

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**"КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА"**

На правах рукописи

**КАРЧЕВСКИЙ Евгений Михайлович**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ**

05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация  
на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

**КАЗАНЬ – 2006**

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>ГЛАВА 1. Основные уравнения спектральной теории диэлектрических волноводов</b> . . . . .	31
§ 1. Уравнения для амплитуд собственных волн . . . . .	31
§ 2. Скалярное приближение слабонаправляющего волновода . . . . .	47
§ 3. Собственные волны волноводов кругового поперечного сечения . . . . .	50
<b>ГЛАВА 2. Общие задачи о собственных волнах волноводов с постоянным показателем преломления</b> . . . . .	54
§ 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода . . . . .	54
§ 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке . . . . .	80
<b>ГЛАВА 3. Общие задачи о собственных волнах волноводов с размытой границей</b> . . . . .	96
§ 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода . . . . .	96
§ 2. Векторная задача . . . . .	105
<b>ГЛАВА 4. Задачи о поверхностных собственных волнах</b> . . . . .	116
§ 1. Скалярная задача в вариационной постановке . . . . .	116
§ 2. Векторная задача в вариационной постановке . . . . .	137
<b>ГЛАВА 5. Задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде</b> . . . . .	161
§ 1. Сведение задачи к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения . . . . .	161
§ 2. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора . . . . .	168
<b>ГЛАВА 6. Численные методы решения задач спектральной теории диэлектрических волноводов</b> . . . . .	177
§ 1. Метод Галеркина решения общих задач о собственных волнах . . . . .	177
§ 2. Метод конечных элементов решения задач о поверхностных собственных волнах . . . . .	192
<b>Литература</b> . . . . .	213

## Введение

Интерес к задачам о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся, как в однородной, так и в плоско-слоистой окружающей среде, возник в середине прошлого века при решении задач геологоразведки и стремительно возрастает в связи с бурным развитием оптических телекоммуникационных технологий передачи данных на больших расстояниях [149] и использованием в радио-электронной промышленности миниатюрных интегрированных оптических схем вместо классических электрических [142]. Эти задачи являются спектральными задачами теории дифракции поиска частных решений уравнений Максвелла в виде бегущих волн в неограниченных областях, удовлетворяющих условиям сопряжения на границах раздела сред и соответствующим условиям на бесконечности.

Наиболее полная информация получена о решениях относительно простой задачи о собственных волнах волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной окружающей среде. Хорошо изучены свойства поверхностных собственных волн такого волновода [91]. Собственные функции задачи (амплитуды собственных волн) в этом случае отвечают конечному числу собственных значений (постоянных распространения), принадлежащих ограниченному интервалу вещественной оси. Отличительными особенностями поверхностных собственных волн являются экспоненциальное убывание на бесконечности их амплитуд и симметричность соответствующего дифференциального оператора.

В работах Б.З. Каценеленбаума [64], Г.И. Веселова, С.Б. Раевского [7] на основе анализа характеристического уравнения, полученного методом разделения переменных, было доказано существо-

вание принципиально других классов собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с постоянным вещественным показателем преломления. Они получили названия вытекающих и комплексных, соответственно. Амплитуды комплексных собственных волн также экспоненциально убывают. Вытекающие собственные волны имеют экспоненциально возрастающие на бесконечности амплитуды. Задачи о комплексных и вытекающих собственных волнах имеют несимметричные дифференциальные операторы, а соответствующие постоянные распространения являются комплексными.

Важно отметить, что, как было доказано в работах [64], [7], постоянные распространения собственных волн всех типов непрерывно зависят от радиуса волновода, показателей преломления волновода и окружающей среды, частоты электромагнитных колебаний. С их изменением собственные волны могут трансформироваться из одного типа в другой.

Разработано большое количество методов решения задач о поверхностных собственных волнах, приспособленных для областей специальной формы. Так, для расчета диэлектрических волноводов неоднородного заполнения с поперечным сечением, близким к круговому, широкое применение нашли лучевой метод, метод нормальных волн и асимптотические методы (см. [91], [20] и цитированную там литературу). Хорошо известно точное решение задачи о собственных волнах однородного цилиндрического диэлектрического волновода эллиптического поперечного сечения, полученное методом разделения переменных [74].

Для расчета волноводов с произвольным контуром поперечного сечения применялся метод коллокации [145], [146], вариационные методы [13], [12], [6] и различные модификации метода частичных областей (см., напр., [171], [157], [10], [69], [93], [18], [6] и цитированную там литературу).

Для решения задач поиска поверхностных собственных волн диэлектрических волноводов с неоднородным заполнением применялся метод конечных разностей (см. [88], [89], [1], [23] и цитированную там литературу), приводящий к алгебраическим задачам на собственные значения большой размерности для разреженных матриц. При постановке этих задач основную трудность представляет перенос условий излучения на границу конечной сеточной области.

В работах L. Euges, P. Gianino, P. Wintersteiner [135], Е.В. Захарова, Х.Д. Икрамова, А.Н. Сивова [24], А.В. Малова, В.В. Солодухова, А.А. Чурилина [75] для расчета поверхностных собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов применялись интегральные уравнения, построенные на основе формулы Грина. Теоретического обоснования метода интегральных уравнений для расчета диэлектрических волноводов в указанных работах проведено не было.

Однако, до настоящего времени не было предложено математических формулировок общих задач о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения и распределения показателя преломления, позволяющих исследовать качественные свойства всех, указанных выше типов собственных волн: поверхностных, комплексных и вытекающих, строить на основе таких формулировок теоретически обоснованные численные методы.

Наиболее полно были изучены свойства решений близких спектральных задач теории дифракции – задач о собственных волнах щелевых и полосковых линий. В работах А.С. Ильинского [26], А.С. Ильинского, В.В. Зарубанова [27], [28], А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова [31], [32], А.С. Ильинского, Ю.В. Шестопалова [35] – [37], А.С. Ильинского, Е.В. Чернокожина, Ю.В. Шестопалова [34], Е.В. Чернокожина, Ю.В. Шестопалова [95], Ю.В. Шестопалова [98] – [107] указанные задачи формулируются как задачи поиска характеристических чисел фредгольмовых голоморфных оператор-функций, полученные на основе метода интегральных уравнений. В работах

этих авторов анализируются качественные свойства характеристического множества: локализация, дискретность, существование характеристических чисел. Исследование опирается на общую теорию нелинейных спектральных задач, развитую в работах И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна [19], Като [62]. Предлагаются и исследуются проекционные методы расчета волноведущих структур. При обосновании численных методов используются результаты Г.М. Вайникко, О.О. Карма [3], [4] о проекционных методах решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов.

Аналогичные подходы к исследованию и численному решению задач о собственных колебаниях открытых резонаторов применялись в работах С.В. Сухина [92], В.П. Шестопалова [96], Ю.В. Шестопалова, Ю.Г. Смирнова, Е.В. Чернокожина [168].

Спектральные параметры в указанных работах разыскивались на некоторой поверхности Римана, а собственные функции – в классах функций, удовлетворяющих на бесконечности “парциальным” условиям излучения.

“Парциальные” условия излучения были введены А.Г. Свешниковым в работе [86], сформулированы и обоснованы им для внешней задачи дифракции на регулярном волноводе в статье [87]. Аналогичные условия применялись для корректной постановки задачи дифракции в работе Н. Reichardt [163].

“Парциальным” условиям излучения удовлетворяют амплитуды всех типов собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся в однородной окружающей среде. На это было указано в работе А.И. Носича [160], посвященной изучению функций Грина задач о собственных волнах волноводов с компактным поперечным сечением.

Несмотря на то, что задачи о собственных волнах диэлектрических волноводов, сформулированные в диссертационной работе, близки к задачам о собственных волнах щелевых и полосковых линий пе-

редач, задачам о собственных колебаниях открытых резонаторов, в том смысле, что их операторы имеют комплексные характеристические числа, а собственные функции удовлетворяют “парциальным” условиям излучения, они имеют существенные отличия. Это связано с тем, что разыскиваемые частные решения уравнений Максвелла (уравнения Гельмгольца при упрощающих предположениях о свойствах среды) должны удовлетворять другим граничным условиям. По сравнению с задачами о собственных колебаниях, более того, разыскиваются иные частные решения. Следовательно, при построении моделей распространения собственных волн диэлектрических волноводов возникает необходимость в применении специальных подходов. Они могут быть разработаны на основе известных методов решения задач дифракции на проницаемых телах.

Достаточно эффективные и универсальные алгоритмы решения задач дифракции в бесконечных областях основаны на переходе к интегральным уравнениям [158], [70], [68]. Такой подход позволяет точно учесть поведение решений задач дифракции на бесконечности. Разработке и обоснованию численных методов решения интегральных уравнений теории дифракции посвящено большое количество работ (см., напр., [68], [33], [15], [21], [5], [17], [25], [81], [14], [30], [83], [97], [73] и цитированную там литературу).

С точки зрения экономии вычислительных ресурсов эффективными являются интегральные уравнения, основанные на применении потенциалов простого слоя. Например, по сравнению с методом формулы Грина, метод потенциалов простого слоя позволяет сократить в два раза число искомых функций, порядок системы интегральных уравнений и, как следствие, размерность соответствующей алгебраической задачи. Этот подход использовался, например, в работах В.В. Дробницы, В.А. Цецохо [22], С.И. Смагина [90], А.Г. Ярового [109] при решении задач дифракции электромагнитных волн на проницаемых включениях в плоско-слоистой среде, в работах В.П. Ше-

Стопалова [96], А.Е. Поединчука, Ю.А. Тучкина, В.П. Шестопалова [82] – при решении спектральных задач волнового рассеяния на незамкнутых экранах, в работах Е.В. Захарова, Ю.В. Пименова [25], А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова [33] – при решении задач дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах.

Значительное внимание привлекают задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрических структурах с размытой границей, то есть не имеющих четкой границы раздела сред (см., напр., [120], [85] и цитированную там литературу). В частности, при постановке спектральных задач теории диэлектрических волноводов, часто делается предположение о том, что характеристики волновода плавно переходят в характеристики окружающей среды (см., напр., [160], [143]). Эта модель наиболее адекватна для определения собственных волн естественных природных волноводов и искусственных волноводов, изготовленных методом диффузии. Метод граничных интегральных уравнений в этом случае применять не удается.

Метод сведения трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн на неоднородном теле с размытой границей к интегральному уравнению Фредгольма второго рода по области неоднородности был предложен в работе С. Muller [158], использован в работе D. Colton, R. Kress [120] при анализе существования и единственности решения задачи дифракции.

Задачи о поверхностных собственных волнах в силу симметрии соответствующих дифференциальных операторов несколько проще по сравнению с общими задачами о собственных волнах. Значительные усилия математиков были направлены на исследование вопросов существования поверхностных собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся в однородной окружающей среде. Существование поверхностных собственных волн волновода с переменной диэлектрической проницаемостью доказано в работе А. Vamberger, A.S. Bonnet [112]. Методами спектральной тео-



рии неограниченных самосопряженных операторов получено уравнение, определяющее количество решений задачи в зависимости от ее параметров (уравнение отсечки), изучена зависимость собственных значений от параметров. Эти результаты были обобщены на случай волновода с переменной магнитной проницаемостью в работе Р. Joly, С. Poirier [147]. Результаты работ [112] и [147] дают весьма полное представление о качественных свойствах спектра поверхностных собственных волн, однако использованные в них постановки задач неудобны с точки зрения численного решения. Это связано с тем, что задачи ставятся во всей плоскости поперечного сечения волновода, а их неограниченные операторы имеют, наряду с точечным, непрерывный спектр, не имеющий практического значения.

Одним из эффективных численных методов решения задач теории дифракции является метод конечных элементов, который активно применяется с 70-х годов прошлого столетия для численного анализа спектральных характеристик диэлектрических волноводов, находящихся в однородной окружающей среде (см., напр., [67], [117] и цитированную там литературу). Развитие метода конечных элементов во многом определяется выработкой различных подходов к сведению исходной задачи, сформулированной во всей плоскости поперечного сечения волновода к соответствующей задаче, поставленной в некой ограниченной области. При этом вводится вспомогательная граница, разбивающая плоскость на две части: конечную расчетную область, в которой изменяется показатель преломления, и неограниченную область, в которой показатель преломления постоянен. На искусственной границе ставятся некоторые граничные условия, аппроксимирующие поведение амплитуд собственных волн на бесконечности.

Краевые условия на искусственной границе, известные к началу 90-х годов для применения метода конечных элементов к решению рассматриваемой задачи были локальными и приближенными [67].

Применение метода конечных элементов, основанного на использовании этих условий, не было в достаточной степени обосновано теоретически, так как задачи в ограниченной области не были эквивалентны исходной задаче на плоскости.

Более привлекательным является применение точных нелокальных условий, позволяющих эквивалентным образом свести исходную задачу в неограниченной области к задаче в ограниченной области. Среди такого класса условий отметим прежде всего условия, основанные на “парциальных” условиях излучения. Они систематически применялись для теоретического исследования и численного решения проекционными методами широкого круга задач теории дифракции (см. работу А.С. Ильинского, А.Г. Свешникова, В.В. Кравцова [29] и цитированную там литературу). В общем случае точные нелокальные условия имеют вид  $Lu = Su$ , где  $L$  – дифференциальный оператор условия сопряжения, порожденного уравнением задачи, а  $S$  – некоторый нелокальный оператор на вспомогательной границе. При специальном ее выборе этот оператор удается выписать в явном виде, используя метод разделения переменных. Такой подход использовался в работах D. Givoli, J.V. Keller [136], D. Givoli [137] для решения методом конечных элементов различных задач в неограниченных областях.

В работе P. Joly, C. Poirier [148] точные нелокальные краевые условия применялись для решения методом конечных элементов задачи о поверхностных собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в однородной окружающей среде. Для исключения из рассмотрения нефизичных решений собственные векторы разыскивались в соленоидальных пространствах, что существенно усложнило алгоритм численного решения.

При моделировании природных волноводов и интегрированных оптических схем, т.е. сочетающих цилиндрические и плоско-слоистые направляющие структуры (см., напр., [142]), возникает задача о

собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой окружающей среде. Такой характер окружающей среды существенно усложняет исследование задачи. В работе A.S. Bonnet-Ben Dhia и P. Joly [117] методами спектральной теории неограниченных самосопряженных операторов доказано существование решений задачи в частном случае волновода прямоугольной формы на бесконечной подложке.

Для численного решения этой задачи широко применяется двумерное сингулярное интегральное уравнение по области поперечного сечения волновода [110], [113], [152], [172]. В работе Н.Р. Urbach [174] установлена нетеровость соответствующего интегрального оператора в случае однородной окружающей среды, а также доказана непустота его спектра.

Таким образом, проблемы спектральной теории диэлектрических волноводов являются весьма актуальными. Прежде всего, целью диссертационной работы является получение формулировок общих задач, позволяющих исследовать в рамках единых математических моделей свойства поверхностных, вытекающих и комплексных собственных волн. Актуальной проблемой является обобщение результатов относительно их свойств, известных для волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления, на случай произвольного контура поперечного сечения, а также получение аналогичных результатов для волноводов с переменным в ограниченной области показателем преломления. Актуальной является проблема разработки теоретически обоснованных общих методов вычисления постоянных распространения и собственных волн всех известных типов.

Дальнейшего развития требует применение метода точных нелокальных граничных условий в сочетании с методом конечных элементов в задачах о поверхностных собственных волнах. Известные методы сведения исходных задач на плоскости к задачам на собственные

значения в ограниченной области основаны на использовании специальных (соленоидальных) конечно-элементных пространств. В связи с этим является актуальной проблема разработки таких подходов, которые бы позволили использовать простейшие конечно-элементные пространства, что более удобно с точки зрения практического применения метода конечных элементов.

Что касается задачи о собственных волнах цилиндрического волновода в плоско-слоистой среде, то свойства оператора двумерного сингулярного интегрального уравнения, к нелинейной спектральной задаче для которого она сводится, изучены слабо. Актуальной является проблема доказательства фредгольмовости этого оператора, что необходимо для обоснования численных методов решения указанной задачи.

Диссертация состоит из введения и шести глав.

Первая глава является вспомогательной и имеет, в основном, реферативный характер. В §1.1 сформулированы уравнения, которым удовлетворяют собственные волны диэлектрических волноводов и амплитуды этих волн. Вводятся электромагнитные потенциалы. Формулируются условия, которым удовлетворяют амплитуды собственных волн и электромагнитные потенциалы на границах раздела сред (там где показатель преломления терпит скачок). Формулируются “парциальные” условия излучения для амплитуд собственных волн. В §1.2 формулируются дифференциальные уравнения, условия сопряжения и условия излучения, которым удовлетворяют решения задачи в скалярном приближении слабонаправляющего волновода. Это приближение применяется для аппроксимации собственных волн волноводов показатель преломления которых незначительно отличается от показателя преломления окружающей среды. В §1.3 приводятся точные решения модельных задач о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения в векторном и скалярном случаях. Эти решения используются в каче-

стве тестовых примеров при анализе адекватности математических моделей и эффективности численных методов.

Вторая глава посвящена изучению качественных свойств решений общих задач о собственных волнах волноводов с постоянным показателем преломления путем сведения их методом потенциалов простого слоя к нелинейным спектральным задачам для фредгольмовых голоморфных оператор-функций.

В §2.1 изучается скалярная задача о собственных волнах слабо-направляющего волновода. Ненулевая функция  $u \in U$ , называется собственной функцией задачи, отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если:

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (0.1)$$

$$\Delta u + \chi_\infty^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad (0.2)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (0.3)$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (0.4)$$

Здесь  $\Omega$  – область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\Gamma$ ,  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ ,  $R_0$  – положительное число, такое, что  $\Omega$  целиком лежит в круге радиуса  $R_0$ ;  $U$  – множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ ;  $\chi_{+/\infty} = \sqrt{k^2 n_{+/\infty}^2 - \beta^2}$ ,  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\omega > 0$  – заданная частота электромагнитных колебаний;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость свободного пространства,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость свободного пространства;  $n_+$  и  $n_\infty$  – постоянные показатели преломления волновода и окружающей среды, соответственно,  $0 < n_\infty < n_+$ ;  $H_l^{(1)}$  – функции Ханкеля первого рода порядка  $l$ ;  $\Lambda$  – пересечение римановых поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_\infty$  функций  $\ln \chi_+(\beta)$  и  $\ln \chi_\infty(\beta)$ , соответственно.

В теореме 2.1 доказывается, что на пересечении  $\Lambda_0^{(1)}$  главных (“физических”) листов поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_\infty$  собственные значения зада-

чи (0.1) – (0.4) могут принадлежать лишь множеству

$$G = \{\beta \in \mathbb{R} : kn_{\infty} < |\beta| < kn_{+}\}.$$

Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны (и экспоненциально убывает при  $|x| \rightarrow \infty$ ).

Теорема 2.1 обобщает хорошо известные результаты (см., напр., [91]) о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе элементарного анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

На основе представления функции  $u$  в областях  $\Omega$  и  $\Omega_{\infty}$  в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями и ядрами в виде фундаментальных решений уравнений Гельмгольца (0.1) и (0.2), удовлетворяющих соответствующим “парциальным” условиям излучения (условиям вида (0.4)), задача (0.1) – (0.4) сведена к нелинейной спектральной задаче для системы слабосингулярных интегральных уравнений по контуру  $\Gamma$  относительно функций, выражающихся определенным образом через плотности потенциалов. Построенная система интегральных уравнений трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0 \quad (0.5)$$

в банаховом пространстве  $W = C^{1,\alpha} \times C^{0,\alpha}$ . Установлено, что оператор  $B(\beta)$  вполне непрерывен при любых  $\beta \in \Lambda$ .

Сведение системы интегральных уравнений первого рода, возникающей первоначально в результате применения метода потенциалов простого слоя, и содержащей непрерывно обратимые операторы  $L : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$  вида:

$$Lp = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t - \tau}{2} \right| p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (0.6)$$

к фредгольмовому операторному уравнению (0.5) мы проводим с помощью известной процедуры регуляризации, следуя работе Б.Г. Габдулхаева [15].

Основным результатом §2.1 является теорема 2.4. Он состоит в следующем. Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (0.5), не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup G) \subset \rho(A)$  (здесь  $D$  — множество, состоящее из мнимой оси и определенного примыкающего к ней, не пересекающегося с  $G$  интервала вещественной оси). Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_+$ ,  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

Теорема 2.4 обобщает хорошо известные результаты (см., напр., [91]) о зависимости постоянных распространения собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения от показателей преломления волновода и окружающей среды, частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

Доказательство этого результата основано на применении теоремы И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна [19] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции  $A(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы S. Steinberg [173] о поведении характеристических значений  $\beta$  такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $\omega$  в случае, если оператор-функция  $A(\beta, \omega)$  является совместно непрерывной функцией параметров  $\beta$  и  $\omega$ . Отметим, что теорема S. Steinberg справедлива для

оператор-функций, имеющих вид  $A(\beta, \omega) = I + B(\beta, \omega)$ , где  $B(\beta, \omega)$  – вполне непрерывный оператор.

Предварительно изучаются свойства оператор-функции  $A(\beta)$  и доказываются утверждения о спектральной эквивалентности задач (0.1) – (0.4) и (0.5). Во-первых, если  $w \in W$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то функция  $u$ , представленная в виде потенциалов простого слоя с плотностями, определяемыми вектором  $w$ , принадлежит множеству  $U$  и является собственной функцией задачи (0.1) – (0.4), отвечающей собственному значению  $\beta_0$ . Во-вторых, любая собственная функция  $u \in U$  задачи (0.1) – (0.4), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями; при этом функция  $w$ , построенная определенным образом по этим плотностям, принадлежит  $W$  и является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

В §2.2 исследуется векторная задача о собственных волнах волновода в полной электродинамической постановке. Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$  называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если:

$$\operatorname{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (0.7)$$

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad x \in \Gamma, \quad (0.8)$$

$$\nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \Gamma, \quad (0.9)$$

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (0.10)$$

Здесь символом  $\operatorname{rot}_\beta$  обозначена векторная операция, которая получается из обычной операции  $\operatorname{rot}$  заменой производной по  $x_3$  умножением на  $i\beta$ ;  $n$  – кусочно постоянная функция, равная  $n_+$  в  $\Omega$  и  $n_\infty$  в  $\Omega_\infty$ .



В теореме 2.5 доказывается, что мнимая и вещественная оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$  за исключением множества  $G$  не содержат собственных значений задачи (0.7) – (0.10). Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны. Комплексным  $\beta \in C_0^{(1)}$  отвечают комплексные собственные волны. Символом  $C_0^{(1)}$  обозначена часть листа  $\Lambda_0^{(1)}$  без мнимой и вещественной осей.

Теорема 2.5 обобщает результаты [64] и [7] о локализации спектра собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе анализа характеристического уравнения метода разделения переменных в векторном случае.

Задача (0.7) – (0.10) сведена к нелинейной спектральной задаче для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру  $\Gamma$  на основе выражения собственных векторов  $\{E, H\}$  задачи (0.7) – (0.10) через потенциальные функции  $E_3, H_3$ , удовлетворяющие уравнениям (0.1), (0.2), и представления функций  $E_3, H_3$ , в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями и ядрами в виде фундаментальных решений уравнений Гельмгольца (0.1) и (0.2), удовлетворяющих соответствующим “парциальным” условиям излучения.

Вследствие наличия в условиях сопряжения, которым удовлетворяют функции  $E_3, H_3$  на контуре  $\Gamma$ , касательных производных, построенная система уравнений содержит сингулярный интегральный оператор  $S : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{0,\alpha}$ , определяемый равенством:

$$Sp = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} p(\tau) d\tau + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (0.11)$$

Этот линейный непрерывный оператор является, как известно, непрерывно обратимым [78]. Построенная система интегральных уравнений трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0 \quad (0.12)$$

в банаховом пространстве  $W = C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha}$ . Установлено, что оператор  $B(\beta)$  вполне непрерывен при любых  $\beta \in \Lambda$ .

Основным результатом §2.2 является теорема 2.8. Он состоит в следующем. Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (0.12), не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup G \cup C_0^{(1)}) \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_+, \pm kn_\infty$  и на бесконечности.

Теорема 2.8 обобщает результаты [64] и [7] о зависимости постоянных распространения собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения от показателей преломления волновода и окружающей среды, частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате анализа характеристического уравнения метода разделения переменных в векторном случае.

В ходе доказательства теоремы изучаются свойства оператор-функции  $A(\beta)$  и устанавливается спектральная эквивалентность задач (0.12) и (0.7) – (0.10).

Третья глава посвящена изучению качественных свойств решений общих задач о собственных волнах волноводов с переменным показателем преломления и размытой границей путем сведения их методом интегральных уравнений по области к нелинейным спектральным задачам для фредгольмовых голоморфных оператор-функций.

В §3.1 рассматривается скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода. Ненулевая функция  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  называется собственной функцией этой задачи, отвечающей собственному значе-

нию  $\beta \in \Lambda$ , если:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (0.13)$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (0.14)$$

Здесь  $n$  – вещественная функция, удовлетворяющая условиям:

$$n = n_\infty = \text{const}, \quad x \notin \Omega,$$

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0;$$

символом  $\Lambda$  обозначена поверхность Римана функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ .

Всюду в этой главе предполагается, что волновод имеет размытую границу, а именно, что  $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Это предположение существенно используется в §3.2 при решении векторной задачи о собственных волнах. Результаты параграфа §3.1 справедливы [57] для более общего случая:  $n \in C^1(\Omega)$ , граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  – липшицева кривая, на  $\Gamma$  функция  $u \in U$  удовлетворяет условиям сопряжения (0.3). Однако, в целях единства изложения материала предположение  $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$  делается и в §3.1.

В теореме 3.9 доказывается, что на главном (“физическом”) листе  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$  собственные значения задачи (0.13), (0.14) могут принадлежать лишь множеству  $G$ .

На основе представления функции  $u$  в виде интеграла по области  $\Omega$  с ядром в виде фундаментального решения уравнения Гельмгольца (0.2), удовлетворяющего “парциальным” условиям излучения, задача (0.13), (0.14) сведена к нелинейной спектральной задаче для интегрального уравнения по области  $\Omega$ . Построенное интегральное уравнение трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)v \equiv (I - K(\beta))v = 0 \quad (0.15)$$

в пространстве  $L_2(\Omega)$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро интегрального оператора  $K(\beta)$  слабополярно; при  $\beta \in G$  – симметрично и положительно.

В теореме 3.10 доказывается, что, если  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  является собственной функцией задачи (0.13), (0.14), отвечающей собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то функция  $v$ , построенная определенным образом по  $u$ , принадлежит  $L_2(\Omega)$  и является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $v \in L_2(\Omega)$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то функция  $u$ , построенная по  $v$  с помощью определенного интегрального представления, принадлежит  $C^2(\mathbb{R}^2)$  и является собственной функцией задачи (0.13), (0.14), отвечающей собственному значению  $\beta_0$ .

В теореме 3.11 доказывается, что регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (0.15), не пусто:  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

В теореме 3.12 доказывается, что задача (0.13), (0.14) имеет по крайней мере одно простое положительное собственное значение  $\beta$ , принадлежащее множеству  $G$ ; ему отвечает положительная собственная функция.

В §3.2 изучается общая векторная задача о собственных волнах волновода с размытой границей в полной электродинамической постановке. Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если:

$$\operatorname{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (0.16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (0.17)$$

В теореме 3.13 доказывається, что мнимая и вещественная оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$  за исключением множества  $G$  не содержат собственных значений задачи (0.16) – (0.17).

Задача (0.16) – (0.17) сведена к нелинейной спектральной задаче для интегрального уравнения по области  $\Omega$  на основе, предложенного в работе С. Muller [158], метода сведения трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн на неоднородном теле с размытой границей к интегральному уравнению Фредгольма второго рода по области неоднородности. Построенное интегральное уравнение трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)F \equiv (I - B(\beta))F = 0 \quad (0.18)$$

в пространстве  $[L_2(\Omega)]^3$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  оператор  $B(\beta)$  вполне непрерывен.

В теореме 3.14 доказывається, что если вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  является собственным вектором задачи (0.16), (0.17), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то  $\mathbf{F} = \mathbf{E} \in [L_2(\Omega)]^3$  есть собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $\mathbf{F} \in [L_2(\Omega)]^3$  является собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , и это  $\beta_0$  не является собственным значением задачи (0.13), (0.14), то вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , построенный по  $\mathbf{F}$  с помощью определенного интегрального представления, принадлежит  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  и является собственным вектором задачи (0.16), (0.17), отвечающим собственному значению  $\beta_0$ .

Основной результат §3.2 доказывається в теореме 3.15. Он состоит в следующем. Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (0.18), не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (G \cup C_0^{(1)}) \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состо-

ять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

Четвертая глава посвящена изучению вопросов существования и качественных свойств решений задач о поверхностных собственных волнах путем сведения их методом точных нелокальных граничных условий к параметрическим задачам на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов с нелинейным вхождением спектральных параметров.

В §4.1 изучается скалярная задача о собственных волнах слабо-направляющего волновода в вариационной постановке: найти все такие пары  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $u \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющие для любой функции  $v \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$  тождеству:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} n^2 uv dx. \quad (0.19)$$

Здесь  $\Lambda = \{(\beta^2, k^2) : \beta^2/n_+^2 < k^2 < \beta^2/n_\infty^2, \beta^2 > 0\}$ ;  $n$  – вещественная функция, принадлежащая пространству  $C(\overline{\Omega})$ , такая, что  $n = n_\infty > 0$  в  $\Omega_\infty$ ,  $\min_{x \in \overline{\Omega}} n(x) \geq n_\infty$ ,  $n_+ = \max_{x \in \overline{\Omega}} n(x) > n_\infty$ . Область  $\Omega$  является ограниченной, не обязательно связной, каждая связная компонента ее границы  $\Gamma$  является липшицевой кривой.

Задача (0.19) эквивалентным образом сводится к параметрической задаче на собственные значения в круге  $\Omega_R \supset \Omega$ , которая формулируется следующим образом: найти все  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $u \in W_2^1(\Omega_R)$ , удовлетворяющие уравнению:

$$A(\beta^2, k^2)u = k^2 Bu, \quad (0.20)$$

где  $A(\beta^2, k^2)$  и  $B$  – ограниченные линейные самосопряженные операторы, действующие в пространстве  $W_2^1(\Omega_R)$ ; кроме того,  $A(\beta^2, k^2)$  – неотрицательный оператор для любых  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , а  $B$  – вполне непрерывный положительный оператор. Сведение задачи (0.19) к задаче (0.20) основывается на построении точного нелокального условия на границе  $\Gamma_R$  области  $\Omega_R$  с использованием условия сопряжения на  $\Gamma_R$  и явной формулы для метагармонического продолжения искомого решения с  $\Gamma_R$  в  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R$ .

В теореме 4.18 доказывается, что при любом  $\beta^2 > 0$  задача (0.20) имеет по крайней мере одно решение, а число всех решений увеличивается с ростом  $\beta^2$  и стремится к бесконечности при  $\beta^2 \rightarrow \infty$ . Для каждого конечного значения  $\beta^2$  существует конечное число решений  $(\beta^2, k_l^2(\beta^2); u_l(\beta^2))$  задачи (0.20). Это число определяется решениями  $\beta_l^2$  вспомогательной линейной задачи на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов (уравнения отсечки).

В теореме 4.19 доказывается, что функции  $k^2 = k_l^2(\beta^2)$ , определенные на  $(\beta_l^2, \infty)$ , при всех  $l \geq 1$  являются локально липшицевыми, возрастающими, и  $k_l^2(\beta^2)/\beta^2 \rightarrow n_+^{-2}$  при  $\beta^2 \rightarrow \infty$ .

Результаты теорем 4.18 и 4.19 обобщают хорошо известные свойства поверхностных собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления (см., напр., [91]), полученные на основе метода разделения переменных.

В §4.2 изучается векторная задача о поверхностных собственных волнах в вариационной постановке [112]: найти все такие пары  $(\beta, k) \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые векторы  $\mathbf{H} \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$ , удовлетворяющие для любого  $\mathbf{H}' \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$  тождеству:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H}'} + \frac{1}{n_\infty^2} \operatorname{div}_\beta \mathbf{H} \overline{\operatorname{div}_\beta \mathbf{H}'} \right) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'} dx. \quad (0.21)$$

Здесь  $\Lambda = \{(\beta, k) : \beta/n_+ < k < \beta/n_\infty, \beta > 0\}$ , символом  $\operatorname{div}_\beta$  обозна-

чена векторная операция, которая получается из обычной операции  $\operatorname{div}$  заменой производной по  $x_3$  умножением на  $i\beta$ .

На основе метода точных нелокальных граничных условий задача (0.19) эквивалентным образом сводится к параметрической задаче на собственные значения в круге  $\Omega_R$ , которая формулируется следующим образом: найти все  $(\beta, \sigma) \in \mathbb{R}_+^2$ , при которых существуют ненулевые векторы  $\mathbf{H} \in [W_2^1(\Omega_R)]^3$ , удовлетворяющие уравнению

$$A(\beta, \sigma)\mathbf{H} = -\sigma^2 B\mathbf{H}, \quad (0.22)$$

где  $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2}$  – поперечное волновое число,  $A(\beta, \sigma)$  и  $B$  – ограниченные линейные самосопряженные операторы, действующие в пространстве  $[W_2^1(\Omega_R)]^3$ ; кроме того,  $B$  – компактный положительный оператор.

В теореме 4.23 доказывается, что при любом  $\beta > 0$  задача (0.22) имеет по крайней мере два решения  $(\beta, \sigma_1(\beta); \mathbf{H}_1(\beta))$  и  $(\beta, \sigma_2(\beta); \mathbf{H}_2(\beta))$ , а число всех решений увеличивается с ростом  $\beta$  и стремится к бесконечности при  $\beta \rightarrow \infty$ . Для каждого конечного значения  $\beta$  существует конечное число решений  $(\beta, \sigma_l(\beta); \mathbf{H}_l(\beta))$  задачи (0.22). Это число определяется значениями точек отсечки  $\beta_l$ , квадраты которых являются решениями уравнения отсечки, представляющего собой линейную задачу на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов.

В теореме 4.24 доказывается, что функции  $\sigma = \sigma_l(\beta)$ , определенные на  $(\beta_l, \infty)$ , при всех  $l \geq 1$  являются локально липшицевыми, неубывающими, и  $\sigma_l(\beta)/\beta \rightarrow \sqrt{1 - (n_\infty/n_+)^2}$  при  $\beta \rightarrow \infty$ .

Результаты теорем 4.23 и 4.24 обобщают хорошо известные свойства поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления (см., напр., [91]), полученные в векторном случае на основе метода разделения переменных.

Пятая глава посвящена изучению свойств оператора двумерного



сингулярного интегрального уравнения, к которому сводится задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой окружающей среде.

В §5.1 изучается задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде. Предполагается, что показатель преломления  $n$  является положительной вещественной функцией, кроме того, существует ограниченная область  $\Omega$  такая, что  $n(x) = n_\infty(x_2)$ ,  $x \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ , где  $n_\infty(x_2)$  зависит только от координаты  $x_2$ :

$$n_\infty(x_2) = \begin{cases} n_1, & x \in \Omega_1 = \{x : \infty < x_1 < \infty, x_2 > d\}, \\ n_2, & x \in \Omega_2 = \{x : \infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < d\}, \\ n_3, & x \in \Omega_3 = \{x : \infty < x_1 < \infty, x_2 < 0\}. \end{cases}$$

Предполагается, что  $\Omega \subset \Omega_2$ , и также, что  $n$  является непрерывной функцией в области  $\Omega_2$ , то есть, что волновод имеет размытую границу. Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$  называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ , если выполнены условия:

$$\operatorname{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (0.23)$$

$$\operatorname{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (0.24)$$

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad \nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (0.25)$$

Здесь символом  $\widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  обозначено определенное множество, принадлежащее вещественной оси главного (“физического”) листа римановой поверхности функции  $\ln \sqrt{k^2 n_2^2 - \beta^2}$ ; через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  обозначены границы области  $\Omega_2$ ;  $U$  – множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\overline{\Omega}_1$ ,  $\overline{\Omega}_2$  и  $\overline{\Omega}_3$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , экспоненциально убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  по любому направлению, не параллельному прямым  $\Gamma_j$ , и ограниченных при  $|x| \rightarrow \infty$  параллельно прямым  $\Gamma_j$ .

На основе представления собственных векторов в виде интегралов по области  $\Omega$  с ядрами, выражающимися через известную тен-

зорную функцию Грина для поляризованного потенциала [111], задача (0.23) – (0.25) сводится к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения. Построенное интегральное уравнение трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)F = 0 \quad (0.26)$$

в пространстве  $[L_2(\Omega)]^3$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $A(\beta)$  является сильно сингулярным.

В §5.2 (теорема 5.25) доказывается, что для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $A(\beta)$  фредгольмов. Доказательство основано на общих результатах теории многомерных сингулярных интегральных операторов [155].

Шестая глава посвящена разработке и теоретическому исследованию численных методов решения задач спектральной теории цилиндрических диэлектрических волноводов.

В §6.1 изучается метод Галеркина решения нелинейных спектральных задач для систем интегральных уравнений, содержащих сингулярные интегралы с логарифмической особенностью ядра (0.6) и ядром Гильберта (0.11). При построении и исследовании численного метода эти системы удобно трактовать как операторные уравнения (0.5) и (0.12) в гильбертовых пространствах, соответственно,  $W_2^1 \times L_2$  и  $L_2 \times L_2 \times L_2 \times L_2$ . В качестве базисных используются тригонометрические функции, которые являются собственными функциями, отвечающими известным собственным значениям, указанных сингулярных интегральных операторов. В соответствии с методом Галеркина приближенные значения  $\beta_n$  постоянных распространения  $\beta$  определяются как характеристические значения соответствующих конечномерных операторов  $A_n(\beta) : H_n \rightarrow H_n$ , где  $n$  – количество базисных функций.

В теореме 6.29 обосновывается сходимость метода Галеркина решения задачи (0.5), а в теореме 6.30 – задачи (0.12). А именно, доказы-

ваются, что если  $\beta_0 \in \sigma(A)$  (символом  $\sigma(A)$  обозначено характеристическое множество оператора  $A$ ), то существует такая последовательность  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ . Если  $\{\beta_n\}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$ . Если  $\{\beta_n\}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{x_n\}$  – некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|x_n\| = 1$ , таких, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)x_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)x_0 = 0$ ,  $\|x_0\| = 1$ . Исследование сходимости метода Галеркина опирается результаты Г.М. Вайникко, О.О. Карма о проекционных методах решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов [4].

Приводятся результаты численных экспериментов поиска собственных векторов задачи (0.12) отвечающих комплексным собственным значениям  $\beta \in C_0^{(1)}$ . Для волновода кругового поперечного сечения результаты сравниваются с точными решениями, полученными методом разделения переменных, и с результатами, работы Т.Ф. Jablonski [143], в которой для решения задачи в исходной дифференциальной постановке применялся специальный проекционно-итерационный метод [144].

Для демонстрации эффективности предлагаемого метода разыскиваются также комплексные и поверхностные собственные волны диэлектрического волновода квадратного сечения. При этом используется аппроксимация квадрата гладкими кривыми. Результаты сравниваются с экспериментальными данными [38]. Исследуется скорость сходимости метода при использовании различных кривых.

В §6.2 описывается метод конечных элементов решения задачи (0.20). Используются простейшие пространства лагранжевых конечных элементов, удобные для практического применения метода. Предлагается простой метод аппроксимации точного нелокального граничного условия, выписанного в явном виде на основе метода разделения переменных. Устанавливается что свойства спектра

конечно-элементной аппроксимации в точности соответствуют свойствам спектра исходной дифференциальной задачи. Приводятся результаты численных экспериментов решения ряда конкретных задач спектральной теории диэлектрических волноводов. Полученные результаты сравниваются с известными точными решениями и решениями, полученными другими авторами. Исследуется скорость сходимости метода в зависимости от точности аппроксимации граничного условия и максимального размера элементов.

Основные результаты диссертации.

1. Сформулированы нелинейные спектральные задачи для фредгольмовых голоморфных оператор-функций, содержащих контурные сингулярные интегральные операторы, эквивалентные общим задачам о собственных волнах волноводов с постоянным показателем преломления. Доказано, что для всех допустимых значений неспектральных параметров регулярные множества оператор-функций не пусты, а характеристические множества могут состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями. Характеристические значения непрерывно зависят от неспектральных параметров, с изменением которых, могут появляться и исчезать лишь на границе области голоморфности оператор-функций.

2. Сформулированы нелинейные спектральные задачи для фредгольмовых голоморфных оператор-функций, содержащих слабо сингулярные интегральные операторы по области, эквивалентные общим задачам о собственных волнах волноводов с размытой границей. Доказано, что для всех допустимых значений неспектральных параметров регулярные множества оператор-функций не пусты, а характеристические множества могут состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями. Характеристические значения непрерывно зависят от неспектральных параметров, с изменением которых, могут появляться и исчезать лишь на границе области голоморфности оператор-функций.

3. Сформулированы параметрические задачи на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов с нелинейным вхождением спектральных параметров в точные нелокальные граничные условия, эквивалентные задачам о поверхностных собственных волнах волноводов. Доказано существование решений этих задач при всех допустимых значениях параметров. Получены результаты, обобщающие свойства известных в частных случаях точных решений задач.

4. Разработан метод Галеркина решения общих задач о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов с постоянным показателем преломления в полной векторной постановке и в скалярном приближении. Доказана его сходимость.

5. Разработан метод конечных элементов решения задач о поверхностных собственных волнах. Установлено, что свойства спектра конечно-элементной аппроксимации в точности соответствуют свойствам спектра исходной дифференциальной задачи. Показана практическая эффективность метода путем сравнения решений ряда конкретных задач спектральной теории диэлектрических волноводов с точными решениями и результатами, полученными другими авторами.

Результаты диссертации докладывались на Международных научных конференциях ММЕТ (Харьков, 1998 г.; Харьков, 2000 г.; Киев, 2002 г.; Днепропетровск, 2004 г.; Харьков 2006 г.), Международных научных конференциях WAVES (Сантьяго Де-Компостела, Испания, 2000 г.; Яваскила, Финляндия, 2003 г.), Международном научном симпозиуме PIERS (Нант, Франция, 1998 г.), XXVI Генеральной ассамблее международного союза радио-наук (Торонто, Канада, 1999 г.), Международных научных конференциях ICTON (Кельце, Польша, 1999 г.; Краков, Польша, 2001 г.), Всероссийской конференции “Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности” (Ростов-на-Дону, 2000 г.), на семинаре “Вычислительная электроди-

намика” Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (руководители – А.Г. Свешников, А.С. Ильинский), на семинаре кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета, на семинаре “Математические модели интегральной оптики” кафедры прикладной математики Казанского государственного университета (руководитель – Н.Б. Плещинский), Всероссийском семинаре “Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач” (Казань, 1998 г.), Всероссийском семинаре “Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач” (Казань, 1999 г.), VIII Всероссийской школе-семинаре “Современные проблемы математического моделирования” (Ростов-на-Дону, 1999 г.), Всероссийской школе-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова (Казань, 1999 г.), Молодежных научных школах-конференциях “Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах” (Казань, 2000 и 2002 гг.), на итоговых конференциях Казанского государственного университета 1998 – 2004 гг. и опубликованы в [39] – [60], [121] – [134].

В совместных работах [59], [60], [129] Е.В. Трифонову принадлежат результаты численных экспериментов. В совместной работе [56] А.И. Носичу принадлежит постановка задачи на физическом уровне и физическая интерпретация результатов о свойствах решений задачи, остальные результаты принадлежат соискателю и С.И. Соловьеву в равной мере. В совместных работах с С.И. Соловьевым [57], [58] результаты принадлежат авторам в равной мере. В совместных работах [122], [131] – [133] А.И. Носичу и Д. Хансону принадлежат постановки задач на физическом уровне и физическая интерпретация результатов о свойствах решений задач. В совместных работах с Р.З. Даутовым [39] – [46], [121], [128] результаты принадлежат авторам в равной мере. В совместных работах с Р.З. Даутовым и Г.П. Корниловым [47], [48], [134] результаты принадлежат авторам в равной мере.

ГЛАВА 1

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

## § 1. Уравнения для амплитуд собственных волн

**1. Система уравнений Максвелла.** Спектральная теория диэлектрических волноводов основывается на следующих однородных уравнениях Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Здесь введены следующие обозначения (используется декартова система координат):

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)^T, \quad \mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)^T$$

– векторы напряженности электрического и магнитного поля с координатами:

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3;$$

$x_1, x_2, x_3$  – пространственные переменные;  $t$  – время;  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$  – диэлектрическая проницаемость;  $\varepsilon_0$  – постоянная диэлектрическая проницаемость свободного пространства;  $n$  – показатель преломления;  $\mu_0$  – постоянная магнитная проницаемость свободного пространства. Векторная операция  $\operatorname{rot}$  в декартовой системе координат определена равенством:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \partial \mathcal{E}_3 / \partial x_2 - \partial \mathcal{E}_2 / \partial x_3 \\ \partial \mathcal{E}_1 / \partial x_3 - \partial \mathcal{E}_3 / \partial x_1 \\ \partial \mathcal{E}_2 / \partial x_1 - \partial \mathcal{E}_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Сделаем обычные предположения относительно показателя преломления и вида частных решений уравнений Максвелла (см., напр., [91]). Пусть цилиндрический диэлектрический волновод является бесконечно длинным и находится в неограниченном пространстве с постоянным показателем преломления  $n_\infty > 0$ . Будем считать, что образующая цилиндра параллельна оси  $0x_3$ , показатель преломления  $n$  внутри цилиндра не зависит от  $x_3$  и является вещественной функцией пространственных переменных  $x_1$  и  $x_2$ . В дальнейшем символом  $x$  будем обозначать вектор с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

Мы будем изучать собственные волны, то есть решения системы уравнений Максвелла (1.1), имеющие вид:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix} (x, x_3, t) = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} (x) \exp(i(\beta x_3 - \omega t)) \right). \quad (1.2)$$

Здесь

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^T, \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$$

– комплексные амплитуды векторов напряженности электрического и магнитного поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ ;  $\omega > 0$  – частота электромагнитных колебаний;  $\beta$  – комплексный параметр, который называется постоянной распространения.

Задачи о собственных волнах диэлектрических волноводов являются задачами поиска таких значений  $\omega$  и  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений Максвелла (1.1), имеющие вид (1.2), удовлетворяющие условиям сопряжения на границах раздела сред и соответствующим условиям на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода.

