ГЛАВА 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

***Пространство** $\mathbb{R}^n$* — это множество всех упорядоченных наборов

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

вещественных чисел, $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число.

Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть ***векторами***, или ***точками***, числа x_k, $k = 1, \ldots, n$, — ***компонентами*** вектора x.

.

Два вектора $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем считать ***равными*** тогда и только тогда, когда

$$x_k = y_k \quad \text{для всех} \quad k = 1, \ \ldots, \ n.$$

Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть ***нулевым*** и обозначать символом 0:

$$0 = (0, 0, \; . \; . \; . \; , 0).$$

.

Вектор

$$i^k = (\underbrace{0, \ \ldots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \ \ldots, 0}_{n-k}),$$

у которого компонента с номером k равна единице, а все остальные компоненты — нули, будем называть ***единичным***.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ есть ровно n единичных векторов:

$$i^1, \ i^2, \ \ldots, \ i^n.$$

На пространстве $\mathbb{R}^n$ вводятся линейные операции: *умножение векторов на вещественные числа* и *сложение векторов.* Именно, по определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Отметим следующие свойства введенных операций, справедливость которых очевидным образом вытекает из определений. Эти свойства называются *аксиомами линейного пространства*.

.

Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ и для любых вещественных чисел α, β:

1) $x + y = y + x$ — ***коммутативность*** операции сложения.

В силу коммутативности сложения чисел имеем

$$(x + y)_k = x_k + y_k = y_k + x_k = (y + x)_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

.

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — ***ассоциативность*** операции сложения.

В силу ассоциативности сложения чисел имеем

$$((x+y)+z)_k = (x+y)_k + z_k = (x_k + y_k) + z_k =$$

$$= x_k + (y_k + z_k) = x_k + (y+z)_k = (x+(y+z))_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

3) $x + 0 = x$ — ***нейтральность*** нулевого вектора.

В силу нейтральности числа нуль имеем

$$(x + 0)_k = x_k + 0_k = x_k + 0 = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

.

4) $x + (-x) = 0$, **где по определению** $-x = (-1)x$, **— существование для каждого вектора** ***противоположного*****.**

Действительно,

$$(x + (-x))_k = x_k + ((-1)x)_k = x_k - x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

5) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ — ***дистрибутивность*** по сложению векторов.

Используем дистрибутивность сложения чисел:

$$(\alpha(x+y))_k = \alpha(x+y)_k = \alpha(x_k+y_k) =$$

$$= \alpha x_k + \alpha y_k = (\alpha x)_k + (\alpha y)_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ — ***дистрибутивность*** по сложению скаляров.

Опять используем дистрибутивность сложения чисел:

$$((\alpha+\beta)x)_k = (\alpha+\beta)x_k =$$

$$= \alpha x_k + \beta x_k = (\alpha x)_k + (\beta x)_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

.

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — ***ассоциативность*** **по умножению скаляров.**

В силу ассоциативности умножения чисел имеем

$$((\alpha\beta)x)_k = (\alpha\beta)x_k = \alpha(\beta x_k) = \alpha(\beta x)_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

.

8) $1x = x$ — ***нейтральность*** единичного скаляра.

Действительно,

$$(1x)_k = 1x_k = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

.

Нетрудно заметить, что аксиомы 1)–8) в точности соответствуют свойствам линейных операций над векторами трехмерного евклидова пространства.

.

Важно иметь в виду, что $\mathbb{R}^1$ одновременно является и линейным пространством и множеством всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать $\mathbb{R}^1$ через $\mathbb{R}$.

.

Пространство $\mathbb{C}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

комплексных чисел, $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Элементы пространства $\mathbb{C}^n$ будем называть ***векторами***, или ***точками***, числа x_k, $k = 1, \ldots, n$, — ***компонентами*** вектора x.

Два вектора $x, y \in \mathbb{C}^n$ будем считать ***равными*** тогда и только тогда, когда

$$x_k = y_k \quad \text{для всех} \quad k = 1, \dots, n.$$

.

Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть ***нулевым*** и обозначать символом 0:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

.

Вектор i^k, у которого компонента с номером k равна единице, а все остальные компоненты — нули, будем называть ***единичным***. В пространстве $\mathbb{C}^n$ есть ровно n единичных векторов: $i^1, i^2, \ldots, i^n$.

На пространстве $\mathbb{C}^n$ вводятся линейные операции: *умножение векторов на комплексные числа* (скаляры) и *сложение векторов*. Именно, по определению для любого комплексного числа α и любого $x \in \mathbb{C}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

<u>Пример.</u> Множество всех матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц естественно интерпретировать как пространство $\mathbb{C}^{mn}$ векторов длины mn.

