ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

УДК 512

С.Н. ТРОНИН

ОПЕРАДЫ В КАТЕГОРИИ КОНВЕКСОРОВ. I

В работах [1]–[3] изучался один класс универсальных алгебр, называемых конвексорами (или барицентрическими алгебрами). Некоторые примеры таких алгебр хорошо известны: выпуклые подмножества в евклидовых пространствах (в частности, множества стохастических матриц) и верхние полурешетки. Имеются приложения, например, к теории вероятностных автоматов. В данной статье исследуются связи между конвексорами и операдами. По-видимому, линейные операды как самостоятельный объект изучения появились впервые (под другим названием) в [4]. Термин "операда" введен в [5] (см. также [6]). О современном состоянии теории операд и ее приложениях можно узнать из работ [7]–[10]. В [11], [12] было показано, что класс многообразий линейных (мультиоператорных) алгебр над линейными операдами в точности совпадает с классом многообразий мультиоператорных линейных алгебр, определяемых полилинейными тождествами. Заметим, что родственными операдам объектами являются (абстрактные) клоны. Связь между ними описана в [13].

В первой части данной работы дается новое, более общее, чем общепринятое, определение операды. Детально изучается операда, компонентами которой являются стандартные симплексы (со сдвигом размерности на единицу). Теорема 1 гласит, что многообразие конвексоров рационально эквивалентно многообразию алгебр над этой обобщенной операдой. Далее уточняются некоторые детали строения категории конвексоров. Заметим, что категория Conv, изучаемая в данной работе, существенно отличается от категории STOCH, которой уделено основное внимание в [1], [2].

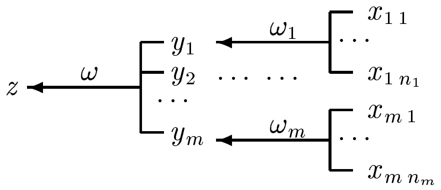
Во второй части работы вводится конвексорный аналог линейных операд: коноперады, т. е. операды, все компоненты которых являются конвексорами, а операции композиции полилинейны в конвексорном смысле. Основной результат всей работы состоит в характеризации многообразий коналгебр над коноперадами: это в точности те многообразия, которые определяются конвексорными аналогами полилинейных тождеств. Это полностью аналогично ситуации, имеющей место в линейном случае. Результаты данной работы были анонсированы в [14].

Операду можно определить как такое обобщение категории, в котором "стрелки" имеют не одно "начало" (объект), а несколько. Точное определение таково. Операда $\mathfrak{R}$ есть следующий комплекс данных. Во-первых, задан класс "объектов" $S = \mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}$. Далее, для каждого непустого слова $\overline{x} = x_1 \dots x_n$ в алфавите S и объекта $y \in S$ определено множество "стрелок" $\mathfrak{R}(\overline{x}, y)$ (возможно, пустое). Наконец, для непустых множеств "стрелок" определена операция композиции

$$\mathfrak{R}(y_1 \dots y_m, z) \times \mathfrak{R}(\overline{x}_1, y_1) \times \dots \times \mathfrak{R}(\overline{x}_m, y_m) \longrightarrow \mathfrak{R}(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, z), \tag{1}$$

которая будет обозначаться следующим образом: $(\omega, \omega_1, \dots, \omega_m, \omega) \mapsto \omega\omega_1 \dots \omega_m\omega = \omega(\omega_1 \dots \omega_m)$. Здесь $\overline{x}_i = x_{i1}x_{i2} \dots x_{in_i}$, $\omega_i \in \mathfrak{R}(\overline{x}_i, y_i)$, $1 \le i \le m$, $\omega \in \mathfrak{R}(y_1 \dots y_m, z)$. Это можно представить в виде

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00469).



Операция композиции должна удовлетворять свойствам

1) (ассоциативность) для тех наборов стрелок, для которых композиции существуют (здесь $\overline{\gamma}_i = \gamma_{i\,1} \dots \gamma_{i\,n_i}$), имеет место равенство
$$(\alpha\beta_1\beta_2 \dots \beta_m)(\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2 \dots \overline{\gamma}_m) = \alpha(\beta_1\overline{\gamma}_1)(\beta_2\overline{\gamma}_2) \dots (\beta_m\overline{\gamma}_m);$$
2) (существование единиц) для каждого объекта $x \in S$ в $\mathfrak{R}(x,x)$ существует стрелка $1_x = \mathrm{id}_x = \varepsilon_x$, и для любой стрелки $\omega \in \mathfrak{R}(x_1x_2 \dots x_m, y)$ должны выполняться соотношения $\omega 1_{x_1} 1_{x_2} \dots 1_{x_m} = \omega = 1_y\omega$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{K}$ — моноидальная категория с операцией тензорного произведения $\otimes$ (этой операцией в частном случае может быть и прямое произведение). Известно, что такую категорию можно считать строго моноидальной $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$. Категорию $\mathfrak{K}$ можно превратить в операду (обозначаемую также через $\mathfrak{K}$) следующим образом: множество объектов остается тем же, что и у $\mathfrak{K}$, и $\mathfrak{K}(x_1 \dots x_m, y) = \mathfrak{K}(x_1 \otimes \dots \otimes x_m, y)$. Композиция определяется равенством $\omega\omega_1 \dots \omega_m = \omega(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_m)$, единицы те же, что и в категории $\mathfrak{K}$. Фактически здесь имеет место функтор из категории моноидальных категорий и моноидальных функторов в категорию операд. Отметим сходство этой конструкции с "клонами полилинейных операций" из [4].