Построим уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды собственных волн. Обозначим символом  $\mathbb{R}^2$  плоскость поперечного сечения волновода  $\{x_3 = \text{const}\}$ . Пусть  $\Omega$  – ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ее граница  $\Gamma$  – гладкая кривая;  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ . Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим



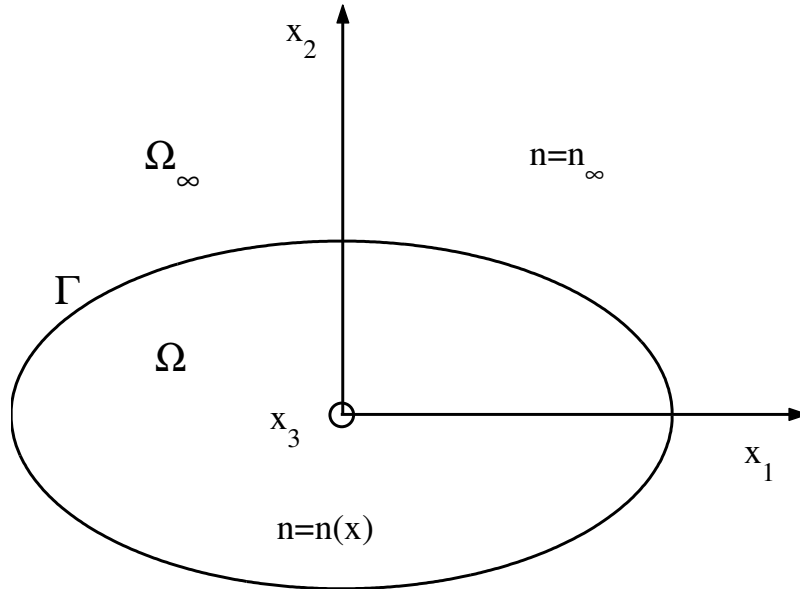


Рис. 1. Схематическое изображение поперечного сечения цилиндрического диэлектрического волновода в однородной окружающей среде

следующее:  $n = n_\infty = \text{const}$  при  $x \in \Omega_\infty$ ;  $n$  — гладкая вещественная функция в области  $\Omega$ ;

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0;$$

$n$  может иметь разрыв первого рода на контуре  $\Gamma$ . Схематическое изображение поперечного сечения волновода приведено на рисунке 1.

Подставляя векторы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  вида (1.2) в уравнения Максвелла (1.1), получим следующую систему уравнений:

$$\text{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.3)$$

где векторная операция  $\text{rot}_\beta$  определена равенством:

$$\text{rot}_\beta \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \partial E_3 / \partial x_2 - i\beta E_2 \\ i\beta E_1 - \partial E_3 / \partial x_1 \\ \partial E_2 / \partial x_1 - \partial E_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Пусть  $\mathbf{F}$  и  $u$  — достаточно гладкие вектор-функция и скалярная функция соответственно:

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)^T(x), \quad u = u(x).$$

Введем дифференциальные операторы:

$$\operatorname{div}_\beta \mathbf{F} = \partial F_1 / \partial x_1 + \partial F_2 / \partial x_2 + i\beta F_3,$$

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2,$$

$$\operatorname{grad}_\beta u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, i\beta u)^T,$$

$$\operatorname{grad} u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, 0)^T.$$

Непосредственными вычислениями легко проверить справедливость следующих формул:

$$\operatorname{div}_\beta (\operatorname{grad}_\beta u) = \Delta u - \beta^2 u, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{F}) = 0, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div}_\beta (u\mathbf{F}) = u \operatorname{div}_\beta \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} u, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{grad}_\beta u) = 0, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{F}) = -\Delta \mathbf{F} + \beta^2 \mathbf{F} + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{F}), \quad (1.9)$$

$$\Delta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{F}) = \operatorname{div}_\beta (\Delta \mathbf{F}). \quad (1.10)$$

Здесь и далее символом “ $\cdot$ ” обозначено скалярное произведение векторов.

**Утверждение 1.1.** Пусть  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  – нетривиальное решение системы уравнений (1.3). Тогда для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E}) = k^2 n^2 \mathbf{E}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (n^{-2} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H}) = k^2 \mathbf{H}, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E}) = 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div}_\beta \mathbf{H} = 0, \quad (1.14)$$

где  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ . Вещественный параметр  $k$  называется продольным волновым числом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Равенства (1.11) и (1.12) легко получить, применив операцию  $\operatorname{rot}_\beta$  к правым и левым частям уравнений (1.3).

Для того, чтобы получить равенства (1.13) и (1.14), надо применить к правым и левым частям уравнений (1.3) операцию  $\operatorname{div}_\beta$  и воспользоваться формулой (1.6).  $\square$

**Утверждение 1.2.** Пусть  $E, H$  – нетривиальное решение системы уравнений (1.3); показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ . Тогда в  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  функции  $E$  и  $H$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.15)$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (1.16)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Функция  $n$  принимает постоянное значение  $n_\infty > 0$  при  $x \in \Omega_\infty$ . По предположению в области  $\Omega$  функция  $n$  также принимает положительное постоянное значение  $n_+$ . Таким образом, применяя к уравнениям (1.11), (1.12) формулу (1.9), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -\Delta E + \beta^2 E + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta E) &= k^2 n_+^2 E, & x \in \Omega, \\ -\Delta H + \beta^2 H + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta H) &= k^2 n_+^2 H, & x \in \Omega, \\ -\Delta E + \beta^2 E + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta E) &= k^2 n_\infty^2 E, & x \in \Omega_\infty, \\ -\Delta H + \beta^2 H + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta H) &= k^2 n_\infty^2 H, & x \in \Omega_\infty. \end{aligned}$$

Из этих уравнений, равенства (1.14) и равенства

$$\operatorname{div}_\beta E = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

справедливого при сделанных предположениях относительно  $n$  в силу уравнения (1.13), получаем требуемое утверждение.  $\square$

**2. Электромагнитные потенциалы.** Для определения комплексных амплитуд собственных волн на плоскости нужно найти нетривиальные решения системы уравнений (1.3), то есть определить

шесть скалярных функций, являющихся компонентами векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Во многих случаях оказывается удобным введение некоторых вспомогательных функций, называемых электромагнитными потенциалами, через которые определенным образом выражаются амплитуды собственных волн. Введем в рассмотрение электромагнитные потенциалы, и сформулируем относительно них ряд утверждений, следуя [29].

**Определение 1.1.** Вектор-функция  $\Pi(x)$  называется вектором Герца, или поляризационным потенциалом векторного поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , если справедливо представление:

$$\mathbf{E} = (k^2 n_\infty^2 + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) \Pi, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 n_\infty^2 \text{rot}_\beta \Pi. \quad (1.18)$$

**Утверждение 1.3.** Для любого нетривиального решения  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  системы уравнений (1.3) существует поляризационный потенциал  $\Pi$ . Потенциал  $\Pi$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяет уравнению:

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = -\frac{1}{n_\infty^2} (n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}. \quad (1.19)$$

**Определение 1.2.** Скалярные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  называются потенциальными, если справедливы представления:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{-i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ \mathbf{E}_3 &= u, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_2} + \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ \mathbf{H}_3 &= v. \end{aligned} \quad (1.21)$$

**Утверждение 1.4.** Пусть показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ , и выполняются следующие условия:

$$\beta \neq \pm kn_+, \quad \beta \neq \pm kn_\infty. \quad (1.22)$$

Тогда для любого нетривиального решения  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  системы уравнений (1.3) существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ . Потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.23)$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (1.24)$$

**3. Условия на границах раздела сред.** По предположению на контуре  $\Gamma$  показатель преломления  $n$  может иметь разрыв. Условия сопряжения на гладком контуре  $\Gamma$  хорошо известны и заключаются в том, что при переходе через эту границу касательные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  должны быть непрерывны (см., напр., [29]):

$$\nu \times \mathbf{E}^+ = \nu \times \mathbf{E}^-, \quad x \in \Gamma, \quad (1.25)$$

$$\nu \times \mathbf{H}^+ = \nu \times \mathbf{H}^-, \quad x \in \Gamma. \quad (1.26)$$

Здесь символом “ $\times$ ” обозначено векторное произведение векторов.

Сформулируем теперь условия сопряжения, которым должны удовлетворять потенциальные функции  $u(x), v(x)$ , определяющие амплитуды собственных волн диэлектрического волновода с постоянным показателем преломления. Эти условия хорошо известны (см., напр., [80]).

**Утверждение 1.5.** Пусть показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ , и выполняются следующие условия:

$$\beta \neq \pm kn_+, \quad \beta \neq \pm kn_\infty. \quad (1.27)$$

Тогда потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , определяющие по формулам (1.20), (1.21) любые ненулевые комплексные амплитуды  $E$ ,  $H$  собственной волны  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  вида (1.2), удовлетворяют следующим условиям сопряжения:

$$\begin{aligned}
& u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad x \in \Gamma, \\
& \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) = \\
& = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma, \quad (1.28) \\
& \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \right) = \\
& = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Здесь  $\partial u / \partial \nu$  – производная по внешней по отношению к  $\Omega$  нормали к контуру  $\Gamma$ ,  $\partial u / \partial \tau$  – производная по касательной к контуру  $\Gamma$ ,  $u^+$  ( $u^-$ ) – предельное значение функции  $u$  извне (изнутри) контура  $\Gamma$ .

**4. “Парциальные” условия излучения.** Область  $\Omega_\infty$  является неограниченной, следовательно, для того, чтобы полностью сформулировать задачу о собственных волнах диэлектрического волновода, необходимо задать поведение комплексных амплитуд собственных волн  $E$  и  $H$  на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода  $\mathbb{R}^2$ . Это может быть сделано разными способами, что определяет разные решения задачи.

Первым классом собственных волн, который был исследован для цилиндрических диэлектрических волноводов кругового поперечного сечения с вещественным постоянным показателем преломления, были *поверхностные* собственные волны, соответствующие вещественным постоянным распространения (см., напр., [91]). Амплитуды поверхностных собственных волн экспоненциально убывают на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода, и, следовательно, принадлежат пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . Соответствующие задачи на соб-

ственные значения являются самосопряженными. Позже было установлено [64], что поверхностные собственные волны волноводов кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления могут трансформироваться в *вытекающие собственные волны*, постоянные распространения которых находятся на “нефизическом” листе римановой поверхности квадратного корня. Эта трансформация происходит тогда, когда постоянные распространения мигрируют с вещественной оси “физического” листа на “нефизический” лист вследствие изменений неспектральных параметров, то есть геометрических, материальных параметров структуры, или частоты электромагнитных колебаний. В [64] было замечено, что вытекающие собственные волны могут быть исследованы как решения более общей спектральной задачи без требования экспоненциального затухания их амплитуд. Более того, было указано, что амплитуды вытекающих собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов экспоненциально возрастают в плоскости поперечного сечения.

Несмотря на то, что постоянные распространения вытекающих собственных волн лежат на листе римановой поверхности, который называется “нефизическим”, они играют очень важную роль с физической точки зрения при рассмотрении задач возбуждения электромагнитных волн. В частности, известно, что электромагнитные поля, которые могут быть возбуждены в диэлектрическом волноводе, имеют представление в виде конечной суммы поверхностных собственных волн, отвечающих вещественным постоянным распространения, лежащим на “физическом” листе, и интеграла от, так называемых, “волн излучения” (амплитуды которых лишь ограничены на бесконечности и физический смысл которых до сих пор дискутируется) [154], [91], [164]. Не смотря на то, что вытекающие собственные волны сами не являются частью “правильного” спектрального представления поля, во многих случаях интеграл от волн излучения можно аппроксимировать бесконечной суммой вытекающих волн [169],

представляющих ближнее поле возбужденное в цилиндре. Часто сумма вытекающих волн может быть заменена всего одним слагаемым, обеспечивающим простое аналитическое представление поля излучения в ближней зоне. Более того, различные особенности поведения поля излучения в дальней зоне, возбужденного источником в диэлектрическом волноводе конечной длины с вещественным показателем преломления, могут быть интерпретированы в терминах возбуждения вытекающих волн. Вытекающие собственные волны бесконечно длинных волноводов играют важную роль в анализе эффектов излучения и преобразования волн, возникающих в задачах о стыковке [156] и изгибе волноводов [175], а также в задачах излучения при анизотропии волноводов [170], [153]. Некоторые свойства вытекающих собственных волн диэлектрических волноводов, в частности ограниченного поперечного сечения, представлены в [91], [64], [169], [156], [175], [170], [153], [165], [166], [167], [96].

В дополнение к вытекающим собственным волнам в работе [7] было показано, что на “физическом” листе, но вне вещественной оси также существуют комплексные постоянные распространения собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов кругового поперечного сечения с вещественным постоянным показателем преломления. Эти собственные волны получили название *комплексных*. Аналогичные результаты были получены численно для волноводов с произвольным контуром поперечного сечения, показатель преломления которых является непрерывной вещественной функцией во всей плоскости поперечного сечения [143]. Комплексные волны играют важную роль при изучении поведения полей рассеяния в ближней зоне диэлектрических волноводов конечной длины. Важно отметить, что, как было показано в [7], [143], все известные типы собственных волн могут трансформироваться друг в друга вследствие изменения формы волновода, показателей преломления волновода и окружающей среды, а также частоты электромагнитных колебаний. При этом задачи



о поиске комплексных и вытекающих собственных волн в отличие от задач о поиске поверхностных собственных волн не являются самосопряженными. Амплитуды вытекающих собственных волн, естественно, не принадлежат пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , в отличие от амплитуд комплексных и поверхностных волн.

Все это привело к необходимости сформулировать для амплитуд собственных волн произвольного волновода наиболее общие условия излучения, которым удовлетворяли бы все известные решения. Это позволило, в частности, поставить задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в наиболее общем виде. Амплитуды всех известных типов собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода (поверхностных, вытекающих и комплексных) удовлетворяют на бесконечности в плоскости поперечного сечения “парциальным” условиям излучения [86].

Использование парциальных условий излучения в задаче о собственных волнах волновода позволяет рассматривать комплексные постоянные распространения, принадлежащие некоторой римановой поверхности. Для вещественных постоянных распространения, лежащих на главном (“физическом”) листе этой поверхности, эти условия эквивалентны либо классическому условию излучения Зоммерфельда, либо условию экспоненциального затухания на бесконечности. Таким образом, “парциальные” условия, которые в отличие от условия Зоммерфельда применимы для комплексных постоянных распространения, можно рассматривать как обобщение этого условия. “Парциальные” условия можно рассматривать и как аналитическое продолжение условия Зоммерфельда по комплексному параметру (постоянной распространения) с части вещественной оси на соответствующую поверхность Римана.

**Определение 1.3.** Обозначим символом  $\Omega_R$  открытый круг радиуса  $R$ :

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\},$$

пусть  $\Gamma_R$  – граница этого круга, а  $R_0$  – положительная константа, такая, что  $\Omega \subset \Omega_{R_0}$ . Будем говорить, что функции  $E$ ,  $H$ , являющиеся решениями уравнения Гельмгольца (1.16), удовлетворяют “парциальным” условиям излучения, если эти функции для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  разлагаются в ряды следующего вида:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi). \quad (1.29)$$

Здесь  $H_l^{(1)}$  – функции Ханкеля первого рода индекса  $l$  (см., напр., [108]),  $(r, \varphi)$  – полярные координаты точки  $x$ ,

$$\chi_\infty = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}.$$

Для функций  $E$ ,  $H$ , являющихся решениями уравнения Гельмгольца (1.16), ряды (1.29) сходятся абсолютно и равномерно во всякой области вида  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  произвольные числа, удовлетворяющие условию  $R_0 < a < b < \infty$ ; кроме того, указанные ряды можно дифференцировать почленно до любого порядка [8].

Обозначим символом  $\Lambda$  поверхность Римана функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ . Будем разыскивать комплексные постоянные распространения  $\beta \in \Lambda$  собственных волн, амплитуды которых удовлетворяют “парциальным” условиям излучения (1.29). Для того, чтобы более детально обсудить эти условия на бесконечности, мы проанализируем строение поверхности Римана  $\Lambda$  и рассмотрим различные типы собственных волн, отвечающие постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на разных листах этой поверхности.

**5. Поверхность Римана  $\Lambda$ .** Функции Ханкеля  $H_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  являются многозначными функциями комплексного аргумента  $\beta$ . Для того, чтобы представить их, как однозначные аналитические функции, будем рассматривать их определенными на римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ . Это продиктовано тем, что для всех  $l$

функции Ханкеля представимы в виде сумм:

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty r) = c_l^{(1)}(\chi_\infty r) \ln(\chi_\infty r) + R_l^{(1)}(\chi_\infty r), \quad (1.30)$$

где  $c_l^{(1)}(\chi_\infty r)$  и  $R_l^{(1)}(\chi_\infty r)$  – однозначные аналитические функции (см., напр., [108]).

Поверхность Римана  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов, и имеет две точки ветвления  $\beta = \pm kn_\infty$ . В силу того, что функцию

$$\chi_\infty(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$$

саму следует рассматривать, как определенную на двулистной поверхности Римана, поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов римановой поверхности логарифма:  $\Lambda_m$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots$ , каждый из которых делится на два листа римановой поверхности квадратного корня  $\chi_\infty(\beta)$ :  $\Lambda_m^{(1)}$  и  $\Lambda_m^{(2)}$ . Всюду далее будем предполагать, что точки ветвления не принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$ .

Обозначим символом  $\Lambda_0^{(1)}$  главный (“физический”) лист римановой поверхности  $\Lambda$ , который определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}. \quad (1.31)$$

С листом  $\Lambda_0^{(1)}$  соединяется лист  $\Lambda_0^{(2)}$ , который называется “нефизическим” и определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi_\infty(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(2)}. \quad (1.32)$$

Все другие пары листов  $\Lambda_{m \neq 0}^{(1),(2)}$  отличаются от  $\Lambda_0^{(1),(2)}$  сдвигом  $\arg \chi_\infty(\beta)$  на  $2\pi m$  и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} -\pi/2 + 2\pi m < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \\ \text{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(1)}; \\ -\pi/2 + 2\pi m < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \\ \text{Im}(\chi_\infty(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Лист  $\Lambda_0^{(2)}$  соединен с листом  $\Lambda_0^{(1)}$  вдоль разреза, выбранным в соответствии с условием  $\text{Im}(\chi_\infty(\beta)) = 0$  на  $\Lambda_0^{(1)}$ , то есть проходящим по

мнимой оси и интервалу  $(-kn_\infty, kn_\infty)$  вещественной оси. Листы  $\Lambda_{\pm 1}^{(2)}$  соединяются с листом  $\Lambda_0^{(2)}$  вдоль разреза, проходящего по вещественной оси так, что  $|\beta| > kn_\infty$ .

### 6. Поверхностные, комплексные и вытекающие волны.

Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ , а листа  $\Lambda_0^{(2)}$  – символом  $\mathbb{R}_0^{(2)}$ . Пусть  $G$  – объединение двух интервалов на оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}. \quad (1.34)$$

Символом  $C_0^{(1)}$  обозначим множество:

$$C_0^{(1)} = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)}. \quad (1.35)$$

Постоянные распространения  $\beta$  *поверхностных, комплексных и вытекающих* волн принадлежат множествам  $G \subset \Lambda_0^{(1)}$ ,  $C_0^{(1)} \subset \Lambda_0^{(1)}$  и  $\Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ , соответственно.

Функции Ханкеля первого рода имеют следующую асимптотику при  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$  и  $r \rightarrow \infty$  (см., напр., [108]):

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_\infty r}} \exp \left[ i \left( \chi_\infty r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi_\infty r} \right) \right]. \quad (1.36)$$

Таким образом, если  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$ ,  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) \neq 0$ , и функции  $E$ ,  $H$  удовлетворяют “парциальным” условиям излучения, то эти функции удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \exp(i\chi_\infty r) O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.37)$$

Нетрудно видеть, что для поверхностных и комплексных собственных волн  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) > 0$ . Следовательно, их амплитуды  $E$ ,  $H$  экспоненциально убывают на бесконечности как  $\exp(-\operatorname{Im}(\chi_\infty)r)r^{-1/2}$ . Амплитуды  $E$ ,  $H$  вытекающих собственных волн экспоненциально возрастают на бесконечности как  $\exp(-\operatorname{Im}(\chi_\infty)r)r^{-1/2}$  потому что для них  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) < 0$ .

**7. Волны излучения.** Обозначим символом  $D$  множество:

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_\infty \right\}. \quad (1.38)$$

Спектр волн излучения принадлежит области  $D$ , и амплитуды каждой из волн излучения могут быть представлены в виде следующих сумм (см. [154]):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi) + \\ &+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} C_l \\ D_l \end{bmatrix} H_l^{(2)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  и  $H_l^{(2)}$  – функции Ханкеля второго рода индекса  $l$  (см, напр., [108]).

Функции Ханкеля второго рода имеют следующую асимптотику при  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$  и  $r \rightarrow \infty$  (см., напр., [108]):

$$H_l^{(2)}(\chi_\infty r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_\infty r}} \exp \left[ -i \left( \chi_\infty r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi_\infty r} \right) \right]. \quad (1.39)$$

Нетрудно видеть, что для волн излучения  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) = 0$ . Таким образом, их амплитуды удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.40)$$

“Парциальные” условия излучения (1.29) для всех функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (1.16) и всех  $\beta \in D$  эквивалентны условию излучения Зоммерфельда:

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} - i\chi_\infty \right) \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = o \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.41)$$

Это было доказано, например, в [8]. Там же было доказано, что условие (1.41) является более сильным, чем условие (1.40). Следовательно,

амплитуды волн излучения не удовлетворяют “парциальным” условиям излучения (1.29).

В дальнейшем мы докажем, что область  $D$  не может содержать собственных значений спектральных задач о собственных волнах, амплитуды которых удовлетворяют “парциальным” условиям излучения (1.29). Таким образом, в настоящей работе мы не исследуем спектр волн излучения.

**8. Другие типы волн.** Из хорошо известного разложения (см., напр., [108]):

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty \exp(i2\pi m)r) = \alpha_l^{(m)} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) + \\ + \gamma_l^{(m)} H_l^{(2)}(\chi_\infty r), \quad \alpha_l^{(m)}, \gamma_l^{(m)} \neq 0,$$

справедливого для всех  $m \neq 0, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и

$$\beta \in \bigcup_{m \neq 0} \left( \Lambda_m^{(1)} \cup \Lambda_m^{(2)} \right)$$

а также асимптотик (1.36), (1.39) следует, что постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на листах  $\Lambda_m^{(1)}, \Lambda_m^{(2)}, m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , отвечают собственные волны, амплитуды которых представляют собой суммы уходящих на бесконечность и приходящих из бесконечности цилиндрических волн.

Распределение постоянных распространения  $\beta \in \Lambda$  имеет симметрию, которая является следствием эквивалентности между положительным и отрицательным направлениями распространения собственных волн вдоль продольной оси  $Ox_3$ , а также положительным и отрицательным направлениями времени  $t$  (см., напр., [159]). А именно, если  $\beta$  — положительная постоянная распространения, и  $E, H$  — амплитуды векторов электрической и магнитной напряженности соответствующей собственной волны, то  $-\beta$  также является постоянной распространения собственной волны с амплитудами  $-E, H$ . Далее, в силу того, что  $\text{Im } \omega = 0$  и  $\text{Im } n = 0$ , комплексно-сопряженные числа

$\pm\bar{\beta}$  также являются постоянными распространения собственных волн с амплитудами  $[\mp\bar{E}, -\bar{H}]$ . Все эти факты могут быть легко проверены непосредственной подстановкой в дифференциальные уравнения (1.3), условия сопряжения (1.25), (1.26) и условия на бесконечности (1.29). Все упомянутые собственные волны называют *прямыми, обратными, сопряженными и обратно-сопряженными* волнами, соответственно.

## § 2. Скалярное приближение слабонаправляющего волновода

Приведем теперь уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды собственных волн в приближении слабонаправляющего волновода, которое широко применяется для исследования цилиндрических диэлектрических волноводов со слабо меняющимся в плоскости поперечного сечения показателем преломления (см., напр., [91], [12]).

**1. Представления для комплексных амплитуд собственных волн.** В случае волновода со слабо меняющимся показателем преломления  $n$  удобно воспользоваться выражением компонент комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  через составляющие  $H_1$  и  $H_2$ :

$$E_3 = \frac{1}{i\varepsilon\omega} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right), \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.42)$$

$$E_1 = \frac{\mu_0\omega}{\beta} H_2 - \frac{1}{\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.43)$$

$$E_2 = -\frac{\mu_0\omega}{\beta} H_1 - \frac{1}{\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.44)$$

$$H_3 = \frac{-1}{i\beta} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right), \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.45)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$  – диэлектрическая проницаемость. Эти представления легко получить из системы уравнений (1.3), следуя [12].

**2. Дифференциальные уравнения для  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ .** Из системы уравнений (1.3) вытекает (см., напр., [12]), что составляющие  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  для всех  $x$  из  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] \mathbf{H}_1 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \right), \quad (1.46)$$

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] \mathbf{H}_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} \right). \quad (1.47)$$

Вследствие того, что у слабонаправляющего волновода показатель преломления мало меняется в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , правыми частями в системе (1.46), (1.47) можно пренебречь (см., напр., [12]). Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (1.48)$$

**3. Условия сопряжения для  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ .** Построим теперь, следуя [12], условия, которым в приближении слабонаправляющего волновода должны удовлетворять функции  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  на контуре  $\Gamma$ . Из условий сопряжения (1.25), (1.25) на границе  $\Gamma$  для касательных составляющих векторов комплексных амплитуд  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  вытекают следующие условия сопряжения для компонент  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ :

$$\mathbf{H}_1^+ = \mathbf{H}_1^-, \quad \mathbf{H}_2^+ = \mathbf{H}_2^-, \quad x \in \Gamma, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{H}_1^-}{\partial \nu} = \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2^+}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Gamma, \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_2^+}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{H}_2^-}{\partial \nu} = -\nu_1 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2^+}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Gamma. \quad (1.51)$$

Вследствие того, что у слабонаправляющего волновода показатель преломления мало меняется в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , правые части в граничных условиях (1.50), (1.51) можно считать равными нулю [12]. Таким



образом, в приближении слабонаправляющего волновода функции  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют одним и тем же условиям сопряжения на  $\Gamma$ :

$$H_1^+ = H_1^-, \quad H_2^+ = H_2^-, \quad x \in \Gamma, \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} = \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial H_2^+}{\partial \nu} = \frac{\partial H_2^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (1.53)$$

**4. Условия излучения для  $H_1$  и  $H_2$ .** Из представления (1.29) следует, что функции  $H_1$  и  $H_2$  на бесконечности должны удовлетворять “парциальным” условиям излучения, а именно, для всех достаточно больших  $x$ ,  $|x| \geq R_0$ , они должны разлагаться в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} B_{1,l} \\ B_{2,l} \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi). \quad (1.54)$$

Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода функции  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют одному и тому же уравнению Гельмгольца (1.48), одинаковым условиям сопряжения (1.52), (1.53) и одинаковым условиям излучения (1.54) на бесконечности. Следовательно, в рассматриваемом приближении  $H_1$  и  $H_2$  совпадают друг с другом.

Подводя итог, еще раз подчеркнем, что скалярное приближение слабонаправляющего волновода заключается в том, что вместо того, чтобы разыскивать векторы комплексных амплитуд  $E$  и  $H$ , ищется лишь одна скалярная функция  $u = H_1 = H_2$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (1.55)$$

$$u^+ = u^-, \quad x \in \Gamma, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (1.57)$$

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (1.58)$$

Остальные компоненты векторов  $E$  и  $H$  определяются по формулам (1.42) – (1.45).

### § 3. Собственные волны волноводов кругового поперечного сечения

Рассмотрим частный случай диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с функцией  $n$ , принимающей постоянные значения внутри волновода и в окружающей среде. В этом случае исходные спектральные задачи (в полной электродинамической постановке и в приближении слабонаправляющего волновода) методом разделения переменных сводятся к семействам трансцендентных уравнений относительно  $\omega$  и  $\beta$  (см., напр., [91]).

**1. Векторная задача в полной электродинамической постановке.** Пусть  $R$  – радиус волновода,  $n_\infty > 0$  – показатель преломления окружающей среды и  $n_+ > n_\infty$  – показатель преломления волновода. Как было доказано в утверждении 1.4, для любой собственной волны существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , определяющие ее амплитуду. Потенциальные функции удовлетворяют следующим уравнениям Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad |x| < R,$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad |x| > R.$$

где  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ . Применяя для решения этих уравнений метод разделения переменных, получаем разложения:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} c_l \\ d_l \end{bmatrix} J_l(\chi_+ r) \exp(il\varphi), \quad |x| < R, \quad (1.59)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} a_l \\ b_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| > R. \quad (1.60)$$

Здесь  $\chi_+ = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}$ ;  $J_n(\chi_+ r)$  – функции Бесселя степени  $l$  [108]. В этих разложениях учтено, что искомые функции не должны иметь

особенностей, и на бесконечности они удовлетворяют “парциальным” условиям излучения (1.29).

Из разложений (1.59), (1.60) и условий сопряжения (1.28), приходим к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a_l, b_l, c_l, d_l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Коэффициенты матрицы этой системы нелинейно зависят от  $\omega$  и  $\beta$ . Матрица имеет блочно-диагональную структуру, такую, что исходная система распадается на бесконечное количество независимых систем из четырех уравнений. Если при некоторых  $\omega$  и  $\beta$  определитель какой-либо из этих систем обращается в нуль, то она имеет нетривиальное решение, определяющее собственную волну волновода. Из условия равенства нулю соответствующих определителей мы приходим к семейству трансцендентных уравнений для определения параметров  $\omega$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} & \left( n_+^2 \chi_\infty \frac{J'_l(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} + n_\infty^2 \chi_+ \frac{H_l^{(1)' }(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)} \right) \times \\ & \times \left( \chi_\infty \frac{J'_l(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} + \chi_+ \frac{H_l^{(1)' }(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)} \right) = \\ & = \left( \frac{\beta k (n_+^2 - n_\infty^2) l}{\chi_\infty \chi_+ R^2} \right)^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.61)$$

Эти уравнения в теории волноводов носят название характеристических. Качественные свойства спектра могут быть изучены в данном случае на основе анализа характеристических уравнений методами теории функций комплексного переменного с использованием свойств функций Бесселя и Ханкеля.

Важные результаты относительно качественных свойств спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов кругового поперечного сечения были получены в [64] и [7]. В этих статьях было доказано что при  $\omega > 0$  у волноводов кругового сечения наряду с хорошо известными поверхностными собственными волнами (см.,

напр., [91]), отвечающими  $\beta \in G$ , существуют комплексные собственные волны [7], постоянные распространения  $\beta$  которых принадлежат  $C_0^{(1)}$ , и вытекающие собственные волны [64] с  $\beta \in \Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ .

**2. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода.** Рассмотрим теперь задачу для волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  с постоянным показателем преломления  $n_+$  мало отличающегося от показателя преломления окружающей среды  $n_\infty < n_+$ , так, что может быть применено приближение слабонаправляющего волновода. Как было показано в параграфе 2, в этом случае необходимо определить функцию  $u = H_1 = H_2$ , удовлетворяющую внутри круга и вне его уравнениям Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] u = 0, \quad |x| < R,$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] u = 0, \quad |x| > R,$$

а на границе раздела сред условиям сопряжения:

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial r} = \frac{\partial u^-}{\partial r}, \quad |x| = R.$$

Потребуем от функции  $u(x)$ , чтобы она удовлетворяла на бесконечности “парциальным” условиям излучения (1.58).

Поставленная задача решается методом разделения переменных аналогично векторной задаче, рассмотренной в предыдущем пункте. В результате получаем семейство характеристических уравнений для определения параметров  $\omega$  и  $\beta$ :

$$\chi_+ \frac{J_l'(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} = \chi_\infty \frac{H_l^{(1)'}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.62)$$

Подробное изложение различных типов собственных волн, отвечающих различным значениям  $\beta$  можно найти, например в книге [91]. Уравнение (1.62) имеет решения  $\beta$ , лежащие в области  $G$  “физического” листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ , которым отвечают поверхностные собственные волны и решения  $\beta$ , лежащие на “нефизическом”

листе  $\Lambda_0^{(2)}$ , которым отвечают вытекающие собственные волны. Однако, как показано в [91], уравнение (1.62) в отличие от уравнения (1.61) не имеет решений  $\beta$ , лежащих на “физическом” листе  $\Lambda_0^{(1)}$  вне вещественной оси. Другими словами, у слабонаправляющих волноводов кругового поперечного сечения не существует комплексных собственных волн.

# ОБЩИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДОВ С ПОСТОЯННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

## § 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и постоянным показателем преломления близким к показателю преломления окружающей среды. Пусть область поперечного сечения волновода  $\Omega$  ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\Gamma$ . Показатель преломления  $n$  является кусочно-постоянной функцией, а именно, – равен константе  $n_+$  в области  $\Omega$ , а в области  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  – константе  $n_\infty$ ,  $0 < n_\infty < n_+$ . Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  – неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  – заданная частота электромагнитных колебаний. В скалярном приближении слабонаправляющего волновода (см. параграф 2 главы 1) задача сводится к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$\Delta u + \chi_\infty^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad (2.2)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения:

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (2.3)$$

Здесь

$$\chi_+ = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}, \quad \chi_\infty = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2},$$

$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $u^+(u^-)$  – предельное значение функции  $u$  извне (изнутри) контура  $\Gamma$ ;  $\partial u / \partial \nu$  – производная по нормали к контуру  $\Gamma$ , внешней относительно области  $\Omega$ .

Будем предполагать, что функция  $u$  удовлетворяет на бесконечности “парциальным” условиям излучения (1.58), то есть при  $|x| \geq R_0$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда:

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad (2.4)$$

где  $x_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $x_2 = r \sin(\varphi)$ ,  $H_l^{(1)}$  – функции Ханкеля первого рода порядка  $l$ .

Будем разыскивать нетривиальные решения  $u(x)$  задачи (2.1) – (2.4) в классе функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Обозначим это множество функций через  $U$ .

Будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат множеству  $\Lambda$  – пересечению римановых поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_\infty$  функций  $\ln \chi_+(\beta)$  и  $\ln \chi_\infty(\beta)$ , соответственно:

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_\infty. \quad (2.5)$$

Строение поверхности  $\Lambda_\infty$  подробно рассмотрено в параграфе 1 главы 1 (там она была обозначена  $\Lambda$ ). Строение поверхности  $\Lambda_+$  абсолютно аналогично. Пусть

$$\Lambda_0^{(1)} = \Lambda_{+0}^{(1)} \cap \Lambda_{\infty 0}^{(1)}$$

– пересечение главных (“физических”) листов этих поверхностей, определяемых условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_+(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_+(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{+0}^{(1)}, \quad (2.6)$$

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{\infty 0}^{(1)}. \quad (2.7)$$

Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ . Пусть  $G$  – объединение двух интервалов на оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}.$$

Обозначим символом  $D$  множество:

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re}\beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_\infty \right\},$$

символом  $C_0^{(1)}$  – множество:

$$C_0^{(1)} = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re}\beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)},$$

а символом  $B$  – множество:

$$B = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| > kn_+ \right\}.$$

**Определение 2.4.** Ненулевую функцию  $u \in U$ , будем называть собственной функцией задачи (2.1) – (2.4), отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (2.1) – (2.4).

**Теорема 2.1.** На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения задачи (2.1) – (2.4) могут лежать лишь в области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Множество  $\Lambda_0^{(1)}$  является объединением четырех множеств:

$$\Lambda_0^{(1)} = C_0^{(1)} \cup D \cup G \cup B.$$

Докажем, что множества  $C_0^{(1)}$ ,  $D$  и  $B$  не содержат собственных значений задачи (2.1) – (2.4).

Предположим, что  $u$  – собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in D$ . Применяя в областях  $\Omega$  и  $\Omega_R \setminus \bar{\Omega}$ ,  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  (здесь  $\bar{u}$  означает функцию комплексно-сопряженную с  $u$ ) формулу Грина, получаем равенства:

$$\int_{\Omega} (u\Delta\bar{u} - \bar{u}\Delta u)dx = \int_{\Gamma} \left( u^- \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \nu} - \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) dl,$$



$$\int_{\Omega_R \setminus \bar{\Omega}} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx = - \int_{\Gamma} \left( u^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial \nu} - \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right) dl +$$

$$+ \int_{\Gamma_R} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl.$$

При  $\beta \in D$  коэффициенты в уравнениях Гельмгольца (2.1), (2.2) – положительные вещественные числа, следовательно, левые части в двух последних равенствах обращаются в нуль. Складывая левые и правые части этих равенств, и учитывая условия сопряжения (2.3), получаем равенство:

$$\int_{\Gamma_R} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0,$$

Отсюда, используя условие (2.4) и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$  получим:

$$2\pi \chi_\infty R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ H_l^{(1)}(\chi_\infty R) H_l^{(2)'}(\chi_\infty R) - H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] \times$$

$$\times |a_l|^2 = 0.$$

Хорошо известно (см., напр., [108]), что выражение, стоящее в этой сумме в квадратных скобках, от  $l$  не зависит, а именно:

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty R) H_l^{(2)'}(\chi_\infty R) - H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) = \frac{4}{i\pi \chi_\infty R},$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $a_l$  в разложении (2.4) обращаются в нуль. А это значит, что  $u = 0$  при  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . Функция  $u$  удовлетворяет в области  $\Omega_\infty$  уравнению Гельмгольца (2.2) с постоянным коэффициентом, следовательно, является аналитической по  $x$  в  $\Omega_\infty$ . Таким образом  $u = 0$  при  $x \in \Omega_\infty$ ; и  $u^+ = 0$ ,  $\partial u^+ / \partial \nu = 0$  на контуре  $\Gamma$ .

Применим в области  $\Omega$  третью формулу Грина, выражающую решение уравнения (2.1) в  $\Omega$  через предельное значение решения и его

нормальной производной на  $\Gamma$ :

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \left[ u^-(y) \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} \Phi_+(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega, \quad (2.8)$$

где

$$\Phi_+(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|)$$

– фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (2.1). Из этого представления функции  $u(x)$  и условий сопряжения (2.3) заключаем что  $u = 0$  и в области  $\Omega$ . Итак, мы доказали что при  $\beta \in D$  функция  $u$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (2.1) – (2.4). Следовательно, область  $D$  свободна от собственных значений задачи (2.1) – (2.4).

Предположим теперь, что  $u$  – собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$ . Применяя в областях  $\Omega$  и  $\Omega_R \setminus \bar{\Omega}$ ,  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  формулу Грина, получаем равенства:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma} \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} dl,$$

$$\int_{\Omega_R \setminus \bar{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_R \setminus \bar{\Omega}} \bar{u} \Delta u dx = - \int_{\Gamma} \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} dl + \int_{\Gamma_R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl,$$

где

$$\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2)^T.$$

Сложим левые и правые части этих равенств, учитывая условия сопряжения (2.3), и устремим  $R$  к бесконечности. При этом надо заметить, что согласно асимптотике (1.36), с. 44, все подынтегральные выражения во втором равенстве, зависящие от  $R$ , экспоненциально убывают на бесконечности при любом  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$ . В результате

получим следующее уравнение:

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} (\beta^2 - k^2 n^2) |u|^2 dx = 0. \quad (2.9)$$

При вещественных  $\beta$ , лежащих в бесконечном интервале  $B$ , равенству (2.9) удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ , в силу того, что

$$\beta^2 - k^2 n^2 > 0$$

при  $\beta \in B$  и  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

Возьмем от левой и правой частей равенства (2.9) мнимую часть.

Получим:

$$\operatorname{Im}(\beta^2) \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} |u|^2 dx = 2\operatorname{Re}(\beta)\operatorname{Im}(\beta) \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} |u|^2 dx = 0.$$

Заметим, что ни мнимая, ни вещественная части числа  $\beta \in C_0^{(1)}$  не обращаются в нуль, следовательно, при  $\beta \in C_0^{(1)}$  последнему равенству также удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ .

Таким образом, мы доказали что при любом  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$  функция  $u$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (2.1) – (2.4). Следовательно, области  $B$  и  $C_0^{(1)}$  также свободны от собственных значений задачи (2.1) – (2.4).  $\square$

Отметим, что доказать отсутствие собственных значений  $\beta$  задачи (2.1) – (2.4) в области  $G$  с помощью равенства (2.9) нельзя в силу того, что

$$\beta^2 - k^2 n^2 < 0$$

при  $\beta \in G$  и  $x \in \Omega_+$ . Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны ( $u$  экспоненциально убывает при  $r \rightarrow \infty$ ), существование которых мы докажем в параграфе 1 главы 4. Теорема 2.1 обобщает результаты [91] о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе анализа характеристического уравнения метода разделения переменных (см. пункт 2 параграфа 3 главы 1).

**2. Нелинейная спектральная задача для системы слабо-сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода.** Сведем теперь исходную задачу (2.1) – (2.4) методами теории потенциалов к спектральной задаче для некоторой интегральной оператор-функции. Большинство результатов теории потенциалов, которые мы будем использовать, являются классическими и хорошо известны. Их доказательства можно найти, например, в монографиях [2], [68]. Возможно, менее традиционно изучение поведения потенциалов на бесконечности, как функций удовлетворяющих “парциальным” условиям излучения. Аналогичные построения содержатся в книгах [37], [168].

Введем в рассмотрение функции:

$$\Phi_+(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.10)$$

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|). \quad (2.11)$$

Здесь

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$\chi_+(\beta) = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}, \quad \chi_\infty(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2},$$

параметр  $\beta$  предполагается комплексным, принадлежащим множеству  $\Lambda$ , определенному формулой (2.5). Напомним [108], что

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z),$$

где  $J_0(z)$  – функция Бесселя нулевого порядка,  $N_0(z)$  – функция Неймана нулевого порядка,

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2},$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k} \Psi(k+1)}{(k!)^2},$$

$$\Psi(n+1) = -C + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \Psi(1) = -C,$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772156649 \dots,$$

где  $\Psi$  – пси-функция,  $C$  – константа Эйлера.

Функции (2.10), (2.11) удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \Phi_+(\beta; x, y) + \chi_+^2(\beta) \Phi_+(\beta; x, y) = 0, \quad (2.12)$$

$$\Delta \Phi_\infty(\beta; x, y) + \chi_\infty^2(\beta) \Phi_\infty(\beta; x, y) = 0, \quad (2.13)$$

как функции переменной  $x$  при любой фиксированной точке  $y \neq x$ , соответственно. При  $y = x$  они имеют логарифмическую особенность. Функции (2.10) и (2.11) являются фундаментальными решениями уравнений (2.12) и (2.13).

С помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [79], с. 201) легко показать, что функция  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  при любых  $\beta \in \Lambda$  и  $y \in \mathbb{R}^2$  удовлетворяет условию (2.4):

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|) = \quad (2.14)$$

$$= \frac{i}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\chi_\infty r(y)) \exp(-il\varphi(y)) H_l^{(1)}(\chi_\infty r(x)) \exp(il\varphi(x)),$$

где  $r(x)$ ,  $\varphi(x)$  – полярные координаты точки  $x$ . Аналогичному условию удовлетворяет функция  $\Phi_+(\beta; x, y)$ , определенная формулой (2.10):

$$\Phi_+(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|) = \quad (2.15)$$

$$= \frac{i}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\chi_+ r(y)) \exp(-il\varphi(y)) H_l^{(1)}(\chi_+ r(x)) \exp(il\varphi(x)).$$

Отметим, что в отличие от функций (2.10) и (2.11), другая пара фундаментальных решений уравнений Гельмгольца (2.12) и (2.13), а именно функции

$$\Phi_+^{(2)}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.16)$$

$$\Phi_{\infty}^{(2)}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\chi_{\infty}(\beta) |x - y|), \quad (2.17)$$

где  $H_0^{(2)}$  – функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, “парциальным” условиям излучения (2.14), (2.15) не удовлетворяют.

Будем обозначать  $C^{0,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , пространство непрерывных по Гельдеру функций, то есть линейное пространство всех комплекснозначных функций  $f$ , определенных на контуре  $\Gamma$  и удовлетворяющих условию:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{\alpha},$$

где  $K$  – положительная постоянная, зависящая от  $f$ , но не зависящая от  $x$  и  $y$ . Будем обозначать  $C^{1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , пространство непрерывно дифференцируемых по Гельдеру функций – линейное пространство всех комплекснозначных функций  $f$ , определенных на контуре  $\Gamma$ , таких, что их первые производные существуют и принадлежат  $C^{0,\alpha}$ . Как известно, пространство непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}$  и пространство непрерывно дифференцируемых по Гельдеру функций  $C^{1,\alpha}$  являются банаховыми пространствами с нормами:

$$\|f\|_{\alpha} = \max_{x \in \Gamma} |f(x)| + \sup_{x, y \in \Gamma, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}}$$

и

$$\|f\|_{1,\alpha} = \max_{x \in \Gamma} |f(x)| + \max_{x \in \Gamma} |f'(x)| + \sup_{x, y \in \Gamma, x \neq y} \frac{|f'(x) - f'(y)|}{|x - y|^{\alpha}}$$

соответственно. Будем предполагать, что контур  $\Gamma$  задан параметрически  $r = r(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Функции из  $C^{0,\alpha}$  и  $C^{1,\alpha}$  будем рассматривать также, как непрерывные по Гельдеру и непрерывно дифференцируемые по Гельдеру  $2\pi$ -периодические функции параметра  $t$ .

Решения задачи (2.1) – (2.4) будем разыскивать в виде потенциалов простого слоя:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi_{+}(\beta; x, y) f_{+}(y) dl(y), \quad x \in \Omega, \quad (2.18)$$

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) f_{\infty}(y) dl(y), \quad x \in \Omega_{\infty}, \quad (2.19)$$

с плотностями  $f_+$  и  $f_{\infty}$ , принадлежащими пространству непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}$ .

