Л.Р. Секаева

Курс лекций по математике для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Фармация»

Казань – 2021

Казанский федеральный университет

Кафедра общей математики

Л.Р. Секаева

Курс лекций по математике для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Фармация»

Казань – 2021

УДК 517, 519.2
ББК 22.161.1, 22.171, 22.172
ГРНТИ 27.23.17, 27.43.15, 27.43.17
С 28

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

учебно-методической комиссии
Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского КФУ
Протокол № 3 от 16 декабря 2021 г.

заседания кафедры общей математики
Протокол № 2 от 25 ноября 2021 г.

Автор
кандидат физико-математических наук, доцент Секаева Л.Р.

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор Насыров С.Р.

Рецензент
доктор физико-математических наук, доцент Абзалилов Д.Ф.

С 28 **Курс лекций по математике для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Фармация»:** учебное пособие / Л.Р. Секаева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2021. – 71 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления 33.05.01 «Фармация».

Пособие содержит следующие разделы: производная, неопределенный интеграл, определенный интеграл, приложения определенного интеграла, теория вероятностей, математическая статистика, а также включает разобранные решения задач.

Содержание

Лекция 1.

Производная. Дифференциал функции.
Задача о проведении касательной к кривой

Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, и требуется провести касательную к этой кривой в точке $c \in (a;b)$. Заметим, что *касательная* – это прямая, получающаяся в пределе из секущих, т.е. прямых, проходящих через точки $(c; f(c))$ и $(c + \Delta x; f(c + \Delta x))$, когда $\Delta x \to 0$. Уравнение хорды – прямой, проходящей через две заданные различные точки, – имеет вид:

$$\frac{x - c}{(c + \Delta x)} = \frac{y - f(c)}{f(c + \Delta x) - f(c)}$$

или

$$y = f(c) + \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}(x - c).$$

Делая предельный переход при $\Delta x \to 0$, получим предельное значение углового коэффициента хорд – угловой коэффициент касательной: $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$. На рисунке касательная представлена пунктиром. Итак, $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α– угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox (Рис. 1).

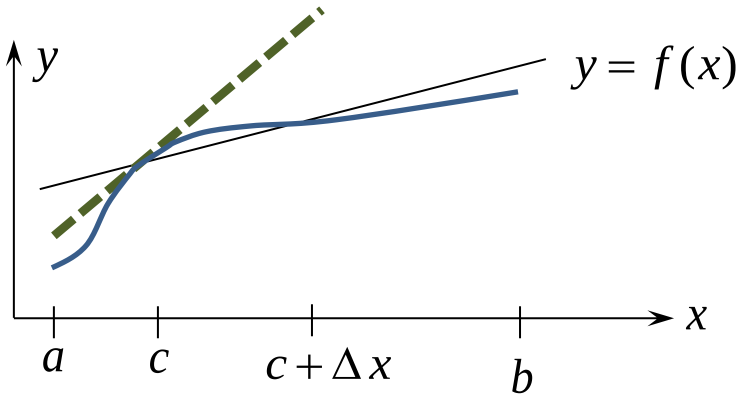

Рис. 1

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно (Рис. 2).

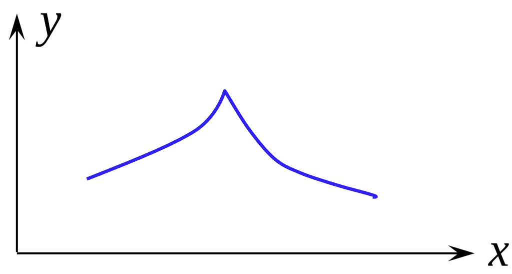

Рис. 2

Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции.

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ представимо в виде $\Delta f = A\Delta x + \beta$, причем A – константа, $\beta = o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция, более высокого порядка малости, чем Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\beta}{\Delta x} = 0$.

Установим значение A, для чего вычислим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{\beta}{\Delta x} \right] = A.$$

Назовем число A *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначим ее $f'(x_0)$, в результате получаем определение производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и, кроме того,

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Как было сказано выше, второе слагаемое в выражении приращения функции – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а следовательно, и чем величина $f'(x_0)\Delta x$. Другими словами, *первое слагаемое в выражении приращения функции представляет основную часть приращения функции*. Называют его *дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда $df = f'(x)dx$, откуда следует второе обозначение производной $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$. Связь между приращением функции и ее дифференциалом изображена на рисунке 3.