В этом примере векторы записываются в виде прямоугольных таблиц, но с точки зрения операций умножения вектора на число и сложения векторов это не имеет значения.

Для линейных операций, введенных на пространстве $\mathbb{C}^n$, также справедливы свойства:

1) $x + y = y + x$ — ***коммутативность*** операции сложения;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — ***ассоциативность*** операции сложения;

3) $x + 0 = x$ — ***нейтральность*** нулевого вектора;

4) $x + (-x) = 0$, где по определению $-x = (-1)x$, — существование для каждого вектора ***противоположного***;

5) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ — ***дистрибутивность*** по сложению векторов;

6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ — ***дистрибутивность*** по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — ***ассоциативность*** по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — ***нейтральность*** единичного скаляра.

Важно иметь в виду, что $\mathbb{C}^1$ одновременно является и линейным пространством и множеством всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать $\mathbb{C}^1$ через $\mathbb{C}$.

Говорят, что множество $\mathbf{X}$ является ***линейным пространством над полем вещественных чисел***, или просто ***вещественным линейным пространством***, если для любых элементов $x, y \in \mathbf{X}$ определена операция сложения, т. е. определен элемент

$$z = x + y \in \mathbf{X},$$

называемый ***суммой*** элементов x, y; для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ и любого вещественного числа α определен элемент

$$\alpha x \in \mathbf{X},$$

называемый ***произведением*** α и x.

.

Предполагается, что для этих двух операций выполнены ***аксиомы линейного пространства***:

1) $x + y = y + x$ — ***коммутативность*** операции сложения;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — ***ассоциативность*** операции сложения;

.

3) существует единственный элемент $0 \in \mathbf{X}$ такой, что $x+0 = x$ для любого элемента $x \in \mathbf{X}$; элемент 0 называют ***нулевым элементом*** пространства $\mathbf{X}$;

.

4) для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ существует единственный элемент x' такой, что $x+x' = 0$; элемент x' называют ***противоположным*** элементу x;

.

5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ — ***дистрибутивность*** по сложению векторов;

6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ — ***дистрибутивность*** по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — ***ассоциативность*** по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — ***нейтральность*** единичного скаляра.

.

Если при определении пространства **X** допускается умножение на комплексные числа, то **X** называется ***линейным пространством над полем комплексных чисел***, или ***комплексным линейным пространством***.

При этом предполагается, что выполняются аксиомы 1)–8).

.

Элементы линейного пространства **X** будем называть *вектора-ми*, а само пространство — *векторным*.

В дальнейшем на протяжении всей книги буквам **X**, **Y**, **Z** будем обозначать линейные пространства. Если не оговорено противное, пространства будут предполагаться комплексными.

Приведем примеры линейных пространств.

УПРАЖНЕНИЕ. Проверить, что вводимые ниже множества действительно являются линейными пространствами, т. е. для определенных на них операций сложения и умножения на число выполняются аксиомы 1)–8).

1) Множество всех векторов трехмерного евклидова пространства с введенными обычным образом операциями умножения вектора на число и сложения векторов.

.

2) Множество всех вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале (a, b) вещественной оси, является вещественным линейным пространством, если определить обычным образом понятие суммы двух функций и умножение функции на вещественное число.

3) Множество всех вещественных функций, определенных и непрерывных на замкнутом отрезке $[a, b]$ вещественной оси, является вещественным линейным пространством. Это пространство обозначают через

$$C[a, b].$$

При проверке того, что $C[a, b]$ — линейное пространство, надо иметь в виду, что сумма двух непрерывных функций есть непрерывная функция, при умножении функции на любое число непрерывность функции также сохраняется.

.

4) Множество всех функций из пространства $C[a, b]$, равных нулю в некоторой фиксированной точке c из отрезка $[a, b]$, — вещественное линейное пространство.

.

5) Множество всех полиномов с комплексными коэффициентами, на котором обычным образом определены операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число, является комплексным линейным пространством.

.

6) Множество $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n, где $n \geqslant 0$ есть фиксированное целое число, является комплексным линейным пространством. Здесь надо иметь в виду, что сумма полиномов есть полином, степень которого не превосходит максимальной степени слагаемых.