При всех  $\beta \in \Lambda$  и  $f_+, f_{\infty} \in C^{0,\alpha}$  функция  $u$ , задаваемая равенствами (2.18), (2.19), удовлетворяет требуемым свойствам гладкости и уравнениям (2.1), (2.2). С помощью разложения (2.14) нетрудно убедиться, что функция  $u$  удовлетворяет условию (2.4). А именно, при  $|x| \geq R_0$  функция  $u$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда:

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r(x)) \exp(il\varphi(x)),$$

где

$$a_l = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} J_l(\chi_{\infty} r(y)) \exp(-il\varphi(y)) f_{\infty}(y) dl(y).$$

Используя граничные условия (2.3) и предельные свойства потенциалов простого слоя и их нормальных производных, получаем нелинейную спектральную задачу для системы интегральных уравнений:

$$\mathcal{A}^{(1,1)}(\beta) f_+ + \mathcal{A}^{(1,2)}(\beta) f_{\infty} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{A}^{(2,1)}(\beta) f_+ + \mathcal{A}^{(2,2)}(\beta) f_{\infty} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.21)$$

Здесь

$$\left( \mathcal{A}^{(1,1)}(\beta) f_+ \right) (x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(1,2)}(\beta) f_{\infty} \right) (x) = - \int_{\Gamma} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) f_{\infty}(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(2,1)}(\beta) f_+ \right) (x) = \frac{1}{2} f_+(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(2,2)}(\beta) f_\infty \right) (x) = \frac{1}{2} f_\infty(x) - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_\infty(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Переходя к переменной интегрирования  $t$  параметрического определения контура  $\Gamma$ , выделяя явно логарифмическую особенность ядер  $\Phi_+(x, y)$ ,  $\Phi_\infty(x, y)$ , преобразуем систему (2.20), (2.21) к виду:

$$Lp^{(1)} + B^{(1,1)}(\beta)p^{(1)} + B^{(1,2)}(\beta)p^{(2)} = 0, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.22)$$

$$p^{(2)} + B^{(2,1)}(\beta)p^{(1)} + B^{(2,2)}(\beta)p^{(2)} = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.23)$$

Здесь

$$p^{(1)}(\tau) = (f_+(y) - f_\infty(y)) |r'(\tau)|, \quad p^{(2)}(\tau) = f_+(y) + f_\infty(y),$$

$$Lp^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| p^{(1)}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$B^{(i,j)}(\beta)p^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(i,j)}(\beta; t, \tau) p^{(j)}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$h^{(1,1)}(\beta; t, \tau) = 2\pi \left( G^{(1,1)}(\beta; t, \tau) + G^{(1,2)}(\beta; t, \tau) \right),$$

$$h^{(1,2)}(\beta; t, \tau) = 2\pi \left( G^{(1,1)}(\beta; t, \tau) - G^{(1,2)}(\beta; t, \tau) \right) |r'(\tau)|,$$

$$h^{(2,1)}(\beta; t, \tau) = 4\pi \left( G^{(2,1)}(\beta; t, \tau) + G^{(2,2)}(\beta; t, \tau) \right),$$

$$h^{(2,2)}(\beta; t, \tau) = 4\pi \left( G^{(2,1)}(\beta; t, \tau) - G^{(2,2)}(\beta; t, \tau) \right) |r'(\tau)|,$$

$$G^{(1,1)}(\beta; t, \tau) = \Phi_+(\beta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|,$$

$$G^{(1,2)}(\beta; t, \tau) = \Phi_\infty(\beta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|,$$

$$G^{(2,1)}(\beta; t, \tau) = \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$G^{(2,2)}(\beta; t, \tau) = \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$x \equiv x(t), \quad y \equiv y(\tau).$$



Известно (см., напр., [15], с. 10), что линейный непрерывный оператор  $L : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$  непрерывно обратим. При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы

$$\begin{aligned} B^{(2,1)}(\beta), B^{(2,2)}(\beta) &: C^{0,\alpha} \rightarrow C^{0,\alpha}, \\ B^{(1,1)}(\beta), B^{(1,2)}(\beta) &: C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha} \end{aligned}$$

вполне непрерывны в силу того, что ядра  $G^{(2,1)}, G^{(2,2)}$ , не имеют особенности при  $t = \tau$ , а ядра  $G^{(1,1)}, G^{(1,2)}$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми по  $t$  функциями  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . В этом нетрудно убедиться, используя свойства функций Ханкеля. Аналогичные результаты получены, например, в [73], с. 93, [151], с. 211.

Таким образом, система (2.22), (2.23) эквивалентна операторному уравнению:

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0, \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} w &= \left( w^{(1)}, w^{(2)} \right), \\ w^{(1)} &= Lp^{(1)} \in C^{1,\alpha}, \quad w^{(2)} = p^{(2)} \in C^{0,\alpha}, \end{aligned}$$

вполне непрерывный оператор  $B$ , действующий в банаховом пространстве

$$W = C^{1,\alpha} \times C^{0,\alpha},$$

определяется при помощи равенства:

$$Bw = \begin{bmatrix} B^{(1,1)}L^{-1} & B^{(1,2)} \\ B^{(2,1)}L^{-1} & B^{(2,2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$I$  – единичный оператор в  $W$ .

Положим  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

**Определение 2.5.** Оператор-функция  $A(\beta)$  называется голоморфной в точке  $\beta_0 \in \Lambda$ , если существует такое  $p > 0$ , что при любом  $\beta$ ,  $|\beta - \beta_0| < p$ , оператор  $A(\beta) : W \rightarrow W$  допускает разложение в

сходящийся по норме операторов ряд:

$$A(\beta) = A(\beta_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta - \beta_0)^m A_m.$$

**Теорема 2.2.** *При каждом фиксированном*

$$(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$$

*оператор  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty) : W \rightarrow W$  фредгольмов. При каждом фиксированном  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ . Оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу полной непрерывности оператора  $B(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$ , при любом  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$  оператор  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  фредгольмов. Используя известные свойства функций Ханкеля (см., напр., [79]), нетрудно убедиться в том, что для каждой точки  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  функции  $h^{(i,j)}(\beta; \omega, n_+, n_\infty; t, \tau)$  аналитические по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывны по  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ . Отсюда следует (см. [37], с. 71), что при каждом фиксированном значении  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ , и, что оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .  $\square$

Таким образом, задача (2.24) является спектральной задачей для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

**Определение 2.6.** Ненулевую функцию  $w \in W$  будем называть собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение (2.24). Обозначим  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : W \rightarrow W\}$  – множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$ ,  $\sigma(A) = \Lambda \setminus \rho(A)$  – множество сингулярных точек оператора  $A(\beta)$  (это множество называют также характеристическим).

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Исследуем теперь эквивалентность задач (2.1) – (2.4) и (2.24).

**Теорема 2.3.** *Если  $w \in W$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то функция  $u$ , определяемая равенствами (2.18), (2.19), где  $\beta = \beta_0$ ,*

$$f_+ = w^{(2)}/2 + L^{-1}w^{(1)}/(2|r'|), \quad (2.26)$$

$$f_\infty = w^{(2)}/2 - L^{-1}w^{(1)}/(2|r'|), \quad (2.27)$$

*принадлежит множеству  $U$  и является собственной функцией задачи (2.1) – (2.4), отвечающей собственному значению  $\beta_0$ . Любая собственная функция  $u \in U$  задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя (2.18), (2.19) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_+$ ,  $f_\infty$ , соответственно. При этом функция*

$$w = (L[(f_+ - f_\infty)|r'|], f_+ + f_\infty) \in W$$

*является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .*

В связи с тем, что доказательство этой теоремы достаточно объемно предварим его изложением краткой схемы. Идея доказательства первого утверждения теоремы 2.3 базируется на результате [94] о том, что если потенциал простого слоя равен нулю, то его плотность также равна нулю. Этот результат распространен на случай потенциалов, удовлетворяющих “парциальным” условиям излучения. При этом существенным образом используются известные теоремы единственности решений внешних задач Дирихле и Неймана для двумерного уравнения Гельмгольца с комплексным коэффициентом [77]. Установленные свойства потенциала позволяют заключить, что если

при некотором значении  $\beta_0$  задача (2.1) – (2.4) имеет лишь тривиальное решение, то оператор-функция  $A(\beta)$  не может иметь собственной функции, отвечающей тому же самому характеристическому значению  $\beta_0$ . Отсюда непосредственно вытекает требуемый результат.

Доказательство того, что любая собственная функция  $u \in U$  задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями проводится на основе теорем единственности решений внешних и внутренних задач Дирихле и Неймана и отмеченных выше свойств потенциалов простого слоя. Из представимости собственных функций задачи (2.1) – (2.4) в виде потенциалов простого слоя непосредственно вытекает справедливость последнего утверждения теоремы 2.3.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем первое утверждение теоремы 2.3. Прежде всего заметим, что если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.18), равен нулю в  $\Omega$ , то его плотность  $f_+ = 0$  на  $\Gamma$ . Действительно, предположим, что потенциал  $u = 0$  в  $\Omega$ . Следовательно, в силу непрерывности потенциала простого слоя функция  $u = 0$  на  $\Gamma$ . Потенциал  $u$  непрерывен в  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируем в  $\Omega_\infty$  и является решением следующей задачи:

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty,$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_+ r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0.$$

В [77] доказано что при  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  (то есть при  $-\pi/2 < \arg \chi_+ < 3\pi/2$  и  $\text{Im}(\chi_+) \geq 0$ ) эта задача имеет лишь тривиальное решение. Используя теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя:

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u^-(x)}{\partial \nu} = -f_+(x), \quad x \in \Gamma,$$

получаем, что  $f_+ = 0$  на  $\Gamma$ .

Если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.19), равен нулю в  $\Omega_\infty$ , то его плотность  $f_\infty = 0$  на  $\Gamma$ . Действительно, предположим, что потенциал  $u = 0$  в  $\Omega_\infty$ . Следовательно, в силу непрерывности потенциала простого слоя  $u = 0$  на  $\Gamma$ . Потенциал  $u$  непрерывен в  $\bar{\Omega}$ , дважды непрерывно дифференцируем в  $\Omega$  и является решением следующей задачи:

$$\Delta u + \chi_\infty^2 u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma.$$

При  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$  коэффициент  $\chi_\infty^2$  принимает либо комплексное, либо отрицательное значение, следовательно, эта задача имеет лишь тривиальное решение. Используя теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя, получаем, что  $f_\infty = 0$  на  $\Gamma$ .

Предположим теперь, что  $w \in W$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ . Функции  $f_+$ ,  $f_\infty$ , определяемые равенствами (2.26), (2.27) принадлежат пространству  $C^{0,\alpha}$ . Следовательно, функция  $u$ , представленная в виде потенциалов простого слоя (2.18), (2.19), с плотностями  $f_+$ ,  $f_\infty$ , принадлежит множеству  $U$  и удовлетворяет условиям (2.1) – (2.4). Функция  $u$  не может быть нулевой, так как в силу доказанного выше, в этом случае плотности  $f_+$ ,  $f_\infty$  также были бы равны нулю, и, следовательно,

$$w = (L[(f_+ - f_\infty)|r'|], f_+ + f_\infty) = 0,$$

что противоречит предположению теоремы о том, что  $w$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ . Таким образом, функция  $u$  является собственной функцией задачи (2.1) – (2.4), отвечающей собственному значению  $\beta$ .

Докажем теперь, что любая собственная функция  $u$  задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)}$ , может быть

представлена в виде потенциалов простого слоя (2.18), (2.19) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_+$ ,  $f_\infty$ , соответственно. Отсюда непосредственно будет следовать, что, если  $u$  является собственной функцией задачи (2.1) – (2.4), отвечающей собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)}$ , то указанные плотности удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.20), (2.21), где  $\beta = \beta_0$ . Плотности  $f_+$ ,  $f_\infty$  не могут одновременно быть тождественны нулю, так как в этом случае  $u \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . Следовательно,

$$w = (L((f_+ - f_\infty)|r'|), f_+ + f_\infty) \in W$$

является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

Покажем, что если для некоторого  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  существует собственная функция  $u \in U$  задачи (2.1) – (2.4), то  $u$  и  $\partial u / \partial \nu$  не обращаются тождественно в нуль на контуре  $\Gamma$ .

Предварительно заметим, что поскольку функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega$ , непрерывна, непрерывно дифференцируема в  $\bar{\Omega}$  и является решением уравнения (2.1), для любого значения  $\beta \in \Lambda$  справедлива формула Грина (2.8). Поскольку функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega_\infty$ , непрерывна, непрерывно дифференцируема в  $\bar{\Omega}_\infty$ , является решением уравнения (2.2) и удовлетворяет условию (2.4), для любого  $\beta \in \Lambda$  справедлива формула Грина:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left[ u^+(y) \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu(y)} \Phi_\infty(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega_\infty. \quad (2.28)$$

В справедливости формулы Грина (2.28) легко убедиться с помощью известного равенства (см. [37], с. 35; [163]; [8]):

$$\int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial u(y)}{\partial r(y)} \Phi_\infty(\beta; x, y) - \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial r(y)} u(y) dy \right) = 0, \quad R \geq R_0,$$

имеющего место для любого  $\beta \in \Lambda$  и функции  $u$ , удовлетворяющей условию (2.4).

Итак, докажем, что если существует собственная функция  $u \in U$  задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , то функция  $\partial u / \partial \nu$  не обращается тождественно в нуль на  $\Gamma$ . Для доказательства этого факта предположим противное. Тогда решение задачи (2.1) – (2.4) должно удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \Delta u + \chi_\infty^2 u &= 0, \quad x \in \Omega_\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \end{aligned}$$

При  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  (то есть при  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$ ,  $\text{Im}(\chi_\infty) \geq 0$ ) эта задача имеет лишь тривиальное решение [77]. Из формулы Грина (2.8) и условий сопряжения (2.3) заключаем, что  $u = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Если существует собственная функция  $u \in U$  задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , то  $u$  не обращается тождественно в нуль на контуре  $\Gamma$ . Действительно, если предположить противное, то решение задачи (2.1) – (2.4) должно удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \Delta u + \chi_\infty^2 u &= 0, \quad x \in \Omega_\infty, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \end{aligned}$$

В статье [77] доказано, что при  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  эта задача также имеет лишь тривиальное решение. Из формулы Грина (2.8) и условий сопряжения (2.3) заключаем, что  $u = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Покажем теперь, что если  $u \in U$  – собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , то функция  $\partial u / \partial \nu \in C^{0,\alpha}$ . Возьмем от выражений (2.8) и (2.28) производную

по  $\nu$  и перейдем к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\Gamma$ . Учитывая условия сопряжения (2.3) и используя предельные свойства потенциалов простого и двойного слоя, получаем интегральное соотношение, связывающие функции  $u(x)$  и  $\partial u(x)/\partial \nu$  на  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = & \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_{+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} (\Phi_{\infty}(\beta; x, y) - \Phi_{+}(\beta; x, y)) dl(y), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что ядро

$$\frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial \Phi_{+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)}$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ ; ядро

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_{+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} \right)$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \{\Gamma \times \Gamma\} \setminus \{x = y\}$  и имеет особенность порядка  $\ln |x - y|$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . По предположению  $u$  непрерывна и непрерывно дифференцируема в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_{\infty}$ . Следовательно,  $u \in C^{0,\alpha}$  на контуре  $\Gamma$  и  $\partial u/\partial \nu$  непрерывна на  $\Gamma$ . Из представления (2.29) и известных свойств интегральных операторов со слабо сингулярным ядром (см., напр., теорему 2.7 [68]) следует, что функция  $\partial u/\partial \nu \in C^{0,\alpha}$ .

Докажем, что если  $u \in U$  – собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , то  $u \in C^{1,\alpha}$  на контуре  $\Gamma$ . Переходя в выражении (2.8) к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\Gamma$  и используя предельные свойства потенциалов простого слоя, получаем интегральное соотношение, связывающие функции  $u(x)$  и  $\partial u(x)/\partial \nu$  на  $\Gamma$ :

$$\frac{1}{2}u(x) = - \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial \Phi_{+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} dl(y) + \quad (2.30)$$



$$+ \int_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \Phi_+(\beta; x, y) dl(y), \quad x \in \Gamma.$$

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что функция

$$\frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)}$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ ; функция  $\Phi_+(\beta; x, y)$  является непрерывной функцией

$$(x, y) \in \{\Gamma \times \Gamma\} \setminus \{x = y\}$$

и имеет особенность порядка  $\ln|x - y|$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . По предположению  $u$  непрерывна и непрерывно дифференцируема в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ . Следовательно,  $u \in C^{0,\alpha}$  на контуре  $\Gamma$ . В силу доказанного выше  $\partial u / \partial \nu \in C^{0,\alpha}$ . Из представления (2.29) и известных свойств интегральных операторов, определяемых как прямые значения потенциалов простого и двойного слоя на контуре  $\Gamma$  (см., напр., теоремы 2.30 и 2.31 [68]) следует, что  $u \in C^{1,\alpha}$  на контуре  $\Gamma$ .

Докажем теперь, что собственная функция  $u \in U$  задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , представима в области  $\Omega_\infty$  в виде потенциала простого слоя (2.19) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_\infty$ . В силу доказанного выше нормальная производная функции  $u$  не равна тождественно нулю и непрерывна по Гельдеру на контуре  $\Gamma$ . Обозначим  $\partial u(x) / \partial \nu = g(x)$ ,  $x \in \Gamma$ . Функция  $u$  должна удовлетворять, таким образом, следующим условиям:

$$\Delta u + \chi_\infty^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad x \in \Gamma, \quad (2.32)$$

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0, \quad (2.33)$$

где  $g \in C^{0,\alpha}$ .

Будем разыскивать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя (2.19) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_\infty$ . Переходя в (2.19) к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\Gamma$ , получаем интегральное уравнение:

$$-\frac{1}{2}f_\infty(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial\nu(x)} f_\infty(y) dl(y) = g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.34)$$

Покажем теперь, что однородное уравнение, соответствующее (2.34), для любого  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$  имеет лишь тривиальное решение. В статье [77] доказано, что при  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  (то есть при  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$ ,  $\text{Im}(\chi_\infty) \geq 0$ ) и  $g = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , однородная задача Неймана (2.31) – (2.33) имеет лишь тривиальное решение. Разыскивая решение однородной задачи Неймана (2.31) – (2.33) при  $g = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , в виде потенциала простого слоя (2.19) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_\infty$ , получаем однородное уравнение, соответствующее (2.34). Это уравнение может иметь лишь тривиальное решение. Действительно, если предположить обратное, то представление (2.19) даст нетривиальное решение однородной задачи Неймана. Потому что, как было доказано выше, если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.19), равен нулю в  $\Omega_\infty$ , то его плотность  $f_\infty = 0$  на контуре  $\Gamma$ .

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что функция

$$\frac{\partial\Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial\nu(x)}$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$ , а ее производная по  $x$  является непрерывной функцией  $(x, y) \in \{\Gamma \times \Gamma\} \setminus \{x = y\}$  и имеет особенность порядка  $\ln|x - y|$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . Следовательно, интегральный оператор в (2.34) является вполне непрерывным оператором, действующим в пространстве  $C^{0,\alpha}$ . В силу альтернативы Фредгольма имеем, что для любой правой части  $g \in C^{0,\alpha}$  уравнение (2.34) имеет решение  $f_\infty \in C^{0,\alpha}$ . Таким образом, любая собствен-

ная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , представима в области  $\Omega_\infty$  в виде потенциала простого слоя (2.19) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_\infty$ .

Покажем теперь, что любая собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , представима в области  $\Omega$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ .

Рассмотрим две внутренние задачи — однородную задачу Дирихле:

$$\begin{aligned}\Delta u + \chi_+^2 u &= 0, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma,\end{aligned}$$

и однородную задачу Неймана:

$$\begin{aligned}\Delta u + \chi_+^2 u &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \Gamma.\end{aligned}$$

На  $\Lambda_0^{(1)} \setminus D$  коэффициент  $\chi_+^2$  принимает положительные значения при всех  $\beta \in G$ , и у этих задач могут существовать нетривиальные решения. Обозначим  $\sigma(D^{(+)})$  и  $\sigma(N^{(+)})$  множества собственных чисел задач Дирихле и Неймана соответственно. Как известно, эти множества не пересекаются,  $\sigma(D^{(+)}) \cap \sigma(N^{(+)}) = \emptyset$ .

Докажем, что если  $u \in U$  – собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(N^{(+)})$ ), то функция  $u$  представима в области  $\Omega$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ . В силу доказанного выше, при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  функция  $\partial u / \partial \nu$  не равна тождественно нулю и непрерывна по Гельдеру на контуре  $\Gamma$ . Обозначим  $\partial u(x) / \partial \nu = g(x)$ ,  $x \in \Gamma$ . Функция  $u$  должна удовлетворять, таким образом, условиям:

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad x \in \Gamma, \quad (2.36)$$

где  $g \in C^{0,\alpha}$ .

Будем разыскивать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ . Переходя в (2.18) к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\Gamma$ , получаем интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2}f_+(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y) = g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.37)$$

Покажем теперь, что однородное уравнение, соответствующее (2.37), для любого  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(N^{(+)})$ ) имеет лишь тривиальное решение. Однородная задача Неймана (2.35), (2.36) при

$$\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(N^{(+)})$$

и  $g = 0, x \in \Gamma$ , имеет лишь тривиальное решение. Разыскивая решение этой однородной задачи Неймана в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ , получаем однородное уравнение, соответствующее (2.37). Это уравнение может иметь лишь тривиальное решение. Действительно, если предположить обратное, то представление (2.18) даст нетривиальное решение однородной задачи Неймана. Потому что, как было доказано выше, если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.18), равен нулю в  $\Omega$ , то его плотность  $f_+ = 0$  на  $\Gamma$ .

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что функция

$$\frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)}$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$ , а ее производная по  $x$  является непрерывной функцией  $(x, y) \in \{\Gamma \times \Gamma\} \setminus \{x = y\}$  и имеет особенность порядка  $\ln|x - y|$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . Следовательно, интегральный оператор в (2.37) является вполне непрерывным оператором, действующим в пространстве  $C^{0,\alpha}$ . В силу альтернативы

Фредгольма имеем, что для любой правой части  $g \in C^{0,\alpha}$  уравнение (2.37) имеет решение  $f_+ \in C^{0,\alpha}$ . Таким образом, любая собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(N^{(+)})$ ), представима в области  $\Omega$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ .

Докажем теперь, что если  $u \in U$  – собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению

$$\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(D^{(+)}) ,$$

то функция  $u$  представима в области  $\Omega$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ . В силу доказанного выше, при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  функция  $u$  не равна тождественно нулю и непрерывно дифференцируема по Гельдеру на контуре  $\Gamma$ . Обозначим  $u(x) = g(x)$ ,  $x \in \Gamma$ . Функция  $u$  должна удовлетворять, таким образом, условиям:

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.38)$$

$$u = g, \quad x \in \Gamma, \quad (2.39)$$

где  $g \in C^{1,\alpha}$ .

Будем разыскивать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ . Переходя в (2.18) к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\Gamma$ , получаем интегральное уравнение:

$$\int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y) = g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.40)$$

Переходя к переменной интегрирования  $t$  параметрического определения контура  $\Gamma$ , выделяя логарифмическую особенность ядра, запишем это уравнение в виде:

$$Lp + B(\beta)p = f, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.41)$$

где

$$\begin{aligned}
Lp &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \\
B(\beta)p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\beta; t, \tau) p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \\
h(\beta; t, \tau) &= \Phi_+(\beta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|, \\
p(t) &= f_+(x) |r'(t)| \in C^{0,\alpha}, \quad g(t) \in C^{1,\alpha}, \\
x &\equiv x(t), \quad y \equiv y(\tau).
\end{aligned}$$

Известно (см., напр., [15], с. 10), что оператор  $L : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$  непрерывно обратим и, следовательно, если оператор  $B : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$  вполне непрерывен и однородное уравнение, соответствующее (2.41), имеет только нулевое решение, то оператор  $A \equiv L + B : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$  непрерывно обратим.

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что функция  $h(\beta; t, \tau)$  является дважды непрерывно дифференцируемой по  $t$  функцией  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . Следовательно, интегральный оператор  $B$  является вполне непрерывным оператором, действующим из пространства  $C^{0,\alpha}$  в  $C^{1,\alpha}$ .

Покажем теперь, что однородное уравнение, соответствующее (2.41), для любого  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(D^{(+)})$ ) имеет лишь тривиальное решение. Однородная задача Дирихле (2.38), (2.39) при

$$\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(D^{(+)})$$

и  $g = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , имеет лишь тривиальное решение. Разыскивая решение однородной задачи Дирихле (2.38), (2.39) при  $g = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ , получаем однородное уравнение, соответствующие (2.41). Это уравнение может иметь лишь тривиальное решение. Действительно, если предположить обратное, то представление (2.18) даст нетривиальное решение однородной задачи Дирихле. Поскольку, как

было доказано выше, если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.18), равен нулю в  $\Omega$ , то его плотность  $f_+ = 0$  на  $\Gamma$ .

Имеем теперь, что для любой правой части  $g \in C^{1,\alpha}$  уравнение (2.41) имеет решение  $f_+ \in C^{0,\alpha}$ . Таким образом, любая собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(D^{(+)})$ ), представима в области  $\Omega$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ .

В силу того, что множества  $\sigma(D^{(+)})$  и  $\sigma(N^{(+)})$  не пересекаются, из доказанного выше непосредственно следует, что любая собственная функция задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению

$$\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D,$$

представима в области  $\Omega$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ .

Подведем итог доказанному. Любая собственная функция  $u \in U$  задачи (2.1) – (2.4), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя (2.18), (2.19) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_+$ ,  $f_\infty$ , соответственно. Из построения оператор-функции  $A(\beta)$  очевидным образом вытекает, что функция

$$w = (L((f_+ - f_\infty)|r'|), f_+ + f_\infty) \in W$$

является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .  $\square$

**Теорема 2.4.** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (2.24), не пусто, а именно,  $C_0^{(1)} \cup B \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество  $\sigma(A)$  оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зави-*

сит от параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_+$ ,  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$  при каждом фиксированном  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ , установленной в теореме 2.2, теоремы 2.1 о локализации собственных значений задачи (2.1) – (2.4) и теоремы 2.3 о связи решений задач (2.1) – (2.4) и (2.24), оператор  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  обратим для любых

$$(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in (C_0^{(1)} \cup B) \times \mathbb{R}_+^3.$$

Таким образом, справедливость настоящей теоремы непосредственно следует из установленных в теореме 2.2 свойств оператор функции  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$ , теоремы И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна [19] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор функции  $A(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы S. Steinberg [173] о поведении характеристических значений такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $\omega$  в случае, если оператор-функция является совместно непрерывной функцией  $\beta$  и  $\omega$ . Отметим, что теорема S. Steinberg справедлива для частного случая, когда оператор-функция  $A(\beta, \omega)$  имеет вид  $A(\beta, \omega) = I + B(\beta, \omega)$ , где  $B(\beta, \omega)$  – вполне непрерывный оператор.  $\square$

## § 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и произвольным постоянным показателем преломления.



Пусть область поперечного сечения волновода  $\Omega$  ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\Gamma$ . Показатель преломления  $n$  является кусочно-постоянной функцией, а именно, – равен константе  $n_+$  в области  $\Omega$ , а в области  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  – константе  $n_\infty$ ;  $0 < n_\infty < n_+$ . Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  – неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  – заданная частота электромагнитных колебаний. Задача сводится (см. параграф 1 главы 1) к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  системы уравнений:

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (2.42)$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость свободного пространства,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость свободного пространства, векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 33.

Обозначим через  $U$  множество функций непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  системы (2.42) в пространстве  $U^6 = U \times \dots \times U$ .

Потребуем, чтобы на контуре  $\Gamma$  векторы  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  удовлетворяли условиям сопряжения (см. параграф 1 главы 1), которые заключаются в том, что при переходе через эту границу касательные составляющие векторов  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  должны быть непрерывны:

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^+ = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^-, \quad x \in \Gamma, \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}^+ = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}^-, \quad x \in \Gamma. \quad (2.44)$$

Здесь  $\mathbf{E}^+$  – предельное значение функции  $\mathbf{E}$  из области  $\Omega_\infty$ , куда направлен вектор нормали  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\mathbf{E}^-$  – предельное значение функции  $\mathbf{E}$  из области  $\Omega$ ;  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}$  – векторное произведение векторов.

Следуя результатам параграфа 1 главы 1, будем предполагать, что функции  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  удовлетворяют “парциальным” условиям излучения, то есть существует такая константа  $R_0$ , что для всех  $x : |x| \geq R_0$

функции  $E$ ,  $H$  разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi). \quad (2.45)$$

Здесь  $\chi_{\infty} = \sqrt{k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2}$ ,  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ .

При этом будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат множеству  $\Lambda$  – пересечению римановых поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_{\infty}$  функций  $\ln \chi_+(\beta)$  и  $\ln \chi_{\infty}(\beta)$ , соответственно:

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_{\infty}. \quad (2.46)$$

Здесь  $\chi_+ = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}$ .

Строение поверхности  $\Lambda_{\infty}$  подробно рассмотрено в параграфе 1 главы 1 (там она была обозначена  $\Lambda$ ). Строение поверхности  $\Lambda_+$  абсолютно аналогично. Пусть

$$\Lambda_0^{(1)} = \Lambda_{+0}^{(1)} \cap \Lambda_{\infty 0}^{(1)}$$

– пересечение главных (“физических”) листов этих поверхностей, определяемых условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_+(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi_+(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{+0}^{(1)}, \quad (2.47)$$

$$-\pi/2 < \arg \chi_{\infty}(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi_{\infty}(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{\infty 0}^{(1)}. \quad (2.48)$$

Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ . Пусть  $G$  – объединение двух интервалов на оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_{\infty} < |\beta| < kn_+ \right\}.$$

Обозначим символом  $D$  множество:

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \text{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_{\infty} \right\},$$

символом  $C_0^{(1)}$  – множество:

$$C_0^{(1)} = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \text{Re} \beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)},$$

а символом  $B$  – множество:

$$B = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| > kn_+ \right\}.$$

**Определение 2.7.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$ , будем называть собственным вектором задачи (2.42) – (2.45) отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (2.42) – (2.45).

**Теорема 2.5.** Мнимая и вещественная оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$  за исключением множества  $G$  не содержат собственных значений задачи (2.42) – (2.45).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вещественная и мнимая оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$  представляют собой объединение трех множеств  $B$ ,  $D$  и  $G$ . Докажем, что множества  $B$  и  $D$  свободны от собственных значений задачи (2.42) – (2.45). Предположим, что  $\{E, H\}$  – собственный вектор задачи (2.42) – (2.45), отвечающий собственному значению  $\beta \in B \cup D$ . Согласно утверждению 1.1, с. 34, для всех  $x$  из  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  имеет место равенство:

$$\text{rot}_\beta (\text{rot}_\beta E) = k^2 n^2 E, \quad (2.49)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_R = \{x \in \Omega_\infty : |x| < R\},$$

$$\Gamma_R = \{x \in \Omega_\infty : |x| = R\},$$

где  $R \geq R_0$ . Умножая скалярно обе части уравнения (2.49) на  $\bar{E}$ , интегрируя по области  $\Omega \cup \Omega_R$ , применяя формулу интегрирования по частям и используя граничные условия (2.43), (2.44), получаем равенство:

$$\int_{\Omega \cup \Omega_R} |\text{rot}_\beta E|^2 dx + \int_{\Gamma_R} \nu \times \text{rot}_\beta E \cdot \bar{E} dx = k^2 \int_{\Omega \cup \Omega_R} n^2 |E|^2 dx. \quad (2.50)$$

Для любой функции  $E$ , разлагающийся в ряд (2.45), и любого  $\beta \in D$  (то есть при  $\chi_\infty > 0$ ) справедливо равенство:

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma_R} \nu \times \operatorname{rot}_\beta E \cdot \bar{E} dx = -4 \sum_{l=-\infty}^{\infty} |A_l|^2. \quad (2.51)$$

В этом можно убедиться непосредственными вычислениями. Из двух последних равенств следует, что  $A_l = 0$  для всех  $l$  и  $R \geq R_0$ . Следовательно,  $E = 0$  при  $|x| \geq R_0$ . Как было доказано в утверждении 1.2, с. 35, функция  $E$  удовлетворяет в области  $\Omega_\infty$  уравнению Гельмгольца (1.16) с постоянным коэффициентом, следовательно, является аналитической по  $x$  в  $\Omega_\infty$ . Таким образом,

$$E = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (2.52)$$

Следовательно,

$$H = 1/(i\omega\mu_0)\operatorname{rot}_\beta E = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (2.53)$$

Докажем теперь, что вектор  $\{E, H\}$  равен нулю и в области  $\Omega$ . Согласно утверждению 1.4, с. 37, все компоненты этого вектора в рассматриваемом случае выражаются через две функции  $E_3$  и  $H_3$ , удовлетворяющие в области  $\Omega$  уравнению Гельмгольца (1.23), с. 37, с постоянным коэффициентом. Из (2.52), (2.53) и условий сопряжения (1.28), с. 38, получаем следующие предельные значения:

$$E_3^- = 0, \quad \frac{\partial E_3^-}{\partial \nu} = 0, \quad H_3^- = 0, \quad \frac{\partial H_3^-}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.54)$$

Применяя в области  $\Omega$  к функциям  $E_3$  и  $H_3$  третью формулу Грина (2.8), с. 58, выражающую решение уравнения Гельмгольца (1.23), с. 37, в  $\Omega$  через предельное значение решения и его нормальной производной на  $\Gamma$ , заключаем что  $E_3 = 0$  и  $H_3 = 0$  в области  $\Omega$ . Используя представления (1.20), (1.21), с. 36, для остальных компонент вектора  $\{E, H\}$ , заключаем, что он равен нулю в  $\Omega$ . В силу предположения о гладкости  $\{E, H\}$  этот вектор равен нулю и на контуре  $\Gamma$ . Итак, мы

доказали что при  $\beta \in D$  вектор  $\{E, H\}$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Это противоречит предположению о том, что вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (2.42) – (2.45) отвечающим собственному значению  $\beta \in D$ . Следовательно, множество  $\beta \in D$  свободно от собственных значений задачи (2.42) – (2.45).

Для любого  $\beta \in B$  и любой функции  $E$ , разлагающийся в ряд (2.45), в силу асимптотики (1.36), с. 44, подынтегральные выражения в равенстве (2.50) экспоненциально убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ . Переходя в (2.50) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , получаем следующее равенство:

$$\int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\text{rot}_\beta E|^2 dx = k^2 \int_{\Omega \cup \Omega_\infty} n^2 |E|^2 dx. \quad (2.55)$$

Используя уравнения (1.9) и (1.13), с. 34, формулу интегрирования по частям и условие сопряжения (2.43), получаем равенство:

$$\int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\text{rot}_\beta E|^2 dx = \int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\nabla E|^2 dx + \beta^2 \int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |E|^2 dx. \quad (2.56)$$

Объединяя (2.55) и (2.56), получаем неравенство:

$$\int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |\nabla E|^2 dx + (\beta^2 - k^2 n_+^2) \int_{\Omega \cup \Omega_\infty} |E|^2 dx \leq 0. \quad (2.57)$$

Для любого  $\beta \in B$  коэффициент при втором слагаемом в неравенстве (2.57) больше нуля, следовательно,

$$E = 0, \quad H = 1/(i\omega\mu_0)\text{rot}_\beta E = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Это противоречит предположению о том, что вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (2.42) – (2.45), отвечающим собственному значению  $\beta \in B$ . Таким образом, множество  $\beta \in B$  свободно от собственных значений задачи (2.42) – (2.45).  $\square$

Отметим, что доказать отсутствие собственных значений  $\beta$  задачи (2.42) – (2.45) в области  $G$  с помощью неравенства (2.57) нельзя

в силу того, что для любого  $\beta \in G$  коэффициент при втором слагаемом в неравенстве (2.57) меньше нуля. Также нельзя доказать с помощью этого неравенства и отсутствие собственных значений вне вещественной оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ , так как формула (2.56), из которой вытекает неравенство (2.57), справедлива лишь для вещественных  $\beta \in B$ . Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны, существование которых мы докажем в параграфе 2 главы 4. Комплексным  $\beta \in C_0^{(1)}$  отвечают комплексные собственные волны. Теорема 2.5 обобщает результаты [64] и [7] о локализации спектра собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе анализа характеристического уравнения метода разделения переменных (см. пункт 1 параграфа 3 главы 1).

**2. Нелинейная спектральная задача для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода.** Сведем теперь задачу (2.42) – (2.45) к нелинейной спектральной задаче для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода. Пусть вектор  $\{E, H\} \in U^6$ , является собственным вектором задачи (2.42) – (2.45) отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Напомним, что точки ветвления  $\beta = \pm kn_+$ ,  $\beta = \pm kn_\infty$  не принадлежат поверхности  $\Lambda$ . Следовательно, как было доказано в утверждении 1.4, с. 37, существуют потенциальные функции  $u, v \in U$ , такие, что

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ E_2 &= \frac{-i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ E_3 &= u, \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ H_2 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_2} + \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ H_3 &= v. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.60)$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (2.61)$$

Как было доказано в утверждении 1.5, с. 37, на контуре  $\Gamma$  должны выполняться условия сопряжения:

$$\begin{aligned} & u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad x \in \Gamma, \\ & \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) = \\ & = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma, \quad (2.62) \\ & \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \right) = \\ & = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Из разложения (2.45) следует, что для всех  $x : |x| \geq R_0$  функции  $u, v$  разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{3,l} \\ B_{3,l} \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi). \quad (2.63)$$

Очевидно, что если при некотором  $\beta_0 \in \Lambda$  будет найдено нетривиальное решение  $\{u, v\} \in U^2$  задачи (2.60) – (2.63), то вектор, построенный по формулам (2.58) (2.59), будет собственным вектором задачи (2.42) – (2.45), отвечающим собственному значению  $\beta_0$ . Решения задачи (2.60) – (2.63) будем разыскивать в виде потенциалов простого слоя:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) \begin{bmatrix} f_+(y) \\ g_+(y) \end{bmatrix} dl(y), \quad x \in \Omega, \quad (2.64)$$

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) \begin{bmatrix} f_\infty(y) \\ g_\infty(y) \end{bmatrix} dl(y), \quad x \in \Omega_\infty, \quad (2.65)$$

с плотностями  $f_+, f_\infty, g_+, g_\infty$ , принадлежащими пространству непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}$ . Здесь

$$\Phi_+(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.66)$$

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|). \quad (2.67)$$

При всех  $\beta \in \Lambda$  и  $f_+, f_\infty, g_+, g_\infty \in C^{0,\alpha}$  функции  $u, v$ , задаваемая равенствами (2.64), (2.65), удовлетворяют требуемым свойствам гладкости и уравнениям (2.60), (2.61). С помощью разложения (2.14) нетрудно убедиться, что функции  $u, v$  удовлетворяют условию (2.63).

Используем теперь граничные условия (2.62) для того, чтобы получить нелинейную спектральную задачу для системы интегральных уравнений. Граничные условия (2.62) содержат предельные значения касательных производных функций  $u, v$  на контуре  $\Gamma$ . По аналогии с [78], с. 56, можно показать, что для любого  $\beta \in \Lambda$  касательные производные потенциалов простого слоя (2.64) с непрерывными по Гельдеру плотностями при  $x \rightarrow z \in \Gamma$  представимы сингулярными интегралами с ядром Коши:

$$\lim_{x \rightarrow z \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \tau} = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \Phi_+(\beta; z, y) f_+(y) dl(y), \quad z \in \Gamma,$$

$$\lim_{x \rightarrow z \in \Gamma} \frac{\partial v(x)}{\partial \tau} = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \Phi_+(\beta; z, y) g_+(y) dl(y), \quad z \in \Gamma.$$

Используя граничные условия (2.62), предельные свойства потенциалов простого слоя, их нормальных и касательных производных, получаем нелинейную спектральную задачу для системы интегральных уравнений:

$$(\mathcal{A}(\beta)f)(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.68)$$



Здесь

$$\mathcal{A}f = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(1,1)} & \mathcal{A}^{(1,2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^{(2,3)} & \mathcal{A}^{(2,4)} \\ \mathcal{A}^{(3,1)} & \mathcal{A}^{(3,2)} & \mathcal{A}^{(3,3)} & 0 \\ \mathcal{A}^{(4,1)} & 0 & \mathcal{A}^{(4,3)} & \mathcal{A}^{(4,4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_+ \\ f_\infty \\ g_+ \\ g_\infty \end{bmatrix},$$

$$\left( \mathcal{A}^{(1,1)}(\beta) f_+ \right) (x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(1,2)}(\beta) f_\infty \right) (x) = - \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) f_\infty(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(2,3)}(\beta) g_+ \right) (x) = \int_{\Gamma} \Phi_+(\beta; x, y) g_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\left( \mathcal{A}^{(2,4)}(\beta) g_\infty \right) (x) = - \int_{\Gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) g_\infty(y) dl(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}^{(3,1)}(\beta) f_+ \right) (x) = \\ & = \frac{\varepsilon_0 n_+^2 \omega}{\chi_+^2(\beta)} \left( \frac{f_+(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y) \right), \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}^{(3,2)}(\beta) f_\infty \right) (x) = \\ & = - \frac{\varepsilon_0 n_\infty^2 \omega}{\chi_\infty^2(\beta)} \left( - \frac{f_\infty(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_\infty(y) dl(y) \right), \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}^{(3,3)}(\beta) g_+ \right) (x) = \\ & = \left( \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \tau(x)} g_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}^{(4,1)}(\beta) f_+ \right) (x) = \\ & = \left( \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)} \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \tau(x)} f_+(y) dl(y), \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}^{(4,3)}(\beta)g_+ \right) (x) = \\ & = -\frac{\mu_0\omega}{\chi_+^2(\beta)} \left( \frac{g_+(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi_+(\beta; x, y)}{\partial\nu(x)} g_+(y) dl(y) \right), \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}^{(4,4)}(\beta)g_\infty \right) (x) = \\ & = \frac{\mu_0\omega}{\chi_\infty^2(\beta)} \left( -\frac{g_\infty(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial\nu(x)} g_\infty(y) dl(y) \right), \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Функции  $\Phi_+(\beta; x, y)$ ,  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  имеют логарифмическую особенность при  $x = y$ . Ядра интегральных операторов, содержащих нормальные производные этих функций непрерывны. Операторы, ядра которых содержат касательные производные функций  $\Phi_+(\beta; x, y)$ ,  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$ , – сингулярные интегральные операторы с ядром Коши. Пусть контур  $\Gamma$  задан параметрически  $r = r(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Переходя к переменной интегрирования  $t$ , и выделяя явно особенности ядер, преобразуем систему (2.68) к виду:

$$(\mathcal{C}(\beta)w)(t) + (\mathcal{B}(\beta)w)(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.69)$$

Здесь вектор  $w = (w^{(j)})_{j=1}^4$  – это вектор с компонентами:

$$w^{(1)}(t) = (f_+(x) - f_\infty(x))|r'(t)|,$$

$$w^{(2)}(t) = (g_+(x) - g_\infty(x))|r'(t)|,$$

$$w^{(3)}(t) = f_+(x)|r'(t)|,$$

$$w^{(4)}(t) = g_+(x)|r'(t)|.$$

Интегральные операторы  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$  определены с помощью следующих равенств:

$$\mathcal{C}(\beta)w = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ c_{3,1}(\beta)I & c_{3,2}(\beta)S & c_{3,3}(\beta)I & c_{3,4}(\beta)S \\ c_{4,1}(\beta)S & c_{4,2}(\beta)I & c_{4,3}(\beta)S & c_{4,4}(\beta)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \\ w^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned}
c_{3,1}(\beta) &= \frac{\omega\varepsilon_0 n_\infty^2}{\chi_\infty^2(\beta)}, & c_{3,2}(\beta) &= c_{4,1}(\beta) = \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)}, \\
c_{3,3}(\beta) &= \frac{\omega\varepsilon_0 n_+^2}{\chi_+^2(\beta)} + \frac{\omega\varepsilon_0 n_\infty^2}{\chi_\infty^2(\beta)}, & c_{3,4}(\beta) &= c_{4,3}(\beta) = \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)}, \\
c_{4,2}(\beta) &= -\frac{\omega\mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)} & c_{4,4}(\beta) &= -\frac{\omega\mu_0}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\omega\mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(\beta)w = \begin{bmatrix} \mathcal{B}^{(1,1)}(\beta) & 0 & \mathcal{B}^{(1,3)}(\beta) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^{(2,2)}(\beta) & 0 & \mathcal{B}^{(2,4)}(\beta) \\ \mathcal{B}^{(3,1)}(\beta) & \mathcal{B}^{(3,2)}(\beta) & \mathcal{B}^{(3,3)}(\beta) & \mathcal{B}^{(3,4)}(\beta) \\ \mathcal{B}^{(4,1)}(\beta) & \mathcal{B}^{(4,2)}(\beta) & \mathcal{B}^{(4,3)}(\beta) & \mathcal{B}^{(4,4)}(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \\ w^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{(1,1)}(\beta) &= \mathcal{B}^{(2,2)}(\beta) = L^{-1}B_\infty^{(1)}(\beta), \\
\mathcal{B}^{(1,3)}(\beta) &= \mathcal{B}^{(2,4)}(\beta) = L^{-1}\left(B_+^{(1)}(\beta) - B_\infty^{(1)}(\beta)\right), \\
\mathcal{B}^{(3,1)}(\beta) &= -\frac{\omega\varepsilon_0 n_\infty^2}{\chi_\infty^2(\beta)}B_\infty^{(2)}(\beta), \\
\mathcal{B}^{(3,2)}(\beta) &= \mathcal{B}^{(4,1)}(\beta) = \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)}B_\infty^{(3)}(\beta), \\
\mathcal{B}^{(3,3)}(\beta) &= -\frac{\omega\varepsilon_0 n_+^2}{\chi_+^2(\beta)}B_+^{(2)}(\beta) - \frac{\omega\varepsilon_0 n_\infty^2}{\chi_\infty^2(\beta)}B_\infty^{(2)}(\beta), \\
\mathcal{B}^{(3,4)}(\beta) &= \mathcal{B}^{(4,3)}(\beta) = \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)}B_+^{(3)}(\beta) - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)}B_\infty^{(3)}(\beta), \\
\mathcal{B}^{(4,2)}(\beta) &= \frac{\omega\mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)}B_\infty^{(2)}(\beta), \\
\mathcal{B}^{(4,4)}(\beta) &= \frac{\omega\mu_0}{\chi_+^2(\beta)}B_+^{(2)}(\beta) + \frac{\omega\mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)}B_\infty^{(2)}(\beta).
\end{aligned}$$

Здесь  $I$  – единичный оператор в пространстве  $C^{0,\alpha}$ , остальные операторы имеют следующий вид:

$$Lu = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.72)$$

$$Su = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau-t}{2} u(\tau) d\tau + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.73)$$

$$B_{+/\infty}^{(k)}(\beta)u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{+/\infty}^{(k)}(\beta; t, \tau)u(\tau)d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$\begin{aligned} h_{+/\infty}^{(1)}(\beta; t, \tau) &= 2\pi\Phi_{+/\infty}(\beta; x, y) + \ln \left| \sin \frac{t - \tau}{2} \right|, \\ h_{+/\infty}^{(2)}(\beta; t, \tau) &= 4\pi|r'(\tau)| \frac{\partial\Phi_{+/\infty}(\beta; x, y)}{\partial\nu(x)}, \\ h_{+/\infty}^{(3)}(\beta; t, \tau) &= 2|r'(\tau)| \frac{\partial h_{+/\infty}^{(1)}(\beta; t, \tau)}{\partial\tau(x)} - i, \\ &x \equiv x(t), \quad y \equiv y(\tau). \end{aligned}$$

Известно, что линейный непрерывный оператор  $L : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$ , определенный равенством (2.72), непрерывно обратим (см., напр., [15], с. 10). При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы

$$\begin{aligned} B_{+/\infty}^{(1)}(\beta) : C^{0,\alpha} &\rightarrow C^{1,\alpha}, \\ B_{+/\infty}^{(2)}(\beta), B_{+/\infty}^{(3)}(\beta) : C^{0,\alpha} &\rightarrow C^{0,\alpha}, \end{aligned}$$

вполне непрерывны в силу того, что ядра  $h_{+/\infty}^{(2)}$ ,  $h_{+/\infty}^{(3)}$  не имеют особенностей при  $t = \tau$ , а ядра  $h_{+/\infty}^{(1)}$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми по  $t$  функциями  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . В этом нетрудно убедиться, используя свойства функций Ханкеля. Следовательно, для любого  $\beta \in \Lambda$  оператор  $\mathcal{B}(\beta)$ , определенный равенством (2.71), является вполне непрерывным оператором, действующим в банаховом пространстве

$$W = C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha}.$$

Линейный непрерывный оператор  $S : C^{0,\alpha} \rightarrow C^{0,\alpha}$ , определенный равенством (2.73), непрерывно обратим (см., напр., [78], с. 118). Точки ветвления  $\beta = \pm kn_+$ ,  $\beta = \pm kn_\infty$  не принадлежат поверхности  $\Lambda$ . Следовательно, линейный непрерывный оператор  $\mathcal{C} : W \rightarrow W$ , определенный равенством (2.70), непрерывно обратим в  $W$  при любом значении  $\beta \in \Lambda$ .

