6. Исследование сходимости несобственных интегралов. 1

Будем считать, что у рассматриваемых далее интегралов

$$I = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad J = \int_a^c g(x)\,dx$$

единственная особенность в точке $c \in (a, +\infty]$.

Исходя из определения сходимости несобственных интегралов и свойств пределов функция, практически очевидно:

$\int\limits_a^c f(x)\,dx$ сходится $\iff$ сходится $\int\limits_{a_1}^c f(x)\,dx$, где $a < a_1 < c$ $\iff$ сходится $\int\limits_a^c kf(x)\,dx$, где $k \neq 0$.

Теорема. Если $\int\limits_a^c |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ (говорят, что сходится абсолютно).

Эта теорема позволяет в некоторых случаях свести исследование сходимости несобственного интеграла к доказательству сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции.

Признаки сравнения.

1. Простейший признак:

Пусть $0 \le g(x) \le f(x)$ при $x \in [a, c)$. Если интеграл I сходится, то сходится и J. Следовательно, если J расходится, то I также расходится.

2. В 1. достаточно потребовать, чтобы неравенство $0 \le g(x) \le f(x)$ выполнялось при $x \in [a_1, c)$, где $a \le a_1 < c$.

3. Пусть $f(x), g(x) \ge 0$ и $k_1 f(x) \le g(x) \le k_2 f(x)$ при $x \in [a_1, c)$, где $a \le a_1 < c$ и $0 < k_1 \le k_2 < +\infty$. Тогда интегралы I и J сходятся или расходятся одновременно.

4. Пусть $f(x), g(x) \ge 0$ и существует $\lim\limits_{x \to c-0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \alpha$. Тогда

а) если $0 < \alpha < +\infty$, то интегралы I и J сходятся или расходятся одновременно. В частности, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to c - 0$, то интегралы I и J сходятся или расходятся одновременно;

б) если $\alpha = 0$, то из сходимости I вытекает сходимость J;

в) если $\alpha = \infty$, то из сходимости J вытекает сходимость I.

Признаки сравнения для интегралов с особенностью в нижнем пределе формулируются аналогичным образом.

Если у интеграла несколько особенностей, то он разбивается на сумму нескольких интегралов с одной особенностью и на сходимость исследуется каждый из них.

Напомним:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 0$;

3) $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$.

4) Из предыдущего несложно получить, что $\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{1}{|x-a|^\alpha}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$.

Пример 1 (№ 2363). Рассмотрим случай $n > 0$. У данного интеграла могут быть две особенности: обязательно в $+\infty$ и, может быть, в 0. Рассмотрим по отдельности:

а) $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx.$

Так как $1+x^n \sim x^n$ при $x \to +\infty$, то $\frac{x^m}{1+x^n} \sim \frac{x^m}{x^n}$. Так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^m}{x^n}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-m}}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $n - m > 1$ (см. 1)), то по признаку 4 а) и I_1 сходится тогда и только тогда, когда $n - m > 1$.

б) $I_2 = \int\limits_0^{1} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx.$

При $x \to +0$ имеем: $1 + x^n \to 1$, поэтому $\frac{x^m}{1+x^n} \sim x^m$. Следовательно, I_2 сходится тогда и только тогда, когда $-m < 1$.

Таким образом исследуемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда $m > -1$ и $n - m > 1$.

Пример 2. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится, так как $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ при $x \geq 1$, а $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ сходится (см. признак 2 и пункт 2)).

Пример 3 (№ 2360). Заметим, что у рассматриваемого интеграла в нуле особенности нет, так как $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{\ln x} = 0$. Таким образом у интеграла две особенности: в единице слева и справа.

Рассмотрим $\int\limits_1^2 \frac{1}{\ln x}\,dx$. Имеем: $\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1$ при $x \to 1$, откуда $\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$. Так как $\int\limits_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ расходится, то заключаем, что $\int\limits_1^2 \frac{1}{\ln x}\,dx$ расходится, а следовательно, и $\int\limits_0^2 \frac{1}{\ln x}\,dx$ расходится.

Заметим ещё, что $\int\limits_0^1 \frac{1}{\ln x}\,dx$ также расходится, что нетрудно понять, перейдя к интегралу $\int\limits_0^1 (-\frac{1}{\ln x})\,dx$ от положительной функции.