Упражнения

1) Рассмотрим множество всех положительных функций, определенных на вещественной оси. Определим на этом множестве операцию сложения функций f и g как их произведение, а операцию умножения функции f на число α как возведение ее в степень α. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

2) Рассмотрим множество всех четных функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$. Определим на этом множестве операцию сложения двух функций как их произведение, а операцию умножения функции на число будем понимать обычным образом. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

§3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Векторы a, b из линейного пространства $\mathbf{X}$ будем называть ***коллинеарными*** (***пропорциональными***, ***линейно зависимыми***), если существуют такие числа α, β, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha a + \beta b = 0.$$

Понятно, что в этом случае либо

$$a = \gamma b,$$

либо

$$b = \delta a,$$

где γ, δ — некоторые числа.

.

Примеры.

1) Единичные векторы i^k, i^l пространства $\mathbb{C}^n$ при $k \neq l$ неколлинеарны (докажите).

.

2) Векторы из пространства $\mathbb{C}^4$

$$x^1 = (1+i, 3, 2-i, 5), \quad x^2 = (2, 3-3i, 1-3i, 5-5i)$$

пропорциональны, так как

$$\frac{2}{1+i} = \frac{3-3i}{3} = \frac{1-3i}{2-i} = \frac{5-5i}{5} = 1-i,$$

т. е.

$$x^2 = (1-i)x^1.$$

Будем говорить, что система векторов

$$\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}, \quad m \geqslant 1,$$

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^m \in \mathbf{X},$$

линейно зависима, если существуют числа

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m \in \mathbb{C},$$

среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = 0.$$

<u>Пример.</u> Система векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

из пространства $\mathbb{R}^3$ линейно зависима, так как, положив

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 2,$$

получим

$$x_1a^1+x_2a^2+x_3a^3+x_4a^4 = 4\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Полезно отметить, что это не единственный набор коэффициентов $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$, при котором

$$x_1a^1 + x_2a^2 + x_3a^3 + x_4a^4 = 0,$$

так, например,

$$2a^1 + a^2 - a^3 = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0.$$

.

Следующая линейная комбинация также обращается в нуль:

$$3a^2 + a^3 - 2a^4 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 0.$$

.

Определению линейной зависимости векторов удобно придать матричную формулировку. Символом

$$\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$$

обозначим упорядоченный набор векторов из пространства $\mathbf{X}$. Для $x \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m.$$

Можно сказать, что векторы a^1, $a^2, \dots,$ a^m, ***<u>линейно зависимы</u>***, если существует

$$0 \neq x \in \mathbb{C}^m$$

такой, что

$$\mathcal{A}_m x = 0.$$

Говорят, что вектор $a \in \mathbf{X}$ *линейно выражается* через векторы

$$b^1,\ b^2,\ \ldots,\ b^p, \quad p \geqslant 1,$$

(является *линейной комбинацией* этих векторов), если существует вектор $x \in \mathbb{C}^p$ такой, что

$$a = x_1 b^1 + x_2 b^2 + \cdots + x_p b^p,$$

в матричной записи:

$$a = \mathcal{B}_p x.$$

.

Упражнения

1) Доказать, что система векторов линейно зависима, если она содержит линейно зависимую подсистему, в частности, если она содержит нулевой вектор.

.

2) Доказать, что для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно зависимой необходимо и достаточно, чтобы она содержала вектор a^k, который линейно выражается через остальные.

.

Говорят, что система векторов

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$$

линейно выражается через систему векторов

$$\mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p,$$

если существует такая матрица $X(p \times m)$, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p \times m).$$

В более подробной записи это означает, что

$$a^k = \sum_{j=1}^{p} x_{jk} b^j, \quad k = 1, \ldots, m.$$

.

Свойство *транзитивности*: если система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$, а та, в свою очередь, — через систему векторов $\{c^i\}_{i=1}^q$, то система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{c^i\}_{i=1}^q$.

Действительно, по определению имеем

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{C}_q Y(q,p),$$

Подставляя в первое из этих равенств выражение для $\mathcal{B}_p$, получим

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{C}_q Z(q,m),$$

где

$$Z(q,m) = Y(q,p)X(p,m).$$

.

Системы векторов

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m, \quad \mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p$$

называются ***эквивалентными***, если существуют матрицы X, Y такие, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{A}_m Y(m,p),$$

т. е. каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы.

.

Упражнение. Используя свойство транзитивности, показать, что если вектор $x \in \mathbf{X}$ линейно выражается через систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^{m}$, то он линейно выражается и через эквивалентную систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^{p}$.

§4. ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Будем говорить, что система векторов

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$$

линейно независима, если из равенства

$$\mathcal{A}_m x = 0$$

вытекает, что $x = 0$.