Таким образом, система интегральных уравнений (2.69) эквивалентна операторному уравнению:

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0, \quad (2.74)$$

где вполне непрерывный оператор  $B$ , действующий в банаховом пространстве  $W$ , определяется при помощи равенства:

$$B(\beta) = \mathcal{C}^{-1}(\beta)\mathcal{B}(\beta),$$

а  $I$  – единичный оператор в  $W$ .

Обозначим  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

**Теорема 2.6.** *При каждом фиксированном*

$$(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$$

*оператор  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty) : W \rightarrow W$  фредгольмов. При каждом фиксированном  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ . Оператор-функция  $A(\beta; \omega, n_+, n_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; \omega, n_+, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2, с. 66.

Таким образом, задача (2.74) является спектральной задачей для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

**Определение 2.8.** Ненулевую функцию  $w \in W$  будем называть собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение (2.74). Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $W$ . Это множество будем обозначать  $\sigma(A)$ .

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Относительно эквивалентности задач (2.42) – (2.45) и (2.74) справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 2.3, с. 67.

**Теорема 2.7.** Если  $w \in W$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то вектор  $\{E, H\}$ , построенный по формулам (2.58), (2.59), где функции  $u, v$  определяются равенствами (2.64), (2.65),  $\beta = \beta_0$ ,

$$\begin{aligned} f_+ &= w^{(3)} / |r'|, \\ f_\infty &= \left( w^{(3)} - w^{(1)} \right) / |r'|, \\ g_+ &= w^{(4)} / |r'|, \\ g_\infty &= \left( w^{(4)} - w^{(2)} \right) / |r'|, \end{aligned}$$

принадлежит множеству  $U^6$  и является собственным вектором задачи (2.42) – (2.45), отвечающим собственному значению  $\beta_0$ . Если вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (2.42) – (2.45), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то потенциальные функции  $u = E_3$  и  $v = H_3$  могут быть представлены в виде потенциалов простого слоя (2.64), (2.65) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_+, f_\infty$  и  $g_+, g_\infty$ , соответственно. При этом функция

$$w = ((f_+ - f_\infty)|r'|, (g_+ - g_\infty)|r'|, f_+|r'|, g_+|r'|) \in W$$

является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

Из теорем 2.5, 2.6 и 2.7 и результатов [19], [173] непосредственно следует

**Теорема 2.8.** Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (2.74), не пусто, а именно,  $B \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество  $\sigma(A)$  оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит

от параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением параметров  $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_+$ ,  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

# ОБЩИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДОВ С РАЗМЫТОЙ ГРАНИЦЕЙ

## § 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с размытой границей, имеющего переменный показатель преломления близкий к показателю преломления окружающей среды. Обозначим символом  $\mathbb{R}^2$  плоскость поперечного сечения волновода  $\{x_3 = \text{const}\}$ . Обозначим через  $C^2(\mathbb{R}^2)$  пространство комплекснозначных дважды непрерывно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^2$  функций. Пусть  $\Omega$  – ограниченная, не обязательно односвязная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим следующее:  $n$  – вещественная функция, не зависящая от  $x_3$ ;

$$n = n_\infty = \text{const}, \quad x \notin \Omega;$$

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0.$$

Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  – неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  – заданная частота электромагнитных колебаний. В скалярном приближении слабонаправляющего волновода (см. параграф 2 главы 1) задача сводится к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$



Здесь  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Всюду в этой главе будем предполагать, что волновод имеет размытую границу, а именно, что  $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Это предположение существенно используется в следующем параграфе при решении векторной задачи о собственных волнах. Результаты настоящего параграфа справедливы [57] для более общего случая:  $n \in C^1(\Omega)$ , граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  – липшицева кривая, на  $\Gamma$  функция  $u \in U$  удовлетворяет условиям сопряжения (2.3), с. 54. Однако, в целях единства изложения материала, ограничимся предположением, что  $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$  и в настоящем параграфе.

Будем разыскивать нетривиальные решения  $u(x)$  задачи (3.1), (3.2) в пространстве  $C^2(\mathbb{R}^2)$ . Будем предполагать, что функция  $u$  удовлетворяет на бесконечности “парциальным” условиям излучения (1.58), с. 49, то есть при достаточно большом  $R_0$  для всех  $|x| \geq R_0$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда:

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad (3.2)$$

где  $x_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $x_2 = r \sin(\varphi)$ ,  $H_l^{(1)}$  – функции Ханкеля первого рода порядка  $l$ ,

$$\chi_\infty(\beta) = \sqrt{kn_\infty^2 - \beta^2}.$$

Будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ . Строение поверхности  $\Lambda$  подробно рассмотрено в параграфе 1 главы 1. Обозначим через  $G$  объединение двух интервалов на вещественной оси главного листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ :

$$G = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}.$$

Обозначим через  $B$  бесконечный интервал на вещественной оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ :

$$B = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| \geq kn_+ \right\}.$$

Обозначим через  $D$  разрез, вдоль которого соединены листы  $\Lambda_0^{(1)}$  и  $\Lambda_0^{(2)}$ :

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re}\beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im}\beta = 0, |\beta| < kn_\infty \right\}.$$

**Определение 3.9.** Ненулевую функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  будем называть собственной функцией задачи (3.1), (3.2), отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (3.1), (3.2).

**Теорема 3.9.** На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения задачи (3.1), (3.2) могут принадлежать лишь множеству  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u$  – собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta \in D$ . Применим в области  $\Omega_R$ ,  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  формулу Грина:

$$\int_{\Omega_R} (u\Delta\bar{u} - \bar{u}\Delta u) dx = \int_{\Gamma_R} \left( u \frac{\partial\bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl.$$

Получим равенство:

$$\int_{\Gamma_R} \left( u \frac{\partial\bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0,$$

так как  $k^2 n^2 > \beta^2$  при  $\beta \in D$ . Отсюда, используя условие (3.2) и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$  получим:

$$2\pi\chi_\infty R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ H_l^{(1)}(\chi_\infty R) H_l^{(2)'}(\chi_\infty R) - H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] \times \\ \times |a_l|^2 = 0,$$

где  $a_l$  – коэффициенты ряда (3.2), в который разлагается функция  $u$ . Хорошо известно (см., напр., [108]), что выражение, стоящее в этой сумме в квадратных скобках, от  $l$  не зависит, а именно:

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty R) H_l^{(2)'}(\chi_\infty R) - H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) = \frac{4}{i\pi\chi_\infty R},$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $a_l$  в разложении (3.2) обращаются в нуль. А это значит, что  $u = 0$  при  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . Оператор Гельмгольца (3.1) имеет внутри области  $\Omega_{R_0}$  фундаментальное решение (см., напр., [29]). Обозначим его через  $\Phi(\beta; x, y)$ . Используя третью формулу Грина, выражающую решение уравнения (3.1) в  $\Omega_{R_0}$  через значение решения и его нормальной производной на  $\Gamma_{R_0}$ ,

$$u(x) = - \int_{\Gamma_{R_0}} \left[ u^-(y) \frac{\partial \Phi(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega_{R_0}, \quad (3.3)$$

найдем, что  $u = 0$  при  $x \in \Omega_{R_0}$ . Итак, задача (3.1), (3.2) при  $\beta \in D$  имеет только тривиальное решение.

При остальных  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  из условий (3.1), (3.2) и асимптотической формулы (1.36), с. 44, нетрудно получить равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\beta^2 - k^2 n^2) |u|^2 dx = 0. \quad (3.4)$$

Для этого надо применить в  $\Omega_R$  формулу Грина:

$$\int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_R} \bar{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma_R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl$$

и устремить  $R$  к бесконечности. При этом надо учесть, что согласно асимптотике (1.36), с. 44, все подынтегральные выражения в этой формуле экспоненциально убывают на бесконечности при любом

$$\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D.$$

При вещественных  $\beta$ , лежащих в интервале  $B$ , равенству (3.4) удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ . Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то из этого равенства сразу вытекает, что  $u = 0$  на всей плоскости. А, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то из него следует, что  $\nabla u = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ , то есть  $u$  всюду принимает постоянное значение. Но из асимптотики (1.36), с. 44, вытекает, что на бесконечности  $u$  обращается в

нуль. Значит  $u$  равняется нулю всюду. Возьмем от левой и правой частей равенства (3.4) мнимую часть, получим:

$$\operatorname{Im}\beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx = 0.$$

Следовательно, собственные значения  $\beta$  задачи (3.1), (3.2) на  $\Lambda_0^{(1)}$  не могут иметь одновременно мнимую и вещественную части отличными от нуля, то есть принадлежать множеству  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (B \cup D \cup G)$ .  $\square$

**2. Нелинейная спектральная задача для интегрального уравнения по области поперечного сечения волновода.** Сведем задачу (3.1), (3.2) к спектральной задаче для интегральной фредгольмовой голоморфной по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывной по

$$(\beta; \omega, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^2$$

оператор-функции с целью изучения качественных свойств спектра.

**Лемма 3.1.** Пусть  $u$  – собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Тогда

$$u(x) = (B(\beta)u)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.5)$$

где  $(B(\beta)u)(x) = \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) p(y) u(y) dy$ ,  $p(y) = k^2 n^2(y) - k^2 n_\infty^2$ ,

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \Omega.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Запишем уравнение (3.1) в виде:

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] u = -pu.$$

Далее рассуждения проводятся на основе стандартного метода (см., напр., [21]) построения интегрального представления решения неоднородного уравнения Гельмгольца с помощью формулы Грина. Применить этот метод для всех  $\beta \in \Lambda$  можно в силу известного равенства

(см. [37], с. 35; [163]; [8]):

$$\int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial u(y)}{\partial |y|} \Phi_\infty(\beta; x, y) - \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial |y|} u(y) \right) dl(y) = 0, \quad R \geq R_0,$$

справедливого для любого  $\beta \in \Lambda$  и произвольной  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющей условию (3.2). Отметим также, что фундаментальное решение уравнения Гельмгольца  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  удовлетворяет “парциальным” условиям излучения (3.2) при любом  $\beta \in \Lambda$ . В этом легко убедиться с помощью теоремы сложения Графа [79], с. 201.  $\square$

При фиксированном  $\beta \in \Lambda$  положим

$$(K(\beta)v)(x) = \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) p^{1/2}(x) p^{1/2}(y) v(y) dy. \quad (3.6)$$

Будем рассматривать оператор  $K(\beta)$ , как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций  $L_2(\Omega)$ . Пусть

$$A(\beta) = I - K(\beta),$$

где  $I$  – единичный оператор в  $L_2(\Omega)$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро оператора  $K(\beta)$  слабополярно, следовательно, оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.

**Определение 3.10.** Ненулевую функцию  $v \in L_2(\Omega)$  будем называть собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение:

$$A(\beta)v = 0. \quad (3.7)$$

Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $L_2(\Omega)$ .

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.**

Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи о собственных волнах слабонаправляющего волновода (3.1), (3.2) и спектральной задачи (3.7) для оператор-функции  $A(\beta)$ .

**Теорема 3.10.** Если  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  является собственной функцией задачи (3.1), (3.2), отвечающей собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то

$$v = p^{1/2}u \in L_2(\Omega)$$

есть собственная функция оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающая характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $v \in L_2(\Omega)$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то

$$u = B(\beta_0) \left( p^{-1/2}v \right) \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

есть собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta_0$ .

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3.1. Докажем второе утверждение. Пусть  $v \in L_2(\Omega)$  – собственная функция оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающая характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ . Ядро  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  слабополярно при любом  $\beta \in \Lambda$ . Следовательно, функция  $u = B(\beta_0) \left( p^{-1/2}v \right)$  непрерывна в  $\bar{\Omega}$  (см., напр., [11], с. 327). В силу известных свойств потенциала площади (см., напр., [11], с. 463) функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}^2$ ; число  $\beta_0$  и функция  $u$  удовлетворяют уравнению (3.1). С помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [79], с. 201) нетрудно убедиться, что число  $\beta_0$  и функция  $u$  удовлетворяют условию (3.2).  $\square$

**Теорема 3.11.** Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (3.7), не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$

характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично [37], с. 71, нетрудно показать, что оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция трех переменных  $\beta \in \Lambda$ ,  $\omega > 0$  и  $n_\infty > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$ , теоремы 3.9 о локализации собственных значений задачи (3.1), (3.2) и теоремы 3.10 о спектральной эквивалентности задач (3.1), (3.2) и (3.7) оператор  $A(\beta)$  обратим для любых  $\omega, n_\infty > 0$  и  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus G$ . Таким образом справедливость теоремы вытекает из результатов [19] и [173].  $\square$

**4. Существование собственных значений.** Относительно существования собственных значений задачи (3.1), (3.2) справедлива следующая

**Теорема 3.12.** *Задача (3.1), (3.2) имеет по крайней мере одно простое положительное собственное значение  $\beta$ , принадлежащее множеству  $G$ , которому отвечает положительная собственная функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор  $K(\beta)$  при фиксированных  $\beta \in G$  определяется равенством (3.6) и рассматривается, как действующий в пространстве вещественных функций  $L_2(\Omega)$ . При фиксированных  $\beta \in G$  введем в рассмотрение задачу:

$$v = \gamma K(\beta)v.$$

Решения этой задачи  $\gamma = \gamma(\beta)$  и  $v \neq 0$  называются характеристическим значением и собственной функцией оператора  $K(\beta)$ , соответственно. Заметим, что  $K(\beta)$  при любом  $\beta \in G$  является интегральным оператором с симметричным слабополярным положительным ядром (см., напр., [11], с. 327).

Ясно, что, если при некотором  $\beta_0 \in G$  функция  $v$  является собственной функцией оператора  $K(\beta)$ , отвечающей характеристическо-

му значению  $\gamma = 1$ , то  $v$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

При фиксированном положительном  $\beta \in G$  оператор  $K(\beta)$  имеет счетное множество положительных характеристических значений. Для минимального из них справедливо равенство (см., напр., [11], с. 326):

$$\gamma_1(\beta) = \inf_{f \in L_2(\Omega)} \frac{(f, f)}{(K(\beta)f, f)}, \quad (3.8)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ . Покажем теперь, что существует такое  $\beta \in G$ , при котором  $\gamma_1(\beta) = 1$ . В силу непрерывной зависимости  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  от  $\beta \in \Lambda$  функция  $\gamma_1 = \gamma_1(\beta)$  непрерывна. Из (3.8) и предельного соотношения  $\Phi_\infty(\beta; x, y) \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow kn_\infty$  получаем, что  $\gamma_1(\beta) \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow kn_\infty$ .

Докажем, что  $\gamma_1(kn_+) > 1$ . Пусть  $v \in L_2(\Omega)$  – собственная функция оператора  $K(\beta)$  отвечающая характеристическому значению  $\gamma_1$  при фиксированном  $\beta = kn_+$ . Для функции

$$u = \gamma_1 B(kn_+) (p^{-1/2}v),$$

рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 3.9, 3.10, получаем равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + (k^2 n_+^2 - k^2 n_\infty^2) \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx - \gamma_1 \int_{\Omega} p |u|^2 dx = 0.$$

Очевидно, что при  $\gamma_1 \leq 1$  функция  $u$  может быть только нулевой. Поэтому  $\gamma_1(kn_+) > 1$ .

Обозначим через  $\beta_1$  решение уравнения  $\gamma_1(\beta) = 1$ . По теореме Энтча (см., напр., [11], с. 329)  $\gamma_1(\beta_1)$  есть простое характеристическое значение, и ему отвечает положительная собственная функция  $v_1$ . Следовательно,  $\beta_1$  является простым собственным значением задачи (3.1), (3.2), которому отвечает положительная собственная функция  $u_1 = B(\beta_1) (p^{-1/2}v_1)$ .  $\square$



Отметим, что в данном случае в силу симметрии рассматриваемых задач по  $\beta$  относительно начала координат результат этой теоремы остается справедливым и для отрицательного  $\beta \in G$ . Положительное значение  $\beta \in G$ , и отвечающая ему собственная функция  $u$ , существование которых доказано в этой теореме определяют собственную волну, которая в теории волноводов носит название основной.

## § 2. Векторная задача

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с размытой границей и произвольным переменным показателем преломления. Обозначим через  $C^2(\mathbb{R}^2)$  пространство комплекснозначных дважды непрерывно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^2$  функций. Пусть  $\Omega$  – ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим следующее:  $n$  – вещественная функция из  $C^2(\mathbb{R}^2)$  не зависящая от  $x_3$ ;

$$n = n_\infty = \text{const}, \quad x \notin \Omega;$$

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0.$$

Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  – неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  – заданная частота электромагнитных колебаний. Задача сводится (см. параграф 1 главы 1) к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения  $E, H$  системы уравнений:

$$\text{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \text{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость свободного пространства, через  $\mu_0$  обозначена магнитная проницаемость свободного пространства, векторная операция  $\text{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 33. Бу-

дем разыскивать нетривиальные решения  $\{E, H\}$  системы (3.9) в пространстве  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^6$ .

Следуя результатам параграфа 1 главы 1, будем предполагать, что функции  $E, H$  удовлетворяют “парциальным” условиям излучения, то есть существует такая константа  $R_0$ , что для всех  $x : |x| \geq R_0$  функции  $E, H$  разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi). \quad (3.10)$$

Здесь  $\chi_\infty = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$ ,  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ . При этом будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ . Строение поверхности  $\Lambda$  подробно рассмотрено в параграфе 1 главы 1. Обозначим через  $G$  объединение двух интервалов на вещественной оси главного листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ :

$$G = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im}\beta = 0, kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}.$$

Обозначим через  $B$  бесконечный интервал на вещественной оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ :

$$B = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im}\beta = 0, |\beta| \geq kn_+ \right\}.$$

Обозначим через  $D$  разрез, вдоль которого соединены листы  $\Lambda_0^{(1)}$  и  $\Lambda_0^{(2)}$ :

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re}\beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im}\beta = 0, |\beta| < kn_\infty \right\}.$$

**Определение 3.11.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  будем называть собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (3.9), (3.10).

Если известен собственный вектор  $\{E, H\}$  задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , то собственная волна волновода определяется по формуле (1.2), с. 32. Следовательно, поиск

собственных волн сводится к решению нелинейной векторной спектральной задачи (3.9), (3.10).

**Теорема 3.13.** *Области  $B$  и  $D$  главного листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$  не содержат собственных значений задачи (3.9), (3.10).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{E, H\}$  – собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in B$ . Тогда имеет место равенство (1.12), с. 34. Умножим его скалярно на  $\bar{H}$  и проинтегрируем по  $\mathbb{R}^2$ . Мы имеем право это делать в силу условия (3.10) и асимптотики (1.36), с. 44. В результате получим:

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \operatorname{rot}_\beta \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta H \right) \right) \cdot \bar{H} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta H \right) \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta H} dx \geq \\ &\geq \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{rot}_\beta H \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta H} dx = \\ &= \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta H)) \cdot \bar{H} dx. \end{aligned}$$

Используя равенство (1.14), формулу (1.9), с. 34, и формулу интегрирования по частям, продолжим:

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx &\geq \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} (-\Delta H + \beta^2 H) \cdot \bar{H} dx = \\ &= \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla H|^2 dx + \frac{\beta^2}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx. \end{aligned}$$

В итоге получим неравенство:

$$(\beta^2 - k^2 n_+^2) \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla H|^2 dx \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что значениям  $\beta \in B$  отвечает только нулевое решение задачи (3.9), (3.10). Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то  $\mathbf{H} = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, и

$$\mathbf{E} = -1/(i\omega\varepsilon_0 n^2) \text{rot}_\beta \mathbf{H} = 0$$

в  $\mathbb{R}^2$ . Если же  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то функция  $\mathbf{H}$  принимает постоянное значение в  $\mathbb{R}^2$ . Но из условия излучения (3.10) и асимптотики (1.36), с. 44, для любого  $\beta \in B$  следует, что  $\mathbf{H}$  обращается в нуль на бесконечности. Значит,  $\mathbf{H} = 0$  в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbf{E} = 0$  в  $\mathbb{R}^2$  при  $\beta \in B$ , что противоречит предположению о том, что вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  является собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta \in B$ . Следовательно область  $B$  свободна от собственных значений задачи (3.9), (3.10).

Пусть  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  – собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in D$ . Тогда имеет место равенство (1.11), с. 34. Умножим его скалярно на  $\bar{\mathbf{E}}$  и проинтегрируем по  $\Omega_R$ , где  $R \geq R_0$ . Для всех  $x : |x| \geq R_0$  справедливо разложение (3.10). Поэтому, используя формулу (1.9), формулу интегрирования по частям, и равенство (1.13), получим:

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\Omega_R} n^2 |\mathbf{E}|^2 dx &= \int_{\Omega_R} (\text{rot}_\beta (\text{rot}_\beta \mathbf{E})) \cdot \bar{\mathbf{E}} dx = \\ &= \int_{\Omega_R} (-\Delta \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} + \text{grad}_\beta (\text{div}_\beta \mathbf{E})) \cdot \bar{\mathbf{E}} dx = \\ &= - \int_{\Omega_R} |\text{div}_\beta \mathbf{E}|^2 dx + \int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{E}|^2 dx - \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial |x|} \cdot \bar{\mathbf{E}} dx + \beta^2 \int_{\Omega_R} |\mathbf{E}|^2 dx. \end{aligned}$$

Возьмем от левой и правой части полученного равенства мнимую часть:

$$\text{Im} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial |x|} \cdot \bar{\mathbf{E}} dx = 0, \quad R \geq R_0.$$

Отсюда, используя условие (3.10) и ортогональность тригонометри-

ческих функций, для любого  $R \geq R_0$  получим:

$$2\pi\chi_\infty R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] |A_l|^2 = 0.$$

Легко видеть, что мнимая часть выражения, стоящего в этой сумме в квадратных скобках, не зависит от  $l$ , а именно:

$$\operatorname{Im} \left[ H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] = \frac{2}{\pi\chi_\infty R}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $A_l$  в разложении (3.10) функции  $E$  обращаются в нуль. А это значит, что  $E = 0$  при  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . В силу гладкости показателя преломления  $n$ , функция  $E$  должна обращаться в нуль всюду в  $\mathbb{R}^2$  (см. [141], с. 190). Значит, и

$$H = 1/(i\omega\mu_0)\operatorname{rot}_\beta E = 0$$

в  $\mathbb{R}^2$ . Итак, значениям  $\beta \in D$  отвечает только нулевое решение задачи (3.9), (3.10), что противоречит предположению о том, что вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta \in D$ . Следовательно область  $D$  свободна от собственных значений задачи (3.9), (3.10).  $\square$

**2. Нелинейная спектральная задача для системы слабо-сингулярных интегральных уравнений по области поперечного сечения волновода.** Для изучения качественных свойств спектра сведем задачу (3.9), (3.10) к спектральной задаче для интегральной оператор-функции. При этом мы будем использовать электромагнитные потенциалы, введенные в параграфе 1 главы 1.

**Лемма 3.2.** Пусть  $\{E, H\}$  – собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Тогда справедлива формула:

$$E(x) = (B(\beta)E)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.11)$$

где

$$(B(\beta)E)(x) = k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy + \\ + \text{grad}_{\beta} \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy, \quad (3.12)$$

$$\Phi_{\infty}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta) |x - y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \Omega.$$

Доказательство. Вектор Герца  $\Pi$  удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (1.19), с. 36. Следовательно, рассуждая аналогично доказательству леммы 3.1, запишем решение этого уравнения в виде:

$$\Pi(x) = \frac{1}{n_{\infty}^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда и из равенства (1.17), с. 36, для  $x \in \mathbb{R}^2$  получим:

$$E(x) = (k^2 n_{\infty}^2 + \text{grad}_{\beta} \text{div}_{\beta}) \frac{1}{n_{\infty}^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy.$$

Воспользуемся теперь теоремой о дивергенции [120]:

$$\text{div}_{\beta} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy = \\ = \int_{\Omega} \text{div}_{\beta} [(n^2(y) - n_{\infty}^2) E(y)] \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.13)$$

и следующей очевидной формулой:

$$\text{div}_{\beta} ((n^2 - n_{\infty}^2) E) = n_{\infty}^2 E \cdot (n^{-2} \text{grad} n^2). \quad (3.14)$$

В итоге получим требуемое равенство.  $\square$

При фиксированном  $\beta \in \Lambda$  будем рассматривать оператор  $B(\beta)$ , определенный равенством (3.12), как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\Omega)]^3$ . Пусть

$$A(\beta) = I - B(\beta), \quad (3.15)$$

где  $I$  – единичный оператор в  $[L_2(\Omega)]^3$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро оператора  $B(\beta)$  слабополярно, следовательно, оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.

**Определение 3.12.** Ненулевой вектор  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  будем называть собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение:

$$A(\beta)F = 0. \quad (3.16)$$

Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $[L_2(\Omega)]^3$ .

### 3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.

Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи о собственных волнах волновода с размытой границей (3.9), (3.10) и спектральной задачи (3.16) для оператор-функции  $A(\beta)$ .

**Теорема 3.14.** Если вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  является собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то

$$F = E \in [L_2(\Omega)]^3$$

есть собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  является собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , и это  $\beta_0$  не является собственным значением задачи (3.1), (3.2), то вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$ , где

$$E = B(\beta_0)F, \quad H = (i\omega\mu_0)^{-1}\text{rot}_{\beta_0}E,$$

есть собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta_0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3.2. Докажем второе утверждение. Пусть вектор  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  – собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ . Ядро интегрального оператора  $B(\beta)$  слабополярно при любом  $\beta \in \Lambda$ . Следовательно, вектор  $E = B(\beta)F$  принадлежит пространству  $[C(\Omega)]^3$  (см., напр., [11], с. 327). В силу известных свойств потенциала площади (см., напр., [11], с. 463) вектор  $E$  принадлежит пространству  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ .

По построению вектор  $E$  удовлетворяет равенству (3.11). Применяя к левой и правой частям этого равенства операцию  $\text{rot}_\beta$ , учитывая формулу (1.5), с. 34, и теорему о дивергенции (3.13), получим:

$$\begin{aligned} \text{div}_\beta E(x) &= k^2 \int_{\Omega} \text{div}_\beta [(n^2(y) - n_\infty^2) E(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy + \\ &+ (\Delta - \beta^2) \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Добавляя и вычитая к правой части этого равенства слагаемое

$$k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy,$$

и учитывая формулу Пуассона для потенциала площади:

$$\begin{aligned} [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy = \\ = - \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

получим равенство:

$$\begin{aligned} \text{div}_\beta E(x) &= k^2 \int_{\Omega} \text{div}_\beta [(n^2(y) - n_\infty^2) E(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \\ &- k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$



Далее, в силу линейности операции  $\operatorname{div}_\beta$  и формулы (1.7), с. 34, имеем:

$$\operatorname{div}_\beta [(n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}] = \operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E}) - n_\infty^2 \operatorname{div}_\beta \mathbf{E},$$

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\operatorname{grad} n^2}{n^2} = n^{-2} \operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E}) - \operatorname{div}_\beta \mathbf{E}.$$

Используя два предыдущих равенства и равенство (3.18), нетрудно видеть, что функция  $u = n^{-2} \operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E})$  удовлетворяет уравнению:

$$u = \int_{\Omega} k^2 (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

которое совпадает с уравнением (3.5). В пункте 2 было показано, что если  $\beta$  не является собственным значением задачи (3.1), (3.2), то  $u = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Итак, мы получили, что для вектора  $\mathbf{E}$  справедлива формула:

$$\operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.19)$$

и уравнение (3.11) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ & - \operatorname{grad}_\beta \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) \operatorname{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Пусть вектор  $\mathbf{H}$  определяется следующим равенством (то есть векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют первому из уравнений (3.9)):

$$\mathbf{H} = (i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot}_{\beta_0} \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Из уравнения (3.20) и формулы (1.8), с. 34, имеем:

$$\mathbf{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot}_\beta \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.21)$$

Отсюда следует, в частности, что если  $\mathbf{E} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ , то и  $\mathbf{H} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Докажем, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют второму из уравнений

(3.9). Применим к обеим частям уравнения (3.21) операцию  $\text{rot}_\beta$  и полученное равенство почленно сложим с равенством (3.20), умноженным на  $i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2$ :

$$\begin{aligned} \text{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathbf{E} &= -i\omega\varepsilon_0 \text{rot}_\beta \text{rot}_\beta \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ &- i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \text{grad}_\beta \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) \text{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Продолжим равенство, используя формулу (1.9), с. 34, и теорему о дивергенции (3.13):

$$\begin{aligned} &\text{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathbf{E} = \\ &= i\omega\varepsilon_0 [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ &- i\omega\varepsilon_0 \text{grad}_\beta \int_{\Omega} \text{div}_\beta [(n^2(y) - n_\infty^2) \mathbf{E}(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \\ &- i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \text{grad}_\beta \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) \text{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Из этого равенства, уравнения (3.19) и формулы Пуассона (3.17) окончательно получаем:

$$\text{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathbf{E} = -i\omega\varepsilon_0 (n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют второму из уравнений (3.9). Из (3.20), (3.21) с помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [79], с. 201) легко получить, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют “парциальным” условиям излучения (3.10).  $\square$

**Теорема 3.15.** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (3.16), не пусто, а именно,  $B \cup D \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять*

лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично [37], с. 71, нетрудно показать, что оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция трех переменных  $\beta \in \Lambda$ ,  $n_\infty > 0$  и  $\omega > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$ , теоремы 3.13 о локализации спектра задачи (3.9), (3.10) и теоремы 3.14 о спектральной эквивалентности задач (3.9), (3.10) и (3.16) оператор  $A(\beta)$  обратим для любых  $n_\infty > 0$ ,  $\omega > 0$  и  $\beta \in B \cup D$ . Таким образом, справедливость настоящей теоремы следует из результатов [19] и [173].  $\square$

## ЗАДАЧИ О ПОВЕРХНОСТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ

### § 1. Скалярная задача в вариационной постановке

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода. При известных предположениях (см. параграф 2 главы 1) она сводится к отысканию нетривиальных экспоненциально убывающих на бесконечности решений  $u$  следующей задачи, понимаемой в классическом смысле:

$$-\Delta u + \beta^2 u = k^2 n^2 u, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (4.1)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (4.2)$$

Здесь  $\beta$  – вещественная постоянная распространения;  $k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}$  – продольное волновое число,  $\omega > 0$  – частота электромагнитных колебаний,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость свободного пространства,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость свободного пространства;  $n = n(x)$  – показатель преломления волновода при  $x \in \Omega$  и окружающей среды при  $x \in \Omega_\infty$ ,  $n(x) = n_\infty = \text{const}$  в  $\Omega_\infty$ ;  $\partial u / \partial \nu$  – производная по внешней нормали к границе  $\Gamma$  ограниченной, не обязательно односвязной области  $\Omega$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ;  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ ;  $u^+(u^-)$  – предельное значение функции  $u$  извне (изнутри) контура  $\Gamma$ . Будем считать, что начало координат лежит в  $\Omega$ ;  $n$  – вещественная функция из  $C(\bar{\Omega})$ ,

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} n(x) \geq n_\infty, \quad n_+ = \max_{x \in \bar{\Omega}} n(x) > n_\infty > 0;$$

каждая связная компонента границы  $\Gamma$  является липшицевой кривой.

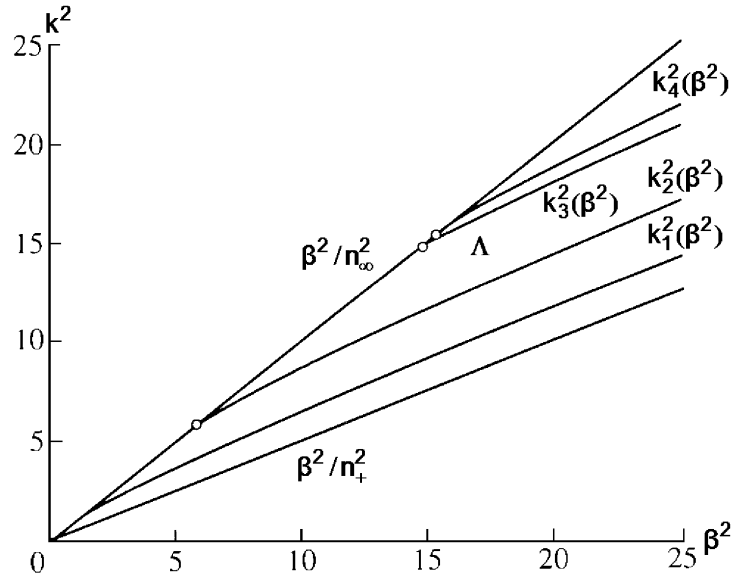


Рис. 1. Поведение функций  $k^2 = k_l^2(\beta^2)$

В качестве искомым параметров, при которых существуют нетривиальные решения задачи (4.1), (4.2), выберем  $k^2$  и  $\beta^2$ . Этот выбор обусловлен тем, что при заданной геометрии и показателе преломления уравнения задачи (4.1), (4.2) зависят лишь от квадратов продольного волнового числа  $k$  и постоянной распространения  $\beta$ . Хорошо известно точное решение задачи (4.1), (4.2) в случае однородного волновода ( $n^2(x) = \text{const}$ ,  $x \in \Omega$ ) кругового поперечного сечения (см. параграф 3 главы 1). Значения параметров  $k^2$  и  $\beta^2$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи, заполняют на плоскости  $(\beta^2, k^2)$  счетное множество дисперсионных кривых  $k^2 = k_l^2(\beta^2)$ . На рисунке 1 показаны дисперсионные кривые для  $n_\infty = 1$ ,  $n_+ = \sqrt{2}$ . Эти кривые являются гладкими и лежат в области  $\Lambda$ , ограниченной двумя прямыми  $k^2 = \beta^2/n_\infty^2$  и  $k^2 = \beta^2/n_+^2$ . Ниже будет показано, что такое поведение дисперсионных кривых сохраняется и в рассматриваемом в этом параграфе общем случае.

Опишем множество допустимых значений параметров  $\beta^2$  и  $k^2$ . Если  $u$  – классическое решение задачи (4.1), (4.2) при некоторых  $(\beta^2, k^2)$ ,

то в области  $\Omega_\infty$  выполняются уравнение:

$$-\Delta u + (\beta^2 - k^2 n_\infty^2)u = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (4.3)$$

Оно имеет экспоненциально убывающие на бесконечности решения только тогда, когда  $k^2 < \beta^2/n_\infty^2$  (см., напр., [8]). Умножая уравнение (4.1) на функцию  $u$  и интегрируя по  $x \in \mathbb{R}^2$ , получаем:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + \beta^2 u^2) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} n^2 u^2 dx < k^2 n_+^2 \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx,$$

откуда следует, что  $k^2 > \beta^2/n_+^2$ . Таким образом, условие

$$(\beta^2, k^2) \in \Lambda, \quad \Lambda = \{(\beta^2, k^2) : \beta^2/n_+^2 < k^2 < \beta^2/n_\infty^2, \beta^2 > 0\},$$

является необходимым для разрешимости задачи (4.1), (4.2) и мы всегда будем предполагать его выполненным.

**2. Обобщенное решение в неограниченной области.** Исследуем существование обобщенных решений задачи (4.1), (4.2). Дадим два определения обобщенного решения. Первое из них является традиционным и будет использовано при установлении свойств собственных функций. Второе – новое и позволяет исследовать разрешимость задачи на основе теории самосопряженных компактных операторов в гильбертовом пространстве.

Введем в рассмотрение пространство Соболева  $H^1 = W_2^1(\mathbb{R}^2)$  с нормой

$$\|u\|_{1, \mathbb{R}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + u^2) dx.$$

Рассмотрим задачу: найти все такие пары  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $u \in H^1$ , удовлетворяющие для любой функции  $v \in H^1$  тождеству:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} n^2 uv dx. \quad (4.4)$$

Здесь символом “ $\cdot$ ” обозначено скалярное произведение векторов в  $\mathbb{R}^2$ .

Если  $(\beta^2, k^2, u)$  является решением задачи (4.1), (4.2), то справедливо тождество (4.4). В этом легко убедиться, следуя [112], если умножить уравнение (4.1) на произвольную функцию  $v \in H^1$  и воспользоваться формулой интегрирования по частям. Верно и обратное утверждение. Выбирая в (4.4) функцию  $v$  с носителем в  $\Omega$  ( $\Omega_\infty$ ), получаем, что уравнение (4.1) в области  $\Omega$  ( $\Omega_\infty$ ) удовлетворяется в смысле распределений, а следовательно, в силу регулярности решений краевых задач, и в классическом смысле. Выбирая функцию  $v$  произвольной на  $\Gamma$ , получаем второе равенство в (4.2). Первое равенство в (4.2) справедливо для любой функции из  $H^1$ . Далее, поскольку функция  $u$  удовлетворяет уравнению (4.3) в классическом смысле, то она является экспоненциально убывающей на бесконечности в силу условия  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$  (см., напр., [8]).

**3. Обобщенное решение в ограниченной области.** Обозначим через  $\Omega_R$  открытый круг радиуса  $R$  с центром в начале координат такой, что  $\Omega \subset \Omega_R$ . Пусть  $\Gamma_R$  – граница  $\Omega_R$  и  $\Omega_{R,\infty} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_R$ . Введем пространства:

$$V = W_2^1(\Omega_R), \quad V_\infty = W_2^1(\Omega_{R,\infty}), \quad V_\infty^0 = \{v \in V_\infty : v|_{\Gamma_R} = 0\}.$$

Через  $(\cdot, \cdot)$  обозначим скалярное произведение в  $V$ .

Пусть  $u \in W_2^{1/2}(\Gamma_R)$ ,  $\sigma = \text{const} > 0$ . Функцию  $u_\sigma \in V_\infty$  назовем метагармоническим продолжением  $u$  в область  $\Omega_{R,\infty}$ , если  $u_\sigma|_{\Gamma_R} = u$ , и

$$\int_{\Omega_{R,\infty}} (\nabla u_\sigma \cdot \nabla v + \sigma^2 u_\sigma v) dx = 0 \quad \forall v \in V_\infty^0.$$

Очевидно, указанное продолжение существует и определяется единственным образом при  $\sigma > 0$ .

Введем оператор  $S_{\Gamma_R}(\sigma) : V \rightarrow V$ , порождаемой билинейной фор-

мой:

$$(S_{\Gamma_R}(\sigma)u, v) = \int_{\Omega_{R,\infty}} (\nabla u_\sigma \cdot \nabla v_\sigma + \sigma^2 u_\sigma v_\sigma) dx, \quad \sigma > 0, \quad (4.5)$$

где  $u$  и  $v$  – произвольные функции из  $V$ ,  $u_\sigma$  и  $v_\sigma$  – метагармонические продолжения в область  $\Omega_{R,\infty}$  следов функций  $u$  и  $v$  на  $\Gamma_R$ .

Тождество (4.4) представим в виде:

$$\int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx + \int_{\Omega_{R,\infty}} (\nabla u \cdot \nabla v + \sigma^2 uv) dx = k^2 \int_{\Omega_R} n^2 uv dx \quad \forall v \in H^1, \quad (4.6)$$

где

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2}.$$

Выбирая  $v \in H^1$  такое, что  $v = 0$  в  $\Omega_R$ , из тождества (4.6) получаем:

$$\int_{\Omega_{R,\infty}} (\nabla u \cdot \nabla v + \sigma^2 uv) dx = 0 \quad \forall v \in V_\infty^0,$$

то есть  $u = u_\sigma$  в области  $\Omega_{R,\infty}$ . Ограничиваясь в тождестве (4.6) только такими  $v \in H^1$ , что  $v = v_\sigma$  в  $\Omega_{R,\infty}$ , и учитывая, что любая функция из  $V$  допускает метагармоническое продолжение ее следа, получаем, что решение задачи (4.4), если оно существует, удовлетворяет тождеству:

$$\int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx + (S_{\Gamma_R}(\sigma)u, v) = k^2 \int_{\Omega_R} n^2 uv dx \quad \forall v \in V. \quad (4.7)$$

Очевидно, верно и обратное утверждение, а именно: пусть  $(\beta^2, k^2, u)$  удовлетворяет тождеству (4.7). Осуществим метагармоническое продолжение функции  $u$  с области  $\Omega_R$  в  $\Omega_{R,\infty}$ . Полученную функцию, определенную в  $\mathbb{R}^2$ , обозначим опять через  $u$ . Очевидно,  $u \in H^1$ . Пользуясь определением формы  $(S_{\Gamma_R}(\sigma)u, v)$  и замечая, что, в силу определения метагармонического продолжения,

$$\int_{\Omega_{R,\infty}} (\nabla u_\sigma \cdot \nabla v_\sigma + \sigma^2 u_\sigma v_\sigma) dx = \int_{\Omega_{R,\infty}} (\nabla u_\sigma \cdot \nabla v + \sigma^2 u_\sigma v) dx \quad \forall v \in H^1,$$



из (4.7) приходим к (4.6). Эквивалентность задач (4.4) и (4.7) будем понимать именно в указанном смысле.

**4. Явный вид оператора  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$ .** Область  $\Omega_R$  была выбрана в виде круга для того, чтобы можно было получить явный вид оператора  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$ . Оператор  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$  симметричен, определен на всем пространстве  $V$  и, следовательно, непрерывен (см., напр., [76, с. 29]). Так как множество бесконечно дифференцируемых функций плотно в  $V$ , то достаточно указать явный вид  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$  лишь для гладких функций. Интегрированием по частям тождества (4.5) убеждаемся, что

$$-\Delta u_\sigma + \sigma^2 u_\sigma = 0, \quad x \in \Omega_{R,\infty}, \quad (4.8)$$

$$u_\sigma = u(R, \varphi), \quad x \in \Gamma_R, \quad (4.9)$$

и

$$(S_{\Gamma_R}(\sigma)u, v) = - \int_{\Gamma_R} \frac{\partial u_\sigma}{\partial r} v dx. \quad (4.10)$$

Здесь  $(r, \varphi)$  полярные координаты точки  $x$ . Решение задачи (4.8), (4.9) легко находится с помощью метода разделения переменных и имеет вид:

$$u_\sigma(r, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K_l(\sigma r)}{K_l(\sigma R)} [a_l(u) \cos(l\varphi) + b_l(u) \sin(l\varphi)],$$

где для  $l = 0, 1, \dots$

$$a_l(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cos(l\varphi) d\varphi, \quad b_l(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \sin(l\varphi) d\varphi,$$

$K_l(z)$  – модифицированная функция Бесселя порядка  $l$  (см., напр., [108]), штрих у суммы означает, что нулевой член умножается на  $1/2$ .

Следовательно,

$$\frac{\partial u_\sigma}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} {}'H_l(R\sigma) [a_l(u) \cos(l\varphi) + b_l(u) \sin(l\varphi)], \quad (4.11)$$

$$H_l(z) = -zK'_l(z)/K_l(z).$$

Известно, что модифицированные функции Бесселя  $K_l(z)$  положительны при вещественных  $z > 0$ ,  $l \geq 0$ ,

$$K'_l(z) = -K_{l-1}(z) - \frac{l}{z}K_l(z), \quad l \geq 1, \quad K'_0(z) = -K_1(z).$$

Таким образом, при  $z > 0$  имеем:

$$H_l(z) = l + z \frac{K_{l-1}(z)}{K_l(z)} > 0, \quad l \geq 1, \quad H_0(z) = z \frac{K_1(z)}{K_0(z)} > 0.$$

Подставляя (4.11) в (4.10), получаем явный вид оператора  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$ :

$$(S_{\Gamma_R}(\sigma)u, v) = \sum_{l=0}^{\infty} 'H_l(R\sigma)[a_l(u)a_l(v) + b_l(u)b_l(v)].$$

**5. Операторная формулировка задачи.** Определим для всех  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$  операторы  $A_0, S(\sigma), B_0, B : V \rightarrow V$  посредством тождеств:

$$(A_0u, v) = \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{l=1}^{\infty} 'l [a_l(u)a_l(v) + b_l(u)b_l(v)],$$

$$(S(\sigma)u, v) = \frac{1}{2}R\sigma \frac{K_1(R\sigma)}{K_0(R\sigma)} [a_0(u)a_0(v) + b_0(u)b_0(v)] + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} R\sigma \frac{K_{l-1}(R\sigma)}{K_l(R\sigma)} [a_l(u)a_l(v) + b_l(u)b_l(v)],$$

$$(B_0u, v) = \int_{\Omega_R} uv dx, \quad (Bu, v) = \int_{\Omega_R} n^2 uv dx,$$

где  $u, v$  – произвольные функции из пространства  $V$ ,

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_{\infty}^2}.$$

Введем в рассмотрение оператор:

$$A_{\beta^2}(k^2) = A_0 + \beta^2 B_0 + S(\sigma).$$

Задача (4.7) может быть сформулирована теперь следующим образом: найти все  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$u \in V : A_{\beta^2}(k^2)u = k^2Bu. \quad (4.12)$$

При фиксированном  $\beta^2$  задача (4.12) представляет собой симметричную задачу на собственные значения вида:

$$A(\lambda)u = \lambda Bu,$$

в которую спектральный параметр  $\lambda = k^2$  входит нелинейно. Нам будет удобно сначала рассмотреть абстрактную задачу подобного типа.