Любая категория $\mathfrak{R}$ в соответствии с данным выше определением есть операда, у которой все $\mathfrak{R}(\overline{x}, y)$ пусты, если слово $\overline{x}$ состоит более чем из одного символа. Операда $\mathfrak{R}$ называется линейной, если все $\mathfrak{R}(\overline{x}, y)$ — абелевы группы, и операция композиции (1) полилинейна. Ясно, что любую нелинейную операду можно превратить в линейную, взяв стрелки в качестве базисных элементов свободных абелевых групп и доопределив полилинейную композицию очевидным образом. Любая предаддитивная категория $\mathfrak{R}$ есть линейная операда, у которой все $\mathfrak{R}(\overline{x}, y)$ — тривиальные абелевы группы, если слово $\overline{x}$ состоит более чем из одного символа, и все отображения (1) по определению нулевые, если хотя бы один сомножитель в левой части нулевой. В частности, любое ассоциативное кольцо с единицей можно считать линейной операдой, у которой множество объектов состоит из одного элемента. В случае, когда класс объектов состоит из одного x, обозначим через $\mathfrak{R}(n)$ множество $\mathfrak{R}(x \dots x, x)$ всех стрелок из строки объектов длины n в объект x. Тогда приходим к определению операды, сформулированному в [5]: под операдой $\mathfrak{R}$ понимается семейство $\{\mathfrak{R}(n) \mid n = 1, 2, \dots\}$ множеств вместе с всевозможными операциями композиции вида
$$\mathfrak{R}(m) \times \mathfrak{R}(n_1) \times \dots \times \mathfrak{R}(n_m) \to \mathfrak{R}(n_1 + \dots + n_m), \tag{2}$$
обладающие некоторыми свойствами, в том числе ассоциативностью и наличием единичного элемента. Далее будут рассматриваться только такие операды.

Пусть $n > 0$ — натуральное число. Всюду в дальнейшем $[n]$ означает множество $\{1, \dots, n\}$. Обозначим через **FSet** полную подкатегорию категории множеств с объектами $[n]$. Разбиением натурального числа n на m частей в этой работе будет называться сюръективное неубывающее отображение вида $\alpha : [n] \to [m]$. Через **Par** обозначим категорию с объектами $[n]$ и морфизмами $\mathbf{Par}(n, m)$ — всевозможными разбиениями n на m частей. Для $\alpha \in \mathbf{Par}(n, m)$ и для всех $1 \le i \le m$ положим $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$. Тогда α можно отождествить с упорядоченной последовательностью $(n_1, \dots, n_m)$ длины m такой, что $n_1 + \dots + n_m = n$. Этим объясняется выбор термина. Если $\beta \in \mathbf{Par}(n, m)$, $\alpha \in \mathbf{Par}(m, k)$, $\alpha = (m_1, \dots, m_k)$, то β можно записать в виде $(n_{1,1}, \dots, n_{1,m_1}, \dots, n_{k,1}, \dots, n_{k,m_k})$. Теперь композицию $\alpha\beta$ можно описать как последовательность $\Big(\sum\limits_{i=1}^{m_1} n_{1,i}, \dots, \sum\limits_{i=1}^{m_k} n_{k,i}\Big)$.

В категории **FSet** существуют конечные копроизведения и расслоенные произведения. Естественный изоморфизм $[n]\sqcup[m] \to [n+m]$ отображает $i \in [n]$ в $i \in [n+m]$, $j \in [m]$ — в $n+j \in [n+m]$. Поэтому, если даны $f : [n] \to [m]$, $g : [p] \to [q]$, то $f \sqcup g : [n+p] \longrightarrow [m+q]$ действует следующим образом: $(f \sqcup g)(i) = f(i)$ при $1 \le i \le n$, $(f \sqcup g)(j) = m + g(j)$ при $1 \le j \le p$. Если $\alpha \in \mathbf{Par}(n,m)$, $\beta \in \mathbf{Par}(k,l)$, то $\alpha \sqcup \beta \in \mathbf{Par}(n+k, m+l)$ (хотя $[n+m]$ не есть копроизведение $[n]$ и $[m]$ в $\mathbf{Par}$). Пусть $\alpha \in \mathbf{Par}(n,m)$, $f : [k] \to [m]$ — любое отображение. Рассмотрим расслоенное произведение (декартов квадрат) вида

$$\begin{array}{ccc} [n]\times_{[m]}[k] & \xrightarrow{\pi_2} & [k] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ [n] & \xrightarrow{\alpha} & [m]. \end{array}$$

