	**$c_2 = 1.165783$**	**$c_3 = 1.183432$**
$a_{81} = 34.296952$	$c_1 = 1.197635$	$c_2 = 1.165722$	$c_3 = 1.183378$
$a_{82} = 34.322004$	$c_1 = 1.197509$	$c_2 = 1.165663$	$c_3 = 1.183327$
$a_{83} = 34.345848$	$c_1 = 1.197389$	$c_2 = 1.165607$	$c_3 = 1.183278$
$a_{84} = 34.368543$	$c_1 = 1.197274$	$c_2 = 1.165554$	$c_3 = 1.183232$
$a_{85} = 34.390143$	$c_1 = 1.197166$	$c_2 = 1.165504$	$c_3 = 1.183188$
$a_{86} = 34.410701$	$c_1 = 1.197063$	$c_2 = 1.165456$	$c_3 = 1.183146$
$a_{87} = 34.430270$	$c_1 = 1.196964$	$c_2 = 1.165410$	$c_3 = 1.183106$
$a_{88} = 34.448895$	$c_1 = 1.196871$	$c_2 = 1.165366$	$c_3 = 1.183068$
$a_{89} = 34.466624$	**$c_1 = 1.196782$**	**$c_2 = 1.165325$**	**$c_3 = 1.183031$**
$a_{90} = 34.483499$	**$c_1 = 1.196698$**	**$c_2 = 1.165286$**	**$c_3 = 1.182997$**
$a_{91} = 34.499562$	$c_1 = 1.196618$	$c_2 = 1.165248$	$c_3 = 1.182964$
$a_{92} = 34.514852$	$c_1 = 1.196541$	$c_2 = 1.165213$	$c_3 = 1.182933$
$a_{93} = 34.529406$	$c_1 = 1.196469$	$c_2 = 1.165179$	$c_3 = 1.182904$
$a_{94} = 34.543261$	$c_1 = 1.196399$	$c_2 = 1.165147$	$c_3 = 1.182875$
$a_{95} = 34.556448$	$c_1 = 1.196334$	$c_2 = 1.165116$	$c_3 = 1.182848$
$a_{96} = 34.569002$	$c_1 = 1.196271$	$c_2 = 1.165087$	$c_3 = 1.182823$
$a_{97} = 34.580953$	$c_1 = 1.196212$	$c_2 = 1.165059$	$c_3 = 1.182799$
$a_{98} = 34.592329$	$c_1 = 1.196155$	$c_2 = 1.165032$	$c_3 = 1.182775$
$a_{99} = 34.603158$	**$c_1 = 1.196100984$**	**$c_2 = 1.165007193$**	**$c_3 = 1.182753375$**
$a_{100} = 34.613467$	**$c_1 = 1.196049956$**	**$c_2 = 1.164983338$**	**$c_3 = 1.182732501$**

Таблица:

Фактор развития			Окончательные убытки			IBNR
h_0	=	1.64813	x_0	=	22.42726	22.42726
h_1	=	1.37792	x_1	=	22.72252	15.72252
h_2	=	1.18275	x_2	=	31.16167	10.16167
h_3	=	1.00000	x_3	=	35.00000	0.00000
h_4	=	1.00000	x_4	=	90.00000	0.00000
h_5	=	1.00000	x_5	=	80.00000	0.00000
h_6	=	1.00000	x_6	=	70.00000	0.00000

Суммарный IBNR = 48.31144

Сейчас 21.15 9 июня 2019 г.