**6. Существование решений задачи  $A(\lambda)u = \lambda Bu$ .** Пусть  $H$  – гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\|$ ,  $H_0 = H \setminus \{0\}$ ,  $I$  – тождественный оператор в  $H$ . Операторные неравенства  $A \geq B$  и  $A > B$ , как обычно, понимаются в том смысле, что для любых  $u \in H_0$  выполнены неравенства  $(Au, u) \geq (Bu, u)$  и  $(Au, u) > (Bu, u)$  соответственно.

Пусть  $\Delta = [\lambda_-, \lambda_+]$ , где  $\lambda_+ > \lambda_- \geq 0$ . Рассмотрим задачу отыскания пар  $(\lambda, u) \in \Delta \times H_0$  таких, что

$$A(\lambda)u = \lambda Bu, \quad (4.13)$$

где  $A(\lambda)$  при  $\lambda \in \Delta$  и  $B$  – линейные самосопряженные операторы, действующие в  $H$ . Введем в рассмотрение отношение Рэля:

$$R(\lambda, u) = \frac{(A(\lambda)u, u)}{(Bu, u)}, \quad \lambda \in \Delta, u \in H_0.$$

**Теорема 4.16.** Пусть выполнены следующие условия:

1. Оператор  $B$  компактный,  $B > 0$  и  $0 \leq A(\lambda) \leq tI$ , где  $t > 0$  и не зависит от  $\lambda$ .
2. Оператор-функция  $A(\lambda)$  непрерывна на  $\Delta$ .
3. Для любого  $u \in H_0$  функция  $R(\lambda, u)$  убывает по  $\lambda$  на  $\Delta$ .

4. Задача на собственные значения

$$(\gamma, u) \in \Delta \times H_0 : \quad A(\lambda_+)u = \gamma Bu \quad (4.14)$$

в интервале  $(0, \lambda_+]$  имеет  $N$  собственных значений  $\gamma_i^+$  (с учетом их кратности):

$$0 < \gamma_1^+ \leq \gamma_2^+ \leq \dots \leq \gamma_N^+ \leq \lambda_+.$$

5.  $R(\lambda_-, u) > \lambda_-$  для любого  $u \in H_0$ .

Тогда существует  $N$  и только  $N$  спектральных пар  $(\lambda_i, u_i)$  задачи (4.13) таких, что

$$\lambda_- < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \leq \lambda_+.$$

При этом  $\lambda_N = \lambda_+$ , если  $\gamma_N^+ = \lambda_+$ , и  $\lambda_N < \lambda_+$ , если  $\gamma_N^+ < \lambda_+$ . Далее, если

$$\lambda_{l-1} < \lambda_l < \lambda_{l+1},$$

то  $u_l$  определяется однозначно (с точностью до множителя); если же

$$\lambda_{l-1} < \lambda_l = \lambda_{l+1} = \dots = \lambda_{l+m-1} < \lambda_{l+m},$$

то векторы  $u_i$ ,  $i = l, \dots, l + m - 1$ , могут быть выбраны ортонормированными:

$$(Bu_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = l, \dots, l + m - 1.$$

Каждое число  $\lambda = \lambda_l$ ,  $l \geq 1$ , является единственным корнем уравнения:

$$\lambda = \min_{H_l \subset H} \max_{u \in H_l} R(\lambda, u),$$

где  $H_l$  есть  $l$ -мерное подпространство  $H$  без нулевого элемента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно  $\lambda \in \Delta$  и рассмотрим задачу на собственные значения:

$$(\gamma, u) \in \mathbb{R} \times H_0 : \quad A(\lambda)u = \gamma Bu, \quad (4.15)$$

в которую спектральный параметр  $\gamma = \gamma(\lambda)$  входит линейно. Согласно спектральной теории компактных операторов (см., напр., [84]), эта задача имеет счетное множество положительных собственных значений, каждое из которых имеет конечную кратность. Занумеруем их в порядке возрастания:

$$0 < \gamma_1(\lambda) \leq \dots \leq \gamma_l(\lambda) \leq \dots, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_l(\lambda) = \infty,$$

указывая каждое число столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные элементы  $u_l(\lambda)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , образуют базис в пространстве  $H$ , при этом можно считать, что

$$(Bu_k(\lambda), u_l(\lambda)) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

В силу принципа Куранта имеем:

$$\gamma_l(\lambda) = \min_{H_l \subset H} \max_{v \in H_l} R(\lambda, v).$$

Пусть  $\varphi_l(\lambda) = \gamma_l(\lambda) - \lambda$ . Таким образом, корни  $\lambda_l$  уравнений

$$\varphi_l(\lambda) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, \quad \lambda \in \Delta, \quad (4.16)$$

и только они, являются собственными значениями задачи (4.13).

Покажем, что каждое из уравнений (4.16) имеет решение, и притом только одно. Отсюда будет следовать первое утверждение теоремы. Воспользуемся при этом леммой, которую докажем позже.

**Лемма 4.3.** *Функции  $\gamma_l(\lambda)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , являются непрерывными, положительными и строго убывающими на  $\Delta$ .*

Из леммы 4.3 следует, что функции  $\varphi_l(\lambda)$  являются непрерывными убывающими на  $\Delta$ . Далее, в силу принципа Куранта и условий 4, 5 они имеют разные знаки на концах отрезка  $\Delta$ :  $\varphi_l(\lambda_-) > 0$ ,  $\varphi_l(\lambda_+) \leq 0$ , если  $l = 1, 2, \dots, N$ . Отсюда следует однозначная разрешимость каждого из уравнений (4.16). Отметим, что, по условию теоремы,  $\gamma_l(\lambda_+) - \lambda_+ > 0$  для  $l > N$ , поэтому уравнения  $\gamma_l(\lambda) = \lambda$  не имеют решений для  $l > N$ . Заключительное утверждение теоремы очевидно.  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму 4.3. Убывание функций  $\gamma_l(\lambda)$  на отрезке  $\Delta$  вытекает из принципа Куранта и условия 3. Положительность их очевидна. Докажем, что они непрерывны. Имеем:

$$|R(\lambda, v) - R(\eta, v)| \leq \|A(\lambda) - A(\eta)\| \frac{\|v\|^2}{(Bv, v)}.$$

Обозначим через  $E_l(\eta)$  подпространство, натянутое на собственные векторы, отвечающие собственным значениям  $\gamma_1(\eta), \dots, \gamma_l(\eta)$  задачи (4.15). Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_l(\lambda) &= \min_{H_l \subset H} \max_{v \in H_l} R(\lambda, v) \leq \max_{v \in E_l(\eta)} R(\lambda, v) \leq \\ &\leq \max_{v \in E_l(\eta)} R(\eta, v) + \max_{v \in E_l(\eta)} |R(\lambda, v) - R(\eta, v)| \leq \\ &\leq \gamma_l(\eta) + \|A(\lambda) - A(\eta)\| \max_{v \in H_l} \frac{\|v\|^2}{(Bv, v)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует непрерывность функций  $\gamma_l(\lambda)$ :

$$|\gamma_l(\lambda) - \gamma_l(\eta)| \leq \|A(\lambda) - A(\eta)\| \max_{v \in H_l} \frac{\|v\|^2}{(Bv, v)} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \eta.$$

□

**7. Определение оператора  $A_{\beta^2}(k^2)$  для  $(\beta^2, k^2) \in \bar{\Lambda}$ .** Оператор  $A_{\beta^2}(k^2)$  задачи (4.12) был определен лишь для  $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  – открытое множество. Чтобы воспользоваться результатами предыдущего пункта, необходимо доопределить его на замкнутом множестве  $\bar{\Lambda}$ . Поскольку от  $k^2$  зависит только оператор  $S(\sigma)$ , изучим прежде всего его свойства. При этом нам будет удобно нормировать пространство  $W_2^{1/2}(\Gamma_R)$  следующим образом:

$$\|u\|_{1/2, \Gamma_R}^2 = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) [a_l^2(u) + b_l^2(u)]. \quad (4.17)$$

Известно (см., напр., [71, с. 29]), что существует не зависящая от  $u$  постоянная  $c_{1/2}$  такая, что

$$\|u\|_{1/2, \Gamma_R} \leq c_{1/2} \|u\|_{1, \Omega_R} \quad \forall u \in W_2^1(\Omega_R).$$

**Лемма 4.4.** Для любого  $\sigma > 0$  оператор  $S(\sigma)$  самосопряженный, неотрицательно-определенный и компактный,

$$\|S(\sigma)\| \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow 0.$$

Оператор-функция  $S(\sigma)$  непрерывно дифференцируема при  $\sigma > 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметрия и неотрицательность  $S(\sigma)$  очевидны. Докажем его компактность. Доказательство компактности оператора  $S(\sigma)$  можно провести, опираясь на общие теоремы вложения соболевских пространств. В ходе приводимого ниже элементарного доказательства получена полезная в дальнейшем оценка оператора  $S(\sigma)$ .

В силу свойств функций Бесселя, функции  $K_{l-1}(z)/K_l(z)$ ,  $l \geq 1$ , являются непрерывными монотонно возрастающими от нуля до единицы на  $[0, \infty)$ . Далее, функция  $H_0(z) = zK_1(z)/K_0(z)$  также является непрерывной монотонно возрастающей от нуля на  $[0, \infty)$ . Обозначим

$$m(\sigma) = \max\{H_0(R\sigma), R\sigma\}.$$

Тогда, в силу равенства Парсеваля справедлива оценка:

$$(S(\sigma)u, u) \leq m(\sigma) \sum_{l=0}^{\infty} [a_l^2(u) + b_l^2(u)] = m(\sigma) \|u\|_{L_2(\Gamma_R)}^2.$$

Поскольку вложение  $W_2^1(\Omega_R) \subset L_2(\Gamma_R)$  компактно и

$$\|u\|_{L_2(\Gamma_R)} \leq c_{\Gamma_R} \|u\|_{1, \Omega_R}$$

для любого  $u \in W_2^1(\Omega_R)$ , то отсюда следует компактность оператора  $S(\sigma)$  и оценка:

$$\|S(\sigma)\| \leq c_{\Gamma_R}^2 m(\sigma). \quad (4.18)$$

Отметим, что на  $[0, \infty)$  функция  $m(\sigma)$  непрерывна и в нуле ведет себя, как  $-1/\ln(R\sigma)$ . Таким образом,  $\|S(\sigma)\| \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Докажем дифференцируемость  $S(\sigma)$ . Простые вычисления показывают, что при  $z > 0$  и  $l \geq 1$  справедливы неравенства:

$$0 < H'_l(z) = \frac{H_l^2(z) - z^2 - l^2}{z} \leq 2l \leq 2(l+1), \quad H'_0(z) > 0.$$

Полагая  $c(\sigma) = R \max\{2, H'_0(R\sigma)\}$ , имеем:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{d}{d\sigma}(S(\sigma)u, u) &= \sum_{l=0}^{\infty} 'RH'_l(R\sigma) [a_l^2(u) + b_l^2(u)] \leq \\ &\leq c(\sigma) \sum_{l=0}^{\infty} '(l+1) [a_l^2(u) + b_l^2(u)] = c(\sigma) \|u\|_{1/2, \Gamma_R}^2 \leq c_{1/2}^2 c(\sigma) \|u\|_{1, \Omega_R}^2. \end{aligned}$$

Функция  $c(\sigma)$  непрерывно зависит от  $\sigma$  при  $\sigma > 0$  и имеет особенность вида  $-(\sigma \ln \sigma)^{-1}$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .  $\square$

Из леммы следует, что оператор-функцию  $S(\sigma)$  можно продолжить по непрерывности на полуось  $[0, \infty)$ . Для этого достаточно положить  $S(0) = 0$ . Полученное продолжение непрерывно:

$$\|S(\sigma) - S(\eta)\| \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow \eta, \quad \sigma, \eta \in [0, \infty).$$

Говоря далее об операторе  $S(\sigma)$  при  $\sigma \in [0, \infty)$  и об операторе  $A_{\beta^2}(k^2)$  при  $(\beta^2, k^2) \in \bar{\Lambda}$ , мы всегда будем иметь в виду указанное продолжение.

**8. Уравнение отсечки и точки отсечки.** Основную трудность при применении теоремы 4.16 для доказательства существования решений задачи (4.12), очевидно, представляет проверка условия 4. Обозначим через  $\Delta_{\beta^2}$  отрезок  $[k_-^2(\beta^2), k_+^2(\beta^2)]$ , где

$$k_-^2(\beta^2) = \beta^2/n_+^2, \quad k_+^2(\beta^2) = \beta^2/n_\infty^2.$$

Задача на собственные значения (4.14) в рассматриваемом нами случае принимает следующий вид:

$$(\gamma, u) \in \Delta_{\beta^2} \times V : \quad A_0 u + \beta^2 B_0 u = \gamma B u. \quad (4.19)$$



Действительно, при фиксированном  $\beta^2 > 0$  и  $k^2 = k_+^2(\beta^2)$  параметр  $\sigma$  обращается в нуль и  $S(\sigma) = 0$ . Задача (4.19) играет ключевую роль при доказательстве существования решений задачи (4.12). Исследуем свойства решений задачи (4.19).

Для любого  $\beta^2 \geq 0$  задача (4.19) имеет счетное множество собственных значений конечной кратности. Занумеруем их в порядке неубывания:

$$0 \leq \gamma_1(\beta^2) \leq \dots \leq \gamma_l(\beta^2) \leq \dots, \quad \gamma_l(\beta^2) \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty,$$

указывая каждое число столько раз, какова его кратность. Этим числам соответствуют собственные элементы  $u_l(\beta^2)$ , образующие базис в  $V$  и такие, что

$$(Bu_i(\beta^2), u_j(\beta^2)) = \delta_{ij}, \quad i, j \geq 1.$$

В силу принципа Куранта для любого  $l \geq 1$  имеем:

$$\gamma_l(\beta^2) = \min_{V_l \subset V} \max_{u \in V_l} R_{\beta^2}(u), \quad R_{\beta^2}(u) = \frac{(A_0 u + \beta^2 B_0 u, u)}{(Bu, u)}.$$

Отметим следующие свойства функций  $\gamma_l(\beta^2)$ .

**Лемма 4.5.** *Функции  $\gamma_l(\beta^2)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , – возрастающие непрерывные функции параметра  $\beta^2 \geq 0$ . Причем,*

$$0 = \gamma_1(0) < \gamma_2(0), \quad k_-^2(\beta^2) < \gamma_1(\beta^2) < k_+^2(\beta^2) \quad \forall \beta^2 > 0,$$

$$\lim_{\beta^2 \rightarrow \infty} \frac{\gamma_l(\beta^2)}{\beta^2} = \frac{1}{n_+^2}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проверка непрерывности функций  $\gamma_l(\beta^2)$  проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения леммы 4.3. Из монотонности отношения Рэля по параметру  $\beta^2$  следует возрастание функций  $\gamma_l(\beta^2)$ . Однократность числа  $\gamma_1(0)$  следует из того, что ядро оператора  $A_0$  состоит только из функций, тождественно равных постоянной в области  $\Omega_R$ . Далее, из представления

$$\gamma_1(\beta^2) = \min_{u \in V} \left\{ \left[ (A_0 u, u) + \beta^2 \int_{\Omega_R} (1 - n^2/n_+^2) u^2 dx \right] (Bu, u)^{-1} \right\} + \frac{\beta^2}{n_+^2}$$

следует оценка снизу  $\gamma_1(\beta^2) > k_-^2(\beta^2)$ . Оценка сверху для  $\gamma_1(\beta^2)$  следует из неравенств:

$$\gamma_1(\beta^2) = \min_{u \in V} R_{\beta^2}(u) \leq R_{\beta^2}(1) = \beta^2 |\Omega_R| \left( \int_{\Omega_R} n^2 dx \right)^{-1} < k_+^2(\beta^2).$$

Докажем справедливость равенств (4.20). Заметим, что при  $l \geq 1$

$$\frac{\gamma_l(\beta^2)}{\beta^2} - \frac{1}{n_+^2} \geq \frac{\gamma_1(\beta^2)}{\beta^2} - \frac{1}{n_+^2} > 0.$$

Пусть

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) = n(x_0), \quad n_- = \min_{x \in \Omega} n(x),$$

$\Omega_\rho$  – круг радиуса  $\rho$  с центром в точке  $x_0$ ,  $\Omega_\rho \subset \Omega_R$ ,

$$\delta_\rho = \max_{x \in \Omega_\rho} \frac{n_+^2 - n^2(x)}{n^2(x)},$$

$V_\rho$  – множество функций из  $V$ , равных нулю вне  $\Omega_\rho$ . Для функций  $u \in V_\rho$  имеем:

$$\begin{aligned} R_{\beta^2}(u) &= \left[ (A_0 u, u) + \beta^2 \int_{\Omega_\rho} (1 - n^2/n_+^2) u^2 dx \right] (B u, u)^{-1} + \frac{\beta^2}{n_+^2} \leq \\ &\leq \frac{(A_0 u, u)}{(B u, u)} + \frac{\beta^2 \delta_\rho}{n_+^2} + \frac{\beta^2}{n_+^2} \leq \left( \int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 dx \right) \left( n_-^2 \int_{\Omega_\rho} u^2 dx \right)^{-1} + \frac{\beta^2 \delta_\rho}{n_+^2} + \frac{\beta^2}{n_+^2}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\lambda_l^\rho$  собственные значения оператора Лапласа в круге  $\Omega_\rho$  при краевых условиях Дирихле. Поскольку  $\lambda_l^\rho = \rho^{-2} \lambda_l^1$ , то из предыдущей оценки следует, что

$$\gamma_l(\beta^2) = \min_{V_l \subset V} \max_{u \in V_l} R_{\beta^2}(u) \leq \min_{V_l \subset V_\rho} \max_{u \in V_l} R_{\beta^2}(u) \leq \frac{\lambda_l^1}{\rho^2 \beta^2 n_-^2} + \frac{\beta^2 \delta_\rho}{n_+^2} + \frac{\beta^2}{n_+^2}.$$

Таким образом,

$$0 < \frac{\gamma_l(\beta^2)}{\beta^2} - \frac{1}{n_+^2} \leq \frac{\lambda_l^1}{\rho^2 \beta^2 n_-^2} + \frac{\delta_\rho}{n_+^2}.$$

Переходя здесь к пределу при  $\beta^2 \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow 0$  так, чтобы  $\rho^2 \beta^2 \rightarrow \infty$ , получаем (4.20).  $\square$

**Лемма 4.6.** *Для каждого  $l = 1, 2, \dots$  уравнение*

$$\gamma_l(\beta^2) = k_+^2(\beta^2) \quad (4.21)$$

*имеет единственное решение  $\beta_l^2$ , причем,*

$$0 = \beta_1^2 < \beta_2^2 \leq \beta_3^2 \leq \dots \leq \beta_l^2 \leq \dots, \quad \beta_l^2 \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty.$$

*Числа  $\beta_l^2$  являются собственными значениями задачи:*

$$u \in V \setminus \{0\} : A_0 u = \beta^2 C u, \quad C = \frac{1}{n_\infty^2} B - B_0. \quad (4.22)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользуемся предыдущей леммой. Уравнение (4.21) при  $l = 1$  имеет единственное решение  $\beta_1^2 = 0$ . Пусть для всех  $l \geq 2$  определены функции:

$$\nu_l(\beta^2) = \gamma_l(\beta^2)/\beta^2 - 1/n_\infty^2.$$

Каждая функция  $\nu_l$  непрерывна при  $\beta^2 > 0$ ,

$$\lim_{\beta^2 \rightarrow 0} \nu_l(\beta^2) = \infty, \quad \lim_{\beta^2 \rightarrow \infty} \nu_l(\beta^2) = \frac{1}{n_+^2} - \frac{1}{n_\infty^2} < 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (4.21) имеет решение  $\beta_l^2 > 0$  при значениях  $l \geq 2$ . Покажем, что  $\beta_l^2$  определяется единственным образом. Для этого перепишем уравнение (4.19) тождественно в виде:

$$u \in V : A_0 u - \beta^2 C u = \beta^2 \nu_l(\beta^2) B u. \quad (4.23)$$

Отсюда следует, что корнями уравнения (4.21) могут быть только собственные значения задачи (4.22). Далее, из принципа Куранта для задачи (4.23) следует, что функция  $\beta^2 \nu_l(\beta^2)$  не возрастает (так как  $C \geq 0$ ), следовательно, функция  $\nu_l$  строго убывает и имеет единственный корень.  $\square$

Качественное поведение кривых  $\gamma_l(\beta^2)$  показано на рисунке 2.

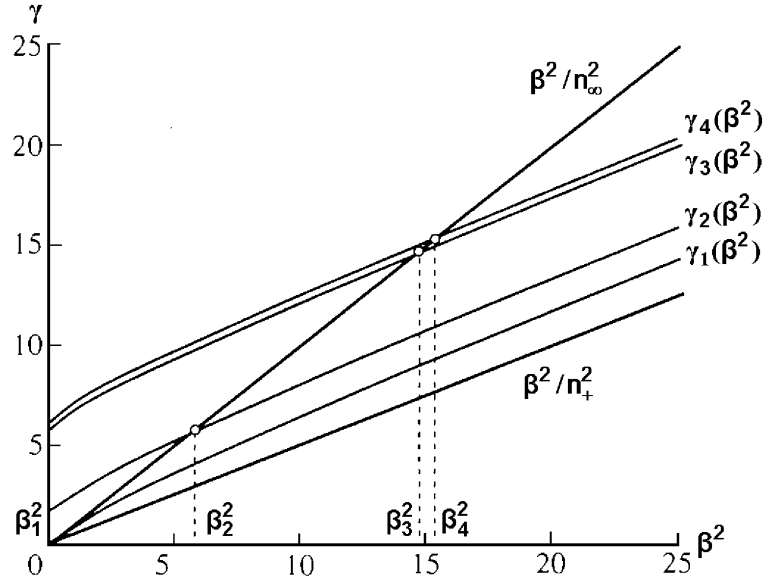


Рис. 2. Поведение функций  $\gamma = \gamma_l(\beta^2)$

Задачу на собственные значения (4.22) назовем уравнением отсечки, а собственные значения  $\beta_l^2$  – точками отсечки. Для  $\beta^2 > 0$  определим целочисленную функцию

$$N(\beta^2) = \max\{l : \beta_l^2 < \beta^2\}. \quad (4.24)$$

Из лемм 4.5 и 4.6 следует

**Теорема 4.17.** Пусть  $\beta_l^2$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , – точки отсечки, функция  $N(\beta^2)$  определена формулой (4.24). Тогда для любого  $\beta^2 > 0$  задача (4.19) в интервале  $(k_-^2(\beta^2), k_+^2(\beta^2)]$  имеет  $N(\beta^2)$  и только  $N(\beta^2)$  (с учетом кратности) собственных значений  $\gamma_l(\beta^2)$ ,

$$k_-^2(\beta^2) < \gamma_1(\beta^2) \leq \dots \leq \gamma_{N(\beta^2)}(\beta^2) \leq k_+^2(\beta^2),$$

соответствующие им собственные векторы ортонормированы:

$$(Bu_i(\beta^2), u_j(\beta^2)) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N(\beta^2).$$

Причем,  $N(\beta^2) \geq 1$  для любого  $\beta^2 > 0$  и  $N(\beta^2) = 1$  для  $\beta^2 \in (0, \beta_2^2]$ .

**9. Существование решений и их свойства.** На основе полученных выше результатов мы можем теперь сформулировать и доказать основные утверждения параграфа. Следующая теорема описывает все множество решений задачи (4.12).

**Теорема 4.18.** Пусть  $\beta_l^2$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , – точки отсечки; функция  $N(\beta^2)$  определена формулой (4.24). Тогда для любого  $\beta^2 > 0$  задача (4.12) имеет  $N(\beta^2)$ , и только  $N(\beta^2)$ , решений  $(\beta^2, k_i^2(\beta^2), u_i(\beta^2))$ ,

$$k_-^2(\beta^2) < k_1^2(\beta^2) \leq \dots \leq k_{N(\beta^2)}^2(\beta^2) < k_+^2(\beta^2).$$

Если

$$k_{l-1}^2(\beta^2) < k_l^2(\beta^2) < k_{l+1}^2(\beta^2),$$

то  $u_l(\beta^2)$  определяется однозначно (с точностью до множителя); если же

$$k_{l-1}^2(\beta^2) < k_l^2(\beta^2) = k_{l+1}^2(\beta^2) = \dots = k_{l+m-1}^2(\beta^2) < k_{l+m}^2(\beta^2),$$

то векторы  $u_i(\beta^2)$ ,  $i = l, \dots, l + m - 1$ , могут быть выбраны ортонормированными:

$$(Bu_i(\beta^2), u_j(\beta^2)) = \delta_{ij}, \quad i, j = l, \dots, l + m - 1.$$

Каждое число  $k^2 = k_l^2(\beta^2)$ ,  $l \geq 1$ , является единственным корнем уравнения:

$$k^2 = \min_{H_l \subset V} \max_{v \in H_l} R_\beta^2(k^2, u), \quad R_\beta^2(k^2, u) = \frac{(A_0 u + \beta^2 B_0 u + S(\sigma)u, u)}{(Bu, u)}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При фиксированном  $\beta^2 > 0$  задача поиска ненулевых функций  $u \in V$  и  $k^2 \in \Delta_{\beta^2}$ , удовлетворяющих (4.12), совпадает с задачей, изученной в разд. 3, если положить

$$H = V, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{1, \Omega_R}, \quad \lambda = k^2, \quad A(\lambda) = A_{\beta^2}(k^2), \quad \Delta = \Delta_{\beta^2}.$$

Покажем, что все условия теоремы 4.16 выполнены. Отсюда будут следовать утверждения доказываемой теоремы.

1. Симметричность и неотрицательность  $A_{\beta^2}(k^2)$  вытекают из определения. Далее (см. (4.18)),

$$(A_{\beta^2}(k^2)u, u) \leq \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + \|u\|_{1/2, \Gamma_R}^2 + \beta^2 \|u\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + m(\sigma) \|u\|_{0, \Gamma_R}^2.$$

Отсюда следует, что  $A_{\beta^2}(k^2) \leq m_\beta^2 I$ , где

$$m_\beta^2 = \max_{k^2 \in \Delta_{\beta^2}} \left[ 1 + \beta^2 + c_{1/2}^2 + c_{\Gamma_R}^2 m(\sigma) \right].$$

Очевидно также, что  $B > 0$ ,  $B$  – самосопряженный компактный оператор. Это следует из ограниченности функции  $n(x)$  в области  $\Omega_R$  и компактности вложения  $W_2^1(\Omega_R) \subset L_2(\Omega_R)$ .

2. Непрерывность оператор-функции  $A_{\beta^2}(k^2)$  по  $k^2 \in \Delta_{\beta^2}$  следует из непрерывности оператор-функции  $S(\sigma)$  при  $\sigma \geq 0$ .

3. Отношение Рэля  $R(\lambda, u)$  имеет вид:

$$R(\lambda, u) = R_{\beta^2}(k^2, u) = \frac{(A_0 u + \beta^2 B_0 u, u)}{(Bu, u)} + \frac{(S(\sigma)u, u)}{(Bu, u)}, \quad u \neq 0.$$

От  $k^2$  зависит только второе слагаемое. Поскольку функции

$$zK_{l-1}(z)/K_l(z), \quad l \geq 1, \quad H_0(z), \quad z \in [0, \infty),$$

являются монотонно возрастающими, то  $(S(\sigma)u, u)$  монотонно возрастает по  $\sigma$  и монотонно убывает по  $k^2 \in \Delta_{\beta^2}$ . Итак,  $R_{\beta^2}(k^2, u)$  убывает по  $k^2$  при любом фиксированном  $u$ .

4. Количество  $N(\beta^2)$  собственных значений  $\gamma_l(\beta^2)$  задачи (4.19) определяется соотношением (4.24) (см. теорему 4.17).

5. Неравенство

$$R_{\beta^2}(k_-^2(\beta^2), u) > k_-^2(\beta^2) \quad \forall u \in V \setminus \{0\}$$

в силу неотрицательности оператора  $S$  вытекает из леммы 4.5. Более того, для любого  $k^2 \in \Delta_{\beta^2}$  имеем:

$$R_{\beta^2}(k^2, u) \geq \frac{(A_0 u + \beta^2 B_0 u, u)}{(Bu, u)} \geq \gamma_1(\beta^2) > \frac{\beta^2}{n_+^2} = k_-^2(\beta^2).$$

Таким образом, все условия теоремы 4.16 выполнены. Из нее следует, что для любого  $\beta^2 > 0$  задача (4.12) имеет ровно  $N(\beta^2)$  решений вида  $(\beta^2, k_i^2(\beta^2), u_i(\beta^2))$ , причем,

$$k_-^2(\beta^2) < k_1^2(\beta^2) \leq \dots \leq k_{N(\beta^2)}^2(\beta^2) < k_+^2(\beta^2).$$

Отметим, что числа  $k_l^2(\beta^2)$  определены для любого  $\beta^2 > \beta_l^2$ .  $\square$

**10. Свойства дисперсионных кривых.** В теореме 4.18 фактически доказано, что множество всех  $(\beta^2, k^2)$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (4.12), состоит из дисперсионных кривых  $k^2 = k_l^2(\beta^2)$ ,  $\beta^2 \in (\beta_l^2, \infty)$ . Укажем основные их свойства. Для всех  $l \geq 1$  введем в рассмотрение функции:

$$f_l(\beta^2, k^2) = \min_{H_l \subset V} \max_{u \in H_l} R_{\beta^2}(k^2, u).$$

Нетрудно видеть, что функции  $f_l(\beta^2, k^2)$ ,  $l \geq 1$ , возрастают по  $\beta^2$ , убывают по  $k^2$  и являются локально липшицевыми по совокупности аргументов. Для доказательства последнего свойства достаточно использовать рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 4.3, и учесть дифференцируемость оператор-функции  $S(\sigma)$  при  $\sigma > 0$ .

**Теорема 4.19.** *Дисперсионные кривые  $k^2 = k_l^2(\beta^2)$ , определенные на  $(\beta_l^2, \infty)$ , при всех  $l \geq 1$  являются локально липшицевыми, возрастающими и имеют место равенство:*

$$\lim_{\beta^2 \rightarrow \infty} \frac{k_l^2(\beta^2)}{\beta^2} = \frac{1}{n_+^2}. \quad (4.25)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Функции  $f_l(\beta^2, k^2)$ ,  $l \geq 1$ , возрастают по  $\beta^2$ . При каждом  $\beta^2 \in (\beta_l^2, \infty)$  значение  $k_l^2$  является решением уравнения  $k^2 = f_l(\beta^2, k^2)$ . Следовательно, функции  $k_l^2 = k_l^2(\beta^2)$ ,  $l \geq 1$ , возрастают по  $\beta^2$ . Далее, пусть  $\hat{\beta}^2 \geq \beta^2$ . Тогда

$$0 < k_l^2(\hat{\beta}^2) - k_l^2(\beta^2) = [f_l(\hat{\beta}^2, k_l^2(\hat{\beta}^2)) - f_l(\hat{\beta}^2, k_l^2(\beta^2))] +$$

$$\begin{aligned}
& +[f_l(\hat{\beta}^2, k_l^2(\beta^2)) - f_l(\beta^2, k_l^2(\beta^2))] \leq \\
& \leq f_l(\hat{\beta}^2, k_l^2(\beta^2)) - f_l(\beta^2, k_l^2(\beta^2)) \leq c(\hat{\beta}^2 - \beta^2),
\end{aligned}$$

и, следовательно, функции  $k^2 = k_l^2(\beta^2)$ ,  $l \geq 1$ , являются локально липшицевыми. Доказательство равенства (4.25) проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения леммы 4.5.  $\square$

**11. Свойства собственных функций.** Информацию о собственных функциях задачи (4.4) легко получить, если воспользоваться теоремой 4.18 и эквивалентностью задач (4.12) и (4.4).

Пусть  $(k_l^2(\beta^2), u_l(\beta^2))$  – решения задачи (4.12) при фиксированном  $\beta^2$ . Осуществим метагармоническое продолжение следа функции  $u_l(\beta^2)$  с контура  $\Gamma_R$  в  $\Omega_{R,\infty}$ . Полученную функцию, определенную на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , обозначим через  $u^l(\beta^2)$ ,  $u^l(\beta^2) \in H^1$ . Для любой функции  $v \in H^1$  имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u^l(\beta^2) \cdot \nabla v + \beta^2 u^l(\beta^2) v) dx = k_l^2(\beta^2) \int_{\mathbb{R}^2} n^2 u^l(\beta^2) v dx.$$

На основе теоремы 4.18 и единственности метагармонического продолжения, стандартными рассуждениями доказывается

**Теорема 4.20.** *Собственные функции  $u^l(\beta^2)$ , соответствующие различным собственным значениям  $k_l^2(\beta^2)$ , ортогональны:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} n^2 u^l(\beta^2) u^m(\beta^2) dx = 0, \text{ если } k_l^2(\beta^2) \neq k_m^2(\beta^2).$$

Если

$$k_{l-1}^2(\beta^2) < k_l^2(\beta^2) < k_{l+1}^2(\beta^2)$$

то  $u^l(\beta^2)$  определяется однозначно (с точностью до постоянного множителя); если же

$$k_{l-1}^2(\beta^2) < k_l^2(\beta^2) = k_{l+1}^2(\beta^2) = \dots = k_{l+m-1}^2(\beta^2) < k_{l+m}^2(\beta^2),$$

то функции  $u^i(\beta^2)$ ,  $i = l, \dots, l + m - 1$ , могут быть выбраны ортонормированными.



## § 2. Векторная задача в вариационной постановке

**1. Постановка задачи.** Приведем постановку задачи о поверхностных собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода. Пусть  $\Omega$  – ограниченная, не обязательно односвязная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , содержащая начало координат, – область поперечного сечения волновода. Каждая связная компонента ее границы  $\Gamma$  является липшицевой кривой. Относительно показателя преломления  $n$  предположим следующее:  $n = n_\infty = \text{const}$  при  $x \notin \Omega$ ;  $n$  – непрерывна на  $\bar{\Omega}$ ;

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} n(x) \geq n_\infty, \quad n_+ = \max_{x \in \bar{\Omega}} n(x) > n_\infty > 0.$$

Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  и частота электромагнитных колебаний  $\omega$  – положительные вещественные параметры. Задача сводится (см. параграф 1 главы 1) к отысканию таких значений параметров  $\beta$  и  $\omega$ , при которых существуют нетривиальные экспоненциально убывающие на бесконечности решения  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  следующих, понимаемых в классическом смысле, уравнений:

$$\text{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (4.26)$$

$$\nu \times \mathbf{E}^+ = \nu \times \mathbf{E}^-, \quad \nu \times \mathbf{H}^+ = \nu \times \mathbf{H}^-, \quad x \in \Gamma, \quad (4.27)$$

где векторная операция  $\text{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 33.

Введем ряд обозначений. Для скалярного поля  $\varphi$ , векторных полей  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)^T$ ,  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}^T, F_3)^T$ , и  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  примем:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \partial F_2 / \partial x_1 - \partial F_1 / \partial x_2, \quad \text{div } \mathbf{F} = \partial F_1 / \partial x_1 + \partial F_2 / \partial x_2,$$

$$\nabla \varphi = \begin{bmatrix} \partial \varphi / \partial x_1 \\ \partial \varphi / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{rot } \varphi = \begin{bmatrix} \partial \varphi / \partial x_2 \\ -\partial \varphi / \partial x_1 \end{bmatrix},$$

$$a_D(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \int_D \left( \frac{1}{n^2} \text{rot } \mathbf{F} \overline{\text{rot } \mathbf{F}'} + \frac{1}{n_\infty^2} \text{div } \mathbf{F} \overline{\text{div } \mathbf{F}'} + \frac{1}{n^2} \nabla F_3 \cdot \overline{\nabla F_3'} \right) dx,$$

$$\begin{aligned}
b_D(\mathbf{F}, \mathbf{F}') &= \int_D \left( \frac{1}{n_\infty^2} - \frac{1}{n^2} \right) \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{F}'} dx, \\
c_D(\mathbf{F}, \mathbf{F}') &= i \int_D \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_\infty^2} \right) \left( \mathbf{F} \cdot \overline{\nabla \mathbf{F}'_3} - \nabla \mathbf{F}_3 \cdot \overline{\mathbf{F}'} \right) dx, \\
d_D(\mathbf{F}, \mathbf{F}') &= \int_D \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{F}'} dx, \\
c(\beta; \mathbf{F}, \mathbf{F}') &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{F} \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta \mathbf{F}'} + \frac{1}{n_\infty^2} \operatorname{div}_\beta \mathbf{F} \cdot \overline{\operatorname{div}_\beta \mathbf{F}'} \right) dx,
\end{aligned}$$

где символ “ $\cdot$ ” означает скалярное произведение векторов.

Пусть  $V = [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$  – пространство Соболева комплекснозначных функций с нормой:

$$\|\mathbf{F}\|_{1, \mathbb{R}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \mathbf{F}|^2 + |\mathbf{F}|^2) dx,$$

где  $|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{F}}$ ,  $|\nabla \mathbf{F}|^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 |\partial \mathbf{F}_j / \partial x_i|^2$ .

В работе [112] получена вариационная формулировка задачи (4.26), (4.27): найти все такие пары  $(\beta, k) \in \mathbb{R}_+^2$ , при которых существуют ненулевые вектора  $\mathbf{H} \in V$ , являющиеся решениями уравнения:

$$c(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = k^2 d_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \quad \forall \mathbf{H}' \in V, \quad (4.28)$$

где  $k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$ .

В работе [112] доказано, что нетривиальные решения задачи (4.28) могут существовать только при

$$(\beta, k) \in \Lambda = \{(\beta, k) : \beta/n_+ < k < \beta/n_\infty, \beta > 0\}.$$

Итак, задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода формулируется следующим образом [112]: найти все  $(\beta, k) \in \Lambda$  и  $\mathbf{H} \in V \setminus \{0\}$  удовлетворяющие уравнению (4.28).

**2. Оператор  $S_{\Gamma_R}$ .** Пусть  $\Omega_R$  – открытый круг радиуса  $R$  такой, что  $\Omega \subset \Omega_R$ ;  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  – единичный вектор внешней нормали к границе  $\Gamma_R$  области  $\Omega_R$ ;  $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$  – касательный вектор к  $\Gamma_R$ ;  $\Omega_{R,\infty} = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_R$ . Введем пространства комплексно-значных функций:

$$V_{\Omega_R} = [W_2^1(\Omega_R)]^3, \quad V_\infty = [W_2^1(\Omega_{R,\infty})]^3,$$

$$V_\infty^0 = \{H \in V_\infty : H|_{\Gamma_R} = 0\},$$

и пусть  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $V_{\Omega_R}$ :

$$(H, H') = \int_{\Omega_R} (\nabla H \cdot \nabla \bar{H}' + H \cdot \bar{H}') dx.$$

Пусть  $\sigma^2 = \beta^2 - k^2 n_\infty^2 > 0$ . Вектор  $H_\sigma \in V_\infty$  назовем метагармоническим продолжением вектора  $H \in [W_2^{1/2}(\Gamma_R)]^3$  в область  $\Omega_{R,\infty}$ , если  $H_\sigma|_{\Gamma_R} = H$ , и

$$s_{\Omega_{R,\infty}}(\sigma; H_\sigma, H') = 0 \quad \forall H' \in V_\infty^0,$$

где

$$\begin{aligned} s_{\Omega_{R,\infty}}(\sigma, H, H') &= a_{\Omega_{R,\infty}}(H, H') + \frac{\beta^2}{n_\infty^2} d_{\Omega_{R,\infty}}(H, H') - k^2 d_{\Omega_{R,\infty}}(H, H') = \\ &= \int_{\Omega_{R,\infty}} \frac{1}{n_\infty^2} \left( \operatorname{rot} H \operatorname{rot} \bar{H}' + \operatorname{div} H \operatorname{div} \bar{H}' + \nabla H_3 \cdot \nabla \bar{H}'_3 + \sigma^2 H \cdot \bar{H}' \right) dx. \end{aligned} \quad (4.29)$$

С помощью формулы интегрирования по частям нетрудно показать, что метагармоническое продолжение удовлетворяет тождеству:

$$\int_{\Omega_{R,\infty}} (\nabla H_\sigma \cdot \nabla \bar{H}' + \sigma^2 H_\sigma \cdot \bar{H}') dx = 0 \quad \forall H' \in V_\infty^0. \quad (4.30)$$

Следовательно, указанное продолжение существует, определяется единственным образом и, кроме того, имеет место равенство [72]:

$$\int_{\Omega_{R,\infty}} (|\nabla H_\sigma|^2 + \sigma^2 |H_\sigma|^2) dx = \quad (4.31)$$

$$= \inf_{\mathbf{H}' \in V_\infty, \mathbf{H}'|_{\Gamma_R} = \mathbf{H}} \int_{\Omega_{R,\infty}} \left( |\nabla \mathbf{H}'|^2 + \sigma^2 |\mathbf{H}'|^2 \right) dx.$$

Определим оператор  $S_{\Gamma_R}(\sigma) : V_{\Omega_R} \rightarrow V_{\Omega_R}$  по формуле:

$$\left( S_{\Gamma_R}(\sigma)\mathbf{H}, \mathbf{H}' \right) = s_{\Omega_{R,\infty}}(\sigma; \mathbf{H}_\sigma, \mathbf{H}'_\sigma), \quad (4.32)$$

где  $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$  – произвольные элементы  $V_{\Omega_R}$ ,  $\mathbf{H}_\sigma, \mathbf{H}'_\sigma$  – метагармонические продолжения в область  $\Omega_{R,\infty}$  следов векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}'$  на  $\Gamma_R$ . Изучим свойства оператора  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$ .

**Лемма 4.7.** *Для любого  $\sigma > 0$  оператор  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$  является ограниченным, самосопряженным и неотрицательно определенным оператором:*

$$S_{\Gamma_R}(\sigma) = S_{\Gamma_R}^*(\sigma) \geq 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку для любого  $\sigma > 0$  форма  $s_{\Omega_{R,\infty}}(\sigma; \cdot, \cdot)$  – эрмитова на  $V_\infty \times V_\infty$  и неотрицательна, то достаточно доказать ограниченность оператора  $S_{\Gamma_R}$ . Воспользуемся следующими эквивалентными нормировками пространства  $[W_2^{1/2}(\Gamma_R)]^3$  (см., напр., [72, с.55]):

$$\|\mathbf{H}\|_{1/2, \Gamma_R} = \inf_{\mathbf{H}' \in V_{\Omega_R}, \mathbf{H}'|_{\Gamma_R} = \mathbf{H}} \|\mathbf{H}'\|_{1, \Omega_R},$$

$$\|\mathbf{H}\|_{1/2, \Gamma_R} = \inf_{\mathbf{H}' \in V_\infty, \mathbf{H}'|_{\Gamma_R} = \mathbf{H}} \|\mathbf{H}'\|_{1, \Omega_{R,\infty}}.$$

Учитывая (4.29) и (4.31), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} (S_{\Gamma_R}(\sigma)\mathbf{H}, \mathbf{H}) &\leq c \int_{\Omega_{R,\infty}} (|\nabla \mathbf{H}_\sigma|^2 + \sigma^2 |\mathbf{H}_\sigma|^2) dx = \\ &= c \inf_{\mathbf{H}' \in V_\infty, \mathbf{H}'|_{\Gamma_R} = \mathbf{H}} \int_{\Omega_{R,\infty}} \left( |\nabla \mathbf{H}'|^2 + \sigma^2 |\mathbf{H}'|^2 \right) dx \leq \\ &\leq c_\sigma \inf_{\mathbf{H}' \in V_\infty, \mathbf{H}'|_{\Gamma_R} = \mathbf{H}} \|\mathbf{H}'\|_{1, \Omega_{R,\infty}}^2 = c_\sigma \|\mathbf{H}\|_{1/2, \Gamma_R}^2 \leq c_\sigma \|\mathbf{H}\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned}$$

□

Укажем явный вид оператора  $S_{\Gamma_R}$ . Поскольку оператор  $S_{\Gamma_R}$  непрерывен, а пространство  $[C^\infty(\Omega_R)]^3$  плотно в  $V_{\Omega_R}$ , то достаточно определить  $S_{\Gamma_R}$  лишь на функциях из  $[C^\infty(\Omega_R)]^3$ . Интегрированием по частям в формуле (4.32) получим:

$$(S_{\Gamma_R}(\sigma)H, H') = \int_{\Omega_{R,\infty}} \frac{1}{n_\infty^2} (-\Delta H_\sigma + \sigma^2 H_\sigma) \cdot \overline{H'} dx - \int_{\Gamma_R} \frac{1}{n_\infty^2} \frac{\partial H_\sigma}{\partial \nu} \cdot \overline{H'} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{n_\infty^2} \left( \frac{\partial H_1}{\partial \tau} \overline{H_2'} + H_2 \frac{\partial \overline{H_1'}}{\partial \tau} \right) dx. \quad (4.33)$$

Методом разделения переменных получим решение уравнения (4.30):

$$H_\sigma(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{K_l(\sigma r)}{K_l(\sigma R)} a_l(H) e^{il\varphi}, \quad a_l(H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(R, \varphi) e^{-il\varphi} d\varphi. \quad (4.34)$$

С учетом (4.30) и (4.34), из (4.33) получим:

$$(S_{\Gamma_R}(\sigma)H, H') = \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l(\sigma R) a_l(H) \cdot \overline{a_l(H')} + \frac{2\pi i}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l \left( a_l(H_1) \overline{a_l(H_2')} - a_l(H_2) \overline{a_l(H_1')} \right),$$

где  $A_l(z) = -zK_l'(z)/K_l(z)$ .