Пусть $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$. Множество $[n]\times_{[m]}[k]$ можно описать как $\{(i,j) \mid 1 \le i \le n_{f(j)},\ 1 \le j \le k\}$, тогда $\pi_1(i,j) = n_1 + \dots + n_{f(j-1)} + i$, $\pi_2(i,j) = j$. Будем пользоваться естественным отождествлением $[n]\times_{[m]}[k]$ с $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$, при котором паре (i,j) соответствует число $n_{f(1)} + \dots + n_{f(j-1)} + i$. После этого отождествления π_2 становится неубывающей сюръекцией, которую можно записать в виде разбиения $(n_{f(1)}, \dots, n_{f(k)})$. Обозначим это разбиение через αf. Преимущество такого обозначения в том, что если дано $g : [p] \to [k]$, то $\alpha(fg) = (\alpha f)g$. Соответственно проекцию π_1 обозначим через $f * \alpha$. Это отображение можно описать следующим образом. Пусть $[p,q] = \{p, p+1, \dots, q-1, q\}$. Тогда ограничение $f * \alpha : [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}] \to [n_1 + \dots + n_m]$ на каждый отрезок $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(j-1)} + 1, n_{f(1)} + \dots + n_{f(j)}]$ есть неубывающая биекция на отрезок $[n_1 + \dots + n_{f(j)-1} + 1, n_1 + \dots + n_{f(j)}]$. Заметим, что $f * \alpha$ есть не что иное, как подъем α вдоль f (чаще используется обозначение $f^*\alpha$), и $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$ можно рассматривать как результат применения функтора замены базы, т. е. как $f^*[n]$. Из свойств расслоенных произведений вытекают следующие тождества.

Лемма 1. *Пусть $\beta \in \mathbf{Par}(q,n)$, $\alpha \in \mathbf{Par}(n,m)$, $f : [k] \to [m]$, $g : [p] \to [k]$. Тогда имеют место соотношения*

$$f * (\alpha\beta) = (f * \alpha) * \beta, \quad (fg) * \alpha = (f * \alpha)(g * (\alpha f)), \quad (\alpha\beta)f = (\alpha f)(\beta(f * \alpha)).$$

Пусть X — любое множество. Для каждого отображения $f : [n] \to [m]$ определено отображение $X(f) : X^m \longrightarrow X^n$ такое, что $X(f)(x_1, \dots, x_m) = (x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)})$. Очевидно, $X(fg) = X(g)X(f)$, так что соответствие $[n] \mapsto X(n) = X^n$ есть контравариантный функтор. Выше уже было отмечено, что удобно записывать $X(f)(\overline{x})$ как $\overline{x}f$ (где $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$) с тем, чтобы было $\overline{x}(fg) = (\overline{x}f)g$. Без труда проверяются следующие свойства.

Лемма 2. *Пусть $\overline{x}_i \in X^{n_i}$, $1 \le i \le m$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbf{Par}(n,m)$, $f : [k] \to [m]$. Тогда $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m)(f * \alpha) = (\overline{x}_{f(1)}, \dots, \overline{x}_{f(k)})$.*

Пусть даны любые отображения $\omega_i : X^{n_i} \to X$, $1 \le i \le m$. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X^m & \xrightarrow{X(f)} & X^k \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \omega_1 \times \dots \times \omega_m} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \omega_{f(1)} \times \dots \times \omega_{f(m)}} \\ X^{n_1 + \dots + n_m} & \xrightarrow{X(f*\alpha)} & X^{n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}}. \end{array}$$

Рассмотрим подкатегорию $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{FSet}$ со всеми теми же объектами $[n]$, морфизмы которой должны удовлетворять условиям

1) если $f, g \in \operatorname{Mor} \mathbf{K}$, то $f \sqcup g \in \operatorname{Mor} \mathbf{K}$;

2) если $f : [k] \to [m]$ есть морфизм из $\mathbf{K}$, то для любого $\alpha \in \mathbf{Par}(n,m)$ имеет место $f * \alpha \in \mathbf{Par}(f^*[n], [n])$.

Примеры таких подкатегорий: тривиальная подкатегория Id, состоящая только из единичных морфизмов; категория Σ, в которой $\Sigma(n,m)$ пусто при $n \neq m$, а $\Sigma(n,n) = \Sigma_n$ — группа подстановок n-й степени; категория **Simpl**, морфизмы которой — неубывающие отображения; категория **Par**; наконец, вся категория $F\mathbf{Set}$.

Теперь можно завершить определение операды в необходимой здесь общности. Пусть $\mathbf{K}$ — описанная выше категория. $\mathbf{K}$-операдой будем называть операду $\mathfrak{R}$ такую, что

1) соответствие $[n] \mapsto \mathfrak{R}(n)$ есть ковариантный функтор на $\mathbf{K}$, действие которого обозначается так: если $f : [n] \to [m]$, $\omega \in \mathfrak{R}(n)$, то $\mathfrak{R}(f)(\omega) = f\omega \in \mathfrak{R}(m)$;

2) если даны $f_i \in \mathbf{K}([n_i],[k_i])$, $1 \le i \le m$, то имеет место коммутативная диаграмма, в которой горизонтальные стрелки суть композиции в операде

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{R}(m) \times \mathfrak{R}(n_1) \times \cdots \times \mathfrak{R}(n_m) & \longrightarrow & \mathfrak{R}(n_1 + \cdots + n_m) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle 1 \times \mathfrak{R}(f_1) \times \cdots \times \mathfrak{R}(f_m)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathfrak{R}(f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m)} \\
\mathfrak{R}(m) \times \mathfrak{R}(k_1) \times \cdots \times \mathfrak{R}(k_m) & \longrightarrow & \mathfrak{R}(k_1 + \ldots + k_m);
\end{array}$$

это равносильно выполнению тождества $\omega(f_1\omega_1)\ldots(f_m\omega_m) = (f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m)(\omega\omega_1\ldots\omega_m)$;