.

Линейно независимые системы векторов существуют. Приведем простые примеры.

.

1) Любой вектор $a \neq 0$ образует линейно независимую систему, состоящую из одного вектора:

$$xa = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{C} \ni x = 0.$$

.

2) Единичные векторы

$$i^1,\ i^2,\ \ldots,\ i^m \in \mathbb{C}^n, \quad m \leqslant n,$$

линейно независимы.

Это утверждение сразу же вытекает из того, что для любого вектора $x \in \mathbb{C}^m$ вектор

$$x_1 i^1 + x_2 i^2 + \cdots + x_m i^m \in \mathbb{C}^n$$

имеет вид

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

и, следовательно, равен нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

.

3) Система векторов

$$\{1,\ z,\ z^2,\ \ldots,\ z^k\},$$

где z — комплексная переменная, $k \geqslant 0$ — целое число, линейно независима в пространстве полиномов.

.

Для доказательства этого утверждения достаточно вспомнить, что если полином равен нулю,

$$x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_k z^k = 0,$$

то все его коэффициенты — нули:

$$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$$

.

Теорема. Любая подсистема линейной независимой системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима.

<u>Доказательство.</u> Предположим противное. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что векторы

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^p, \quad p < m,$$

линейно зависимы. Тогда существуют числа

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,$$

не все одновременно равные нулю, и такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_p a^p = 0,$$

следовательно,

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_p a^p + 0 a_{p+1} + \cdots + 0 a_m = 0,$$

т. е. вопреки сделанному предположению система $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно зависима. $\square$

.

<u>Теорема.</u> Любая система

$$a^1,\ a^2,\ \ \ldots,\ a^n,\ b \in \mathbb{C}^n$$

из $n+1$ вектора линейно зависима.

.

<u>Доказательство.</u> Пусть система векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$ линейно зависима. Тогда доказываемое утверждение верно. Если векторы $\{a^i\}_{i=1}^n$ линейно независимы, то система уравнений

$$Ax = b,$$

где A — матрица, столбцами которой являются компоненты векторов a^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, крамеровская, и потому имеет решение x при любой правой части b, значит,

$$x_1a^1 + \cdots + x_na^n = b,$$

т. е. система векторов a^1, a^2, $\ldots$, a^n, b линейно зависима. $\square$

.

Как очевидное следствие только что доказанного утверждения получаем, что любая система векторов

$$\{a^i\}_{i=1}^m \in \mathbb{C}^n, \quad m > n,$$

линейно зависима.

.

<u>Теорема.</u> **Пусть система векторов**

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$$

пространства $\mathbf{X}$ линейно независима и линейно выражается через систему

$$\mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p.$$

Тогда $m \leqslant p$.

Предположим противное, т. е. пусть $m > p$. По определению существует матрица X размера $p \times m$ такая, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X.$$

Как следствие для любого вектора $y \in \mathbb{C}^m$ имеем

$$\mathcal{A}_m y = \mathcal{B}_p X y.$$

Столбцы матрицы X — векторы из пространства $\mathbb{C}^p$. Их количество $m > p$, следовательно, они линейно зависимы.

Поэтому существует вектор $y \in \mathbb{C}^m$, не равный нулю и такой, что

$$Xy = 0,$$

но тогда и

$$\mathcal{A}_m y = \mathcal{B}_p X y = 0,$$

т. е. вопреки предположению векторы

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^m$$

линейно зависимы. $\square$

.

<u>Следствие.</u> **Любые две эквивалентные линейно независимые системы векторов имеют равные количества векторов.**

<u>Теорема.</u> Пусть $\{a^k\}_{k=1}^m$ — линейно независимые векторы. Предположим, что система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{a^k\}_{k=1}^m$, т. е. существует квадратная матрица X порядка m такая, что

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X.$$

Для того, чтобы система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ была линейно независимой необходимо и достаточно, чтобы матрица X была невырожденной.

<u>Упражнение.</u> Доказать теорему следуя рассуждениям при доказательстве предыдущей теоремы.

.

Заметим, что матрица X, такая, что

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X,$$

однозначно определяется по системам векторов $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$. В самом деле, если существует матрица $\widetilde{X} \neq X$ такая, что

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m \widetilde{X},$$

то

$$\mathcal{A}_m(\widetilde{X} - X) = 0,$$

что вследствие линейной независимости $\mathcal{A}_m$ невозможно, если

$$\widetilde{X} \neq X.$$

§5. РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ.