Известно, что модифицированные функции Бесселя  $K_l(z)$  положительны при вещественных  $z > 0$ ,  $l \geq 0$ , имеют место равенства:

$$K_l(z) = K_{-l}(z), \quad K_l'(z) = -K_{l-1}(z) - \frac{l}{z}K_l(z), \quad l \geq 1, \\ K_l'(z) = -K_{l+1}(z) + \frac{l}{z}K_l(z), \quad l \leq -1, \quad K_0'(z) = -K_1(z).$$

Отсюда следует справедливость представлений:

$$A_l(z) = |l| + zK_{|l|-1}(z)/K_{|l|}(z) > 0, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Определим операторы  $S(\sigma)$ ,  $S_0 : V_{\Omega_R} \rightarrow V_{\Omega_R}$  по формулам:

$$(S(\sigma)H, H') = \frac{2\pi\sigma R}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{K_{|l|-1}(\sigma R)}{K_{|l|}(\sigma R)} a_l(H) \cdot \overline{a_l(H')}, \quad \sigma > 0, \quad (4.35)$$

$$(S_0\mathbf{H}, \mathbf{H}') = \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |l| a_l(\mathbf{H}) \cdot \overline{a_l(\mathbf{H}')} + \\ + \frac{2\pi i}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l (a_l(\mathbf{H}_1) \cdot \overline{a_l(\mathbf{H}'_2)} - a_l(\mathbf{H}_2) \cdot \overline{a_l(\mathbf{H}'_1)}).$$

Оператор  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$  – есть сумма этих двух операторов:

$$S_{\Gamma_R}(\sigma) = S(\sigma) + S_0 \quad \forall \sigma > 0. \quad (4.36)$$

**Лемма 4.8.** *Для любого  $\sigma > 0$  оператор  $S(\sigma)$  – компактный;  $S(\sigma) = S^*(\sigma) \geq 0$ ;  $\|S(\sigma)\| \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow 0$ ; оператор-функция  $S(\sigma)$  является непрерывно дифференцируемой по  $\sigma > 0$ , а функция*

$$\sigma \rightarrow (S(\sigma)\mathbf{H}, \mathbf{H})$$

*– неубывающей по  $\sigma > 0$  при любом фиксированном  $\mathbf{H} \in V_{\Omega_R}$ . Кроме того,  $S_0 = S_0^* \geq 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Симметрия и неотрицательность  $S(\sigma)$  очевидны. Докажем его компактность. В силу свойств функций Бесселя, функции  $K_{|l|-1}(z)/K_{|l|}(z)$ ,  $l \neq 0$ , являются непрерывными монотонно возрастающими от нуля до единицы на  $[0, \infty)$ , функция  $A_0(z) = zK_1(z)/K_0(z)$  также является непрерывной монотонно возрастающей от нуля на  $[0, \infty)$ . Пусть  $c_1(\sigma) = 2\pi \max\{R\sigma, A_0(R\sigma)\}/n_\infty^2$ . В силу равенства Парсеваля имеем:

$$(S(\sigma)\mathbf{H}, \mathbf{H}) \leq c_1(\sigma) \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_l(\mathbf{H})|^2 = c_1(\sigma) \|\mathbf{H}\|_{[L_2(\Gamma_R)]^3}^2.$$

Поскольку вложение  $V_{\Omega_R} \subset [L_2(\Gamma_R)]^3$  компактно и

$$\|\mathbf{H}\|_{[L_2(\Gamma_R)]^3} \leq c_{\Gamma_R} \|\mathbf{H}\|_{1, \Omega_R}$$

для любого  $\mathbf{H} \in V_{\Omega_R}$ , то отсюда следует компактность  $S(\sigma)$  и оценка:

$$\|S(\sigma)\| \leq c_{\Gamma_R}^2 c_1(\sigma).$$

Отметим, что на  $[0, \infty)$  функция  $c_1(\sigma)$  непрерывна и в нуле ведет себя, как  $-1/\ln(R\sigma)$ . Таким образом,  $\|S(\sigma)\| \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Нетрудно видеть, что ряд (4.35) при любых  $\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in V_{\Omega_R}$  можно почленно дифференцировать по  $\sigma > 0$ . Следовательно, оператор-функция  $S(\sigma)$  является непрерывно дифференцируемой по  $\sigma > 0$ . Докажем монотонность  $S(\sigma)$ . При этом нам будет удобно нормировать пространство  $[W_2^{1/2}(\Gamma_R)]^3$  следующим образом:

$$\|\mathbf{H}\|_{1/2, \Gamma_R}^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (|l| + 1) |a_l(\mathbf{H})|^2.$$

Известно (см., напр., [71, с.29]), что существует не зависящая от  $\mathbf{H}$  постоянная  $c_{1/2}$  такая, что

$$\|\mathbf{H}\|_{1/2, \Gamma_R} \leq c_{1/2} \|\mathbf{H}\|_{1, \Omega_R} \quad \forall \mathbf{H} \in V_{\Omega_R}.$$

Простые вычисления показывают, что при  $z > 0$  и  $l \neq 0$

$$0 < A'_l(z) = \frac{A_l^2(z) - z^2 - l^2}{z} \leq 2|l| \leq 2(|l| + 1), \quad A'_0(z) > 0.$$

Полагая  $c_2(\sigma) = 2\pi \max\{2, A'_0(R\sigma)\}/n_\infty^2$ , имеем:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{d\sigma} (S(\sigma)\mathbf{H}, \mathbf{H}) = \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A'_l(R\sigma) |a_l(\mathbf{H})|^2 \leq \\ &\leq c_2(\sigma) \sum_{l=-\infty}^{\infty} (|l| + 1) |a_l(\mathbf{H})|^2 = c_2(\sigma) \|\mathbf{H}\|_{1/2, \Gamma_R}^2 \leq c_{1/2}^2 c_2(\sigma) \|\mathbf{H}\|_{1, \Omega_R}^2. \end{aligned}$$

Функция  $c_2(\sigma)$  непрерывно зависит от  $\sigma$  при  $\sigma > 0$  и имеет особенность порядка  $-(\sigma \ln \sigma)^{-1}$  при  $\sigma \rightarrow 0$ . Итак, функция  $\sigma \rightarrow (S(\sigma)\mathbf{H}, \mathbf{H})$  является неубывающей по  $\sigma > 0$  при любом фиксированном  $\mathbf{H} \in V_{\Omega_R}$ .

Самосопряженность  $S_0$  очевидна. Проверим его неотрицательность. Пусть  $a_{l,i} = a_l(H_i)$ ,  $a'_{l,i} = \operatorname{Re} a_{l,i}$ ,  $a''_{l,i} = \operatorname{Im} a_{l,i}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (S_0\mathbf{H}, \mathbf{H}) &= \\ &= \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{l \neq 0} |l| \left( |a_{l,3}|^2 + (a''_{l,1} - \frac{|l|}{l} a'_{l,2})^2 + (a'_{l,1} + \frac{|l|}{l} a''_{l,2})^2 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

для любого  $H \in V_{\Omega_R}$ .  $\square$

Из леммы 4.8 следует, что оператор-функцию  $S(\sigma)$  можно продолжить по непрерывности на полуось  $[0, \infty)$ , для этого достаточно положить  $S(0) = 0$ . Полученное продолжение непрерывно:

$$\|S(\sigma) - S(\eta)\| \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow \eta, \sigma, \eta \in [0, \infty).$$

Далее, говоря об операторе  $S(\sigma)$  при  $\sigma \in [0, \infty)$ , мы всегда будем иметь в виду указанное продолжение.

**3. Задача в ограниченной области.** Сведем задачу (4.28) к задаче в круге  $\Omega_R$ . В задаче (4.28) числовыми неизвестными являются параметры  $\beta$  и  $k$ . Однако нам будет удобно в качестве спектрального параметра использовать

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2}$$

и искать  $(\beta, \sigma)$  вместо  $(\beta, k)$ .

Определим для всех пар  $(\beta, k) \in \Lambda$ , операторы  $A_0, B_0, C, B : V_{\Omega_R} \rightarrow V_{\Omega_R}$  посредством следующих тождеств:

$$(A_0 H, H') = a_{\Omega_R}(H, H'), \quad (B_0 H, H') = b_{\Omega_R}(H, H'),$$

$$(C H, H') = c_{\Omega_R}(H, H'), \quad (B H, H') = d_{\Omega_R}(H, H'),$$

где  $H, H'$  – произвольные функции из  $V_{\Omega_R}$ . Пусть  $A = A_0 + S_0$ .

Рассмотрим задачу: найти все  $(\beta, \sigma) \in \mathbb{R}_+^2$  и  $H \in V_{\Omega_R} \setminus \{0\}$ , удовлетворяющие уравнению:

$$(A + \beta C - \beta^2 B_0 + S(\sigma)) H = -(\sigma^2 / n_\infty^2) B H. \quad (4.37)$$

**Теорема 4.21.** Пусть  $(\beta, k; H^*) \in \Lambda \times V \setminus \{0\}$  – решение задачи (4.28),  $H$  – сужение  $H^*$  на область  $\Omega_R$ ,  $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2}$ . Тогда  $(\beta, \sigma; H)$  – решение задачи (4.37). Обратно, пусть

$$(\beta, \sigma; H) \in \mathbb{R}_+^2 \times V_{\Omega_R} \setminus \{0\}$$



– решение задачи (4.37), вектор  $\mathbf{H}^*$  в области  $\Omega_R$  совпадает с  $\mathbf{H}$  и в области  $\Omega_{R,\infty}$  равен метагармоническому продолжению  $\mathbf{H}_\sigma$  вектора  $\mathbf{H}|_{\Gamma_R}$ . Тогда

$$\sigma < \sqrt{1 - (n_\infty/n_+)^2}\beta, \quad (4.38)$$

и тройка  $(\beta, k; \mathbf{H}^*)$ , где  $k = \sqrt{\beta^2 - \sigma^2}/n_\infty$ , – решение задачи (4.28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $(\beta, k; \mathbf{H}^*) \in \Lambda \times V \setminus \{0\}$  – решение задачи (4.28). Для всех  $\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in V$  верны равенства:

$$c_{\Omega_{R,\infty}}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') = 0, \quad b_{\Omega_{R,\infty}}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') = 0,$$

$$c(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = a_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + \beta c_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') - \beta^2 b_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + \frac{\beta^2}{n_\infty^2} d_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}').$$

Тождество (4.28) представим в виде:

$$\begin{aligned} a_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + \beta c_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') - \beta^2 b_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + (\beta^2/n_\infty^2) d_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + \\ + s_{\Omega_{R,\infty}}(\sigma; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = k^2 d_\Omega(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \quad \forall \mathbf{H}' \in V. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Полагая  $\mathbf{H}' = 0$  в области  $\Omega_R$ , получим, что решение задачи (4.28) равно  $\mathbf{H}_\sigma$  в области  $\Omega_{R,\infty}$ . Ограничиваясь в тождестве (4.39) только такими  $\mathbf{H}' \in V$ , что  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}'_\sigma$  в  $\Omega_{R,\infty}$ , получим, что если решение задачи (4.28) существует, то оно удовлетворяет тождеству:

$$\begin{aligned} a_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + \beta c_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') - \beta^2 b_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + (\beta^2/n_\infty^2) d_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + \\ + (S_{\Gamma_R}(\sigma)\mathbf{H}, \mathbf{H}') = k^2 d_{\Omega_R}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \quad \forall \mathbf{H}' \in V_{\Omega_R}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Запишем тождество (4.40) в операторном виде:

$$(A_0 + \beta C - \beta^2 B_0 + S_{\Gamma_R}(\sigma) + (\beta^2/n_\infty^2)B)\mathbf{H} = k^2 B\mathbf{H}. \quad (4.41)$$

Подставляя (4.36) в (4.41), получим (4.37).

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть

$$(\beta, \sigma; \mathbf{H}) \in \mathbb{R}_+^2 \times V_{\Omega_R} \setminus \{0\}$$

– решение задачи (4.37). Определим параметр  $k$  равенством:

$$k = \sqrt{\beta^2 - \sigma^2}/n_\infty.$$

Тогда (4.37) равносильно уравнению (4.41), и, следовательно, уравнению (4.40). Определим по  $\mathbf{H}|_{\Gamma_R}$  метагармоническое продолжение  $\mathbf{H}_\sigma$ . Вектор, совпадающий в области  $\Omega_R$  с  $\mathbf{H}$ , и в области  $\Omega_{R,\infty}$  равный  $\mathbf{H}_\sigma$ , обозначим через  $\mathbf{H}^*$ . Очевидно,  $\mathbf{H}^* \in V \setminus \{0\}$ . Пользуясь определением оператора  $S_{\Gamma_R}(\sigma)$ , и замечая, что в силу определения метагармонического продолжения  $s_{\Omega_{R,\infty}}(\sigma; \mathbf{H}^*, \mathbf{H}'_\sigma) = s_{\Omega_{R,\infty}}(\sigma; \mathbf{H}^*, \mathbf{H}')$ , получаем, что  $\mathbf{H}^*$  удовлетворяет (4.39) и (4.28). Итак, тройка  $(\beta, k; \mathbf{H}^*)$  – решение задачи (4.28). Следовательно, число  $k$  – вещественное,  $k > \beta/n_+$ , и справедливо (4.38).  $\square$

Из теоремы 4.21 следует, что если решение  $(\beta, \sigma; \mathbf{H})$  задачи (4.37) существует, то  $(\beta, \sigma)$  принадлежат множеству:

$$K = \left\{ (\beta, \sigma) : \beta > 0, 0 < \sigma < \sqrt{1 - (n_\infty/n_+)^2 \beta} \right\}.$$

Введем в рассмотрение следующие операторы:

$$M(\beta) = (1/\beta)A + C - \beta B_0, \quad G(\beta, \sigma) = M(\beta) + (1/\beta)S(\sigma).$$

Запишем задачу (4.37) в виде:

$$(\beta, \sigma; \mathbf{H}) \in \mathbb{R}_+^2 \times V_{\Omega_R} \setminus \{0\} : \quad G(\beta, \sigma)\mathbf{H} = -(\sigma^2/(\beta n_\infty^2))B\mathbf{H},$$

и сформулируем ее так: найти все решения  $(\beta, \sigma) \in \mathbb{R}_+^2$  уравнения

$$\gamma(\beta, \sigma) = -\sigma^2/(\beta n_\infty^2),$$

где  $\gamma(\beta, \sigma)$  – собственные значения линейной спектральной задачи:

$$(\gamma, \mathbf{H}) \in \mathbb{R} \times V_{\Omega_R} \setminus \{0\} : \quad G(\beta, \sigma)\mathbf{H} = \gamma(\beta, \sigma)B\mathbf{H}. \quad (4.42)$$

Найденные  $(\beta, \sigma)$  и собственные векторы  $\mathbf{H}$ , отвечающие собственным значениям  $\gamma(\beta, \sigma)$  при этих  $(\beta, \sigma)$ , будут решениями задачи (4.37).

**Лемма 4.9.** *Для любых  $\beta > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  оператор  $G(\beta, \sigma)$  – самосопряженный,  $B$  – компактный,  $B = B^* > 0$ , и имеет место оценка:*

$$M(\beta) + \lambda\beta B \geq 1/(2\beta)A \geq 0, \quad (4.43)$$

где  $\lambda = \delta + 2\delta^2 n_\infty^2$ ,  $\delta = \max_{x \in \Omega_R} |1/n_\infty^2 - 1/n^2|$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для любого  $\beta > 0$  оператор  $M(\beta)$  самосопряженный. Для любого  $\sigma \geq 0$  оператор  $S(\sigma)$  самосопряженный в силу леммы 4.8. Следовательно, первое утверждение леммы справедливо. Утверждения относительно оператора  $B$  очевидны. Докажем справедливость неравенства (4.43). Легко проверить справедливость неравенств:

$$\begin{aligned} |(CH, H)| &\leq 2\delta \left( \int_{\Omega_R} |\nabla H_3|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_R} |H|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2n_\infty^2 \beta} \int_{\Omega_R} |\nabla H_3|^2 dx + 2n_\infty^2 \beta \delta^2 (BH, H), \\ (B_0 H, H) &\leq \delta (BH, H), \quad (AH, H) \geq \frac{1}{2} (AH, H) + \frac{1}{2n_\infty^2} \int_{\Omega_R} |\nabla H_3|^2 dx, \end{aligned}$$

где  $H$  – произвольная функция из  $V_{\Omega_R}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} ((M(\beta) + \lambda\beta B)H, H) &= (((1/\beta)A + C - \beta B_0 + \lambda\beta B)H, H) \geq \\ &\geq 1/(2\beta)(AH, H) + (\lambda - \delta - 2n_\infty^2 \delta^2)\beta(BH, H) = 1/(2\beta)(AH, H) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Задача (4.42) в силу леммы 4.9 для любых фиксированных  $\beta > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  имеет счетное множество решений  $(\gamma_i, H_i)$ . Собственные функции  $H_i$  нормируем так, что

$$(BH_i, H_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Пронумеруем  $\gamma_l$  по возрастанию (с учетом кратности):

$$-\lambda\beta \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots, \quad \gamma_n \rightarrow \infty.$$

По теореме Куранта для  $l = 1, 2, \dots$  имеем:

$$\gamma_l(\beta, \sigma) = \min_{V_l \subset V_{\Omega_R}} \max_{H \in V_l} R(\beta, \sigma; H), \quad R(\beta, \sigma; H) = \frac{(A(\beta, \sigma)H, H)}{(BH, H)}, \quad (4.44)$$

где минимум берется по всем  $l$ -мерным подпространствам пространства  $V_{\Omega_R}$  без нулевого элемента.

**Лемма 4.10.** *Равенство  $(\text{АН}, \text{Н}) = 0$  справедливо тогда и только тогда, когда  $\text{Н} = \text{const}$  в  $\Omega_R$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\text{Н} = \text{const}$  в  $\Omega_R$ . Тогда, очевидно, справедливо равенство  $(\text{АН}, \text{Н}) = 0$ . Наоборот, из последнего равенства и леммы 4.8 следует, что  $(S_0\text{Н}, \text{Н}) = 0$ , и

$$I \equiv \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega_R} \left( |\text{rot } \mathbf{H}|^2 + |\text{div } \mathbf{H}|^2 + |\nabla \text{Н}_3|^2 \right) dx = 0.$$

Отсюда интегрированием по частям легко получить равенство:

$$0 = I + (S_0\text{Н}, \text{Н}) = \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega_R} |\nabla \text{Н}|^2 dx + \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |l| |a_l(\text{Н})|^2.$$

Следовательно,  $\text{Н} = \text{const}$  в  $\Omega_R$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.11.** *Каждая функция  $\gamma_l(\beta, \sigma)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , при любом фиксированном  $\sigma \geq 0$  является непрерывной невозрастающей функцией  $\beta > 0$ , а при любом фиксированном  $\beta > 0$  – непрерывной неубывающей функцией  $\sigma \geq 0$ . Кроме того, для любого  $\sigma \geq 0$  справедливы оценки:*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (\gamma_l(\beta, \sigma)/\beta) \leq 1/n_+^2 - 1/n_\infty^2 < 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.45)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Все утверждения леммы, кроме оценок (4.45), непосредственно следуют из определения (4.44) функций  $\gamma_l$ , неотрицательности операторов  $A$ ,  $B_0$  и леммы 4.8. Докажем справедливость неравенств (4.45). Пусть  $\eta$  – произвольное положительное число. В силу свойств функции  $n$  существует такая точка  $x_0 \in \Omega_R$  и такое число  $\rho$ , что

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{\Omega_\rho} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_+^2} \right) dx \leq \eta,$$

где  $\Omega_\rho = \{x \in \Omega_R : |x - x_0| < \rho\}$ . Обозначим через  $\mu_\rho^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$ , первые  $m$  собственных чисел оператора Лапласа в области  $\Omega_\rho$  при

граничном условии Дирихле, а через  $w_\rho^{(l)}$  – соответствующие им собственные функции, продолженные нулем вне  $\Omega_\rho$  и удовлетворяющие условиям  $\|w_\rho^{(l)}\|_{L_2(\Omega_R)} = 1$ . Положим

$$\mathbf{H}_\rho^{(2l-1)} = \left(w_\rho^{(l)}, 0, 0\right)^T, \quad \mathbf{H}_\rho^{(2l)} = \left(0, w_\rho^{(l)}, 0\right)^T, \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Обозначим через  $\widetilde{W}_\rho$  –  $m$ -мерное подпространство  $W_2^1(\Omega_R)$ , натянутое на  $w_\rho^{(1)}, \dots, w_\rho^{(m)}$ , а через  $W_\rho$  –  $2m$ -мерное подпространство  $V_{\Omega_R}$ , натянутое на  $\mathbf{H}_\rho^{(1)}, \dots, \mathbf{H}_\rho^{(2m)}$ . Для любого вектора  $\mathbf{H} \in W_\rho$  имеем:

$$\begin{aligned} (S_0\mathbf{H}, \mathbf{H}) &= 0, \quad (S(\sigma)\mathbf{H}, \mathbf{H}) = 0, \quad (C\mathbf{H}, \mathbf{H}) = 0, \\ (A_0\mathbf{H}, \mathbf{H}) &\leq \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{H}|^2 dx, \\ -(B_0\mathbf{H}, \mathbf{H}) &= \int_{\Omega_R} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_+^2}\right) |\mathbf{H}|^2 dx + \left(\frac{1}{n_+^2} - \frac{1}{n_\infty^2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\gamma_{2m}/\beta - (1/n_+^2 - 1/n_\infty^2) \leq \alpha_m(\beta, \rho), \quad (4.46)$$

где

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_m(\beta, \rho) &= \max_{\mathbf{H} \in W_\rho} \left( \frac{1}{n_\infty^2 \beta^2} \int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{H}|^2 dx + \int_{\Omega_R} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_+^2}\right) |\mathbf{H}|^2 dx \right) \leq \\ &\leq \frac{\mu_\rho^{(m)}}{n_\infty^2 \beta^2} + \eta \rho^2 \max_{v \in \widetilde{W}_\rho, \|v\|_{L_2(\Omega_R)}=1} \|v\|_{L_\infty(\Omega_{R\rho})}^2. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что

$$\mu_\rho^{(l)} = \mu_1^{(l)}/\rho^2, \quad \|w_\rho^{(l)}\|_{L_\infty(\Omega_\rho)} = \|w_1^{(l)}\|_{L_\infty(\Omega_1)}/\rho, \quad l = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для любого  $\beta > 1/(\rho\sqrt{\eta})$  верна оценка:

$$\alpha_m(\beta, \rho) \leq c_m \eta,$$

где константа  $c_m$  не зависит от  $\rho, \eta, \beta$ . Переходя в последнем неравенстве и в неравенстве (4.46) к пределу по  $\eta \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$ , получаем неравенство (4.45) для любого четного  $l$ . Но так как  $\gamma_{2m-1} \leq \gamma_{2m}$ , то это неравенство справедливо и для всех целых  $l$ .  $\square$

**4. Разрешимость задачи.** Исходная задача (4.28) согласно теореме 4.21 эквивалентна задаче (4.37). Для того, чтобы решить задачу (4.37) при фиксированном  $\beta > 0$  необходимо определить все решения  $\sigma \geq 0$  уравнений:

$$\gamma_l(\beta, \sigma) = -\sigma^2 / (\beta n_\infty^2), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (4.47)$$

где функции  $\gamma_l(\beta, \sigma)$  определены равенствами (4.44). Так как функции  $\gamma_l(\beta, \sigma)$  при фиксированном  $\beta > 0$  непрерывны и не убывают по  $\sigma \geq 0$  (см. лемму 4.11), то число уравнений (4.47), имеющих решение, равно

$$N(\beta) = \max \{l : \gamma_l(\beta, 0) < 0\}, \quad \beta > 0, \quad (4.48)$$

где  $\gamma_l(\beta, 0)$  – собственные значения задачи (4.42) при  $\sigma = 0$ . Представление о поведении функций  $\sigma \rightarrow \gamma_l(\beta, \sigma)$  дает рис. 3, иллюстрирующий их свойства, установленные в лемме 4.11.

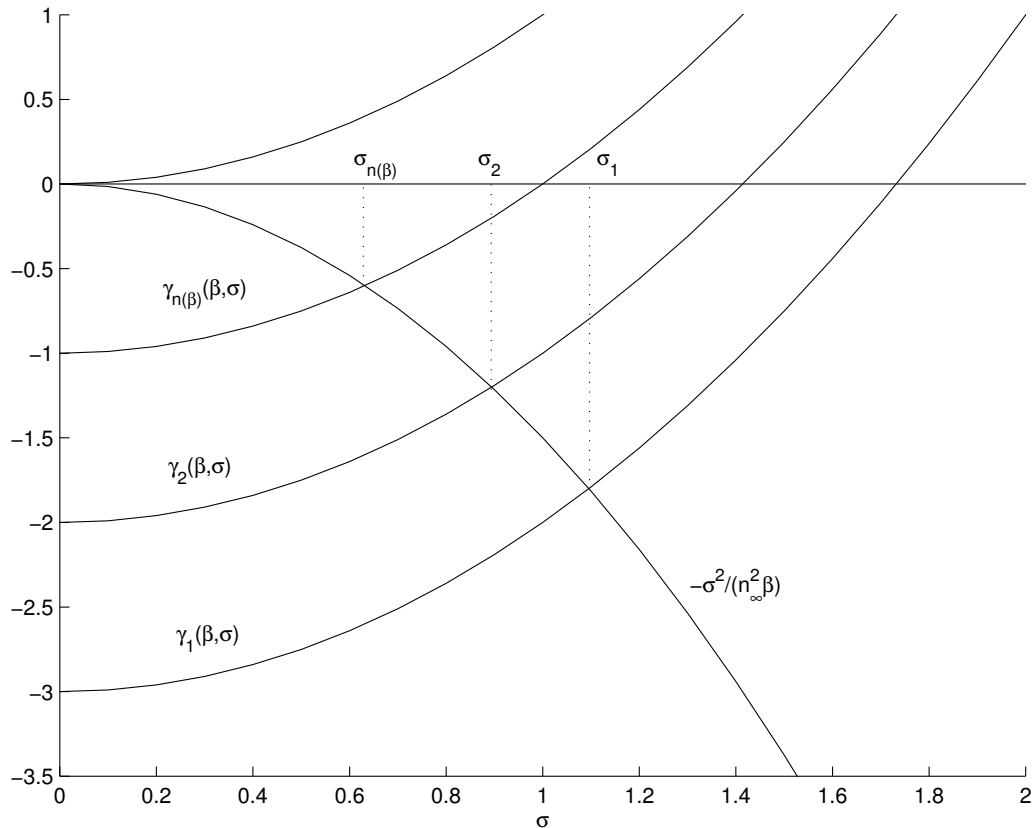


Рис. 3. Типичное поведение функций  $\sigma \rightarrow \gamma_l(\beta, \sigma)$

Если при некотором  $l = 1, 2, \dots$ , и  $\beta > 0$  решение уравнения (4.47) существует, то оно, очевидно, единственно. Обозначим его через  $\sigma_l(\beta)$ . Итак, при фиксированном  $\beta > 0$  задача (4.37) имеет  $N(\beta)$  решений  $(\beta, \sigma_l(\beta))$ , причем,

$$0 < \sigma_{N(\beta)}(\beta) \leq \sigma_{N(\beta)-1}(\beta) \leq \dots \leq \sigma_1(\beta) < \beta \sqrt{1 - (n_\infty/n_+)^2}.$$

Последняя оценка здесь следует из теоремы 4.21.

Дадим более удобный способ определения числа  $N(\beta)$ . Пусть  $\mathbf{H}_3^* = (0, 0, 1)^T$  при  $x \in \Omega_R$ ,

$$V_0 = \left\{ \mathbf{H} \in V_{\Omega_R} : (B\mathbf{H}, \mathbf{H}_3^*) = \int_{\Omega_R} \mathbf{H}_3 \, dx = 0 \right\}.$$

Рассмотрим задачу:

$$(\beta, \mathbf{H}) \in \bar{R}_+ \times V_0 \setminus \{0\} : (A + \beta C - \beta^2 B_0) \mathbf{H} = 0. \quad (4.49)$$

**Теорема 4.22.** *Задача (4.49) имеет счетное множество решений  $\{\beta_l^0\}_{l=1}^\infty$ ,*

$$0 = \beta_1^0 = \beta_2^0 < \beta_3^0 \leq \dots \leq \beta_l^0 \leq \dots, \quad \beta_l^0 \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty. \quad (4.50)$$

*Число решений задачи (4.37) при фиксированном  $\beta > 0$  равно*

$$N(\beta) = \max\{l : \beta_l^0 < \beta, \quad l = 1, 2, \dots\}. \quad (4.51)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно (4.48) количество решений задачи (4.37) равно числу отрицательных собственных значений  $\gamma_l(\beta, 0)$ . Так как при любом  $\beta > 0$  справедливо равенство  $M(\beta)\mathbf{H}_3^* = 0$ , то среди этих собственных значений есть нулевое. Исключим его, потребовав, чтобы собственные векторы  $\mathbf{H}$  задачи (4.42) при  $\sigma = 0$  принадлежали пространству  $V_0$ . Тогда собственные значения  $\gamma_l(\beta, 0)$  будут согласно (4.44) определяться равенствами:

$$\gamma_l(\beta, 0) = \min_{V_l \subset V_0} \max_{\mathbf{H} \in V_l} R(\beta, \mathbf{H}), \quad R(\beta, \mathbf{H}) = \frac{(M(\beta)\mathbf{H}, \mathbf{H})}{(B\mathbf{H}, \mathbf{H})},$$

где минимум берется по всем  $l$ -мерным подпространствам пространства  $V_0$  без нулевого элемента. Все функции  $\gamma_l(\beta, 0)$  непрерывны при  $\beta > 0$  и монотонно убывают. Действительно, для  $\mathbf{H} \in V_0$  имеем:

$$\frac{dR(\beta, \mathbf{H})}{d\beta} = -\frac{(1/\beta^2)(A\mathbf{H}, \mathbf{H}) + (B_0\mathbf{H}, \mathbf{H})}{(B\mathbf{H}, \mathbf{H})} < 0.$$

Как было доказано в лемме 4.11,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \gamma_l(\beta, 0) = -\infty, \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.52)$$

Изучим поведение функций  $\gamma_l(\beta, 0)$  при  $\beta \rightarrow 0$ . Пусть  $\mathbf{H}_1^* = (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{H}_2^* = (0, 1, 0)^T$  при  $x \in \Omega_R$ ,  $V_2$  – линейная оболочка множества  $\{\mathbf{H}_1^*, \mathbf{H}_2^*\}$ . Для любого вектора  $\mathbf{H} = c_1\mathbf{H}_1^* + c_2\mathbf{H}_2^* \in V_2$  имеем:

$$\begin{aligned} A\mathbf{H} &= 0, \quad C\mathbf{H} = 0, \quad (B\mathbf{H}, \mathbf{H}) = |\Omega_R|(|c_1|^2 + |c_2|^2), \\ (B_0\mathbf{H}, \mathbf{H}) &= (|c_1|^2 + |c_2|^2) \int_{\Omega_R} \left( \frac{1}{n_\infty^2} - \frac{1}{n^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\gamma_2(\beta, 0) \leq \max_{\mathbf{H} \in V_2} R(\beta, \mathbf{H}) = -\frac{\beta}{|\Omega_R|} \int_{\Omega_R} \left( \frac{1}{n_\infty^2} - \frac{1}{n^2} \right) dx. \quad (4.53)$$

Далее, из леммы 4.9 для любого  $\beta > 0$  следует неравенство:

$$R(\beta, \mathbf{H}) \geq \frac{1}{(2\beta)} \frac{(A\mathbf{H}, \mathbf{H})}{(B\mathbf{H}, \mathbf{H})} - \lambda\beta, \quad (4.54)$$

где  $\mathbf{H}$  – произвольный вектор из  $V_0$ , а параметр  $\lambda > 0$  определен в условии леммы 4.9. В частности,  $R(\beta, \mathbf{H}) \geq -\lambda\beta$ . Отсюда следует, что

$$\gamma_1(\beta, 0) = \min_{\mathbf{H} \in V_0} R(\beta, \mathbf{H}) \geq -\lambda\beta. \quad (4.55)$$

Объединяя неравенства (4.53) и (4.55), для любого  $\beta > 0$  получаем:

$$-\lambda\beta \leq \gamma_1(\beta, 0) \leq \gamma_2(\beta, 0) \leq -c\beta,$$

где константа  $c > 0$  не зависит от  $\beta$ . Таким образом, функции  $\gamma_1(\beta, 0)$  и  $\gamma_2(\beta, 0)$  можно продолжить по непрерывности при  $\beta = 0$ , полагая

$$\gamma_1(0, 0) = \gamma_2(0, 0) = 0. \quad (4.56)$$



Из (4.54) следует неравенство:

$$\gamma_3(\beta, 0) \geq \frac{1}{2\beta}\gamma_* - \lambda\beta, \quad \gamma_* = \min_{V_3 \subset V_0} \max_{H \in V_3} \frac{(AH, H)}{(BH, H)},$$

где минимум берется по всем трехмерным подпространствам пространства  $V_0$  без нулевого элемента. В силу леммы 4.10, очевидно,  $\gamma_* > 0$ . Следовательно,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \gamma_3(\beta, 0) = +\infty.$$

Для любого  $\beta > 0$ ,  $l = 4, 5, \dots$ , функции  $\gamma_l(\beta, 0) \geq \gamma_3(\beta, 0)$ , следовательно,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \gamma_l(\beta, 0) = +\infty, \quad l = 3, 4, \dots \quad (4.57)$$

Итак, мы показали, что функции  $\gamma_l(\beta, 0)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , непрерывны, монотонно убывают при  $\beta > 0$ , и справедливы равенства (4.52), (4.56), (4.57). Следовательно, каждое уравнение

$$\gamma_l(\beta, 0) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (4.58)$$

имеет единственный корень  $\beta_l^0 \in [0, \infty)$  (см. рис. 4, который иллюстрирует доказанные выше свойства функций  $\gamma_l(\beta, 0)$ ). Таким образом, мы можем определить число решений задачи (4.37) равенством (4.51), где  $\beta_l^0$  – корни уравнений (4.58). Множество чисел  $\beta_l^0$  счетно, они удовлетворяют условию (4.50).

Покажем теперь, что числа  $\beta_l^0$  и только они являются решениями задачи (4.49). Пусть  $H_l(\beta_l^0) \in V_0$  – собственный вектор задачи (4.42) при  $\sigma = 0$ , отвечающий собственному значению  $\gamma_l(\beta_l^0, 0)$ . Рассматривая (4.42) при  $\sigma = 0$ ,  $\beta = \beta_l^0$  и  $H = H_l(\beta_l^0)$ , получаем, что пара  $(\beta_l^0, H_l(\beta_l^0))$  – решение задачи (4.49). Обратно, пусть  $(\beta_*, H_*)$  – решение задачи (4.49), и  $\beta_* > 0$ . Это означает, что  $A(\beta_*)H_* = 0$ , то есть задача (4.42) при  $\sigma = 0$  и  $\beta = \beta_*$  имеет нулевое собственное значение, или  $\gamma_l(\beta_*, 0) = 0$  при некотором  $l$ . В силу единственности корней уравнений (4.58), получаем  $\beta_* = \beta_l^0$ , и пара  $(\gamma_l(\beta_*, 0), H_*)$  – решение

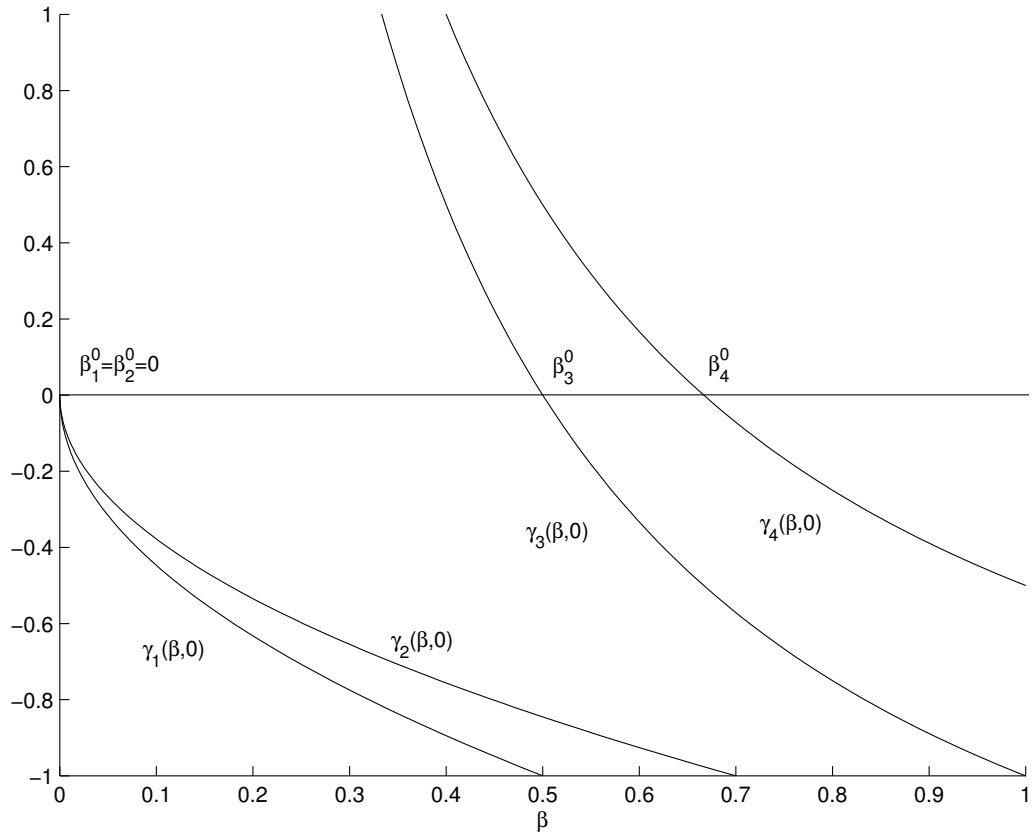


Рис. 4. Число решений задачи (4.37)

задачи (4.42) при  $\sigma = 0$ . При  $\beta = 0$  задача (4.49) имеет только две линейно независимые собственные функции  $H_1 = c_1 H_1^*$ ,  $H_2 = c_2 H_2^*$ , где  $c_1, c_2$  – произвольные комплексные числа, следовательно,  $(0, H_1)$ ,  $(0, H_2)$  – решения при  $\sigma = 0, \beta = 0$  задачи, которая получается умножением левой и правой частей уравнения (4.42) на  $\beta$ .  $\square$

Из теоремы 4.22 следует, что задача (4.37) (а, следовательно, задача (4.28)) при любом  $\beta > 0$  имеет по крайней мере два решения. Число всех решений увеличивается с ростом  $\beta$  и стремится к бесконечности при  $\beta \rightarrow \infty$ . Для каждого конечного значения  $\beta$  существует не более конечного числа решений. Это число равно  $N(\beta)$  и определяется значениями  $\beta = \beta_l^0$ , которые называются точками отсечки и являются решениями уравнения (4.49). Это уравнение называется уравнением отсечки. Справедлива следующая

**Теорема 4.23.** Пусть  $\beta_l^0, l = 1, 2, \dots$ , – точки отсечки; функ-

ция  $N(\beta)$  определена формулой (4.51). Тогда для любого  $\beta > 0$  задача (4.37) имеет  $N(\beta)$ , и только  $N(\beta)$ , решений  $(\beta, \sigma_l(\beta), H_l(\beta))$ .

Дадим более удобный способ определения точек отсечки. Сведем задачу (4.49) к задаче на собственные значения с линейным вхождением спектрального параметра. Для этого определим оператор  $C_0 : V_{\Omega_R} \rightarrow V_{\Omega_R}$  по правилу:

$$(C_0 H, H) = a_0(H_3) \overline{a_0(H_3)},$$

где  $a_0(H_3)$  – нулевой коэффициент Фурье (4.34) функции  $H_3$ . Очевидно,  $C_0$  – самосопряженный неотрицательный оператор. Рассмотрим задачу: найти такие  $\beta \geq 0$ ,  $H \in V_{\Omega_R} \setminus \{0\}$ , что выполняется равенство:

$$(A + C_0 + \beta C - \beta^2 B_0) H = 0. \quad (4.59)$$

Нетрудно проверить, что задачи (4.49) и (4.59) имеют одно и то же множество решений  $\beta_l^0$ . Действительно, пусть  $(\beta, H)$  – решение задачи (4.49). Представим вектор  $H$  в виде  $H = cH_3^* + H^0$ , где  $H_3^* = (0, 0, 1)^T$  в области  $\Omega_R$ ,  $c = a_0(H_3)$ . Тогда, очевидно,  $C_0 H^0 = 0$ . Учитывая это равенство и то, что вектор  $H_3^*$  при любом  $\beta \geq 0$  принадлежит ядру оператора  $A + \beta C - \beta^2 B_0$ , получаем цепочку равенств:

$$0 = (A + \beta C - \beta^2 B_0) H = (A + \beta C - \beta^2 B_0) H^0 = (A + C_0 + \beta C - \beta^2 B_0) H^0,$$

то есть  $(\beta, H^0)$  – решение задачи (4.59). Пусть теперь  $(\beta, H)$  – собственная пара задачи (4.59). Умножая обе части равенства (4.59) скалярно на вектор  $H_3^*$ , убеждаемся, что  $a_0(H_3) = 0$ , то есть

$$(A + \beta C - \beta^2 B_0) H = 0.$$

Представим вектор  $H$  в виде  $H = cH_3^* + H^0$ ,

$$c = \int_{\Omega_R} H_3 dx / |\Omega_R|.$$

Тогда  $H^0 \in V_0$ , и

$$(A + \beta C - \beta^2 B_0) H^0 = 0,$$

то есть  $(\beta, \mathbf{H}^0)$  – решение задачи (4.49).

Пусть  $\widehat{V}_{\Omega_R} = [W_2^1(\Omega_R)]^2$ . Введем в рассмотрение операторы  $\widehat{A}, \widehat{B}_0 : \widehat{V}_{\Omega_R} \rightarrow \widehat{V}_{\Omega_R}, \widehat{C}_0 : \widehat{V}_{\Omega_R} \rightarrow W_2^1(\Omega_R), L : W_2^1(\Omega_R) \rightarrow W_2^1(\Omega_R)$  и  $\widehat{C}_1 : W_2^1(\Omega_R) \rightarrow \widehat{V}_{\Omega_R}$  при помощи следующих тождеств, понимая соответствующим образом операторные скобки:

$$(\widehat{A}\mathbf{H}, \mathbf{H}') = \int_{\Omega_R} \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot} \mathbf{H} \overline{\operatorname{rot} \mathbf{H}'} + \frac{1}{n_\infty^2} \operatorname{div} \mathbf{H} \overline{\operatorname{div} \mathbf{H}'} \right) dx +$$

$$+ \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |l| a_l(\mathbf{H}) \cdot \overline{a_l(\mathbf{H}')} +$$

$$+ \frac{2\pi i}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l \left( a_l(\mathbf{H}_1) \cdot \overline{a_l(\mathbf{H}'_2)} - a_l(\mathbf{H}_2) \cdot \overline{a_l(\mathbf{H}'_1)} \right),$$

$$(\widehat{B}_0 \mathbf{H}, \mathbf{H}') = \int_{\Omega_R} (1/n_\infty^2 - 1/n^2) \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'} dx,$$

$$(\widehat{C}_0 \mathbf{H}, \eta) = i \int_{\Omega_R} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_\infty^2} \right) \mathbf{H} \cdot \overline{\nabla \eta} dx,$$

$$(\widehat{C}_1 \eta, \mathbf{H}) = -i \int_{\Omega_R} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_\infty^2} \right) \nabla \eta \cdot \overline{\mathbf{H}} dx,$$

$$(L\eta, \eta') = \int_{\Omega_R} \frac{1}{n^2} \nabla \eta \cdot \overline{\nabla \eta'} dx + \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |l| a_l(\eta) \overline{a_l(\eta')} + a_0(\eta) \overline{a_0(\eta')}.$$

Уравнение (4.59) может быть записано теперь в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \widehat{A} & \beta \widehat{C}_1 \\ \beta \widehat{C}_0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}_3 \end{pmatrix} = \beta^2 \begin{pmatrix} \widehat{B}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}_3 \end{pmatrix}.$$

Оператор  $L$  положительно определен. Исключая  $\mathbf{H}_3$ , получим линейную задачу на собственные значения:

$$\widehat{A}\mathbf{H} = \beta^2 (\widehat{B}_0 + \widehat{C}_1 L^{-1} \widehat{C}_0) \mathbf{H}$$

относительно спектрального параметра  $\beta^2$ . Очевидно, собственные значения этой задачи равны квадратам точек отсечки  $\beta_l^0$ .

**5. Поведение дисперсионных кривых.** Дисперсионными кривыми будем называть функции  $\sigma_l(\beta)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , определенные на интервалах  $(\beta_l^0, \infty)$ , где  $\beta_l^0$  – точки отсечки. При заданном  $\beta > \beta_l^0$  значение функции  $\sigma_l(\beta)$  определяется как единственное решение уравнения (4.47). Изучим свойства функций  $\sigma_l(\beta)$ . В качестве иллюстрации на рис. 5 приведены дисперсионные кривые для однородного волновода кругового поперечного сечения, построенные на основе решения характеристического уравнения (1.61), с. 51 при  $n_\infty = 1$ ,  $n_+ = \sqrt{2}$ .

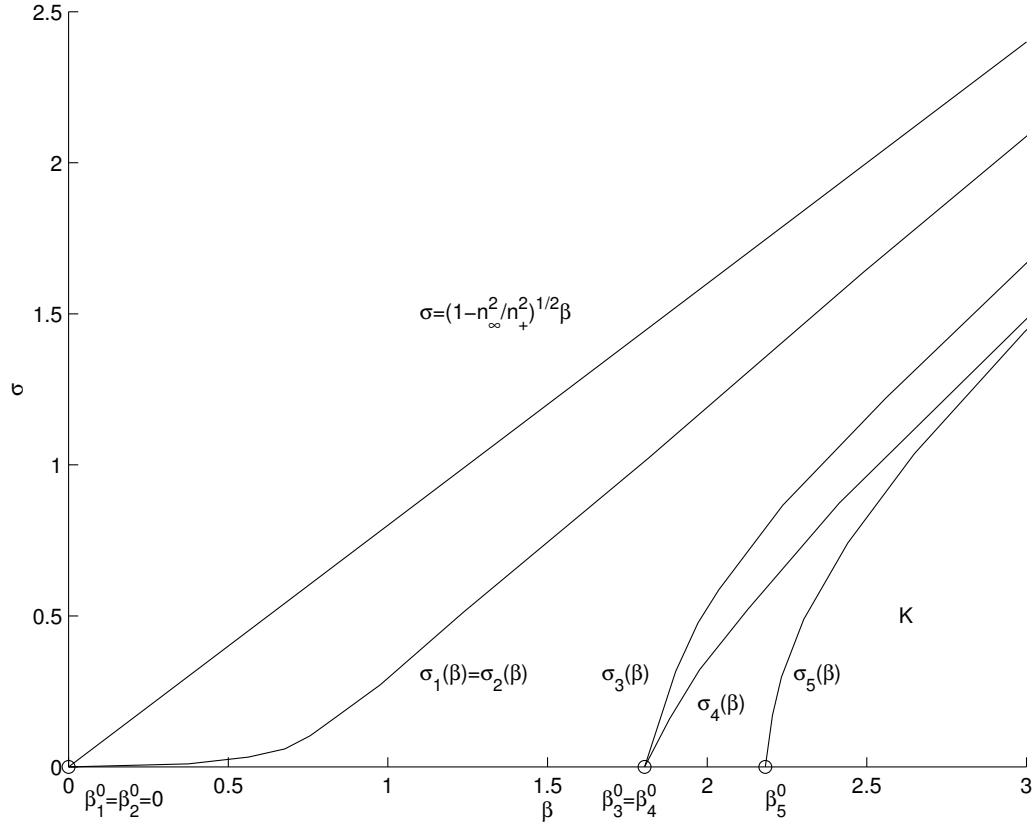


Рис. 5. Дисперсионные кривые для однородного волновода кругового поперечного сечения.