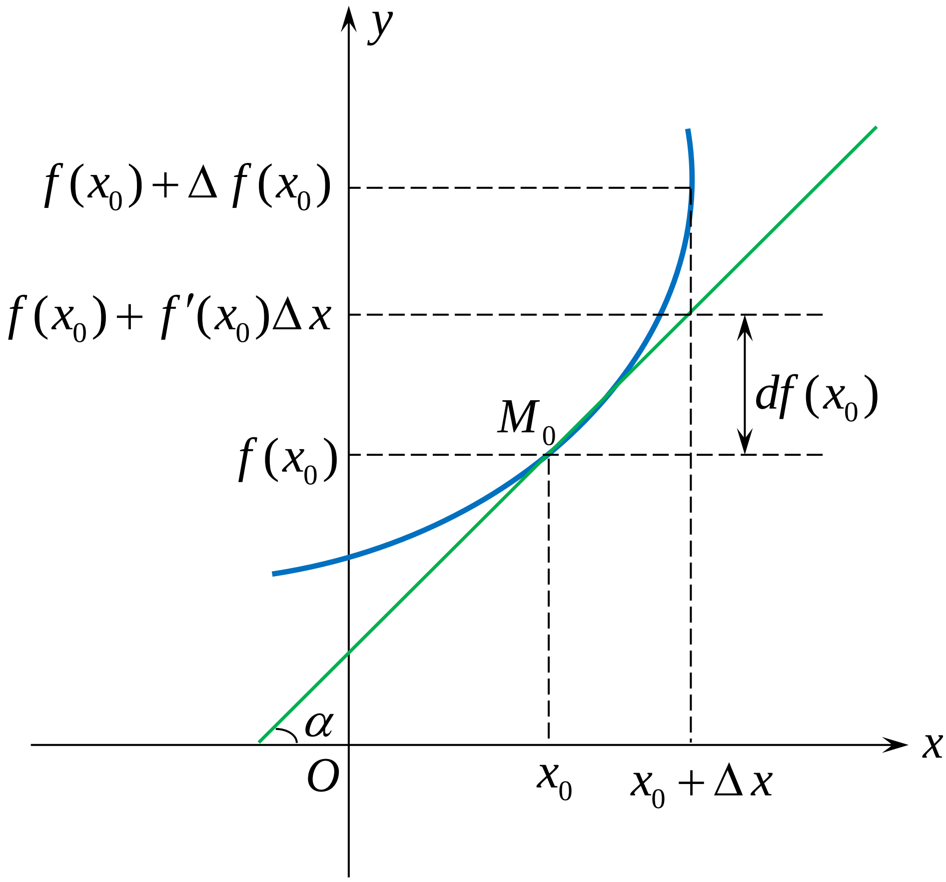

Рис. 3

Замечание. Геометрическим смыслом производной $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

Физическим смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент $x = x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y = f(x)$.

Теорема. Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.

В самом деле, поскольку

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\bigl(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\bigr) = 0,$$

имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Если из условия непрерывности функции следует, что приращение функции Δy бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то из условия дифференцируемости получается, что Δy бесконечно малая одного порядка малости с Δx.

Вычисление производной называют дифференцированием функции.

Таблица производных. Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две дифференцируемые на $(a;b)$ функции.

1. Производная суммы, разности:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

2. Производная произведения:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'; \ (Cu)' = Cu', \text{ где } C = \text{const};$$

3. Производная частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \ v \neq 0; \ \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u', \text{ где } C = \text{const};$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}, \text{ где } C = \text{const};$$

4. Производная сложной функции:

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции (или функции от функции) $y = f(\varphi(x))$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента u по независимой переменной x:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

5. Производная обратной функции:

Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ – обратная функция. Если производная в точке x_0 функции $f(x)$ существует и отлична от нуля, тогда существует производная обратной функции в точке y_0 и она равна

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ или } \varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$

2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(e^x)' = e^x$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

5. $(\sin x)' = \cos x$ 6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент «x» заменен на промежуточный аргумент «u».

Формулы дифференцирования

1. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$; $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$

4. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$; $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ 6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ 8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

9. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ 10. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

11. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$ 12. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Примеры вычисления производных

Пример 1. Найти производную первого порядка функции $y = \sin^4\left(7x+3\right)$.

Решение.

$$y' = 4\sin^3\left(7x+3\right)\cdot\cos\left(7x+3\right)\cdot 7 = 28\sin^3\left(7x+3\right)\cdot\cos\left(7x+3\right).$$

Пример 2. Найти производную первого порядка функции $y = 2^{\ln\left(\mathrm{ctg}3x\right)}$.

Решение.

$$y' = 2^{\ln\left(\mathrm{ctg}3x\right)}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\mathrm{ctg}3x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\left(3x\right)}\right)\cdot 3 = -2^{\ln\left(\mathrm{ctg}3x\right)}\frac{3\cdot\ln 2}{\mathrm{ctg}3x\cdot\sin^2\left(3x\right)}.$$

Логарифмическое дифференцирование

Здесь имеется ввиду дифференцирование с предварительным логарифмированием функции. Пусть $y = x^{\mathrm{tg}x}$. При вычислении производной нет возможности использовать таблицу производных, так как эта функция не является ни степенной, ни показательной. Прологарифмируем обе части уравнения $\ln y = \ln\left(x^{\mathrm{tg}x}\right) \Rightarrow \ln y = \mathrm{tg}x\cdot\ln x.$ В результате от явного задания функции перешли к неявному, при этом функция стала более удобной для дифференцирования. В самом деле, $\left(\ln y\right)'_x = \left(\mathrm{tg}x \cdot \ln x\right)'_x$. Поэтому $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\mathrm{tg}x}{x}$. В результате $y' = y \cdot \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\mathrm{tg}x}{x}\right) = x^{\mathrm{tg}x} \cdot \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\mathrm{tg}x}{x}\right)$.

Производные высших порядков

Второй производной функции $y = f(x)$ называется производная ее первой производной $y'' = (y')'$.

Если физический смысл первой производной – есть скорость изменения функции, то *вторая производная определяет* скорость изменения скорости изменения функции, то есть *ускорение*. Аналогично определяется производная любого порядка:

$$y''' = (y'')', \ldots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Пример. Найти производную третьего порядка функции $y = x^5$.

Решение.

Так как $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$.

Лекция 2.

Неопределенный интеграл.
Первообразная, основное свойство первообразных

Первообразной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$.

Поскольку $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$, где C – постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Теорема 1. *У любой функции* $f(x)$*, непрерывной на отрезке* $[a;b]$*, существует первообразная.*

Теорема 2. *Любые две первообразные функции* $f(x)$ *могут отличаться только на постоянную. Другими словами, если* $F'(x)=f(x)$ *и* $\Psi'(x)=f(x)$*, то* $F(x)-\Psi(x)=C=\text{const}$.

Множество всех первообразных одной функции называется *неопределенным интегралом этой функции* и обозначается $\int f(x)dx$, причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Очевидно, что если $F'(x)=f(x)$, то $\int f(x)dx=\int F'(x)dx=F(x)+C$, где C – произвольная постоянная интегрирования, то есть постоянная может принимать любые значения.

Приведем таблицу неопределенных интегралов с проверкой того, что действительно производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией.