3) если дано отображение $f : [k] \to [m]$ и $\alpha = (n_1,\ldots,n_m) \in \mathbf{Par}(n,m)$, то имеет место коммутативная диаграмма, в которой горизонтальные стрелки есть композиции в операде, а π_j есть j-я проекция в декартовом произведении множеств

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{R}(m) \times \mathfrak{R}(n_1) \times \cdots \times \mathfrak{R}(n_m) & \longrightarrow & \mathfrak{R}(n_1 + \cdots + n_m) \\
\Big\uparrow {\scriptstyle \mathfrak{R}(f) \times 1 \times \cdots \times 1} & & \\
\mathfrak{R}(k) \times \mathfrak{R}(n_1) \times \cdots \times \mathfrak{R}(n_m) & & \Big\uparrow {\scriptstyle \mathfrak{R}(f * \alpha)} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle 1 \times \langle \pi_{f(1)},\ldots,\pi_{f(k)} \rangle} & & \\
\mathfrak{R}(k) \times \mathfrak{R}(n_{f(1)}) \times \cdots \times \mathfrak{R}(n_{f(k)}) & \longrightarrow & \mathfrak{R}(n_{f(1)} + \cdots + n_{f(k)});
\end{array}$$

это равносильно выполнению тождества $(f\omega)\omega_1\ldots\omega_m = (f * \alpha)(\omega\omega_{f(1)}\ldots\omega_{f(k)})$. Ясно, что если $\mathbf{K}'$ есть подкатегория $\mathbf{K}$, обладающая теми же двумя свойствами, сформулированными выше, то $\mathbf{K}$-операда $\mathfrak{R}$ будет также и $\mathbf{K}'$-операдой.

Пример 2. Пусть X — множество. Легко видеть, что операда $\mathfrak{E}_X = \{\mathfrak{E}_X(n) \mid n \ge 1\}$, где $\mathfrak{E}_X(n) = \mathrm{Map}(X^n, X)$ есть множество всех отображений из X^n в X (с операцией композиции $\omega\omega_1\ldots\omega_m = \omega(\omega_1 \times \cdots \times \omega_m)$), превращается в $\mathbf{FSet}$-операду, если для $\omega : X^n \to X$ и $f : [n] \to [m]$ положить $f\omega = \omega X(f)$.

Гомоморфизмом $\mathbf{K}$-операд $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{O}$ называется естественное преобразование $f(n) : \mathfrak{R}(n) \to \mathfrak{O}(n)$ такое, что $f(1)(1) = 1$ и $f(\omega\omega_1\omega_2\ldots\omega_m) = f(\omega)f(\omega_1)f(\omega_2)\ldots f(\omega_m)$ (опускаются номера компонент при f, которые однозначно определяются из контекста).

Алгеброй над операдой $\mathfrak{R}$ называется множество A вместе с заданными для каждого $n \ge 1$ операциями композиции $\mathfrak{R}(n) \times A^n \longrightarrow A$, $(\omega, a_1,\ldots,a_n) \mapsto \omega a_1 \ldots a_n$, для которых $\varepsilon a = a$ для любого $a \in A$ и выполнены тождества ассоциативности

$$\omega(\omega_1 a_{1\,1}\ldots a_{1\,k_1})\ldots(\omega_m a_{m\,1}\ldots a_{m\,k_m}) = (\omega\omega_1\ldots\omega_m)(a_{1\,1}\ldots a_{1\,k_1}\ldots a_{m\,1}\ldots a_{m\,k_m}).$$

Если $\mathfrak{R}$ есть $\mathbf{K}$-операда, то $\mathbf{K}$-алгебра над $\mathfrak{R}$ должна дополнительно удовлетворять условию: для любых $f \in \mathbf{K}(n,m)$, $\omega \in \mathfrak{R}(n)$, $a_1,\ldots,a_m \in A$ имеет место равенство $(f\omega)(a_1\ldots a_m) = \omega(a_{f(1)}\ldots a_{f(n)})$.

Гомоморфизм алгебр $h : A \to B$ над операдой $\mathfrak{R}$ есть отображение (гомоморфизм абелевых групп в линейном случае) такое, что для любых $a_1,\ldots,a_n \in A$, $\omega \in \mathfrak{R}(n)$ имеет место равенство $h(\omega a_1 a_2 \ldots a_n) = \omega h(a_1)h(a_2)\ldots h(a_n)$. Категория алгебр и гомоморфизмов Alg-$\mathfrak{R}$ является многообразием мультиоператорных алгебр в следующем смысле. Сама операда $\mathfrak{R}$ рассматривается в качестве сигнатуры, причем для всех $n \geq 1$ $\mathfrak{R}(n)$ есть множество символов n-арных операций. Категория Alg-$\mathfrak{R}$ есть абстрактный класс универсальных алгебр, замкнутый относительно подалгебр, прямых произведений и факторалгебр. В соответствии с ([13], с. 328) это означает, что Alg-$\mathfrak{R}$ есть многообразие. Когда надо подчеркнуть, что речь идет о $\mathbf{K}$-алгебрах, будем писать Alg-$\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$. Многочисленные примеры Σ-операд и алгебр можно найти в упомянутой во введении литературе, а также в обеих частях данной работы.

Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta(n) \mid n \geq 1\}$, $\Delta(n) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in [0,1],\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1\}$. Определим композицию: если $\delta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Delta(m)$, $\delta_i = (\alpha_{i\,1}, \ldots, \alpha_{i\,n_i}) \in \Delta(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, то

$$\delta\delta_1 \ldots \delta_m = (\alpha_1\alpha_{1\,1}, \ldots, \alpha_1\alpha_{1\,n_1}, \ldots, \alpha_m\alpha_{m\,1}, \ldots, \alpha_m\alpha_{m\,n_m}).$$

Пусть $e_i^{(n)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ есть стандартный базисный вектор длины n с единицей на i-м месте. Тогда $\delta \in \Delta(n)$ есть $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^{(n)}$, где $\alpha_i \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Если дано отображение $f : [n] \to [m]$, то определяем $f\delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_{f(i)}^{(m)}$ (с последующим приведением подобных членов). Ясно, что $f\delta \in \Delta(m)$, и нетрудно проверить, что $(fg)\delta = f(g\delta)$.

Теорема 1. Δ *с определенной выше операцией композиции является* $\mathbf{FSet}$*-операдой.* Σ*-алгебры над этой операдой можно описать как множества A с семейством бинарных операций $\alpha : A \times A \to A$, $\alpha \in [0,1]$, для которых выполнены тождества*

1) $\alpha(\beta(x,y), z) = \alpha\beta(x, \alpha(1-\beta)/(1-\alpha\beta)(y,z))$, *где предполагается, что* $\frac{0}{0} = 0$;

2) $\alpha(x,y) = (1-\alpha)(y,x)$.

$\mathbf{FSet}$*-алгебры над* Δ *— это те из них, для которых выполняются дополнительно тождества*

3) $\alpha(x,x) = x$, $1(x,y) = x$.

Таким образом, $\mathbf{FSet}$-алгебры над Δ — это в точности конвексоры в смысле [1], [2].

Доказательство. Проверка свойств операды не представляет сложностей. Пусть A есть Δ-алгебра. Это значит, что для любого набора $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $0 \leq \alpha_i \leq 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, определена n-арная операция $\overline{\alpha} : A^n \to A$. В случае $n = 2$ набор $(\alpha, 1-\alpha)$ определяется одним числом α, так что бинарные операции на A помечены числами из единичного отрезка. Результат применения такой операции к $(x_1, x_2) \in A^2$ обозначим через $\alpha(x_1, x_2)$. Проверим первое из требуемых свойств, используя ассоциативность для операд и алгебр над операдами. Пусть $\alpha\beta \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha(\beta(x,y),z) &= (\alpha, 1-\alpha)((\beta, 1-\beta), 1)(x,y,z) = (\alpha(\beta, 1-\beta), 1-\alpha)(x,y,z) = \\ &= (\alpha\beta, \alpha(1-\beta), 1-\alpha)(x,y,z) = (\alpha\beta, 1-\alpha\beta)\Bigl(1, \Bigl(\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\Bigr)\Bigr)(x,y,z) = \\ &= \alpha\beta\Bigl(x, \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}(y,z)\Bigr).\end{aligned}$$

Если же $\alpha\beta = 1$, то $\alpha = \beta = 1$, и тогда $1(1(x,y),z) = ((1,0)((1,0),1))(x,y,z) = (1,0,0)(x,y,z) = (1,0)(1,(0,1))(x,y,z) = 1(x, 0(y,z))$. Пусть $\sigma = (1\ 2) \in \Sigma_2$ — транспозиция. Тогда $\sigma(\alpha, 1-\alpha) = (1-\alpha, \alpha)$, и по определению алгебры $(1-\alpha)(x,y) = (\sigma(\alpha, 1-\alpha))(x,y) = (\alpha, 1-\alpha)((x,y)\sigma) = \alpha(y,x)$.

Чтобы получить два последних тождества, воспользуемся $\mathbf{FSet}$-структурой на Δ. Возьмем единственное отображение $f : [2] \to [1]$. Ему соответствуют отображения $\Delta(f) : \Delta(2) \to \Delta(1)$, $(\alpha, 1-\alpha) \mapsto 1$ и $A(f) : A \to A^2$, $x \mapsto (x,x)$. Согласно наложенному на алгебру A условию должно быть выполнено тождество $(\Delta(f)(\alpha, 1-\alpha))x = (\alpha, 1-\alpha)(A(f)(x))$, т. е. $1x = x = \alpha(x,x)$. Если взять $f : [1] \to [2]$, $f(1) = 1$, то $A(f)(x,y) = x$, $\Delta(f)(1) = (1,0)$, и $(\Delta(f)(1))(x,y) = 1(A(f)(x,y))$ сводится к $1(x,y) = (1,0)(x,y) = 1x = x$. Аналогично, если $f(1) = 2$, то получим $0(x,y) = (0,1)(x,y) = 1y = y$.