Фиксируем в пространстве **X** некоторую систему векторов

$$\{a^i\}_{i=1}^m.$$

Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязательно содержит линейно независимую подсистему векторов. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема

$$\{a^{i_k}\}_{k=1}^{r} \subset \{a^{i}\}_{i=1}^{m},$$

называется ***максимальной***, если она состоит из линейно независимых векторов и добавление к ней любого нового вектора из

$$\{a^{i}\}_{i=1}^{m}$$

приводит к линейно зависимой системе.

<u>Пример.</u> Рассмотрим систему векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^3$. Векторы a_1, a_2, очевидно, линейно независимы и образуют максимальную линейно независимую подсистему, так как следующие определители равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -6 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -15 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 10 \\ -2 & 9 & 7 \\ -0 & -15 & -15 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 и a_1, a_2, a_4 линейно зависимы.

.

Система $\{a^i\}_{i=1}^m$ может содержать несколько максимальных линейно независимых подсистем, однако, справедлива

<u>Теорема.</u> Любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ содержат одно и то же количество векторов.

.

Доказательство. Заметим, во-первых, что из определения максимальной линейно независимой подсистемы непосредственно вытекает, что любой вектор из $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через векторы подсистемы $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r$.

.

Вследствие очевидного равенства

$$a^{i_k} = a^{i_k} + \sum_{i=1, i\neq i_k}^{m} 0a^i$$

справедливо и обратное, т. е. любой вектор из подсистемы $\{a^{i_k}\}_{k=1}^{r}$ линейно выражается через векторы системы $\{a^i\}_{i=1}^{m}$.

Итак, система $\{a^i\}_{i=1}^m$ и любая ее максимальная линейно независимой подсистема эквивалентны. Но тогда, очевидно, эквивалентны и любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$.

.

Итак, любые две максимальные линейно независимые подсистемы одной системы эквивалентны. Следовательно, они имеют равные количества векторов. $\square$

Полученный результат позволяет ввести следующее определение.

Рангом системы векторов пространства **X** называется количество векторов ее максимальной линейно независимой подсистемы.

.

<u>Пример.</u> Ранг системы векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^3$ равен двум, т. к. векторы a_1, a_2 образуют максимальную линейно независимую подсистему.

.

<u>Пример.</u> Количество линейно независимых векторов пространства $\mathbb{C}^n$ не превосходит n. Поэтому ранг любой системы векторов из $\mathbb{C}^n$ не превосходит n.

Ясно, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ любого линейного пространства $\mathbf{X}$ линейно независима тогда и только тогда, когда ее ранг равен m.

§6. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. БАЗИСЫ

Базисы в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Всякая линейно независимая система $\{e^k\}_{k=1}^n$ (состоящая из n векторов) называется ***базисом*** пространства $\mathbb{C}^n$.

Единичные векторы $\{i^k\}_{k=1}^n$ образуют так называемый ***естественный базис*** пространства $\mathbb{C}^n$.

.

Для того, чтобы система

$$\{e^k\}_{k=1}^n, \quad e^k \in \mathbb{C}^n,$$

была базисом необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathcal{E}_n$, столбцами которой служат векторы

$$e^1,\ e^2,\ \ldots,\ e^n,$$

была невырожденной.

Если $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbb{C}^n$, то любой вектор $x \in \mathbb{C}^n$, может быть представлен в виде линейной комбинации

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n$$

векторов базиса (<u>Почему?</u>**).**

.

Коэффициенты линейной комбинации

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n$$

однозначно определяются по вектору x, так как удовлетворяют крамеровской системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{E}_n \xi = x.$$

Здесь

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ \ldots, \xi_n)$$

есть столбец коэффициентов разложения вектора x по базису

$$\{e^k\}_{k=1}^n.$$

Конечномерные пространства.

Линейное пространство **X** называется ***конечномерным***, если существуют векторы

$$\mathcal{E}_n = \{e^1, e^2, \dots, e^n\},$$

образующие линейно независимую систему в пространстве **X**, и такие что любой вектор

$$x \in \mathbf{X}$$

представим в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

.

Говорят, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^n$ образуют ***базис*** пространства $\mathbf{X}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Число n называют ***размерностью пространства*** $\mathbf{X}$. Линейное пространство $\mathbf{X}$ размерности n будем обозначать через $\mathbf{X}_n$.

Коэффициенты разложения $\xi_1, \ \ldots, \xi_n$ называют ***координатами вектора*** x в базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$.

.