Основные свойства неопределенного интеграла (НИ)

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx, \text{ если } c\neq 0 - \text{постоянная.}$$

2. Неопределенный интеграла от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0\cdot dx = C$	$(C)' = 0$
2. $\int 1\cdot dx = \int dx = x + C$	$(x+C)' = 1$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n\neq -1)$	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n \ (n\neq -1)$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\left(\ln\lvert x\rvert + C\right)' = \dfrac{1}{x}$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	$\left(e^x + C\right)' = e^x$
7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$(-\operatorname{ctg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C_1$	$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-\arccos x + C_1)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C_1$	$(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(-\operatorname{arcctg} x + C_1)' = \frac{1}{1+x^2}$
13. а) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$ б) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C$	а) $\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C\right)' = \frac{1}{1-x^2}$ б) $\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C\right)' = \frac{1}{x^2-1}$
14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ $(a \neq 0)$.	$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{x^2+a^2}$ $(a \neq 0)$.
15. а) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$ $(a \neq 0)$ б) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$ $(a \neq 0)$	а) $\left(\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C\right)' = \frac{1}{x^2-a^2}$ $(a \neq 0)$ б) $\left(\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C\right)' = \frac{1}{a^2-x^2}$ $(a \neq 0)$

16. а) $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+a^2\right|+C$ б) $\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right|+C$	а) $\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+a^2\right|+C\right)'=\frac{x}{x^2+a^2}$ б) $\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right|+C\right)'=\frac{x}{x^2-a^2}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ $(a>0)$	$\left(\arcsin\frac{x}{a}+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
18. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$ $(k\neq 0)$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-k}\right|+C$ $(k\neq 0)$	а) $\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$ $(k\neq 0)$ б) $\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-k}\right|+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-k}}$ $(k\neq 0)$

Приемы интегрирования.
Метод непосредственного интегрирования неопределенного интеграла

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int\left(2x^3-5x^2+7x-3\right)dx.$

Решение.

$$\int\left(2x^3-5x^2+7x-3\right)dx=2\int x^3dx-5\int x^2dx+7\int xdx-3\int dx=$$

$$=2\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+7\frac{x^2}{2}-3x+C=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-3x+C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int\left(x+\sqrt{x}-2\cos x\right)dx.$

Решение.

$$\int\left(x+\sqrt{x}-2\cos x\right)dx=\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int\cos xdx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-2\sin x+C=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sin x+C.$$

Замена переменной в неопределенном интеграле (интегрирование подстановкой)

Докажем, что если $F(x)+C=\int f(x)dx$, то $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C$. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема (т.е. имеет непрерывную производную) на некотором отрезке и принимает значения из отрезка $[a;b]$.

Доказательство. Имеем: $(F(x)+C)'=f(x)$. Тогда

$$(F(\varphi(t))+C)'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Формула интегрирования заменой переменной:

$$\int f(x)dx = \begin{Bmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{Bmatrix} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к старой переменной x.

При подходящей замене переменной мы сводим заданный интеграл к табличному.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (2x+1)^{20}\,dx.$

Решение.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \begin{Bmatrix} 2x+1=t \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int t^{20}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21}+C = \frac{1}{42}(2x+1)^{21}+C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \begin{Bmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right|+C =$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C\,.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл $\int \cos(3x+5)dx.$

Решение.

$$\int \cos(3x+5)dx = \left\{ \begin{array}{c} 3x+5=t \\ 3dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{3} \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+5)+C.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx + C.$$

(или $\int udv = uv - \int vdu$).

Доказательство. Справедливы соотношения:

$$\int (u(x)\cdot v(x))' dx = u(x)\cdot v(x) + C \quad \text{и}$$

$$\int (u(x)\cdot v(x))' dx = \int u(x)\cdot v'(x)\, dx + \int u'(x)\cdot v(x)\, dx.$$

Сравнивая правые части, получим приведенную выше формулу.

Типы интегралов, которые удобно вычислять этим методом:

1. $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, где $P(x)$ – многочлен, k – число. Удобно положить $u=P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, где a и b – числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$. В этом случае приходится дважды интегрировать по частям. Повторное интегрирование по частям приводит к первоначальному интегралу и тогда получается равенство, из которого находят выражение для искомого интеграла.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int x\cos x\,dx$.

Решение.

$$\int x\cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x, & dv = \cos x dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{matrix}\right\} = x\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{matrix}\right\} = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Определенный интеграл.
Формула Ньютона-Лейбница

Представим, что мы должны подсчитать площадь земельного участка, изображенного на рисунке 1.

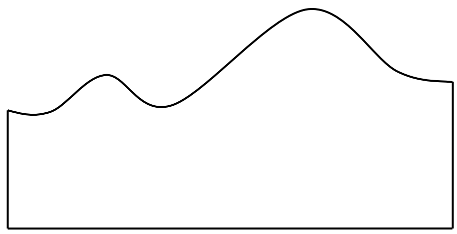

Рис. 1

Такая фигура, ограниченная с трех сторон отрезками прямых, два из которых перпендикулярны третьему, а четвертая сторона пересекается прямой, перпендикулярной противоположному отрезку, только в одной точке, называется криволинейной трапецией. Очевидно, что любая плоская фигура может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций. Будем считать, что прямолинейные участки сторон нашей криволинейной трапеции так же, как на рисунке, параллельны координатным осям. В этом случае можно нижний отрезок считать отрезком оси абсцисс, где $a \le x \le b$, и точки криволинейного участка задать с помощью непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Для того чтобы найти площадь криволинейной трапеции, заменим трапецию объединением прямоугольников по следующей схеме.

Отрезок $[a,b]$ разделен на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,...,n$, где $x_0 = a$, $x_n = b$ (Рис. 2).