Превратим теперь произвольный конвексор A в Δ-алгебру. Отображения $\Delta(1)\times A\to A$, $(1,x)\mapsto 1x=x$ и $\Delta(2)\times A^2\to A$, $((\alpha,1-\alpha),x,y)\mapsto \alpha(x,y)=(\alpha,1-\alpha)(x,y)$ соответствуют операциям конвексора. В общем случае определяем

$$\Delta(n)\times A^n\to A,\quad ((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

как операцию, введенную в [3] (см. также [1], с. 4; [2], с. 59). Эта операция, обозначаемая $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$, определяется индукцией по n. При $n=1,2$ это уже сделано, при $n>2$ полагаем $(1,0,\dots,0)(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1$ и при $\alpha_1\neq 1$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_1\biggl(x_1,\Bigl(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1},\dots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1}\Bigr)(x_2,\dots,x_n)\biggr).$$

Из доказанных в [2]–[3] тождеств

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)(x_1,\dots,x_n)=(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)})(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) \text{ для любого } \sigma\in\Sigma_n,$$
$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Bigl(\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{i\,j}x_{i\,j}\Bigr)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(\alpha_i\beta_{i\,j})x_{i\,j}$$

следует, что на A определена структура алгебры над Σ-операдой Δ. Чтобы доказать наличие **FSet**-структуры, можно заметить, что любое отображение $f:[n]\to[m]$ представимо в виде композиции $f=\sigma g$, где $\sigma\in\Sigma_m$, а $g:[n]\to[m]$ — неубывающее отображение, и в свою очередь любое неубывающее отображение есть композиция отображений вида $p:[n]\to[n+1]$, $p(1)=1,\dots,p(i-1)=i-1$, $p(i)=i+1,\dots,p(n)=n+1$ и $q:[n]\to[n-1]$, $q(1)=1,\dots,q(i)=i$, $q(i+1)=i,\dots,q(n)=n-1$ ([16]). Далее, интересующее нас равенство вида $(\Delta(uv)(\alpha_1,\dots,\alpha_n))(x_1,\dots,x_m)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)(x_{u(v(1))},\dots,x_{u(v(n))})$ есть следствие двух равенств: $(\Delta(u)(\beta_1,\dots,\beta_k))(x_1,\dots,x_m)=(\beta_1,\dots,\beta_k)(x_{u(1)},\dots,x_{u(k)})$ и $(\Delta(v)(\alpha_1,\dots,\alpha_n))(y_1,\dots,y_k)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)(y_{v(1)},\dots,y_{v(n)})$. Таким образом, достаточно проверить выполнение равенств двух типов:

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_i+\alpha_{i+1},\alpha_{i+2},\dots,\alpha_{n+1})(x_1,\dots,x_n)=$$
$$=(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\alpha_{i+1},\alpha_{i+2},\dots,\alpha_{n+1})(x_1,\dots,x_i,x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$$

и

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},0,\alpha_i,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{n-1})(x_1,\dots,x_n)=$$
$$=(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\dots,\alpha_{n-1})(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n).$$

Без потери общности можно предполагать, что $i=n$. Тогда при использовании знака суммы проверяемые равенства приобретают вид

$$\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i+(\alpha_n+\alpha_{n+1})x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i+\alpha_n x_n+\alpha_{n+1}x_n,$$
$$\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i+0x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i.$$

Эти равенства являются частными случаями тождеств из ([1], с. 4) (между (3) и (4)). $\square$

Операду Δ будем называть операдой симплексов, ибо $\Delta(n)$ фактически есть стандартный симплекс Δ_{n-1}.

Замечание. Для всех $n \geq 1$ рассмотрим множества

$$\mathbf{Sph}(n) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in [-1, +1],\ 1 \leq i \leq n,\ \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1\},$$
$$\mathbf{Cub}(n) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in [-1, +1],\ 1 \leq i \leq n,\ \max(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|) = 1\}.$$

Определенная в точности так же, как и для Δ, операция композиции превращает $\mathbf{Sph}$ и $\mathbf{Cub}$ в операды, которые можно назвать соответственно операдой сфер и операдой кубов. Несмотря на наличие естественных биекций (гомеоморфизмов) между $\Delta(n)$, $\mathbf{Sph}(n)$ и $\mathbf{Cub}(n)$, пока неясно, будут ли какие-то из этих операд изоморфными. Отметим гомоморфное вложение Δ в $\mathbf{Sph}$, осуществляемое формулой $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$, и обратный к нему слева гомоморфизм проекции из $\mathbf{Sph}$ на Δ: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2)$.

Отображение конвексоров $f : A \to B$ назовем Δ-линейным, если $f(\alpha(a_1, a_2)) = \alpha(f(a_1), f(a_2))$ для всех $a_1, a_2 \in A$ и любых $\alpha \in [0, 1]$. Обозначим через Conv категорию $\mathrm{Alg}\text{-}\Delta_{\mathbf{FSet}}$, объекты которой, как показано выше, есть конвексоры, а морфизмы (гомоморфизмы Δ-алгебр) суть Δ-линейные отображения. Множество Δ-линейных отображений из A в B обозначим через $\mathrm{Conv}(A, B)$. Δ-полилинейным назовем отображение вида $h : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$, являющееся Δ-линейным по каждому аргументу, где $A_1, \ldots, A_n, B$ — конвексоры.

Лемма 3. *Множество* $\mathrm{Conv}(A, B)$ *обладает естественной структурой конвексора. А именно, если даны* Δ*-линейные* $f_1, f_2 : A \to B$ *и* $\alpha \in [0, 1]$, *то* $\alpha(f_1, f_2)$ *определяется следующим образом: для каждого* $a \in A$ *полагаем* $\alpha(f_1, f_2)(a) = \alpha(f_1(a), f_2(a))$. Δ*-билинейными являются отображения композиции морфизмов в категории* Conv, *т. е.* $\mathrm{Conv}(B, C) \times \mathrm{Conv}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Conv}(A, C)$, $(f, g) \mapsto fg$ *и отображения вида* $\mathrm{Conv}(A, B) \times A \longrightarrow B$, $(f, a) \mapsto f(a)$.