Координаты любого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ однозначно определяются по базису $\{e^k\}_{k=1}^n$.

.

Действительно, если наряду с разложением

$$x = \mathcal{E}_n \xi$$

существует разложение

$$x = \mathcal{E}_n \widetilde{\xi},$$

то, очевидно,

$$\mathcal{E}_n(\xi - \widetilde{\xi}) = 0,$$

и вследствие линейной независимости системы векторов $\mathcal{E}_n$ имеем

$$\xi = \widetilde{\xi}.$$

.

Теорема. В n-мерном линейном пространстве $\mathbf{X}_n$ любая система

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n,$$

состоящая из n линейно независимых векторов является базисом.

.

<u>Доказательство.</u> Достаточно убедиться, что любой вектор

$$x \in \mathbf{X}_n$$

представим в виде линейной комбинации

$$x = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{\xi}.$$

По определению n-мерного пространства в нем существует базис $\mathcal{E}_n$. Следовательно, любой вектор из $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ представим в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathcal{E}_n$, иными словами существует квадратная матрица T порядка n такая, что

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

.

Поскольку $\mathcal{E}_n$ — базис, существует вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$x = \mathcal{E}_n \xi.$$

Поскольку матрица T невырождена, можно найти вектор $\widetilde{\xi} \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$\xi = T\widetilde{\xi}.$$

В результате, получим соотношение

$$x = \mathcal{E}_n T\widetilde{\xi} = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{\xi}. \ \square$$

.

Если пространство не является конечномерным, его называют *бесконечномерным*.

.

Примеры.

1) Любые три некомпланарных вектора пространства $\mathbf{V}_3$ образуют базис. Пространство $\mathbf{V}_3$ трехмерно.

.

2) Пространства $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$, очевидно, конечномерны. Их размерность равна n.

.

3) Пространство $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n конечномерно. Его размерность равна n. Базисом в пространстве полиномов степени не выше n является, например, система векторов

$$\{1,\ z,\ \ldots,\ z^n\},$$

где z — комплексная переменная.

.

4) Пространство всех полиномов бесконечномерно. Действительно, в нем линейно независима система векторов

$$\{1,\ z,\ \ldots,\ z^k\}$$

при любом, сколь угодно большом, целом k.

.

5) Пространство $C[a, b]$ бесконечномерно, так как содержит полиномы с вещественными коэффициентами любого порядка.

§7. ЗАМЕНА БАЗИСА

Пусть

$$\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$$

есть базисы пространства $\mathbf{X}_n$. Как уже говорилось, $\mathcal{E}_n$, $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ — эквивалентные системы векторов, существуют квадратные матрицы T, $\widetilde{T}$ порядка n такие, что

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{T}, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

.

Матрицу T называют ***матрицей перехода*** от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

.

Матрицы T и $\widetilde{T}$ взаимно обратны.

.

Действительно, подставляя выражение для $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ из равенства

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

в

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{T},$$

получим

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T \widetilde{T},$$

и вследствие линейной независимости векторов базиса $\mathcal{E}_n$ имеем

$$T \widetilde{T} = I.$$

Пусть известны коэффициенты ξ разложения некоторого вектора $x \in \mathbb{C}^n$ по базису $\mathcal{E}_n$:

$$x = \mathcal{E}_n \xi.$$

Пусть задана матрица перехода T к базису базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Получим формулу для вычисления коэффициентов $\widetilde{\xi}$ разложения того же вектора x по базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$.

.

С одной стороны, имеем

$$x = \mathcal{E}_n \xi,$$

но

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n T^{-1},$$

следовательно,

$$x = \widetilde{\mathcal{E}}_n T^{-1} \xi,$$

а это означает, что

$$x = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{\xi}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\xi} = T^{-1} \xi.$$

<u>Пример.</u> Пусть векторы e^1, e^2, e^3 образуют базис в трехмерном пространстве $\mathbf{X}_3$. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}^1 &= \quad 5e^1 - e^2 - 2e^3, \\
\widetilde{e}^2 &= \quad 2e^1 + 3e^2, \\
\widetilde{e}^3 &= -2e^1 + e^2 + e^3.
\end{aligned}$$

Записывая эти равенства в матричном виде, получим

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T,$$

подробнее,

$$\{\widetilde{e}^1, \widetilde{e}^2, \widetilde{e}^3\} = \{e^1, e^2, e^3\} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невырождена. Действительно,

$$\det T = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Поэтому векторы

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T,$$

также образуют базис пространства $\mathbf{X}_3$.

.

