Несобственный интеграл от неограниченной функ (1)

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, неограничен при $x=0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(2-2\sqrt{\varepsilon})=2$$

2) $J=\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$ – расход ~~при~~ $x=-1$

$$J=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}+\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$$

$x\in[-2;-1]$, $t^3=x+1$, $x=t^3-1$, $dx=3t^2$

$$J_1=\int\limits_{-1}^{0}\frac{3t^2}{t^3\cdot t}dt \text{ – расх} \quad \Big\| \begin{matrix} x=-2, & t=\sqrt[3]{-1} \\ x=-1, & t=0 \end{matrix}$$

$$=3\lim_{\varepsilon\to 0-0}\int\limits_{-1}^{\varepsilon}\frac{dt}{t^2}=3\lim_{\varepsilon\to 0-0}\left(-\frac{1}{t}\Big|_{-1}^{\varepsilon}\right)=+\infty$$

2

3) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x} = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} =$

$x=0$

$= 2\int_0^4 \frac{d\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 2\ln(1+\sqrt{x})\Big|_0^4 =$

$= 2\ln(1+2) - 2\ln(1+0) = 2\ln 3$

4) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1)} =$

$= 2\int_0^2 \frac{d\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2}$ $\quad x=1$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 1+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} = 2\lim\limits_{\varepsilon\to 1+0}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$

$= 2\lim\limits_{\varepsilon\to 1+0}\left(-\frac{1}{0-1}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}-1}\right) -$

– расход.

5) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\limits_0^{0,5} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} =$ $x=0$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_0^{0,5}\right) =$ $\to 0$

$= \lim\left(-\frac{1}{\ln 0,5} + \underbrace{\frac{1}{\ln \varepsilon}}_{\to -\infty}\right) = -\frac{1}{\ln 1/2} =$

$= -\frac{1}{\ln 1 - \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

6) $\int\limits_0^{e} \frac{dx}{e^x-1} = \int\limits_0^{e} \frac{e^x dx}{e^x(e^x-1)} \;\Big\|\; e^x = t \;\Big| =$ $x=0$

$x=0$
$e^x = 1 = t$
$x = e$
$e^e = t$

|| [illegible]

$= \int\limits_0^{e}\left(-\frac{de^x}{e^x}\right) + \int\limits_0^{e}\frac{de^x}{e^x-1}$

$\int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{At - B + Bt}{t(t-1)} = \begin{cases} A+B=0 \\ A=-1,\ B=1 \end{cases}$

1) $-\int_0^e \frac{de^x}{e^x} = -\ln e^x \Big|_0^e = -e$

2) $\int_0^e \frac{de^x}{e^x-1} = \ln(e^x-1)\Big|_0^1 =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\ln(e-1) - \underbrace{\ln(e^\varepsilon-1)}_{\to -\infty}\right) \Rightarrow$

$\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$ – расход.

Несобственные интегралы с бесконечным пределом интегрирования

1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \to +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x^2} =$

$= \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_2^a\right) = \lim_{a \to +\infty}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

5

2) $\int_{-1}^{+\infty} e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int_{1}^{+\infty} e^{-3}\,d(-3x) =$

$= \lim_{a\to+\infty} -\frac{1}{3}\int_{1}^{a} e^{-3x}\,d(-3x) = -\frac{1}{3}\lim\left(\overset{\to 0}{e^{-3a}} - e^{-3}\right)$

$= -\frac{1}{3}e^{-3}$

3) $\int_{0}^{+\infty} \sin 3x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}\sin 3x\,dx =$

$= \lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^a\right)$ - расход.

($\lim_{x\to\infty}\cos x$ - предела не имеет)