**Лемма 4.12.** Для любого  $l = 1, 2, \dots$  функция  $\beta\gamma_l(\beta, \sigma)$ , где  $\gamma_l(\beta, \sigma)$  определена равенством (4.44), локально липшицева по  $\beta$  на множестве

$$D = \{\beta \geq 0, \sigma \geq 0 : \gamma_l(\beta, \sigma) \leq 0\}.$$

Точнее, существует такая константа  $c$ , не зависящая от  $\beta$  и  $\sigma$ ,

что

$$|\beta\gamma_l(\beta, \sigma) - \hat{\beta}\gamma_l(\hat{\beta}, \sigma)| \leq c \max\{\beta, \hat{\beta}\}|\beta - \hat{\beta}| \quad (4.60)$$

для любых  $\beta, \hat{\beta}, \sigma$  из множества  $D$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\beta, \hat{\beta}, \sigma$  — произвольные числа из множества  $D$ . По определению (4.44) имеем:

$$\beta\gamma_l(\beta, \sigma) = \min_{V_i \subset V_{\Omega_R}} \max_{\mathbf{H} \in V_i, (B\mathbf{H}, \mathbf{H})=1} R_\sigma(\beta, \mathbf{H}), \quad (4.61)$$

где  $R_\sigma(\beta, \mathbf{H}) = ((A + \beta C - \beta^2 B_0 + S(\sigma))\mathbf{H}, \mathbf{H})$ . Справедливо равенство:

$$R_\sigma(\hat{\beta}, \mathbf{H}) - R_\sigma(\beta, \mathbf{H}) = (\hat{\beta} - \beta)(C\mathbf{H}, \mathbf{H}) - (\hat{\beta}^2 - \beta^2)(B_0\mathbf{H}, \mathbf{H}).$$

Пусть  $(B\mathbf{H}, \mathbf{H}) = 1$ . Согласно лемме 4.9 имеем:

$$R_\sigma(\beta, \mathbf{H}) + \lambda\beta^2 \geq \frac{1}{2}(A\mathbf{H}, \mathbf{H}),$$

$$(B_0\mathbf{H}, \mathbf{H}) \leq \delta, \quad |(C\mathbf{H}, \mathbf{H})| \leq 2\delta \left( \int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{H}_3|^2 dx \right)^{1/2} \leq 2\delta n_\infty (A\mathbf{H}, \mathbf{H})^{1/2},$$

где параметры  $\delta, \lambda$  определен в условии леммы 4.9. Используя эти неравенства, получаем:

$$|(C\mathbf{H}, \mathbf{H})| \leq 4\delta n_\infty (R_\sigma(\beta, \mathbf{H}) + \lambda\beta^2)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$R_\sigma(\hat{\beta}, \mathbf{H}) \leq R_\sigma(\beta, \mathbf{H}) + \delta|\hat{\beta} - \beta| \left( 4n_\infty (R_\sigma(\beta, \mathbf{H}) + \lambda\beta^2)^{1/2} + (\hat{\beta} + \beta) \right).$$

Из этого неравенства и равенства (4.61) имеем:

$$\hat{\beta}\gamma_l(\hat{\beta}, \sigma) \leq \beta\gamma_l(\beta, \sigma) + \delta|\hat{\beta} - \beta| \left( 4n_\infty (\beta\gamma_l(\beta, \sigma) + \lambda\beta^2)^{1/2} + (\hat{\beta} + \beta) \right).$$

По предположению  $\gamma_l(\beta, \sigma) \leq 0$ , следовательно,

$$\hat{\beta}\gamma_l(\hat{\beta}, \sigma) - \beta\gamma_l(\beta, \sigma) \leq \delta(4n_\infty \sqrt{\lambda} + 2) \max\{\beta, \hat{\beta}\}|\hat{\beta} - \beta|.$$

Меняя здесь местами  $\beta$  и  $\hat{\beta}$ , получаем оценку (4.60).  $\square$

**Теорема 4.24.** Для любого  $l = 1, 2, \dots$ , справедливы утверждения:

- a) функция  $\sigma_l(\beta)$  не убывает по  $\beta$  на интервале  $(\beta_l^0, \infty)$ ;
- b) функция  $\sigma_l^2(\beta)$  локально липшицева по  $\beta$  на интервале  $(\beta_l^0, \infty)$ ;
- c)  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_l(\beta)/\beta = (1 - (n_\infty/n_+)^2)^{1/2}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем свойство a). Согласно лемме 4.11, для любого  $l = 1, 2, \dots$  функция  $\gamma_l(\beta, \sigma)$  является непрерывной невозрастающей функцией  $\beta > 0$ . Пусть  $\hat{\beta} > \beta$ . Заметим, что решение уравнения (4.47) существует лишь при  $\gamma_l < 0$ . Учитывая это, получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} -\sigma_l^2(\hat{\beta})/n_\infty^2 &= \hat{\beta}\gamma_l(\hat{\beta}, \sigma_l(\hat{\beta})) \leq \beta\gamma_l(\hat{\beta}, \sigma_l(\hat{\beta})) \leq \beta\gamma_l(\beta, \sigma_l(\hat{\beta})) = \\ &= \beta \left( \gamma_l(\beta, \sigma_l(\hat{\beta})) - \gamma_l(\beta, \sigma_l(\beta)) \right) - \sigma_l^2(\beta)/n_\infty^2. \end{aligned}$$

Итак, справедливо неравенство:

$$\left( \sigma_l^2(\hat{\beta}) - \sigma_l^2(\beta) \right) / n_\infty^2 \geq \beta \left( \gamma_l(\beta, \sigma_l(\beta)) - \gamma_l(\beta, \sigma_l(\hat{\beta})) \right)$$

Согласно лемме 4.11, для любого  $l = 1, 2, \dots$  функция  $\gamma_l(\beta, \sigma)$  является непрерывной неубывающей функцией  $\sigma \geq 0$ . Следовательно, из последнего неравенства заключаем, что  $\sigma_l(\hat{\beta}) \geq \sigma_l(\beta)$ .

Докажем теперь свойство b). Не ограничивая общности, предположим, что  $\hat{\beta} > \beta > 0$ . Из свойства a) и оценки (4.60) следует:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left( \sigma_l^2(\hat{\beta}) - \sigma_l^2(\beta) \right) / n_\infty^2 = \beta\gamma_l(\beta, \sigma_l(\beta)) - \hat{\beta}\gamma_l(\hat{\beta}, \sigma_l(\hat{\beta})) \leq \\ &\leq \beta\gamma_l(\beta, \sigma_l(\beta)) - \hat{\beta}\gamma_l(\hat{\beta}, \sigma_l(\beta)) \leq c \max\{\beta, \hat{\beta}\} |\hat{\beta} - \beta|, \end{aligned}$$

поскольку функция  $\gamma_l(\beta, \sigma)$  не убывает по  $\sigma$ .

Докажем свойство c). Из равенства

$$-\sigma_l^2(\beta)/\beta^2 = n_\infty^2 \gamma_l(\beta, \sigma_l(\beta))/\beta$$

и неравенства (4.45) следует оценка:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sigma_l^2(\beta)}{\beta^2} \geq 1 - \frac{n_\infty^2}{n_+^2}.$$

С другой стороны, согласно теореме 4.21, если  $(\beta, \sigma, \mathbf{H})$  – решение задачи (4.37), то справедливо неравенство (4.38). Отсюда следует справедливость свойства  $c$ ).  $\square$

Только что доказанная лемма обобщает свойства решений задачи, хорошо известные в частном случае волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления [91].

Дальнейшее развитие идеи, заложенные в этом параграфе, нашли в статьях [47], [48], [134], в которых исходная векторная задача эквивалентным образом сводится к линейной обобщенной задаче на собственные значения вида:

$$C(\sigma)\mathbf{H} = \beta^2 D(\sigma)\mathbf{H},$$

где  $\mathbf{H} = (H_1, H_2)$ ,  $C(\sigma)$  – ограниченный а  $D(\sigma)$  – компактный самосопряженные операторы, зависящие только от параметра  $\sigma$ . Квадраты постоянных распространения  $\beta^2$  собственных волн и собственные вектора  $\mathbf{H}$  получаются в результате решения этой задачи при  $\sigma > 0$ , а квадраты точек отсечки  $\beta_i^0$  – при  $\sigma = 0$ . В работах [47], [48], [134] предлагается алгоритм вычисления постоянных распространения  $\beta$  для любого  $\sigma > 0$ , основанный на методе конечных элементов.



# ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА В ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

## § 1. Сведение задачи к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения

Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде. Схематическое изображение такого волновода приведено на рис. 1.

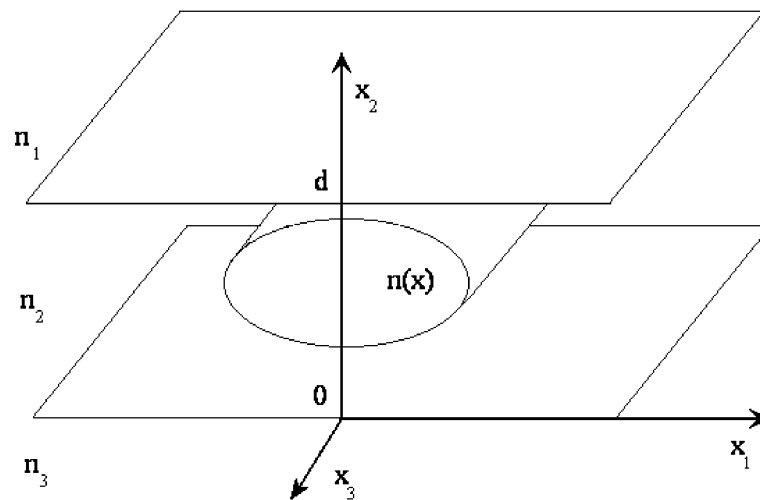


Рис. 1. Геометрия цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой окружающей среде

Пусть все трехмерное пространство

$$\{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\}$$

занято изотропной средой без источников, и пусть показатель преломления  $n = n(x_1, x_2)$  является положительной вещественной функцией

не зависящей от продольной координаты  $x_3$ . Пусть существует ограниченная область  $\Omega$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  такая, что

$$n(x) = n_\infty(x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega},$$

где  $n_\infty(x_2)$  зависит только от координаты  $x_2$ . Для определенности положим

$$n_\infty(x_2) = \begin{cases} n_1, & x_2 > d, \\ n_2, & 0 < x_2 < d, \\ n_3, & x_2 < 0. \end{cases}$$

Можно предположить без потери общности рассуждений, что

$$n_2 \geq n_3 \geq n_1 > 0.$$

Обозначим через  $n_+$  максимум функции  $n$  в области  $\Omega$ , и предположим, что

$$n_+ > n_2.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 > d\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < d\},$$

$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 < 0\}.$$

Предположим, что  $\Omega \subset \Omega_2$  и также, что  $n(x)$  является непрерывной функцией в бесконечной области  $\Omega_2$ , то есть, что волновод имеет размытую границу. Обозначим через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы области  $\Omega_2$ :

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = d\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = 0\}.$$

Для простоты рассуждений мы рассматриваем трехслойную среду, где возмущение показателя преломления находится целиком в центральном слое, но, в действительности, методами, используемыми в данном параграфе, может быть исследована задача с произвольным

конечным числом параллельных слоев, если возмущение целиком находится в одном из них и волновод имеет размытую границу.

Задача о собственных волнах волновода может быть сформулирована как векторная спектральная задача для системы уравнений Максвелла (1.1), с. 31, в предположении, что векторы напряженности электрического и магнитного поля имеют вид (1.2), с. 32. Мы рассматриваем постоянную распространения  $\beta$  как неизвестный вещественный параметр и  $\omega > 0$  как заданный параметр. Для полей, имеющих форму (1.2), система уравнений Максвелла (1.1) сводится к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (5.2)$$

где векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 33.

Обозначим через  $U$  множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}_1$ ,  $\bar{\Omega}_2$  и  $\bar{\Omega}_3$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , экспоненциально убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  по любому направлению, не параллельному прямым  $\Gamma_j$ , и ограниченных при  $|x| \rightarrow \infty$  параллельно прямым  $\Gamma_j$ . Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  системы уравнений (5.1), (5.2) в пространстве  $U^6$ . На границах раздела сред векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  должны удовлетворять условиям сопряжения (см. параграф 1 главы 1):

$$\nu \times \mathbf{E}^+ = \nu \times \mathbf{E}^-, \quad \nu \times \mathbf{H}^+ = \nu \times \mathbf{H}^-, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (5.3)$$

Здесь  $\nu$  – вектор нормали к  $\Gamma_j$ ,  $f^+(f^-)$  – предел функции  $f$  сверху (снизу) прямой  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Обозначим  $\Lambda_0^{(1)}$  главный (“физический”) лист римановой поверхности функции  $\ln \chi(\beta)$ , где

$$\chi(\beta) = \sqrt{k^2 n_2^2 - \beta^2},$$

который определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}.$$

**Определение 5.13.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$  будем называть собственным вектором задачи (5.1) – (5.3), отвечающим собственному значению

$$\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)} = \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \text{Im}\beta = 0, |\beta| > kn_2\},$$

если выполнены условия (5.1) – (5.3).

Получим интегральное представление для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (5.1) – (5.3), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Это представление будет использовано для сведения задачи (5.1) – (5.3) к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения.

**Определение 5.14.** Вектор-функция  $\Pi$  называется вектором Герца, или поляризационным потенциалом векторного поля  $\{E, H\}$ , если для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  справедливо следующее представление:

$$E = (k^2 n_\infty^2 + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) \Pi, \quad (5.4)$$

$$H = -i\omega \varepsilon_0 n_\infty^2 \text{rot}_\beta \Pi. \quad (5.5)$$

**Лемма 5.13.** Для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (5.1) – (5.3), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ , существует поляризационный потенциал  $\Pi \in U^3$ , который для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  удовлетворяет уравнению:

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = -\frac{1}{n_\infty^2} (n^2 - n_\infty^2) E, \quad (5.6)$$

и для  $x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\Pi_l^+ = N^2 \Pi_l^-, \quad l = 1, 2, 3, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \Pi_l^+}{\partial x_2} = N^2 \frac{\partial \Pi_l^-}{\partial x_2}, \quad l = 1, 2, \quad (5.8)$$

$$\left( \frac{\partial \Pi_2^+}{\partial x_2} - \frac{\partial \Pi_2^-}{\partial x_2} \right) = (1 - N^2) \left( \frac{\partial \Pi_1^-}{\partial x_1} + i\beta \Pi_3^- \right), \quad (5.9)$$

где  $N = n_{i+1}/n_i$  для  $x \in \Gamma_i$ ;  $f^+(f^-)$  – предел функции  $f$  сверху (снизу) на прямой  $\Gamma_i$ . Для  $x \in \mathbb{R}^2$  поляризационный потенциал  $\Pi$  имеет следующее интегральное представление:

$$\Pi(x) = \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) E(y) dy, \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned} G(\beta; x, y) &= \Phi(\beta; x, y) + G^s(\beta; x, y), \\ \Phi(\beta; x, y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi(\beta) |x - y|), \end{aligned}$$

$$G^s(\beta; x, y) = \begin{bmatrix} G_n(\beta; x, y) & \partial G_c(\beta; x, y) / \partial x_1 & i\beta G_c(\beta; x, y) \\ 0 & G_t(\beta; x, y) & 0 \\ 0 & 0 & G_t(\beta; x, y) \end{bmatrix},$$

$$G_\alpha(\beta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda) \frac{\exp(i\lambda(x_1 - y_1))}{2\sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_2^2}} d\lambda,$$

$$\alpha = t, n, c.$$

Функции  $R_\alpha$  определяются геометрией задачи и для трехслойной окружающей среды представлены в приложении А, с. 174;  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода индекса 0.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Существование вектора  $\Pi$  такого, что представление (5.4), (5.5) и уравнение (5.6) справедливы хорошо известно (см., напр., [119]). Если поляризационный потенциал  $\Pi$  удовлетворяет условиям (5.7) – (5.9), то векторы  $E$  и  $H$ , имеющие представление (5.4), (5.5) удовлетворяют условиям (5.3). Задача (5.6) – (5.9) имеет решение в виде (5.10) [110]. Функция  $G(\beta; x, y)$  – хорошо известная тензорная функция Грина для поляризационного потенциала [111]. Используя представление (5.10) для поляризационного потенциала  $\Pi$  можно доказать, что  $\Pi \in U^3$  для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ .  $\square$

Используя (5.4) и (5.10), получаем интегральное представление для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (5.1) – (5.3), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ :

$$E(x) = (k^2 n_\infty^2 + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) E(y) dy, \quad (5.11)$$

$$H(x) = -i\omega \varepsilon_0 \text{rot}_\beta \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) E(y) dy,$$

где  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ .

Сведем теперь задачу (5.1) – (5.3) к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения аналогичного [110], [113], [152], [172]. Это уравнение часто используется на практике потому, что оно точно учитывает поведение поля в окружающей слоистой среде.

**Лемма 5.14.** Пусть  $\{E, H\}$  – собственный вектор задачи (5.1) – (5.3), отвечающий собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Тогда

$$(\mathcal{Q}(\beta)E)(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}(\beta)E)(x) &= E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\ &- \int_{\Omega} T(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy - \\ &- \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy - \\ &- \int_{\Omega} L(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy, \\ TF &= \begin{bmatrix} (KF)_1 + i\beta F_3 \partial\Phi / \partial x_1 \\ (KF)_2 + i\beta F_3 \partial\Phi / \partial x_2 \\ i\beta F_1 \partial\Phi / \partial x_1 + i\beta F_2 \partial\Phi / \partial x_2 + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2) F_3 \Phi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1 \mathbf{F} &= \sum_{l=1}^2 \begin{bmatrix} F_l \partial^2 \Phi_1 / \partial x_l \partial x_1 \\ F_l \partial^2 \Phi_1 / \partial x_l \partial x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\eta(x) &= \begin{pmatrix} n^2(x)/n_\infty^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^2(x)/n_\infty^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K(\beta; x, y) \mathbf{F}(y) &= k^2 n_\infty^2 \mathbf{F}(y) \Phi(\beta; x, y) + \\
&+ \sum_{l=1}^2 \begin{bmatrix} F_l \partial^2 \Phi_0 / \partial x_l \partial x_1 \\ F_l \partial^2 \Phi_0 / \partial x_l \partial x_2 \end{bmatrix}, \\
\Phi_1(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, \\
\Phi_0(\beta; x, y) &= \Phi(\beta; x, y) - \Phi_1(x, y), \\
L(\beta; x, y) \mathbf{F}(y) &= (k^2 n_\infty^2 + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) G^s(\beta; x, y) \mathbf{F}(y), \\
\mathbf{F} &= (F_1, F_2)^T.
\end{aligned}$$

Утверждение леммы доказывается непосредственными вычислениями, внося оператор  $\text{grad}_\beta \text{div}_\beta$  под знак интеграла в соотношении (5.11) и используя правило дифференцирования слабо сингулярных интегралов (см., напр, [155, с. 242]). Отметим, что применение этих преобразований обосновано, так как плотности возникающих сингулярных интегралов равны нулю вне области  $\Omega$ , и принадлежат пространству  $L_2(\Omega)$  в силу гладкости  $E$  и  $n$ . Отметим также, что для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  и  $y \in \Omega$  функции  $G^s(\beta; x, y)$  и  $\Phi_0(\beta; x, y)$  дважды непрерывно дифференцируемы по  $x \in \Omega$ .

Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$ , определенный равенством (5.12), будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\Omega)]^3$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  имеет сильно сингулярное ядро  $T_1(x, y)$ .

## § 2. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора

**Теорема 5.25.** При любом  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\beta$  – фиксированное число, принадлежащее  $\widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Через  $\mathcal{Q}^*(\beta)$  обозначим оператор, сопряженный с  $\mathcal{Q}(\beta)$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \Omega$  получаем:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{Q}^*(\beta)\mathbf{E})(x) &= \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)\mathbf{E}(x) - \\
 &- \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \int_{\Omega} T^p(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\
 &- \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \int_{\Omega} T_1(x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\
 &- \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \int_{\Omega} L^p(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \\
 T^p\mathbf{F} &= \begin{bmatrix} (\overline{K\mathbf{F}})_1 + i\overline{\beta}\mathbf{F}_1\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 \\ (\overline{K\mathbf{F}})_2 + i\overline{\beta}\mathbf{F}_2\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 \\ i\overline{\beta}\mathbf{F}_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 + i\overline{\beta}\mathbf{F}_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 + (k^2n_\infty^2 - \overline{\beta^2})\mathbf{F}_3\overline{\Phi} \end{bmatrix}, \\
 L^p\mathbf{F} &= (k^2n_\infty^2 + \overline{\text{grad}_\beta \text{div}_\beta}) \overline{G^s(\beta; y, x)}^T \mathbf{F}(y),
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

где  $\overline{\text{grad}_\beta}$  и  $\overline{\text{div}_\beta}$  означает, что множитель  $(i\beta)$  заменяется множителем  $(-i\overline{\beta})$ ;  $G^T$  – матрица транспонированная к  $G$ .

Заметим, что ядро  $T_1(x, y)$  сильно сингулярное, самосопряженное и не зависит от  $\beta$ ; ядра  $T(\beta; x, y)$ ,  $T^p(\beta; x, y)$  слабо полярные для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ ; ядра  $L(\beta; x, y)$  и  $L^p(\beta; x, y)$  непрерывны по  $x, y \in \Omega$  для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ .

Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов. Будем использовать общие результаты теории многомерных интегральных сингулярных матричных операторов (см., напр., [155, с. 368]). Положим

$$(\mathcal{D}(\beta)\mathbf{E})(x) = \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)\mathbf{E}(x) - \tag{5.14}$$



$$-p(x) \int_{\mathbb{R}^2} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy - \quad (5.15)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy, \quad (5.16)$$

где  $x \in \mathbb{R}^2$ , и  $p(x)$  – бесконечно дифференцируемая вещественнозначная функция, имеющая компактный носитель в  $\mathbb{R}^2$ , и тождественно равная единице для  $x \in \Omega$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  получаем:

$$(\mathcal{D}^*(\beta)E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \quad (5.17)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} p(y) (T^p(\beta; x, y) + L^p(\beta; x, y)) E(y) dy - \quad (5.18)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) E(y) dy. \quad (5.19)$$

Интегральные операторы, определенные слагаемыми (5.15) и (5.18), в силу гладкости их ядер вполне непрерывны в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$  для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Обозначим их через  $\mathcal{C}(\beta)$  и  $\mathcal{C}^*(\beta)$ , соответственно. Положим для  $x \in \mathbb{R}^2$ :

$$(\mathcal{S}E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \quad (5.20)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy,$$

тогда

$$(\mathcal{S}^*E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \quad (5.21)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) E(y) dy,$$

и

$$\mathcal{D}(\beta) = \mathcal{C}(\beta) + \mathcal{S}, \quad \mathcal{D}^*(\beta) = \mathcal{C}^*(\beta) + \mathcal{S}^*,$$

где оператор  $S^*$  – матричный интегральный оператор:

$$S^* = [S_{l,m}^*]_{l,m=1}^3.$$

Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $l, m = 1, 2$ , получаем:

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{l,m}^* E_m)(x) &= \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right)\right) \delta_{l,m} E_m(x) - \\ &- \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} (2\alpha_l(\varphi)\alpha_m(\varphi) - \delta_{l,n}) \frac{E_m(y)}{2\pi |x-y|^2} dy, \\ (\mathcal{S}_{3,3}^* E_3)(x) &= E_3(x), \\ (\mathcal{S}_{l,3}^* E_3)(x) &= 0, \\ (\mathcal{S}_{3,m}^* E_m)(x) &= 0, \end{aligned}$$

где  $\delta_{l,m}$  – символ Кронекера;  $\alpha_1(\varphi)$  и  $\alpha_2(\varphi)$  – декартовы координаты точки  $\alpha = (y-x)/|x-y|$ . Точка  $\alpha$  принадлежит окружности

$$\Theta = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\},$$

и

$$\alpha_1(\varphi) = \cos \varphi, \quad \alpha_2(\varphi) = \sin \varphi, \quad (5.22)$$

где  $\varphi$  – угловая координата точки  $\alpha$ . Функция  $n$  непрерывна в  $\Omega_2$ , и  $n(x) = n_\infty$  для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ . Следовательно, характеристики операторов  $\mathcal{S}_{l,n}^*$  непрерывны в  $\mathbb{R}^2$  и не зависят от  $x$  для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ . Непосредственными вычислениями получаем представление матричного символа  $\Psi^*(x, \alpha)$  оператора  $\mathcal{S}^*$ :

$$\Psi^*(x, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1^2(\varphi) & \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1(\varphi)\alpha_2(\varphi) & 0 \\ \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1(\varphi)\alpha_2(\varphi) & 1 + \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_2^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

для  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \Theta$ . Функция  $n$  вещественна, следовательно матричный символ  $\Psi(x, \alpha)$  сингулярного интегрального оператора  $\mathcal{S}$  равен  $\Psi^*(x, \alpha)$ ,

$$\Psi(x, \alpha) = \Psi^*(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \Theta. \quad (5.24)$$

Очевидно, имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\det \Psi(x, \alpha)| > 0, \\ & \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} \left| \det \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) \end{pmatrix} \right| > 0, \\ & \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\Psi_{1,1}(x, \alpha)| > 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Следовательно, (см., напр, [155, с. 368]) оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов.

Докажем теперь, что индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  равен индексу оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Пусть вектор-функция  $W(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежит множеству  $N(\mathcal{D})$  нулей оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ . Нетрудно видеть, что для всех  $x \in \Omega$  справедливо равенство:

$$(\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5.26)$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega$  вектор-функция  $W(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(\mathcal{Q})$  нулей оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ :

$$W(x) = V(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.27)$$

По определению оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  имеем для всех  $x \in \mathbb{R}^2$  следующее равенство:

$$(\mathcal{D}(\beta)W)(x) = W(x) + \frac{1}{2}\eta(x)W(x) - \quad (5.28)$$

$$- p(x) \int_{\mathbb{R}^2} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) W(y) \right) dy - \quad (5.29)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) W(y) \right) dy. \quad (5.30)$$

Из двух последних равенств, учитывая то, что  $n(x) = n_\infty$  при  $x \in \Omega_\infty$ , получаем представление вектор-функции  $W(x)$  для  $x \in \Omega_\infty$  через  $V(x)$ :

$$W(x) = p(x) \int_{\Omega} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) V(y) \right) dy + \quad (5.31)$$

$$+ \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_{\infty}^2} - 1 \right) V(y) \right) dy. \quad (5.32)$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  взаимно однозначно связаны с нулями оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ , и, следовательно, размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}) = \dim N(\mathcal{Q}). \quad (5.33)$$

Пусть теперь вектор-функция  $W^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежит множеству  $N(\mathcal{D}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Учитывая явный вид этого оператора (5.17) – (5.19), получаем следующее равенство:

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = W^*(x) = 0, \quad x \in \Omega_{\infty}. \quad (5.34)$$

Из этого равенства и равенств (5.17) – (5.19), (5.13) имеем:

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = (\mathcal{Q}^*(\beta)W^*)(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5.35)$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega$  вектор-функция  $W^*(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ :

$$W^*(x) = V^*(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.36)$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$  взаимно однозначно связаны с нулями оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , и, следовательно, размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(\mathcal{Q}^*). \quad (5.37)$$

Окончательно, используя (5.33) и (5.37), для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  имеем равенство индексов оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  и оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ :

$$\text{Ind} \mathcal{D} = \dim N(\mathcal{D}) - \dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(\mathcal{Q}) - \dim N(\mathcal{Q}^*) = \text{Ind} \mathcal{Q}. \quad (5.38)$$

Согласно доказанному выше, индекс оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  равен нулю. Следовательно, равен нулю и индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ .

Оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов, а значит, нормально разрешим. Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  также нормально разрешим. Рассмотрим уравнение:

$$(\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = W^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.39)$$

где вектор правой части  $W^0$  ортогонален множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ . Пусть вектор-функция  $U^0 \in (L_2(\mathbb{R}^2))^3$  совпадает с вектор-функцией  $W^0(x)$  для всех  $x \in \Omega$  и тождественно равна нулю в  $\Omega_\infty$ . Учитывая представления (5.34), (5.36) для нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ , приходим к заключению, что вектор-функция  $U^0$  ортогональна множеству нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Следовательно, в силу фредгольмовости оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  существует решение  $U \in (L_2(\mathbb{R}^2))^3$  уравнения:

$$(\mathcal{D}(\beta)U)(x) = U^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (5.40)$$

Представим вектор-функцию  $U(x)$  в виде суммы двух вектор-функций:

$$U(x) = V(x) + W(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5.41)$$

где  $V(x) = 0$  при  $x \in \Omega$ , а  $W(x) = 0$  при  $x \in \Omega_\infty$ . Заметим, что для такой вектор-функции  $W(x)$  справедливо равенство (5.26), а вектор-функция  $U(x)$  удовлетворяет уравнению (5.40). Следовательно, при  $x \in \Omega$  имеем цепочку равенств:

$$W^0(x) = U^0(x) = \quad (5.42)$$

$$= (\mathcal{D}(\beta)U)(x) = (\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.43)$$

Таким образом, для любой вектор-функции  $W^0$ , ортогональной множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , существует решение  $W$  из  $(L_2(\Omega))^3$  уравнения (5.39). А это значит, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Итак, для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим, индекс его равен нулю, следовательно, по определению он фредгольмов.  $\square$

**Определение 5.15.** Ненулевой вектор  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  будем называть собственным вектором оператор-функции  $\mathcal{Q}(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ , если выполнено уравнение

$$\mathcal{Q}(\beta)F = 0. \quad (5.44)$$

**Теорема 5.26.** Пусть  $\{E, H\} \in U^6$  – собственный вектор задачи (5.1)-(5.3), отвечающий собственному значению  $\beta_0 \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Тогда

$$F = E \in [L_2(\Omega)]^3, \quad x \in \Omega,$$

– собственный вектор оператор-функции  $\mathcal{Q}(\beta)$ , отвечающий тому же самому характеристическому значению  $\beta_0$ .

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 5.14.

**Приложение А.** Приведем явный вид функций

$$R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda), \quad \alpha = t, n, c,$$

для  $(x, y) \in \Omega_2^2$ . Способ их построения методом преобразования Фурье изложен, например, в статье [122].

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{R_t^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_t^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_t^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_t^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^H}, \\ R_n &= \frac{R_n^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_n^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_n^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_n^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^E}, \\ R_c &= \frac{R_c^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_c^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_c^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_c^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^E Z^H}. \end{aligned}$$

Для трехслойной геометрии имеем:

$$\begin{aligned} Z^H(\beta, \lambda) &= \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) e^{2p_2 d} - \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right), \\ Z^E(\beta, \lambda) &= \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{2p_2 d} \\ &\quad - \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right), \end{aligned}$$

$$R_t^1(\beta, \lambda) = R_t^2(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right),$$

$$R_t^3(\beta, \lambda) = \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right),$$

$$R_t^4(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) e^{2p_2 d},$$

$$R_n^1(\beta, \lambda) = R_n^2(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right),$$

$$R_n^3(\beta, \lambda) = \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right),$$

$$R_n^4(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{2p_2 d},$$

$$R_c^1(\beta, \lambda) = e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right),$$

$$R_c^2(\beta, \lambda) = e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right),$$

$$R_c^3(\beta, \lambda) = \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right),$$

$$R_c^4(\beta, \lambda) = \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{4p_2 d} - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right),$$

$$p_j = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_j^2}, \quad \operatorname{Re}(p_j) > 0, \quad N_{ij} = \frac{n_i}{n_j}.$$

Приведем явный вид функций  $R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda)$ ,  $\alpha = t, n, c$  для трехслойной геометрии и  $y \in \Omega_2$ ,  $x \in \Omega_1$ .

$$\begin{aligned}
R_t &= e^{-p_1(x_2-d)} \left( e^{-p_2 y_2} + \frac{1}{R_{32}^t} e^{p_2 y_2} \right) \frac{1}{T_{12}^t F^t} \left( R_{21}^t + \frac{1}{R_{12}^t} \right) e^{p_2 d}, \\
R_n &= e^{-p_1(x_2-d)} N_{21}^2 e^{p_2 y_2} \left( \frac{e^{-p_2 d} + \Lambda_{33}^n e^{p_2 d}}{F_n} + e^{-p_2 d} \right), \\
&\quad + e^{-p_1(x_2-d)} N_{21}^2 e^{-p_2 y_2} e^{p_2 d} \frac{(1 + \Lambda_{11}^n)}{F_n}, \\
R_c &= e^{-p_1(x_2-d)} (e^{p_2 y_2} C_1 + e^{-p_2 y_2} C_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{N_{21}^2}{F_n} \left( a_5 e^{p_2 d} (1 + \Lambda_{11}^n) + b_5 \frac{1}{R_{32}^t} (1 + \Lambda_{33}^n e^{2p_2 d}) \right), \\
C_2 &= \frac{N_{21}^2}{F_n} \left( a_5 e^{3p_2 d} \frac{1}{R_{12}^t} (1 + \Lambda_{11}^n) + (1 + \Lambda_{33}^n e^{2p_2 d}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^t &= e^{2p_2 d} \frac{1}{R_{32}^t} \frac{1}{R_{12}^t} - 1, \\
F_n &= e^{2p_2 d} \Lambda_{33}^n \Lambda_{11}^n - 1, \\
a_5 &= \frac{(N_{32}^2 - 1) \left( \frac{p_2 + p_3}{p_2 - p_3} + \frac{p_3 - p_2}{p_3 + p_2} \right)}{\frac{2p_3}{p_3 + p_2} F^t (N_{32}^2 p_2 - p_3)}, \\
b_5 &= \frac{N_{12}^2 (N_{21}^2 - 1) \left( \frac{2p_2}{p_2 - p_1} \right) e^{p_2 d}}{F^t (p_2 N_{12}^2 - p_1)},
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{33}^n = \frac{N_{32}^2 p_2 + p_3}{N_{32}^2 p_2 - p_3}, \quad \Lambda_{11}^n = \frac{N_{12}^2 p_2 + p_1}{N_{12}^2 p_2 - p_1},$$

$$T_{\alpha\beta}^t = \frac{2N_{\alpha\beta}^2 p_\alpha}{p_\alpha + p_\beta}, \quad R_{\alpha\beta}^t = \frac{p_\beta - p_\alpha}{p_\beta + p_\alpha},$$

$$p_j = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_j^2}, \quad \text{Re}(p_j) > 0, \quad N_{ij} = \frac{n_i}{n_j}.$$



# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

## § 1. Метод Галеркина решения общих задач о собственных волнах

**1. Сходимость проекционных методов решения задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектральных параметров.** Для численного решения задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектральных параметров в интегральные операторы (2.24) и (2.74) будем применять метод Галеркина. Теоретическое обоснование сходимости метода проведем на основе общих результатов статьи [4], посвященной исследованию сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач. Приведем некоторые определения и необходимые нам формулировки теорем из этой работы.

Пусть даны банаховы пространства  $U$  и  $U_n$ ,  $n \in N$ , где  $N$  – множество всех натуральных чисел. Через  $N'$ ,  $N''$  и т. д. будем обозначать бесконечные подмножества множества натуральных чисел  $N$ . Под сходимостью  $z_n \rightarrow z$ ,  $n \in N'$ , будем понимать сходимость при  $n \rightarrow \infty$ , когда индекс  $n$  пробегает множество  $N'$ . Пусть операторы  $p_n : U \rightarrow U_n$  удовлетворяют условиям:

$$\|p_n u\|_{U_n} \rightarrow \|u\|_U, \quad n \in N, \quad \forall u \in U, \quad (6.1)$$

$$\|p_n(\alpha u + \alpha' u') - (\alpha p_n u + \alpha' p_n u')\|_{U_n} \rightarrow 0, \quad n \in N, \quad \forall u, u' \in U, \quad (6.2)$$

где  $\alpha, \alpha'$  – произвольные комплексные константы.

Последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'}$  где  $u_n \in U$  называется дискретно сходящейся к пределу  $u \in U$ , если  $\|u_n - p_n u\| \rightarrow 0$ ,  $n \in N'$ . Будем обозначать это так:  $u_n \rightarrow u$ ,  $n \in N'$ .

Последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'}$  называется дискретно компактной или  $P$ -компактной, если для каждого  $N'' \subseteq N'$  существует такое  $N''' \subseteq N''$ , что последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'''}$  сходится к некоторому пределу  $u \in U$ .

Пусть даны банаховы пространства  $V$  и  $V_n$ ,  $n \in N$ , и операторы  $q_n : V \rightarrow V_n$ , удовлетворяющие условиям:

$$\|q_n v\|_{V_n} \rightarrow \|v\|_V, \quad n \in N, \quad \forall v \in V, \quad (6.3)$$

$$\|q_n(\alpha v + \alpha' v') - (\alpha q_n v + \alpha' q_n v')\|_{V_n} \rightarrow 0, \quad n \in N, \quad \forall v, v' \in V, \quad (6.4)$$

где  $\alpha, \alpha'$  – произвольные комплексные константы. Аналогично приведенным выше определениям вводятся понятия  $Q$ -сходимости и  $Q$ -компактности.

Пусть даны некоторые операторы  $A : U \rightarrow V$  и  $A_n : U_n \rightarrow V_n$ . Будем говорить, что последовательность операторов  $\{A_n\}_{n \in N'}$  собственно сходится к оператору  $A$ , если выполнены условия:

$$u_n \rightarrow u, \quad n \in N' \Rightarrow A_n u_n \rightarrow A u, \quad n \in N', \quad (6.5)$$

$$\|u_n\| \leq \text{const}, \quad \{A_n u_n\}_{n \in N'} \text{ } Q\text{-компактна} \Rightarrow \{u_n\}_{n \in N'} \text{ } P\text{-компактна.} \quad (6.6)$$

Обозначим через  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : V \rightarrow U\}$  множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$ ,  $\sigma(A) = \Lambda \setminus \rho(A)$  – множество сингулярных точек оператора  $A(\beta)$ , соответственно;

$$\rho(A_n) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A_n(\beta)^{-1} : V_n \rightarrow U_n\}, \quad \sigma(A_n) = \Lambda \setminus \rho(A_n).$$

Справедливы следующие теоремы [4].

**Теорема 6.27.** *Предположим, что при  $n \in N$  выполнены условия:*

1. Операторы  $p_n : U \rightarrow U_n$ ,  $q_n : V \rightarrow V_n$  удовлетворяют условиям (6.1), (6.2) и (6.3), (6.4).

2.  $\Lambda$  – область (открытое связное множество) в комплексной плоскости,  $A(\beta)$  и  $A_n(\beta)$  – голоморфные на  $\Lambda$  оператор-функции,  $A : U \rightarrow V$ ,  $A_n : U_n \rightarrow V_n$ .

3. При каждом фиксированном  $\beta \in \Lambda$  операторы  $A(\beta)$ ,  $A_n(\beta)$  фредгольмовы.

4.  $A_n(\beta) \rightarrow A(\beta)$  собственно  $\forall \beta \in \Lambda$ .

5. Нормы  $\|A_n(\beta)\|$  ограничены равномерно по  $n$  и  $\beta$  на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ .

6. Множество  $\rho(A) \neq \emptyset$ , то есть  $\sigma(A) \neq \Lambda$ .

Пусть  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , тогда существует такая последовательность  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$ .

**Теорема 6.28.** Предположим, что выполнены условия 1 – 6 теоремы 6.27. Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|u_n\| = 1$ , таких что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)u_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $u_n \rightarrow u_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)u_0 = 0$ ,  $\|u_0\| = 1$ .

Отметим, что эти результаты носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда  $\Lambda$  – не область комплексной плоскости, а риманова поверхность.

**2. Метод Галеркина решения задачи со слабосингулярным оператором.** Опишем численный метод решения задачи (2.24), с. 65. При построении и исследовании численного метода операторное уравнение (2.24) удобно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве

$$H = W_2^1 \times L_2.$$

При этом будем использовать известное (см., напр., [15], с. 10) выражение для оператора  $L^{-1} : W_2^1 \rightarrow L_2$ :

$$L^{-1}(u; t) = \frac{c_0(u)}{\ln 2} + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k(u) e^{ikt}, \quad u \in W_2^1, \quad (6.7)$$

где

$$c_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) e^{-ik\tau} d\tau$$

– коэффициенты Фурье функции  $u$ . Отметим, что

$$\|L^{-1}\| = 2. \quad (6.8)$$

Приближенное решение  $w_n = (w_n^{(1)}, w_n^{(2)})$  уравнения (2.24) будем искать в виде:

$$w_n^{(j)}(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k^{(j)} e^{ikt}, \quad n \in N, \quad j = 1, 2.$$

Коэффициенты  $\alpha_k^{(j)}$  будем определять с помощью метода Галеркина:

$$\int_0^{2\pi} (Aw_n)^{(k)}(t) e^{-ijt} dt = 0, \quad j = -n, \dots, n, \quad k = 1, 2. \quad (6.9)$$

В силу (6.7) имеем:

$$L^{-1}(w_n^{(1)}; t) = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\ln 2} + 2 \sum_{k=-n}^n |k| \alpha_k^{(1)} e^{ikt},$$

поэтому равенства (6.9) эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_j^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(1,1)}(\beta) d_j \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(1,2)}(\beta) \alpha_k^{(2)} = 0, \quad j = -n, \dots, n, \quad (6.10)$$

$$\alpha_j^{(2)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(2,1)}(\beta) d_j \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(2,2)}(\beta) \alpha_k^{(2)} = 0, \quad j = -n, \dots, n. \quad (6.11)$$

Здесь  $d_j = \{1/\ln 2$  при  $j = 0$ ,  $2|j|$  при  $j \neq 0\}$ ,

$$h_{jk}^{(l,m)}(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(l,m)}(\beta; t, \tau) e^{-ijt} e^{ik\tau} dt d\tau.$$

Напомним, что ядра  $h^{(l,m)}$  не имеют особенности при  $t = \tau$ . Таким образом, применение метода Галеркина с тригонометрическим базисом позволяет обратить главную часть сингулярных операторов аналитически.

Пусть  $H_n^T$  – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше  $n$ . Обозначим через  $H_n$  подпространство  $H$  элементов вида  $(w_n^{(1)}, w_n^{(2)})$ ,  $w_n^{(1)}, w_n^{(2)} \in H_n^T$ . Введем в рассмотрение оператор проектирования  $p_n : H \rightarrow H_n$ :

$$p_n w = (\Phi_n w^{(1)}, \Phi_n w^{(2)}), \quad w = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in H, \quad (6.12)$$

где  $\Phi_n$  – оператор Фурье:

$$\Phi_n(u; t) = \sum_{k=-n}^n c_k(u) e^{ikt}.$$

Ясно, что

$$\|p_n\| = 1. \quad (6.13)$$

Система линейных алгебраических уравнений (6.10), (6.11) эквивалентна линейному операторному уравнению:

$$A_n(\beta) w_n \equiv p_n A(\beta) w_n \equiv (I + p_n B(\beta)) w_n \equiv (I + B_n(\beta)) w_n = 0. \quad (6.14)$$

Здесь  $A_n : H_n \rightarrow H_n$ ,  $I$  – единичный оператор в пространстве  $H_n$ .

Обозначим  $\sigma(A_n)$  множество сингулярных точек оператора  $A_n(\beta)$ . Приближенные значения  $\beta_n$  постоянных распространения  $\beta$  будем искать как сингулярные точки оператора  $A_n(\beta)$ . Относительно сходимости описанного метода, справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.29.** Пусть  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , тогда существует такая последовательность  $\{\beta_n\}_{n \in N}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in N$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{w_n\}_{n \in N}$  – некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|w_n\| = 1$ , такие, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)w_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $w_n \rightarrow w_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)w_0 = 0$ ,  $\|w_0\| = 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство теоремы заключается в проверке условий 1-6 теорем 6.27 и 6.28 в рассматриваемом случае.

1. Оператор  $p_n : H \rightarrow H_n$  обладает свойствами (6.1), (6.2). Первое свойство выполняется в силу очевидных предельных соотношений:

$$\|\Phi_n u\| \rightarrow \|u\|, \quad n \in N, \quad u \in L_2, \quad W_2^1.$$

Второе – очевидное следствие линейности оператора  $p_n$ .

2. Оператор-функции  $A(\beta)$  и  $A_n(\beta)$  голоморфны на  $\Lambda$ . Голоморфность оператор-функции  $A(\beta)$  доказана в теореме 2.2. Следовательно, таким же свойством обладает и  $A_n(\beta) = p_n A(\beta)$ .

3. При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы  $A(\beta)$  и  $A_n(\beta)$  фредгольмовы. Это непосредственно вытекает из полной непрерывности оператора

$$B(\beta) : H \rightarrow H$$

и конечномерности оператора  $B_n(\beta)$  при  $\beta \in \Lambda$ .

4. Для любого  $\beta \in \Lambda$  последовательность операторов  $\{A_n(\beta)\}_{n \in N}$  собственно сходится к оператору  $A(\beta)$ . Для доказательства этого утверждения проверим выполнимость условий (6.5), (6.6).