Доказательство. Проверим, что $\alpha(f_1, f_2) \in \mathrm{Conv}(A, B)$. Это будет следовать из тождества

$$\alpha(\beta(x, y), \beta(z, t)) = \alpha\beta\Big(x, \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}(y, \beta(z, t))\Big) = \alpha\beta\Big(x, \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}(\beta(z, t), y)\Big) =$$
$$= \alpha\beta\Big(x, \frac{(1-\alpha)\beta}{1-\alpha\beta}(z, (1-\alpha)(t, y))\Big) = \beta(\alpha(x, z), \alpha(y, t)),$$

справедливого в любом конвексоре. Заметим, что частным случаем этого тождества является тождество, приведенное в ([1], с. 3; [17], с. 79, пример 1.5). Теперь пусть $g = \alpha(f_1, f_2)$. Утверждение, что $g(\beta(a_1, a_2)) = \beta(g(a_1), g(a_2))$, есть частный случай доказанного только что тождества при $x = f_1(a_1)$, $y = f_1(a_2)$, $z = f_2(a_1)$, $t = f_2(a_2)$. Остальные утверждения леммы проверяются непосредственно. $\square$

Категория Conv во многих отношениях похожа на категорию модулей над коммутативным кольцом. Поскольку это — многообразие универсальных алгебр, то существуют произвольные декартовы произведения и копроизведения. Копроизведения описаны в ([2], предложение 5). Известно также [1], что свободный конвексор $\mathrm{Fr}_\Delta(X)$ с базисом X изоморфен конвексору $\mathfrak{D}(X)$ всех распределений на X, т. е. множеству всех отображений вида $\gamma : X \to [0, 1]$ таких, что $\gamma(x) = 0$ для почти всех $x \in X$ и $\sum\limits_{x \in X} \gamma(x) = 1$. При этом базисным элементам соответствуют характеристические функции точек X. Свободный конвексор с базисом из n элементов — это конвексор $\Delta(n)$. Δ-линейные отображения из $\Delta(n)$ в $\Delta(n)$ находятся во взаимно однозначном соответствии со стохастическими $n \times n$-матрицами.

Тензорное произведение конвексоров V и W определяем как конвексор $V \otimes W$ вместе с Δ-билинейным отображением $d_{V,W} : V \times W \to V \otimes W$ таким, что для любого $B \in \mathrm{Conv}$ и любого Δ-билинейного $h : V \times W \to B$ существует, притом только одно, Δ-линейное $f : V \otimes W \to B$ такое, что $fd_{V,W} = h$. Единственность с точностью до изоморфизма очевидна.

Теорема 2. *Тензорные произведения в* Conv *существуют. Категория* Conv *с операцией тензорного произведения становится симметрической моноидальной замкнутой категорией. В частности, имеет место естественный изоморфизм сопряжения:* $\mathrm{Conv}(V \otimes W, B) \cong \mathrm{Conv}(W, \mathrm{Conv}(V, B))$. *Роль нейтрального объекта для тензорного произведения играет одноточечный конвексор* $\Delta(1)$.

Доказательство. Построение $V \otimes W$ производится в Conv точно так же, как и в категории модулей. А именно, берется свободный конвексор $Fr_\Delta(V \times W)$ и факторизуется по наименьшей конгруэнции, содержащей все пары вида $(\alpha(v_1, v_2), w) \sim \alpha((v_1, w), (v_2, w))$, $(v, \alpha(w_1, w_2)) \sim \alpha((v, w_1), (v, w_2))$. Δ-билинейное отображение $d_{V,W} : V \times W \to V \otimes W$ есть композиция $V \times W \to Fr_\Delta(V \times W) \to V \otimes W$. Все дальнейшие рассуждения практически дословно переносятся из теории модулей над кольцами. $\square$

Из построения видно, что элементы $V \otimes W$ можно представить в виде "линейной комбинации" $\sum\limits_i \alpha_i(v_i \otimes w_i)$, где $v \otimes w = d_{V,W}(v, w)$, почти все $\alpha_i \in [0, 1]$ равны нулю и $\sum\limits_i \alpha_i = 1$.

Точно таким же образом, как и в случае модулей, строятся тензорные произведения конмодулей. Будет достаточно рассмотреть ситуацию, когда на конвексоре V действует справа группа G, а на конвексоре W та же группа G действует слева. Предполагается, что для всех $\alpha \in [0, 1]$, $v_1, v_2 \in V$, $g \in G$ имеет место тождество $(\alpha(v_1, v_2))g = \alpha(v_1 g, v_2 g)$ и аналогично для левого действия на W. Тогда $V \otimes_G W$ можно определить универсальным свойством через Δ-билинейные отображения $h : V \times W \to B$ такие, что $h(vg, w) = h(v, gw)$ для всех $v \in V$, $w \in W$, $g \in G$. Легко показывается, что $V \otimes_G W$ существует и изоморфно фактору $V \otimes W$ по наименьшей конгруэнции, порожденной всеми парами $((vg \otimes w), (v \otimes gw))$. Определим категорию Conv_G с объектами — конвексорами, на которых слева действует указанным выше образом группа G, а морфизмы — эквивариантные Δ-линейные отображения. Если на V группа G действует справа, то на конвексоре $\mathrm{Conv}(V, B)$ она естественным образом действует слева по правилу $(gf)(v) = f(vg)$, и имеет место естественный изоморфизм $\mathrm{Conv}(V \otimes_G W, B) \cong \mathrm{Conv}_G(W, \mathrm{Conv}(V, B))$. Роль нейтрального объекта для этой разновидности тензорного произведения играет свободный конвексор с базисом G (аналог групповой алгебры). Ввиду наличия у функтора тензорного произведения сопряженного справа функтора выполняются свойства перестановочности с прямыми пределами, в частности, с копроизведениями и с коуравнителями. Это свойство будет существенно использовано во второй части данной работы при доказательстве основного результата.