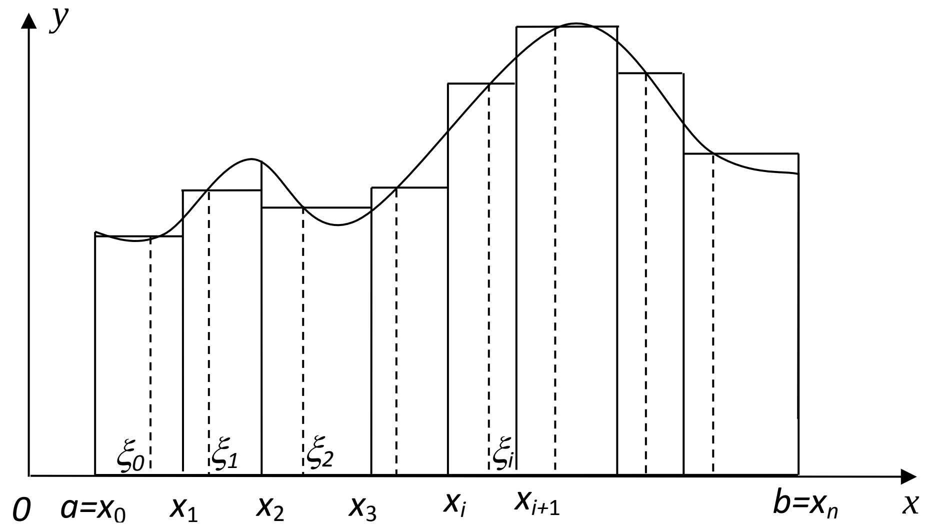

Рис. 2

На каждом отрезке выбрана точка ξ_i и в этой точке восстановлен перпендикуляр (прерывистая линия) до пересечения с кривой $y = f(x)$. Таким образом, вершиной перпендикуляра является точка с координатами $(\xi_i, f(\xi_i))$.

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ как на основании построен прямоугольник высотой $f(\xi_i)$. Очевидно, что чем меньше отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, тем меньше площадь прямоугольника отличается от площади криволинейной трапеции с основанием $[x_i, x_{i+1}]$. Обозначим Δ длину наибольшего из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Δ называется **диаметром разбиения**. Чем меньше диаметр разбиения, тем ближе сумма площадей построенных прямоугольников к площади исходной криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$.

Итак, за приближенное значение площади исходной криволинейной трапеции возьмем

$$\sigma(f, R, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Здесь R означает способ выбора точек разбиения x_i, ξ – выбор отмеченных точек ξ_i. Введенная сумма называется интегральной суммой Римана. Если существует предел

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma(f,R,\xi)=I,$$

причем этот предел не зависит ни от R, ни от ξ, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а сам предел называется **интегралом Римана по отрезку** и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Этот интеграл и будет равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной кривой $y=f(x)$.

Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.

Теорема. *Если функция* $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $F(x)$ *– какая-либо ее первообразная на* $[a;b]$ $\left(F'(x)=f(x)\right)$, *то имеет место формула*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \qquad (1)$$

где вертикальная черта и индексы обозначают разность значений функций, соответственно, при верхнем и нижнем значениях переменной.

Равенство (1) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Формула дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, надо найти ее первообразную функции $F(x)$ и взять разность $F(b)-F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a;b]$.

Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.

Теорема. *Если функция* $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $F(x)$ *– какая-либо ее первообразная на* $[a;b]$ $\left(F'(x)=f(x)\right)$, *то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a), \tag{1}$$

где вертикальная черта и индексы обозначают разность значений функций, соответственно, при верхнем и нижнем значениях переменной.

Равенство (1) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Формула дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, надо найти ее первообразную функции $F(x)$ и взять разность $F(b)-F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a;b]$.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 x^2 dx.$

Решение. $\int_0^3 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \dfrac{3^3}{3} - 0 = \dfrac{27}{3} - 0 = 9.$

Основные свойства определенного интеграла

1. Если c – постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx,$$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, тогда интегрируема на $[a;b]$ их сумма (разность) и

$$\int_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$$

т.е. интеграл от суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, т.е. замена направления интегрирования приводит к замене знак у интеграла.

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, т.е. интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка.

Замена переменной в определенном интеграле (интегрирование подстановкой)

Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема. *Если:*

1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha;\beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок $[a;b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Так как $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$. Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют подстановку $t=g(x)$;

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^2 e^{\frac{x}{2}}dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^2 e^{\frac{x}{2}}dx=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{x}{2}=t\\ x=2t\\ dx=2dt\\ \begin{array}{c|c|c}x&0&2\\\hline t&0&1\end{array}\end{array}\right\}=\int\limits_0^1 e^t\,2dt=2\int\limits_0^1 e^t dt=2e^t\Big|_0^1=2(e^1-e^0)=2(e-1).$$

Интегрирование по частям определенного интеграла

Теорема. *Если функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a;b]$, *то имеет место формула*

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Доказательство. На отрезке $[a;b]$ имеет место неравенство $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $u'v + uv'$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = uv\Big|_a^b.$$

Следовательно,

$$\int_a^b vu'dx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_0^\pi x\sin x\,dx.$

Решение.

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x, & dv = \sin xdx \\ du = dx, & v = \int \sin xdx = -\cos x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x(-\cos x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = -\pi\cos\pi + 0 + \sin x\Big|_0^\pi =$$

$$= -\pi(-1) + 0 + 0 - 0 = \pi.$$

Приложения определенного интеграла. Площадь области

Вычислить *площадь области, расположенной между двумя кривыми* $y = f_1(x)$ *и* $y = f_2(x)$ *и над отрезком* $[a;b]$, причем $f_1(a) = f_2(a)$, $f_1(b) = f_2(b)$ (Рис. 4).

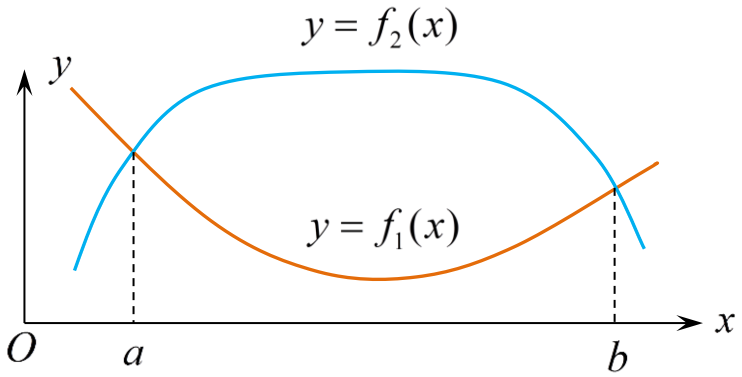

Рис. 4

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

Лекция 3.