Рассмотрим вектор

$$a = e^1 + 4e^2 - e^3.$$

Координатами этого вектора в базисе $\mathcal{E}$ являются числа

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 4, \quad \xi_3 = -1,$$

т. е.

$$a = \mathcal{E}\xi,$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты того же вектора, но в базисе $\widetilde{\mathcal{E}}$. Вычислим матрицу T^{-1}. Получим:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$\widetilde{\xi} = T^{-1}\xi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$a = -13\widetilde{e}^1 + 6\widetilde{e}^2 - 27\widetilde{e}^3.$$

Мы нашли, таким образом, представление вектора a в базисе $\widetilde{\mathcal{E}}$.

.

В любом пространстве $\mathbf{X}_n$ существует сколько угодно базисов.

.

Действительно, если система векторов

$$\mathcal{E}_n$$

является базисом, то система векторов

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T,$$

где T — произвольная невырожденная матрица, также базис.

.

Примеры базисов в пространстве $\boldsymbol{Q}^n$ полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n.

1) ***Естественным базисом*** в этом пространстве называют базис, составленный из степеней независимой переменной

$$\{1,\ z,\ \ldots,\ z^n\}.$$

.

2) ***Базис Лагранжа.***

Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange; 1736 — 1813) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

.

<u>Теорема.</u> Пусть даны попарно различные числа

$$z_0, \quad z_1, \; \ldots, \quad z_n$$

и произвольные числа

$$h_0, \quad h_1, \; \cdots, \quad h_n.$$

Тогда существует и при том только один полином $P_n(z)$ такой, что

$$P_n(z_j) = h_j, \quad j = 0, \; 1, \; \ldots, \; n.$$

Доказательство. Условия

$$P_n(z_j) = a_0 + a_1 z_j + a_2 z_j^2 + \cdots + a_n z_j^n = h_j, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

представляют собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов полинома P_n:

$$\begin{aligned}
1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \ldots + z_0^n a_n &= h_0, \\
1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \ldots + z_1^n a_n &= h_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^n a_n &= h_n.
\end{aligned}$$

.

Определитель системы

$$
\begin{gathered}
1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \ldots + z_0^n a_n = h_0, \\
1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \ldots + z_1^n a_n = h_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^n a_n = h_n
\end{gathered}
$$

равен определителю Вандермонда:

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
z_0 & z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\
z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & \ldots & z_n^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
z_0^n & z_1^n & z_2^n & \ldots & z_n^n
\end{vmatrix}.
$$

Числа z_0, z_1, ..., z_n попарно различны. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & z_2^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (z_i - z_j) \ne 0.$$

Поэтому система уравнений

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \ldots + z_0^n a_n = h_0,$$
$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \ldots + z_1^n a_n = h_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^n a_n = h_n$$

имеет единственное решение при любой правой части. □

.

Теперь ясно, что, если полином всюду (по крайней мере в $n+1$ различных точках) равен нулю, то все его коэффициенты — нули. Действительно, однородная крамеровская система

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \ldots + z_0^n a_n = 0,$$
$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \ldots + z_1^n a_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^n a_n = 0$$

имеет только тривиальное решение.

.

Построим в явном виде полином, удовлетворяющий условиям

$$P_n(z_j) = h_j, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Решение этой задачи дает ***интерполяционная формула Лагранжа***

$$P_n(z) = P_n(z_0)\Phi_0(z) + P_n(z_1)\Phi_1(z) + \cdots + P_n(z_n)\Phi_n(z),$$

где Φ_j — полином степени n, удовлетворяющий условиям

$$\Phi_j(z_k) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ j-1,\ j+1,\ \ldots,\ n,$$

$$\Phi_j(z_j) = 1,$$

для $j = 0, 1, 2 \ldots, n$.

.

Полином своими корнями определяется с точностью до постоянного множителя:

$$\Phi_j(z) = A_j(z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_{j-1})(z - z_{j+1})\cdots(z - z_n).$$

Используя

$$\Phi_j(z_j) = 1,$$

найдем значение постоянной:

$$A_j = \frac{1}{(z_j - z_0)(z_j - z_1)\cdots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\cdots(z_j - z_n)},$$

т. е.

$$\Phi_j(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_{j-1})(z - z_{j+1})\cdots(z - z_n)}{(z_j - z_0)(z_j - z_1)\cdots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\cdots(z_j - z_n)},$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

.