Теорию мультиоператорных Δ-линейных алгебр можно строить совершенно аналогично теории линейных мультиоператорных алгебр. Пусть задано множество символов операций $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Δ-линейная Ω-алгебра A определяется как конвексор, на котором для каждого $n \geq 1$ и каждого $\omega \in \Omega_n$ определено Δ-полилинейное отображение $\omega^A : A^n \to A$. Гомоморфизмы таких алгебр должны быть соответственно Δ-линейными. Абсолютно свободные Δ-линейные Ω-алгебры строятся как свободные конвексоры, базисами которых являются нелинейные абсолютно свободные Ω-алгебры. Операции распространяются с множества базисных элементов по Δ-линейности точно так же, как и в линейном случае. Конгруэнции Δ-линейных алгебр — это конгруэнции Ω-алгебр такие, что для любого конечного семейства $x_i \sim y_i$, $1 \leq i \leq n$, и любых $i \in [0, 1]$ с условием $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ должно быть $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \sim \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. Тождества Δ-линейных Ω-алгебр будем записывать в виде $u(x_1 \ldots, x_i, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, где u, v — элементы абсолютно свободной Δ-линейной Ω-алгебры с базисом $x_1, \ldots, x_n$. В частности, понятие Δ-полилинейного тождества имеет почти тот же вид, что и в линейном случае. А именно, u и v должны быть Δ-линейными функциями по каждой переменной x_i. Многообразия Δ-линейных Ω-алгебр, определяемых полилинейными тождествами, будут охарактеризованы во второй части данной работы как многообразия алгебр над Δ-линейными операдами.

Литература

1. Скорняков Л.А. *Стохастическая алгебра* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 7. – С. 3–11.
2. Скорняков Л.А. *Алгебра стохастических распределений* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 11. – С. 59–67.
3. Skornjakov L.A. *Convexors* // Studia Sci. Math. Hungar. – 1981. – V. 116. – № 1–2. – P. 25–34.
4. Артамонов В.А. *Клоны полилинейных операций* // УМН. — 1969. — Т. 24. – Вып. 1. – С. 47–59.
5. May J.P. *The geometry of iterated loop spaces* // Lecture Notes Math. – 1972. – V. 271. – 175 p.
6. Бордман Дж., Фогт Р. *Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах.* – М.: Мир, 1977. – 408 с.
7. Ginzburg V., Kapranov M. *Koszul duality for operads* // Duke Math. J. – 1994. — V. 76. – № 1. – P. 203–272.
8. *Operads*: *proceedings of renaissance conferences* / J.-L. Loday, J.D. Stasheff, A.A. Voronov. – Contemp. Math. – 1997. – V. 202. – 443 p.
9. Kapranov M. *Operads and algebraic geometry* // Proc. Int. Congr. Math. – Berlin, 1998. August 18–27. – V. II: Invited Lectures. (Documenta Mathematica. Extra Volume ICM. II. – P. 277-286).
10. Smirnov V.A. *Simplicial and operad methods in algebraic topology.* – Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 2001. Series: Translations of Math. Monographs. – V. 198. – 235 p.
11. Тронин С.Н. *О некоторых свойствах финитарных алгебраических теорий* // Тез. сообщ. V Сибирской школы по многообразиям алгебр. систем, 1–5 июля 1988 г. – Барнаул, 1988. – С. 68–70.
12. Тронин С.Н. *О ретракциях свободных алгебр и модулей*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Кишинев, 1989. – 105 с.
13. Тронин С.Н. *Абстрактные клоны и операды* // Логика и приложения. Тез. международн. конф., посвящ. 60-летию со дня рожд. акад. Ю.Л. Ершова. – Новосибирск, 4–6 мая 2000 г. – С. 100.
14. Тронин С.Н. *Операды в категории конвексоров* // Универсальная алгебра и ее приложения. Тез. докл. международн. семин., посвящ. памяти проф. Л.А. Скорнякова. – Волгоград, 6–11 сент. 1999 г. – Волгоград: “Перемена”, 1999. – С. 62–63.
15. *Общая алгебра.* Т. 2. / Под ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – 480 с.
16. Габриэль П., Цисман М. *Категории частных и теория гомотопий.* – М.: Мир, 1971. – 295 с.
17. Мовсисян Ю.М. *Сверхтождества в алгебрах и многообразиях* // УМН. – 1998. – Т. 53. – Вып. 1. – С. 61–114.

Казанский государственный университет

Поступила
30.12.1999