Теория вероятностей.
Основные понятия теории вероятностей.
Испытания и события

Событие названо *случайным*, если при осуществлении определенной совокупности условий S оно может либо произойти, либо не произойти. Говорят: «*произведено испытание*». Событие рассматривается как результат испытания.

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие.

Пример 2. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета – событие.

Виды случайных событий

События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» – несовместные.

Пример 2. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» – несовместные.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, *если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.*

Пример 3. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

События называют *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 4. Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты – равновозможные события. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример 5. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости – равновозможные события.

Действительно, предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

Классическое определение вероятности

Пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 – белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т.е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события. Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем *элементарным исходом (элементарным событием)*. Элементарные исходы обозначим через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т.д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 – появился белый шар; ω_2, ω_3 – появился красный шар; $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ – появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем *благоприятствующими* этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих A; в нашем примере A наблюдается, если наступит ω_2, или ω_3, или ω_4, или ω_5, или ω_6. В этом смысле событие A подразделяется на несколько элементарных событий $(\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6)$; элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием A и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события A и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5/6$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих A; n – число всех возможных элементарных исходов испытания. Предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна единице.

$m = n,\ P(A) = m / n = n / n = 1.$

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

$m = 0,\ P(A) = m / n = 0 / n = 0.$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$0 \le m \le n \Rightarrow 0 \le m / n \le 1,\ 0 \le P(A) \le 1.$

Вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, по определению полагают также $0! = 1$.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

Замечание. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае *комбинации с повторениями* вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \ldots) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots = n$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = 1/10.$$

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через B событие – набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т.е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(B) = 1/90.$$

Пример 3. Указать ошибку «решения» задачи: «Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4 (событие A)».

Решение. Всего возможны два исхода испытания: сумма выпавших очков равна 4, сумма выпавших очков не равна 4. Событию A благоприятствует один исход: общее число исходов равно двум. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = 1/2.$$

Ошибка этого решения состоит в том, что рассматриваемые исходы не являются равновозможными.

Правильное решение. Общее число равновозможных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$ (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию A только 3 исхода: (1;3), (3;1), (2;2) (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = 3/36 = 1/12.$$

Пример 4. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (C_{10}^{6}).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей C_7^4 способами; при этом остальные 6-4=2 детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из 10-7=3 нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = (C_7^4 \cdot C_3^2) / C_{10}^{6} = 1/2.$$

Теорема сложения вероятностей.
Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой $A+B$ *двух событий* A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.

Например, если из орудия произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то $A+B$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события A и B – несовместные, то $A+B$ – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Например, событие $A+B+C$ состоит в появлении одного из следующих событий: A, B, C; A и B; A и C; B и C; A и B и C.

Пусть события A и B – несовместные, причем вероятности этих событий известны.

Теорема. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность извлечения цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A):

$$P(A) = 10/30 = 1/3.$$

Вероятность появления синего шара (событие B):

$$P(B) = 5/30 = 1/6.$$

События A и B – несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События A – «стрелок попал в первую область» и B – «стрелок попал во вторую область» – несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,35 = 0,80.$$

Полная группа событий

Теорема. *Сумма вероятностей событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *образующих полную группу, равна единице:*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Пример. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и C. Вероятность получения пакета из города A равна 0,7, из города B – 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

Решение. События «пакет получен из города A», «ракет получен из города B», «пакет получен из города C» образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$0,7+0,2+p=1.$$

Отсюда искомая вероятность

$$p=1-0,9=0,1.$$

Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\bar{A}$.

Пример 1. Попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если A – попадание, $\bar{A}$ – промах.

Пример 2. Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» – противоположные.

Теорема. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы

$$p + q = 1.$$

Пример 3. Вероятность того, что день будет дождливым, $p = 0,7$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» – противоположные, поэтому искомая вероятность

$$q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\overline{A}$, а затем найти искомую вероятность по формуле

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Теорема умножения вероятностей. Произведение событий

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном наступлении (совмещении) этих событий. Например, если A – деталь годная, B – деталь окрашенная, то AB – деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A, B, C – появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Условная вероятность

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = 3/5.$$

Этот же результат можно получить по формуле условной вероятности

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)},\ P(A) > 0.$$

Вероятность появления белого шара при первом испытании

$$P(A) = 3/6 = 1/2.$$

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором – белый. Общее число исходов – совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Следовательно,

$$P(AB) = 9/30 = 3/10.$$

Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Получен прежний результат.

Теорема умножения вероятностей

Теорема. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \qquad (*)$$

Замечание. $P(BA) = P(B)P_B(A)$;

$$P(AB) = P(B)P_B(A); \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**):

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n),$$

где $P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$ – вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ наступили.

Для трех событий

$$P(ABC) = P(A) P_A(B) P_{AB}(C).$$

Пример. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие A),

$$P(A) = 3/10.$$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик – конусный, т.е. условная вероятность

$$P_A(B) = 7/9.$$

По теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Сохранив обозначения: $P(B)=7/10$, $P_B(A)=3/9$, $P(B)P_B(A)=7/30$.

Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Событие B называют *независимым от события* A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е.

$$P_A(B)=P(B).$$

Для независимых событий теорема умножения $P(AB)=P(A)P_A(B)$ имеет вид

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 1. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равно 0,8, а вторым (событие B) – 0,7.

Решение. События A и B независимые

$$P(AB)=P(A)P(B)=0,7\cdot 0,8=0,56.$$

Следствие. $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$.

Пример 2. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение. Вероятность появления герба первой монеты (событие A)

$$P(A) = 1/2.$$

Вероятность появления герба второй монеты (событие B)

$$P(B) = 1/2.$$

События A и B – независимые

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример. A – появление четырех очков при бросании игральной кости; B – появление четного числа очков. События A и B – совместные.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Лекция 4.