Как было сейчас показано, полиномы

$$\Phi_j(z) = \frac{(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{j-1})(z-z_{j+1})\cdots(z-z_n)}{(z_j-z_0)(z_j-z_1)\cdots(z_j-z_{j-1})(z_j-z_{j+1})\cdots(z_j-z_n)},$$

где $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, а $z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n$ — произвольные попарно различные комплексные числа, образуют базис в пространстве $\boldsymbol{Q}^n$:

$$P_n(z) = P_n(z_0)\Phi_0(z) + P_n(z_1)\Phi_1(z) + \cdots + P_n(z_n)\Phi_n(z),$$

Этот базис принято называть ***базисом Лагранжа.***

3) ***Базис Ньютона***. Покажем, что полиномы

$$\varphi_0(z) \equiv 1,$$

$$\varphi_1(z) = (z - z_0),$$

$$\varphi_2(z) = (z - z_0)(z - z_1),$$

$$\ldots,$$

$$\varphi_n(z) = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}),$$

где z_0, z_1, $\ldots$, z_{n-1} — произвольные попарно различные числа, образуют базис.

Для этого достаточно установить, что система уравнений

$$c_0\varphi_0(z_j) + c_1\varphi_1(z_j) + \cdots + c_n\varphi_0(z_j) = h_j, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где $z_n \neq z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, имеет единственное решение при любых числах h_0, h_1, $\ldots h_n$, но это очевидно, т. к. эта система треугольная:

$$c_0 = h_0,$$

$$c_0 + c_1(z_1 - z_0) = h_1,$$

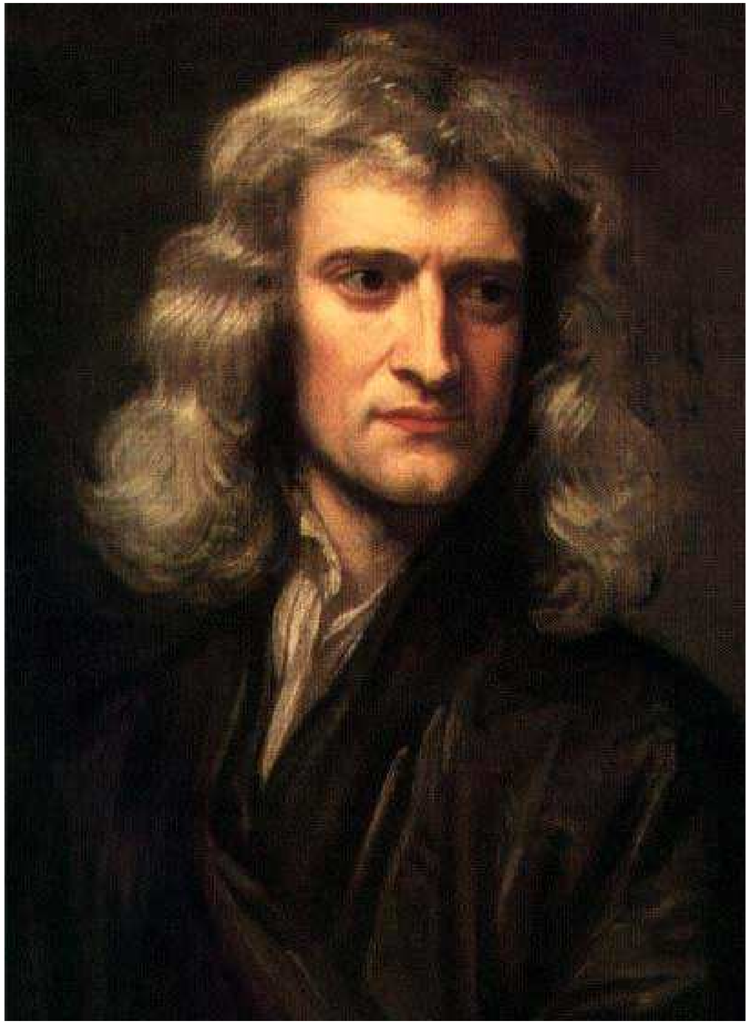
$$c_0 + c_1(z_2 - z_0) + c_2(z_2 - z_0)(z_2 - z_1) = h_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_0 + c_1(z_n - z_0) + \cdots + c_n(z_n - z_0)(z_n - z_1)\cdots(z_n - z_{n-1}) = h_n,$$

причем коэффициенты, стоящие на диагонали, отличны от нуля. Базис $\{\varphi_j\}_{j=0}^{n}$ называют ***базисом Ньютона***.

.



Исаак Ньютон (Isaac Newton, 1643 — 1727) — английский физик, математик, механик и астроном.