Случайные величины. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Законы биномиальный и Пуассона

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа (т.е. между двумя соседними возможными значениями нет возможных значений). Другими словами, возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (в последнем случае множество всех возможных значений называют счетным).

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $p_1 + p_2 + \ldots$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1; p_1)$, $M_2(x_2; p_2), \ldots$, $M_n(x_n; p_n)$ (x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения.*

Пример. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.

Решение. Построим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат – соответствующие вероятности p_i. Построим точки $M_1(1;0,2)$, $M_2(3;0,1)$, $M_3(6;0,4)$, $M_4(8;0,3)$. Соединив эти точки отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения (рис. 1).

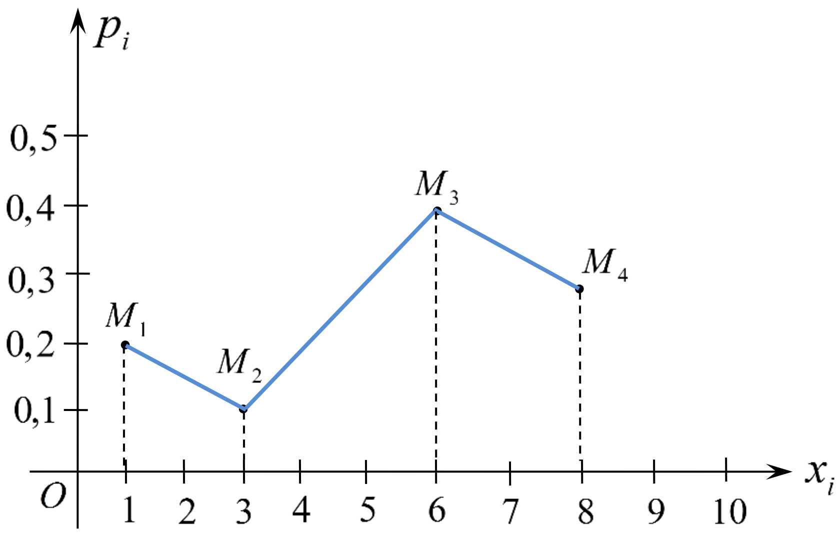

Рис. 1

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p; вероятность возможного значения $X = k$ (числа k появлений события) вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda = np$ (среднее число появлений события в n испытаниях), и говорят, что случайная величина распределена по *закону Пуассона*.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Если дискретная случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i ,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C .$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1 X_2 \ldots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \ldots M(X_n).$$

4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний появления события в одном испытании:

$$M(X) = n\,p.$$

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X) = npq.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	–4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

Решение. Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$$M(X) = -4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}5 = 6.$$

Пример 2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Дисперсию можно вычислить исходя из ее определения, однако мы воспользуемся формулой

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2,$$

которая быстрее ведет к цели.

Найдем математическое ожидание X:

$$M(X) = -5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3.$$

Напишем закон распределения X^2:

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2) = 25 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,2 = 15,3.$$

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = 15,3 - (-0,3)^2 = 15,21.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15,21} = 3,9.$$

Функция распределения вероятностей случайной величины

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше x, т.е.

$$F(x) = P\ (X < x).$$

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функция распределения есть неубывающая функция:

$$F(x_2) \ge F(x_1),\ \text{если}\ x_2 > x_1.$$

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, например, x_1, равна нулю:

$$P(X = x_1) = 0.$$

3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$F(x) = 0\ \text{при}\ x \le a;\ F(x) = 1\ \text{при}\ x \ge b.$$

Следствие. Справедливы следующие предельные отношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x\to 1} F(x) = 1.$$

4. Функция распределения непрерывна слева:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ (3/4)x + 3/4 & \text{при } -1 < x \le 1/3, \\ 1 & \text{при } x > 1/3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0;1/3)$.

Решение. Вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Положив $a = 0$, $b = 1/3$, получим

$$P(0 < X < 1/3) = F(1/3) - F(0) =$$
$$= [(3/4)x + 3/4]_{x=1/3} - [(3/4)x + 3/4]_{x=0} = 1/4.$$

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение.

1) Если $x \le 2$, то $F(x) = 0$. Действительно, значений, меньших числа 2, величина X не принимает. Следовательно, при $x \le 2$ функция $F(x) = P\ (X < x) = 0$.

2) Если $2 < x \le 4$, то $F(x) = 0{,}5$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,5.

3) Если $4 < x \le 7$, то $F(x) = 0,7$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,5 и значение 4 с вероятностью 0,2; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью 0,5+0,2=0,7.

4) Если $x > 7$, $F(x) = 1$. Действительно, событие $X \le 7$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 0,5 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 0,7 & \text{при } 4 < x \le 7, \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

График этой функции (Рис. 2):

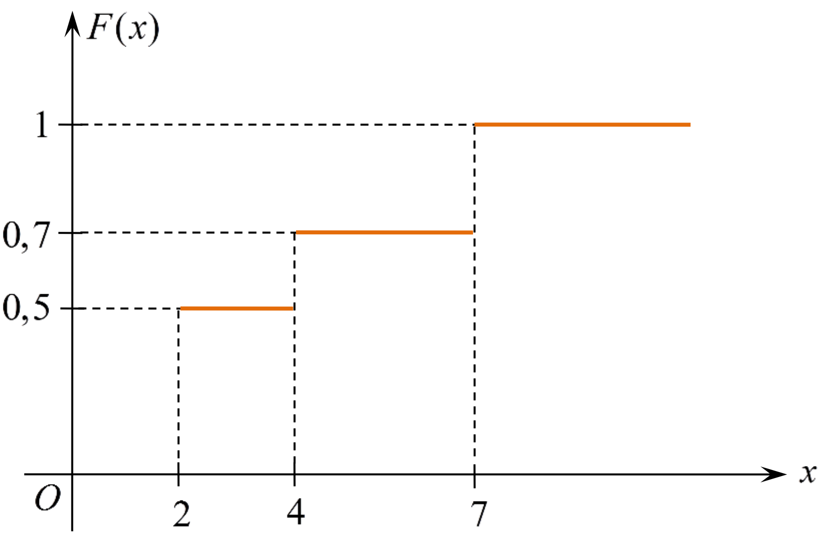

Рис. 2

Лекция 5.

Математическая статистика.
Элементы математической статистики.
Статистическое распределение выборки

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, \ldots, x_k$ объема n. Наблюдавшиеся значения x_i признака X называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом*.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объему выборки n) или относительных частот $\omega_i = n_i / n$ (сумма всех относительных частот равна единице).

Статистическое распределение выборки можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты интервала принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Пример. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

Решение. Найдем объем выборки: $n = 1 + 3 + 6 = 10$. Найдем относительные частоты: $\omega_1 = 1/10 = 0,1$, $\omega_2 = 3/10 = 0,3$, $\omega_3 = 6/10 = 0,6$.

Напишем искомое распределение относительных частот:

x_i	2	5	7
ω_i	0,1	0,3	0,6

Контроль: 0,1+0,3+0,6=1.

Полигон и гистограмма. Дискретное распределение признака X

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2),\ldots,(x_k;n_k)$, где x_i – варианты выборки и n_i – соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\omega_1)$, $(x_2;\omega_2),\ldots,(x_k;\omega_k)$, где x_i – варианты выборки и ω_i – соответствующие им относительные частоты.

Непрерывное распределение признака X

При непрерывном распределении признака весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на ряд частичных интервалов длины h и находят

n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h(n_i / h) = n_i$ – сумме частот вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки n. *Гистограммой относительных частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению ω_i / h (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h(\omega_i / h) = \omega_i$ – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

Пример 1. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

Решение. Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i; соединив точки $(x_i; n_i)$ отрезками прямых, получим полигон частот (Рис. 1).

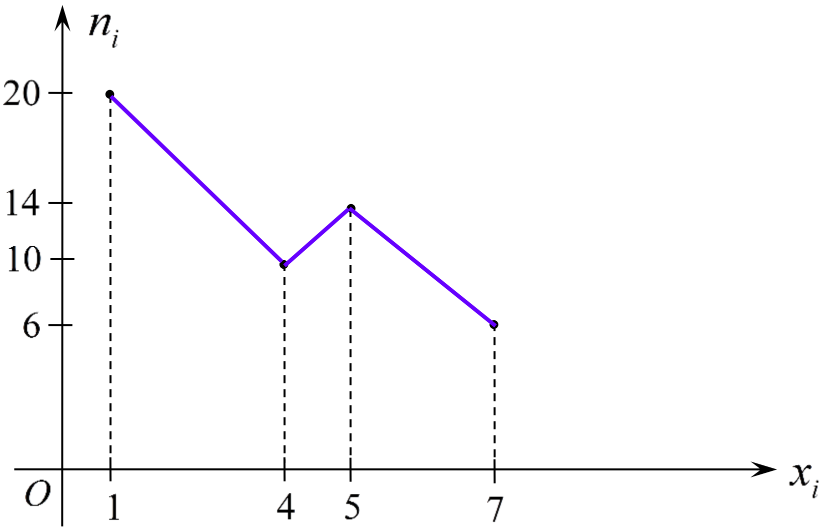

Рис. 1

Пример 2. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	7	10
ω_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

Решение. Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты ω_i. Соединив точки $(x_i;\omega_i)$ отрезками прямых, получим искомый полигон относительных частот (Рис. 2).

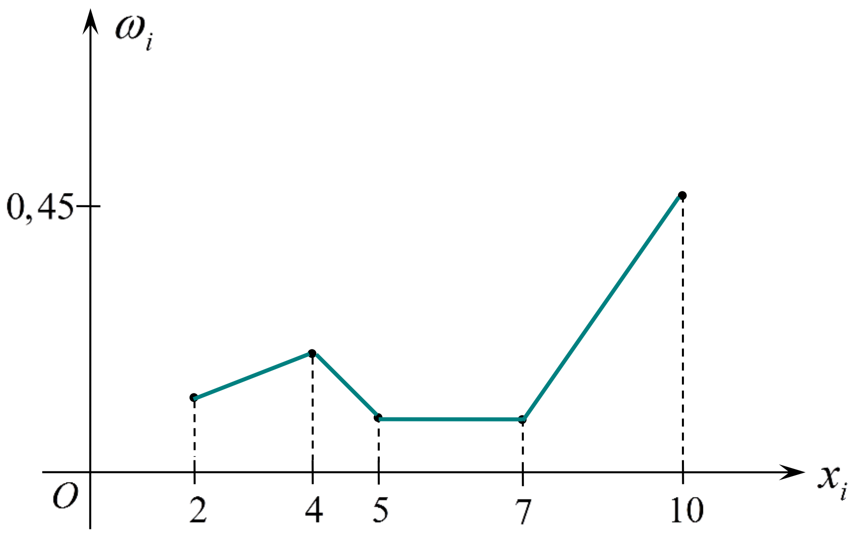

Рис. 2

Пример 3. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 100$:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i / h
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

Решение. Построим на оси абсцисс заданные интервалы длины $h = 4$. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям частоты n_i / h. Например, над интервалом (1;5) построим отрезок, параллельный оси абсцисс, на расстоянии $n_i / h = 10 / 4 = 2,5$;

аналогично строят остальные отрезки. Искомая гистограмма частот изображена на рисунке 3.

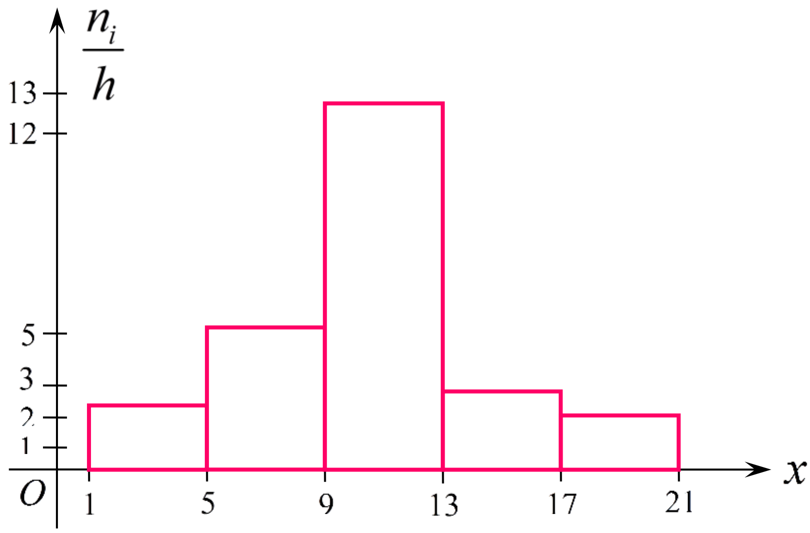

Рис. 3

Пример 4. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i
1 2 3	0-2 2-4 4-6	20 30 50 $n = \sum n_i = 100$

Решение. Найдем относительные частоты: $\omega_1 = 20/100 = 0,2$, $\omega_2 = 30/100 = 0,3$, $\omega_3 = 50/100 = 0,5$. Найдем плотности относительных частот, учитывая, что длина интервала $h = 2$: $\omega_1 / h = 0,2 / 2 = 0,1$, $\omega_2 / h = 0,3 / 2 = 0,15$, $\omega_3 / h = 0,5 / 2 = 0,25$.

Построим на оси абсцисс данные частичные интервалы. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям относительной частоты. Например, над интервалом (0;2) проведем, параллельный оси абсцисс и находящийся от нее на расстоянии, равном 0,1; аналогично строят остальные отрезки. Искомая гистограмма относительных частот изображена на рисунке 4.

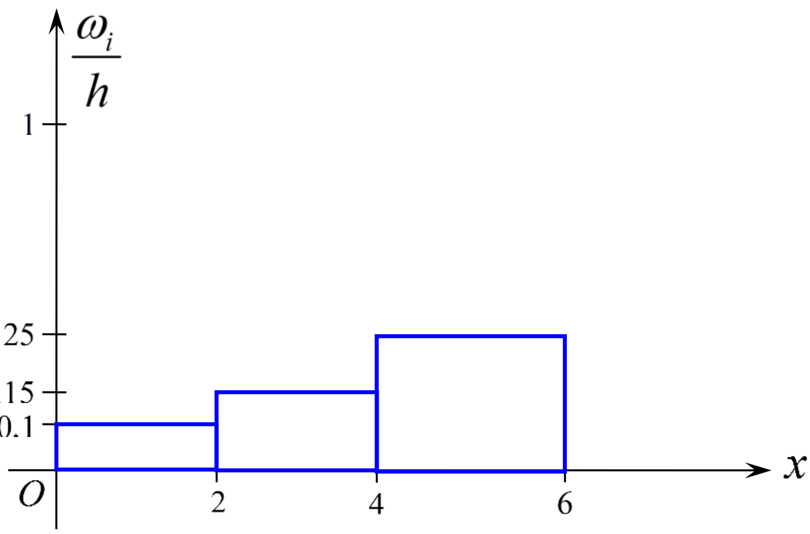

Рис. 4

Лекция 6. Решение задач по специальности

1. Проанализировать динамику рождаемости в Санкт-Петербурге в 1991-1995

рождаемость	1991	1992	1993	1994	1995
% 0	9,3	7,6	6,6	7,1	7,1

2. В районе проживает 45000 человек. Родилось – 545 человек, умерло – 667. За год было впервые зарегистрировано 42000 заболеваний, в том числе 18000 гриппом и ОРЗ. Вычислить показатели, характеризующие состояние здоровья населения (рождаемости, смертности и заболеваемости) и дать им оценку.

3. В поликлинике, обслуживающей 60000 взрослого населения, в течение года было зарегистрировано 21210 случаев инфекционных заболеваний. Из них случаев вирусного гриппа 18900, острой дизентерии – 840 , эпидемического гепатита – 1260 и прочих инфекций – 210. Определить частоту и долю каждого из инфекционных заболеваний.

4. В городе А проживало 5 тыс. детей в возрасте до 3 лет. В течение года было зарегистрировано у них 3162 заболеваний, в т.ч. острыми респираторными инфекциями – 612, пневмонией – 420 и прочими – 2130. Вычислить экстенсивные и интенсивные показатели заболеваемости детей.

5. Рассчитать среднюю ошибку коэффициента и определить доверительные границы с вероятностью достоверного прогноза на 95 %, если на предприятии среднегодовое число рабочих составило 400 человек, из них в течение года болело 240.

6. В городе родилось живыми в 1995 г. 7085 человек, мертвыми – 109. Умерли в первую неделю жизни 84 человека. Население города составляло 320000 человек, в том числе женщин в возрасте 15-49 лет – 85000 чел. Вычислить все возможные показатели.

7. Изобразите графически сезонные колебания в движении заболеваний дизентерией в районе N за 1995 г.

месяцы года	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	за год
число заболеваний дизентерией	20	18	21	20	20	23	53	87	63	20	24	25	394

Литература

1. Секаева Л.Р., Халямина В.А. Сборник задач по математике: учебное пособие. Часть 1 / Л.Р. Секаева, В.А. Халямина. – Казань: Казанский федеральный университет, 2019. – 65 с.

2. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. В двух частях / А.А Гусак. – Часть 1. – Минск, 1988.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – Часть 1. – Москва, 2000. – 288 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – Москва, 2003. – 479 с.

5. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И.А. Марон. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 400 с.

6. Туганбаев А.А., Крупин В.Г. Теория вероятностей и математическая статистика / А.А. Туганбаев, В.Г. Крупин. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 320 с.