Верна оценка:

$$\|A(\beta)\| \leq c(\beta), \quad \beta \in \Lambda, \quad (6.15)$$

где  $c(\beta)$  – непрерывная в области  $\Lambda$  функция:

$$c(\beta) = 1 + 2(c_{11}^2(\beta) + d_{11}^2(\beta))^{1/2} + (c_{12}^2(\beta) + d_{12}^2(\beta))^{1/2} + 2c_{21}(\beta) + c_{22}(\beta).$$

Здесь

$$c_{ij}^2(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)|^2 dt dt_0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$d_{1j}^2(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dt} h^{(1,j)}(\beta; t, t_0) \right|^2 dt dt_0, \quad j = 1, 2.$$

Справедливость оценки (6.15) следует из неравенства:

$$\|A(\beta)\| \leq 1 + (\|B^{(1,1)}(\beta)\| + \|B^{(2,1)}(\beta)\|) \|L^{-1}\| + \|B^{(1,2)}(\beta)\| + \|B^{(2,2)}(\beta)\|,$$

равенства (6.8) и очевидных оценок:

$$\|B^{(2,j)}(\beta)\| \leq c_{2,j}(\beta), \quad B^{(2,j)}(\beta) : L_2 \rightarrow L_2,$$

$$\|B^{(1,j)}(\beta)\|^2 \leq c_{1,j}^2(\beta) + d_{1,j}^2(\beta), \quad B^{(1,j)}(\beta) : L_2 \rightarrow W_2^1, \quad j = 1, 2.$$

Из определения оператора  $A_n(\beta)$  и равенства (6.13) вытекает оценка:

$$\|A_n(\beta)\| \leq \|A(\beta)\|, \quad n \in N, \quad \beta \in \Lambda. \quad (6.16)$$

$P$ -сходимость  $\{w_n\}_{n \in N}$  к  $w \in H$ , означает, что

$$\|w_n - p_n w\| \rightarrow 0, \quad n \in N.$$

Справедливость условия (6.5) вытекает, таким образом, из оценки:

$$\|A_n w_n - p_n A w\| \leq \|A_n\| \|w_n - p_n w\| + \|p_n\| \|A\| \|p_n w - w\|, \quad n \in N,$$

оценок (6.15), (6.16), равенства (6.13) и очевидного предельного соотношения:

$$\|p_n w - w\| \rightarrow 0, \quad n \in N.$$

Проверим условие (6.6).  $P$ -компактность последовательности  $\{A_n w_n\}_{n \in N}$  означает, что для любого  $N' \subseteq N$  существует такое  $N'' \subseteq N'$ , что последовательность  $\{A_n w_n = w_n + B_n w_n\}_{n \in N''}$   $P$ -сходится к  $z \in H$ . Если  $\|w_n\| \leq \text{const}$ ,  $n \in N''$ , то существует слабо сходящаяся подпоследовательность  $\{w_n\}_{n \in N'''}$ ,  $N''' \subset N''$ . Вполне

непрерывный оператор  $B$ , как известно, переводит ее в сильно сходящуюся:

$$\|Bw_n - u\| \rightarrow 0, \quad n \in N''', \quad u \in H.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\|B_n w_n - p_n u\| \leq \|p_n\| \|Bw_n - u\|$$

и равенства (6.13) следует, что последовательность  $\{B_n w_n\}_{n \in N'''} P$ -сходится к  $u \in H$ . Таким образом,  $\{w_n\}_{n \in N'''} P$ -сходится к вектору  $w = z - u \in H$ , и условие (6.6) выполнено.

5. Нормы  $\|A_n(\beta)\|$  ограничены равномерно по  $n$  и  $\beta$  на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ . Справедливость этого утверждения непосредственно следует из оценок (6.15) и (6.16).

6. Множество  $\rho(A)$  не пусто, то есть  $\sigma(A) \neq \Lambda$ . Справедливость этого утверждения доказано в теореме 2.4, с. 79.  $\square$

### 3. Метод Галеркина решения задачи с ядром Гильберта.

Опишем теперь численный метод решения задачи (2.74), с. 93. При построении и исследовании численного метода операторное уравнение (2.74) удобно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве

$$H = L_2 \times L_2 \times L_2 \times L_2.$$

Уравнение (2.74) по сравнению с уравнением (2.24) помимо интегральных операторов с гладкими ядрами, оператора  $L$  с логарифмической особенностью ядра, содержит оператор  $S$  с ядром Гильберта (2.73). Будем использовать известное выражение (см., напр., [16]) для оператора  $S^{-1} : L_2 \rightarrow L_2$ :

$$S^{-1}(u; t) = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sign}(k) c_k(u) e^{ikt}, \quad u \in L_2, \quad (6.17)$$

где

$$c_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) e^{-ikt\tau} d\tau$$



– коэффициенты Фурье функции  $u$ . При этом мы полагаем, что  $\text{sign}(0)=1$ . Известно также, что

$$S^{-1} = -S, \quad \|S^{-1}\| = \|S\| = 1. \quad (6.18)$$

Приближенное решение  $w_n = (w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)})$  уравнения (2.74) будем искать в виде:

$$w_n^{(j)}(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k^{(j)} e^{ikt}, \quad n \in N, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Коэффициенты  $\alpha_k^{(j)}$  будем определять с помощью метода Галеркина:

$$\int_0^{2\pi} (Aw_n)^{(j)}(t) e^{-ikt} dt = 0, \quad k = -n, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (6.19)$$

В силу (6.7) и (6.17) действие операторов  $L^{-1}$  и  $S^{-1}$  на базисные функции выражается в явном виде (тригонометрические функции являются собственными функциями этих операторов, отвечающими известным собственным значениям). Равенства (6.19) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора  $\{\alpha_k^{(j)}\}$ ,  $k = -n, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Элементы матрицы этой системы определяются собственными значениями операторов  $L^{-1}$  и  $S^{-1}$  и интегралами вида

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{+\infty}^{(l)}(\beta; t, \tau) e^{-ijt} e^{ik\tau} dt d\tau, \quad l = 1, 2, 3,$$

от функций  $h_{+\infty}^{(l)}(\beta; t, \tau)$ , не имеющих особенности при  $t = \tau$ .

Исследуем сходимость метода Галеркина. Пусть  $H_n^T$  – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше  $n$ . Обозначим через  $H_n$  подпространство  $H$  элементов  $(w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)})$ ,  $w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)} \in H_n^T$ . Введем в рассмотрение оператор проектирования  $p_n : H \rightarrow H_n$ :

$$p_n w = (\Phi_n w^{(1)}, \Phi_n w^{(2)}, \Phi_n w^{(3)}, \Phi_n w^{(4)}),$$

$$w = (w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, w^{(4)}) \in H,$$

где  $\Phi_n$  – оператор Фурье:

$$\Phi_n(u; t) = \sum_{k=-n}^n c_k(u) e^{ikt}.$$

Ясно, что

$$\|p_n\| = 1.$$

Система уравнений метода Галеркина (6.19) эквивалентна линейному операторному уравнению:

$$A_n(\beta)w_n \equiv p_n A(\beta)w_n \equiv (I + p_n B(\beta))w_n \equiv (I + B_n(\beta))w_n = 0. \quad (6.20)$$

Здесь  $A_n : H_n \rightarrow H_n$ ,  $I$  – единичный оператор в пространстве  $H_n$ .

Обозначим  $\sigma(A_n)$  множество сингулярных точек оператора  $A_n(\beta)$ . Приближенные значения  $\beta_n$  постоянных распространения  $\beta$  будем искать как сингулярные точки оператора  $A_n(\beta)$ . Относительно сходимости описанного метода, справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 6.29.

**Теорема 6.30.** *Пусть  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , тогда существует такая последовательность  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|w_n\| = 1$ , такие, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)w_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $w_n \rightarrow w_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)w_0 = 0$ ,  $\|w_0\| = 1$ .*

**4. Метод обратных итераций с невязкой решения нелинейных конечномерных спектральных задач.** В предыдущем параграфе методом Галеркина для численного решения задач (2.1) – (2.4), с. 54, и (2.42) – (2.45), с. 81, были построены конечно-мерные нелинейные спектральные задачи вида:

$$A(\beta)u = 0, \quad (6.21)$$

где  $A$  – матрица, элементы которой являются комплексно-значными функциями комплексного параметра  $\beta$ ,  $u$  – собственный вектор с комплексными компонентами. Решение этих задач мы проводили с помощью варианта метода обратных итераций с невязкой, предложенного в работе [161]. Приведем алгоритм этого метода, следуя [161].

Пусть известно некоторое приближение  $\sigma \in \Lambda$  (где  $\Lambda$  – область на комплексной плоскости) к искомому характеристическому значению  $\beta$  такое, что матрица  $A(\sigma)$  обратима. Обозначим  $\|u\|$  – максимум норму вектора  $u$ ,  $e(u)$  – единичный вектор с единицей в позиции максимального по модулю значения вектора  $u$ . Алгоритм приближенного решения нелинейной спектральной задачи (6.21) состоит в следующем.

Шаг 1. Пусть  $l = 0$ . Выберем начальное приближение  $u^{(0)}$  к  $u$ .

Шаг 2. Вычислим очередное приближение  $\beta_{l+1}$  к характеристическому значению  $\beta$ , как ближайший к значению  $\beta_l$  корень уравнения:

$$\left( e(u^{(l)}), A^{-1}(\sigma)A(\beta_{l+1})u^{(l)} \right) = 0.$$

Шаг 3. Вычислим невязку:

$$r^{(l)} = A(\beta_{l+1})u^{(l)}.$$

Шаг 4. Решим следующее уравнение:

$$A(\sigma)\hat{u}^{(l)} = r^{(l)}.$$

Вычислим очередное приближение  $u^{(l+1)}$  к собственному вектору  $u$ :

$$\bar{u}^{(l+1)} = u^{(l)} - \hat{u}^{(l)}, \quad u^{(l+1)} = \bar{u}^{(l+1)} / \|\bar{u}^{(l+1)}\|.$$

Шаг 5. Итерационный процесс останавливается, если относительная ошибка характеристического значения достигает заданной точности  $\varepsilon$ :

$$\frac{|\beta_{l+1} - \beta_l|}{|\beta_l|} \leq \varepsilon.$$

В противном случае увеличим  $l$  на единицу и вернемся к шагу 2.

Относительно сходимости этого метода справедлива следующая теорема [161].

**Теорема 6.31.** Пусть элементы матрицы  $A(\beta)$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями параметра  $\beta \in \Lambda$ . Пусть вектор  $u$  является нормализованным собственным вектором, отвечающим простому (в геометрическом смысле) изолированному характеристическому значению  $\beta$  задачи (6.21). Тогда метод обратных итераций с невязкой решения задачи (6.21) сходится для любого начального приближения  $\sigma$  достаточно близкого к  $\beta$ . Справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$\|u^{(l+1)} - u\|/\|u^{(l)} - u\| = O(\sigma - \beta), \quad |\beta_{l+1} - \beta| = O(\|u^{(l)} - u\|).$$

Отметим, что эти результаты носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда  $\Lambda$  – не область комплексной плоскости, а риманова поверхность. В рассматриваемых нами случаях решения задач (2.1) – (2.4), с. 54, и (2.42) – (2.45), с. 81, описанным методом, элементы матрицы  $A(\beta)$  являются аналитическими функциями параметра  $\beta$  на римановой поверхности  $\Lambda$ . Следовательно, предположение теоремы 6.31 о гладкости элементов матрицы  $A(\beta)$  выполняется.

В теореме 6.31 доказана сходимость метода в случае поиска собственного вектора, отвечающего простому изолированному характеристическому значению  $\beta$  задачи (6.21). Однако, метод обратных итераций с невязкой мы применяли и для поиска собственных векторов отвечающих характеристическим значениям  $\beta$  кратности равной двум. Такая ситуация возникает, когда одному значению постоянной распространения  $\beta$  соответствуют две собственные волны. Это справедливо, например, для основных волн волноводов кругового и квадратного поперечного сечений. Хотя в этих случаях теорема 6.31 и не гарантирует сходимости, наблюдалась устойчивая сходимость метода. При этом на первом шаге алгоритма выбирались два ортогональных друг другу начальных приближения.

**5. Результаты вычислений.** Приведем результаты численного решения ряда конкретных спектральных задач теории диэлектрических волноводов, подтверждающие практическую эффективность предлагаемых методов.

Задача (2.42) – (2.45), с. 81, решалась для волноводов кругового и квадратного сечений, то есть для таких волноводов, для которых либо известны точные решения, либо имеются экспериментальные данные, а также результаты вычислений, полученные другими методами.

Ранее метод интегральных уравнений для численного решения задачи (2.42) – (2.45) применялся в работах [24] и [75] в частном случае поиска поверхностных собственных волн, амплитуды которых экспоненциально затухают на бесконечности, а постоянные распространения  $\beta$  лежат в интервале  $(kn_\infty, kn_+)$ . Для аппроксимации построенных с помощью формулы Грина систем интегродифференциальных уравнений с логарифмической особенностью ядер в [24], [75] применялся метод механических квадратур. При вычислении несобственных интегралов в [75] особенности ядер выделялись аналитически, а в [24] – численно, путем сгущения сетки. В качестве тестового примера в [24], [75] решалась задача о поиске постоянных распространения поверхностных собственных волн волновода кругового сечения. В этом случае точные значения постоянных распространения  $\beta$  определяются, как корни характеристических уравнений (1.61), с. 51.

В наших расчетах значения параметров задачи были выбраны такими же как в [24]:  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $kR = 4$ . В этом случае корни  $\beta \in (kn_\infty, kn_+)$  имеют лишь уравнения (1.61) при  $l = 0, 1, 2$ . Всего таких корней пять. Результаты вычислений,  $h = \beta/k$ , представлены в таблице.

$l$	0	0	1	1	2
$h$	1.200026	1.164818	1.020626	1.320590	1.167256
	1.200026	1.164819	1.020628	1.320590	1.167256
	1.1995	1.1643	1.0216	1.3202	1.1870

В первой строке таблицы помещены номера  $l$  уравнений (1.61), во второй – корни этих уравнений, в третьей – решения, полученные с помощью метода Галеркина (6.19), в четвертой – результаты работы [24]. Результаты наших вычислений, представленные в таблице, получены при использовании пяти базисных функций в методе Галеркина (6.19). Дальнейшее увеличение их числа не привело к изменению точности вычислений. Отметим, что в [24] вычисления фактически сводились к поиску характеристических значений задачи вида (6.21) с матрицей размерности равной 64, в наших расчетах матрица имеет размерность равную 20. В [75] точность аналогичных вычислений составила 0,1 процента.

Решение задачи (2.42) – (2.45) для волновода квадратного сечения было основано на аппроксимации контура  $\Gamma$  кривой (см., напр., [135]):

$$r(t) = \left( \left( \frac{\cos t}{a} \right)^{2m} + \left( \frac{\sin t}{a} \right)^{2m} \right)^{-1/2m}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (6.22)$$

При  $m = 1$  эта кривая представляет собой окружность радиуса  $a$ , а при  $m \rightarrow \infty$  она стремится к квадрату со стороной  $2a$ .

Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными из работы [38]. Как и в [38], были получены дисперсионные кривые, показывающие зависимость величины  $h = \beta/k$  от  $p = ka/\pi$  при фиксированных  $n_+ = \sqrt{2.08}$ ,  $n_\infty = 1$ . Результаты расчетов представлены на рисунке 1, с. 203, сплошной линией. Квадратиками на рисунке 1 обозначены экспериментальные данные из работы [38].

Разыскивались также собственные векторы задачи (2.42) – (2.45) отвечающие комплексным собственным значениям  $\beta \in C_0^{(1)}$ . Для волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  результаты сравнивались с результатами, полученными в статье [143]. В этой работе применялся итерационный метод, предложенный в [144], суть которого заключается в том, что приближенное решение задачи ищется в виде разложения по собственным векторам симметричной части

соответствующего ей дифференциального оператора. Теоретического обоснования сходимости этого метода получено не было.

Следуя [143], были построены дисперсионные кривые для комплексных собственных значений – графики зависимости вещественной и мнимой части параметра  $h = \beta/(kn_\infty)$  от  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$  при фиксированном значении  $(n_+^2 - n_\infty^2)/(2n_\infty^2) = 30$ . Результаты вычислений представлены на рисунке 2, с. 203. Непрерывными линиями изображены точные решения, полученные как корни уравнения (1.61) с номером  $l = 1$  (верхний график –  $\text{Im}(h)$ , нижний –  $\text{Re}(h)$ ). Кружочками на рисунке 2 отмечены результаты наших вычислений, которые с графической точностью совпали с результатами работы [143]. На рисунках 3 и 4 изображены линии уровня функций  $|E_3|$  и  $|H_3|$ , соответственно, при  $V = 2$ .

Помимо комплексных собственных волн волновода кругового поперечного сечения, для демонстрации эффективности предлагаемого метода разыскивались также комплексные собственные волны диэлектрического волновода квадратного поперечного сечения. На рисунке 2 квадратиками отмечены значения  $\text{Im}(h)$  и  $\text{Re}(h)$ , а на рисунках 5 и 6 при  $V = 2$  изображены линии уровня функций  $|E_3|$  и  $|H_3|$  для волновода квадратного сечения.

Для демонстрации внутренней сходимости метода было изучено поведение функции:

$$e(M) = \frac{\|\alpha(M) - \alpha(M + 10)\|}{\|\alpha(M + 10)\|},$$

где  $\alpha$  – вектор коэффициентов метода Галеркина (6.19),  $M$  – число базисных функций этого метода. На рисунке 7 для различных значений параметра  $m$ , определяющего степень аппроксимации квадрата гладкой кривой (6.22), изображены графики функции:

$$\max_h e(M),$$

где максимум брался по параметру  $h$ , принадлежавшему множеству

тех значений  $h$ , для которых были получены дисперсионные кривые, изображенные на рисунках 1 и 2.

Отметим, что все остальные вычисления, а именно, вычисление коэффициентов метода Галеркина (6.19) стандартным методом, основанным на алгоритме быстрого преобразования Фурье, вычисление характеристических значений и собственных векторов конечномерных нелинейных спектральных задач методом обратных итераций с невязкой проводились с точностью  $10^{-9}$ . Результаты вычислений для волновода квадратного поперечного сечения, изображенные на рисунках 1, 2, 5 и 6 получены при  $m = 20$  и  $M = 201$ . Отметим также, что результаты вычислений для волновода кругового поперечного сечения, изображенные на рисунках 2, 3 и 4 получены при  $M = 3$ , а дальнейшее увеличение  $M$  не повлияло на точность вычислений.

## § 2. Метод конечных элементов решения задач о поверхностных собственных волнах

**1. Построение метода.** Опишем приближенное решение задачи (4.12), с. 123, методом конечных элементов. Приближенное решение векторной задачи (4.37), с. 144, строится аналогично. Прежде чем определить дискретизацию задачи (4.12), опишем предварительно аппроксимацию пространств  $V = W_2^1(\Omega_R)$  и  $V_{\Gamma_R} = W_2^{1/2}(\Gamma_R)$ . Для этого окружность  $\Gamma_R$  разобьем на  $M_{\Gamma_R}$  равных частей длины  $h$ :

$$\gamma_i = \{(R, \varphi) : \phi_i < \varphi < \phi_{i+1}\}, \quad i = 1, \dots, M_{\Gamma_R}, \quad \phi_{M_{\Gamma_R}+1} = \phi_1.$$

Ломанную, полученную соединением соседних узлов на  $\Gamma_R$ , обозначим через  $\Gamma_h$ . Далее, область  $\Omega_R$  разобьем на треугольники  $\tau$  максимального диаметра  $h$  так, чтобы два соседних треугольника имели либо общую сторону, либо общую вершину. Множество всех полученных треугольников обозначим через  $T_h$ . Звенья ломаной  $\Gamma_h$  включаются



в число сторон треугольников  $T_h$ . Введем следующие обозначения:

$$\Omega_h = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau \subset \Omega_R, \quad \partial\Omega_h = \Gamma_h.$$

Множество вершин треугольников из  $T_h$  будем называть узлами сетки. Занумеруем узлы конечных элементов, считая, что внутренние узлы нумеруются после граничных. Общее число узлов сетки обозначим через  $M$ ; через  $M_{\Omega_R}$  обозначим число внутренних узлов;  $M_{\Gamma_R} = M - M_{\Omega_R}$ .

Пусть  $V_{\Gamma_R}^h$  – множество непрерывных на  $\Gamma_R$  функций, линейных на каждом элементе  $\gamma_i$ . Базис Лагранжа в нем обозначим через

$$\{\psi_i, i = 1, \dots, M_{\Gamma_R}\}.$$

Таким образом,

$$u^h = \sum_{i=1}^{M_{\Gamma_R}} u_i \psi_i \quad \forall u^h \in V_{\Gamma_R}^h. \quad (6.23)$$

Пусть, далее,  $V_h$  – множество непрерывных в области  $\Omega_h$  функций, линейных на каждом конечном элементе  $\tau \in T_h$ . Базис Лагранжа в нем обозначим через  $\{\varphi_i, i = 1, \dots, M\}$ , так что

$$u_h = \sum_{i=1}^M u_i \varphi_i \quad \forall u_h \in V_h. \quad (6.24)$$

Отметим, что функции  $u_h$  и  $u^h$  совпадают в граничных узлах сетки, и  $u^h$  однозначно определяется по  $u_h$ .

Определим операторы, действующие в  $\mathbb{R}^M$ :

$$\langle A_0^{h,L} u, v \rangle = \int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + \sum_{l=1}^L l (a_l(u^h) a_l(v^h) + b_l(u^h) b_l(v^h)),$$

$$\langle S^{h,L}(\sigma) u, v \rangle = \sum_{l=0}^L D_l(\sigma) (a_l(u^h) a_l(v^h) + b_l(u^h) b_l(v^h)),$$

$$D_l(\sigma) = \sigma R \frac{K_{l-1}(\sigma R)}{K_l(\sigma R)}, \quad l \geq 1, \quad D_0(\sigma) = \sigma R \frac{K_1(\sigma R)}{K_0(\sigma R)},$$

$$\langle B_0^h u, v \rangle = \int_{\Omega_h} u_h v_h dx, \quad \langle B^h u, v \rangle = \int_{\Omega_h} n^2 u_h v_h dx,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – каноническое скалярное произведение в  $\mathbb{R}^M$ ;  $u, v$  – векторы узловых параметров длины  $M$  с компонентами  $u_i, v_i$ ; функции  $u^h, v^h, u_h, v_h$  определяются согласно формулам (6.23), (6.24).

Сформулируем теперь дискретный аналог задачи (4.12), с. 123,: *найти все такие пары  $(\beta^2, k_h^2) \in \Lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:*

$$u \in \mathbb{R}^M : \quad A_{\beta^2}^{h,L}(k_h^2)u = k_h^2 B^h u, \quad (6.25)$$

$$A_{\beta^2}^{h,L}(k_h^2) = A_0^{h,L} + \beta^2 B_0^h + S^{h,L}(\sigma_h), \quad \sigma_h = \sqrt{\beta^2 - k_h^2 n_\infty^2}.$$

Величина  $L$  в определении приближенного решения является дополнительным параметром и выбирается из соображений точности решения.

Отметим, что матрицы  $B^h, B_0^h$  и матрица, соответствующая первому слагаемому в определении матрицы  $A_0^{h,L}$ , могут быть сконструированы на основе стандартного алгоритма “сборки”. Укажем способ вычисления матрицы  $S^{h,L}$ , имеющей вид:

$$S^{h,L}(\sigma) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \{g_{ij}(\sigma)\}_{i,j=1}^{M_{\Gamma_R}},$$

где

$$g_{ij}(\sigma) = \sum_{l=0}^L D_l(\sigma) (a_l(\psi_i) a_l(\psi_j) + b_l(\psi_i) b_l(\psi_j)).$$

Для этого введем матрицы:

$$D(\sigma) = \text{diag} \left( \frac{1}{2} D_0(\sigma), D_1(\sigma), \dots, D_L(\sigma) \right),$$

$$Q_a = \{a_j(\psi_i), i = 1, \dots, M_{\Gamma_R}, j = 0, \dots, L\},$$

$$Q_b = \{b_j(\psi_i), i = 1, \dots, M_{\Gamma_R}, j = 0, \dots, L\}.$$

Тогда, очевидно,

$$G = Q_a D(\sigma) Q_a^T + Q_b D(\sigma) Q_b^T.$$

Элементы прямоугольных матриц  $Q_a$  и  $Q_b$  легко вычисляются по явным формулам и не зависят от параметров  $k^2$  и  $\beta^2$ . Аналогичные формулы справедливы и для соответствующей составляющей в определении  $A_0^{hL}$ . Отметим также, что при естественной нумерации узлов сетки, матрицы  $A_{\beta^2}^{hL}(k^2)$  и  $B^h$  являются ленточными с одинаковой шириной ленты.

Использованный способ аппроксимации позволяет легко доказать аналоги теорем 4.18 и 4.19 для операторов дискретной задачи. Обозначим через  $\beta_l^{2h}$  собственные числа задачи:

$$A_0^{hm} u = \beta^{2h} C^h u, \quad C^h = \frac{1}{n_\infty^2} B^h - B_0^h,$$

являющиеся аппроксимациями точек отсечки, занумерованные с учетом кратности:

$$0 = \beta_1^{2h} < \beta_2^{2h} \leq \beta_3^{2h} \leq \dots \leq \beta_l^{2h}, \quad \beta_l^{2h} \rightarrow \infty, \quad h \rightarrow 0.$$

Для  $\beta^2 > 0$  определим целочисленную функцию – приближение  $N(\beta^2)$ :

$$N^h(\beta^2) = \max\{l : \beta_l^{2h} < \beta^2\}.$$

Аналогично теоремам 4.18 и 4.19 доказывается

**Теорема 6.32.** Пусть  $h$  достаточно мало. Тогда для любого  $\beta^2 > 0$  задача (6.25) имеет ровно  $N^h(\beta^2)$  решений:

$$(\beta^2, k_i^{2h}(\beta^2), u_i^h(\beta^2)),$$

$$k_-^2(\beta^2) < k_1^{2h}(\beta^2) \leq k_2^{2h}(\beta^2) \leq \dots \leq k_{N^h(\beta^2)}^{2h}(\beta^2) < k_+^2(\beta^2).$$

Если

$$k_{l-1}^{2h}(\beta^2) < k_l^{2h}(\beta^2) = k_{l+1}^{2h}(\beta^2) = \dots = k_{l+m-1}^{2h}(\beta^2) < k_{l+m}^{2h}(\beta^2),$$

то собственные функции  $u_i^h(\beta^2)$ ,  $i = 1, \dots, l + m - 1$ , могут быть выбраны ортонормированными. Каждое число  $k_h^2 = k_l^{2h}(\beta^2)$ ,  $l \geq 1$ , является единственным корнем уравнения:

$$k_h^2 = f_l(k_h^2), \quad k_h^2 \in \Lambda, \quad (6.26)$$

$$f_l(k_h^2) = \min_{H_l \subset \mathbb{R}^M} \max_{v \in H_l} \frac{\langle A_0^{hm}u + \beta^2 B_0^h u + S^{hm}(\sigma_h)u, u \rangle}{\langle B^h u, u \rangle}.$$

При всех  $l \geq 1$  дисперсионные кривые  $k^2 = k_l^{2h}(\beta^2)$ , определенные на  $(\beta_l^{2h}, \infty)$ , являются липшицевыми, возрастающими функциями.

Для приближенного решения дискретной задачи (6.25), которую при фиксированном  $\beta^2$  запишем в виде:

$$A(k^2)u = k^2 B u, \quad k^2 \in \Lambda,$$

можно использовать хорошо известные методы (см., напр., обзор [139] и цитированную там литературу). Однако, с нашей точки зрения, эти методы недостаточно эффективны для рассматриваемой задачи, характерная особенность которой заключается в симметричности задачи и монотонности оператора  $A(k^2)$  по параметру  $k^2$ .

Для задач сравнительно небольшой размерности полезным может оказаться метод, основанный на решении уравнений (см. (6.26)):

$$k^2 = f_l(k^2), \quad k^2 \in \Lambda,$$

для нахождения  $l$ -того собственного значения. Для вычисления функции  $f_l(k^2)$  при заданном  $k^2$  в этом случае необходимо отыскивать  $l$ -тое собственное значение  $\gamma_l$  (и собственную функцию  $u_l$ ) обычной спектральной задачи:

$$A(k^2)u = \gamma B u.$$

Отметим, что функции  $f_l(k^2)$  являются дифференцируемыми и монотонно убывающими. После отыскания корня  $k_l^2$  с требуемой точностью, пара  $(\gamma_l, u_l)$ , будет искомой собственной парой.

**2. Численные эксперименты.** Приведем результаты численного решения ряда конкретных спектральных задач теории диэлектрических волноводов, подтверждающие практическую эффективность предлагаемого метода.

Пусть контур  $\Gamma$  – окружность радиуса  $\rho$  и функция  $n(x)$  в области  $\Omega$  тождественно равна константе  $n_+$ . Тогда задачу (4.1), (4.2) нетрудно решить методом разделения переменных (см. параграф 3 главы 1). Нетривиальные решения задачи (4.1), (4.2) в этом случае существуют при  $k > 0$  и  $\beta \in G = (kn_\infty, kn_+)$ , удовлетворяющих характеристическим уравнениям (1.62), с. 52. При  $\rho k = 1$ ,  $n_+^2 = 2$ ,  $n_\infty^2 = 1$  характеристические уравнения (1.62) с номерами  $l = 1, 2, 3, \dots$  корней  $\beta \in G$  не имеют. Характеристическое уравнение (1.62) с номером  $l = 0$  имеет единственный корень  $\beta \in G$ ,  $\widehat{\beta}^2 = (\beta^2/k^2) = 1.04095$ .

Вычислялись приближенные значения  $\widehat{\beta}^2$  при различном числе узлов сетки  $M$ , контур  $\Gamma_R$  был выбран совпадающим с контуром  $\Gamma$ . Результаты вычислений представлены в таблице.

$M$	9	25	81	289	1089	4225
$kh$	0.78540	0.39270	0.19635	0.09817	0.04909	0.02454
$\varepsilon$	0.01484	0.00433	0.00107	0.00026	0.00007	0.00002

Здесь  $kh$  – максимальный размер стороны треугольника,  $\varepsilon$  – абсолютная ошибка вычисления  $\widehat{\beta}^2$ , модуль разности между точным значением  $\widehat{\beta}^2$  и вычисленным приближенно при данном  $M$ . Рисунок 8, с. 207, иллюстрирует квадратичную зависимость  $\varepsilon$  от  $h$ ,  $\varepsilon = O(h^2)$ . На этом рисунке непрерывной линией изображен график функции  $\varepsilon = 0,025(kh)^2$ , кружочками обозначены результаты наших вычислений, представленные в таблице. Расчеты проводились при разном числе слагаемых в ряде Фурье,  $L = 1, \dots, 20$ . Ошибка вычислений  $\varepsilon$  в данном эксперименте от величины  $L$  не зависела.

Приведем результаты расчетов для постоянного показателя преломления  $n(x) = n_+$ ,  $x \in \Omega$ , и контура  $\Gamma$  в форме прямоугольника

с отношением сторон равным 2. Результаты расчетов мы сравнивали с данными, полученными в работе [135]. В этой работе для численного решения задачи (4.1), (4.2) использован метод контурного интегрального уравнения. Однородное уравнение с логарифмической особенностью ядра построено с помощью формулы Грина. Для его дискретизации использован метод Галеркина. Таким образом, построена задача поиска нулей определителя матрицы, коэффициенты которой нелинейно зависят от постоянной распространения  $\beta$ .

Так же, как и в работе [135], при фиксированных значениях  $V = (bk/\pi)\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$  разыскивались  $P^2 = ((\beta/k)^2 - n_\infty^2)/(n_+^2 - n_\infty^2)$ . Здесь  $2bk$  – минимальная сторона прямоугольника. В качестве  $\Gamma_R$  была выбрана окружность с центром в точке пересечения диагоналей прямоугольника и безразмерным радиусом равным  $2.6bk$ . Наблюдалась устойчивая сходимость метода по параметрам  $M$  и  $L$ . В таблице приведены значения  $P^2$  основной волны, найденные при  $V = 0.5$ ,  $M = 259$ ,  $kh = 0.2$  и различных  $L$  от 1 до 20.

$L$	1	3	5	7	10	20
$P^2$	0.51379	0.50895	0.50889	0.50888	0.50888	0.50888

Следующая таблица показывает зависимость параметра  $P^2$  от числа узлов  $M$  и максимальной величины стороны треугольника  $kh$ . Вычисления проводились при  $V = 0.5$  и  $L = 7$  для основной волны.

$M$	432	920	1130	1424	1888	2572	3634
$kh$	0.15	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05
$P^2$	0.51040	0.51154	0.51166	0.51186	0.51201	0.51215	0.51225

Наблюдалось хорошее согласование наших результатов с данными [135]. В этой таблице сравниваются  $P^2$  основной волны, полученные нами и в [135] для различных  $V$ :

$V$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$P_{Eygcs79}^2$	0.5124	0.8118	0.9021	0.9402	0.9597	0.9711
$P^2$	0.5123	0.8112	0.9015	0.9397	0.9593	0.9707
$\varepsilon$	1.95e-4	7.39e-4	6.65e-4	5.32e-4	4.17e-4	4.12e-4

В первой строке таблицы приведены значения параметра  $V$ , во второй – результаты работы [135], в третьей – значения  $P^2$ , вычисленные нашим методом, в четвертой – относительная разница полученных величин,  $\varepsilon = |P_{Eygcs79}^2 - P^2|/P_{Eygcs79}^2$ . Число слагаемых в ряде Фурье было равным семи,  $L = 7$ , количество узлов сетки  $M = 2572$ , максимальный размер стороны треугольника  $kh = 0.06$ .

Так же, как и в статье [135], мы построили дисперсионные кривые для первых семи собственных волн, графики зависимости  $P^2$  от  $V$ . На рисунке 9 сплошными линиями приведены результаты наших расчетов, кружочки – данные [135]. На рисунках 10, 11 построены линии уровня квадратов собственных функций,  $u^2$ , в расчетной области  $\Omega_R$  для  $V = 1$ . При обозначении собственных функций мы использовали классификацию собственных волн прямоугольного слабонаправляющего волновода [138].

Приведем результаты расчетов для контура  $\Gamma$  в форме равностороннего треугольника и постоянного при  $x \in \Omega$  показателя преломления  $n(x) = n_+$ . Эта задача ранее численно исследовалась в работе [146] методом согласования по точкам и в работе [150] с помощью вариационного анализа интегрального уравнения [63] по области поперечного сечения волновода. В основе метода согласования по точкам [146] лежит представление искомого поля внутри области и его аналитического продолжения за ее пределами в виде конечных рядов в некотором базисе и наложения на эти представления граничных условий в ряде дискретных точек границы.

Следуя [150], [146], для равностороннего треугольника со стороной  $ak = 2.693547$  разыскивались  $P^2 = ((\beta/k)^2 - n_\infty^2)/(n_+^2 - n_\infty^2)$

при фиксированных значениях  $V = (ak/2)\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ . В качестве  $\Gamma_R$  была выбрана окружность с центром в центре тяжести треугольника и безразмерным радиусом равным  $0.5ak$ . Как и в предыдущем случае наблюдалась устойчивая сходимость метода по параметрам  $M$  и  $L$ . Наблюдалось хорошее согласование наших результатов с данными [150], [146]. Так же как и в статьях [150], [146] мы построили дисперсионную кривую для фундаментальной волны, график зависимости  $P^2$  от  $V$ . На рисунке 12 сплошной линией приведены результаты наших расчетов, кружочки – данные [146], квадратики – данные [150].

Приведем результаты расчетов для контура  $\Gamma$  в форме окружности радиуса  $\rho$  и переменного показателя преломления, изменяющегося в  $\Omega$  по степенному закону:

$$n^2 = n_+^2 \left( 1 - \frac{n_+^2 - n_\infty^2}{n_+^2} \left( \frac{r}{\rho} \right)^p \right), \quad x \in \Omega.$$

На рисунке 13 представлены графики функции  $n^2$  для  $p = 1/4, 1/2, 1, 2, 4$ . Результаты вычислений мы сравнивали с данными, полученными в работе [91] с помощью метода разделения переменных. Так же как и в [91], при фиксированных значениях  $V = \rho k \sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$  разыскивались  $U = \rho k \sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$ . В качестве  $\Gamma_R$  была выбрана окружность, совпадающая с  $\Gamma$ . Наблюдалась устойчивая сходимость метода по параметрам  $M$  и  $L$ . В таблице приведены значения  $U$  основной волны, найденные при  $V = 8, p = 2, M = 554, kh = 0.1$  и различных  $L$  от 0 до 15.

$L$	0	1	2	7	15
$U$	4.01099731	4.01138959	4.01137959	4.01137960	4.01137963

Следующая таблица показывает зависимость параметра  $U$  от числа узлов  $M$  и максимальной величины стороны треугольника  $kh$ . Вычисления проводились при  $V = 8, p = 2$  и  $L = 7$  для основной волны.



$M$	554	693	886	1117	1502	2166	3456
$kh$	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04
$U$	4.01138	4.00917	4.00716	4.00562	4.00390	4.00259	4.00153

Было получено хорошее согласование наших результатов с данными [91]. Так же как и в [91], при  $p = 1/4, 1/2, 1, 2, 4$  мы построили дисперсионные кривые для фундаментальной волны, графики зависимости  $U$  от  $V$ . На рисунке 14 сплошной линией приведены результаты наших расчетов, кружочки – данные [91].

Приведем результаты расчетов для области  $\Omega$ , состоящей из трех касающихся друг друга кругов с центрами в вершинах равностороннего треугольника со сторонами  $\rho$  и постоянным показателем преломления  $n(x) = n_+$ ,  $x \in \Omega$ . Радиус  $R$  окружности  $\Gamma_R$  был выбран равным  $1.3\rho$ . Вычислялись значения  $U = \rho k \sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$  при фиксированных  $V = \rho k \sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ . Наблюдалась устойчивая сходимость метода по параметрам  $M$  и  $L$ . В таблице приведены девять значений  $U$ , найденных при  $V = 3$ ,  $M = 268$ ,  $kh = 0.2$  и различных  $L$  от 1 до 21.

$L$	1	7	14	21
$U_1$	1.4524	1.4540	1.4540	1.4540
$U_2$	1.8570	1.8644	1.8644	1.8644
$U_3$	1.8613	1.8687	1.8687	1.8687
$U_4$	2.4556	2.4732	2.4732	2.4732
$U_5$	2.5536	2.5859	2.5859	2.5859
$U_6$	2.5565	2.5889	2.5889	2.5889
$U_7$	2.8659	2.9115	2.9116	2.9116
$U_8$	2.9203	2.9327	2.9328	2.9328
$U_9$	2.9242	2.9363	2.9363	2.9363

Следующая таблица показывает зависимость параметра  $U$  для первых девяти собственных волн от числа узлов  $M$  и максимальной вели-

чины стороны треугольника  $kh$ . Вычисления проводились при  $V = 3$ ,  $L = 7$ .

$M$	188	268	436	954	1660	2570
$kh$	0.25	0.2	0.15	0.1	0.075	0.06
$U_1$	1.4585	1.4540	1.4369	1.4213	1.4162	1.4132
$U_2$	1.8676	1.8644	1.8569	1.8505	1.8482	1.8466
$U_3$	1.8718	1.8687	1.8578	1.8513	1.8484	1.8468
$U_4$	2.4614	2.4732	2.4720	2.4704	2.4697	2.4690
$U_5$	2.5776	2.5859	2.5767	2.5786	2.5775	2.5772
$U_6$	2.5797	2.5889	2.5776	2.5793	2.5781	2.5774
$U_7$	2.9007	2.9115	2.9066	2.9152	2.9159	2.9161
$U_8$	2.9184	2.9327	2.9379	2.9485	2.9511	2.9519
$U_9$	2.9212	2.9363	2.9397	2.9493	2.9514	2.9520

На рисунке 15 построены дисперсионные кривые, показывающие зависимость  $U$  от  $V$ , для первых девяти собственных волн. Вычисления проводились при  $M = 268$ ,  $kh = 0.2$ ,  $L = 7$ . Дисперсионные кривые для  $U_2$  и  $U_3$ ,  $U_5$  и  $U_6$ ,  $U_8$  и  $U_9$  совпали с графической точностью. Вероятно, соответствующие собственные значения  $\beta$  являются кратными. На рисунках 16, 17, 18 построены линии уровня квадратов собственных функций,  $u^2$ , в расчетной области  $\Omega$  для  $V = 3$ . Вычисления проводились при  $M = 1660$ ,  $kh = 0.075$ ,  $L = 7$ .

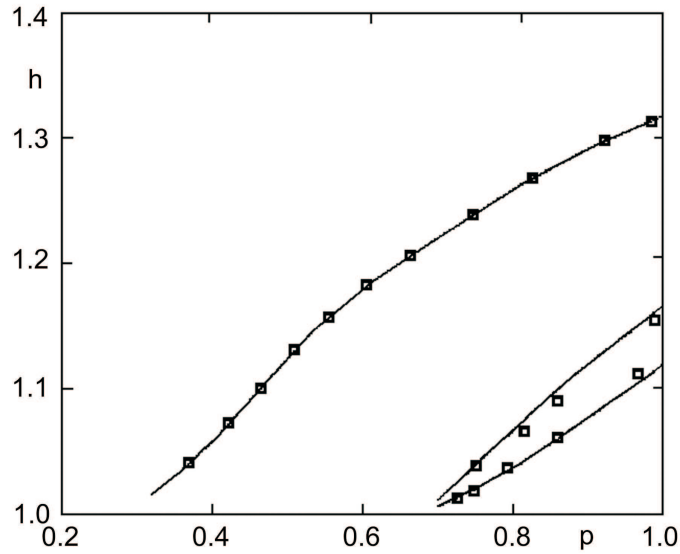


Рис. 1. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода квадратного поперечного сечения,  $h = \beta/k$ ,  $p = ka/\pi$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом Галеркина. Квадратиками обозначены экспериментальные данные [38].

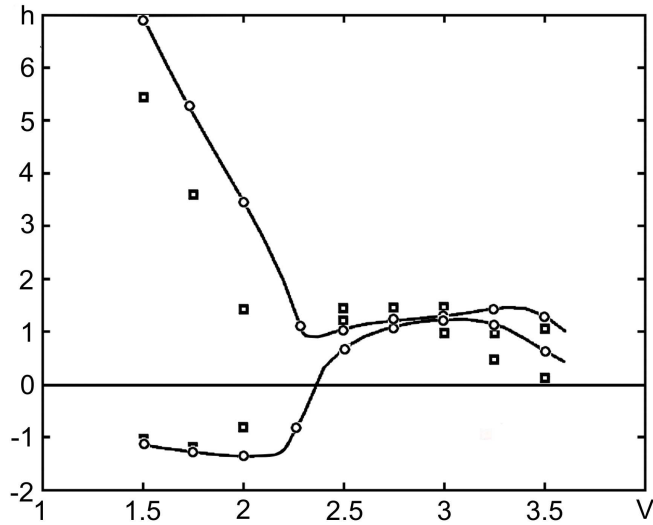


Рис. 2. Дисперсионные кривые для комплексных собственных волн,  $h = \beta/(kn_\infty)$ ,  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$  (верхний график —  $\text{Im}(h)$ , нижний —  $\text{Re}(h)$ ). Сплошные линии — точные решения для волновода кругового сечения. Кружочками и квадратиками обозначены результаты расчетов методом Галеркина для волнопроводов кругового и квадратного поперечного сечения, соответственно.

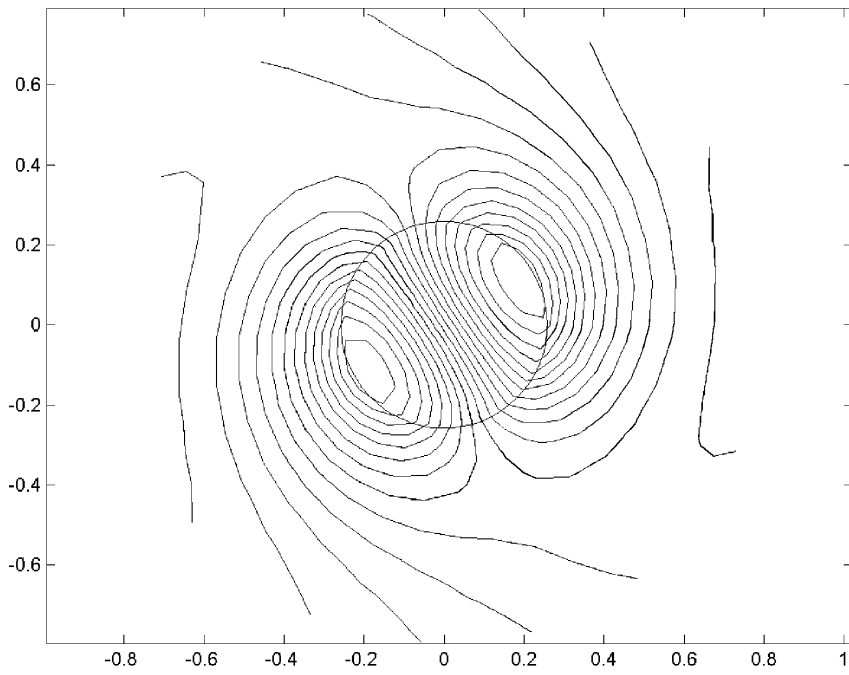


Рис. 3. Линии уровня функции  $|E_z|$  для волновода кругового поперечного сечения.

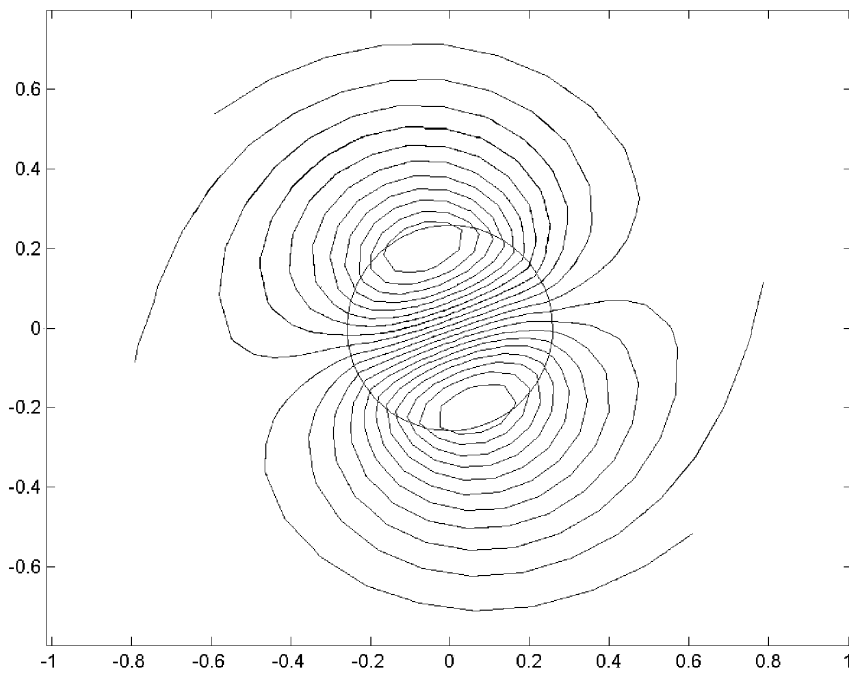


Рис. 4. Линии уровня функции  $|H_z|$  для волновода кругового поперечного сечения.

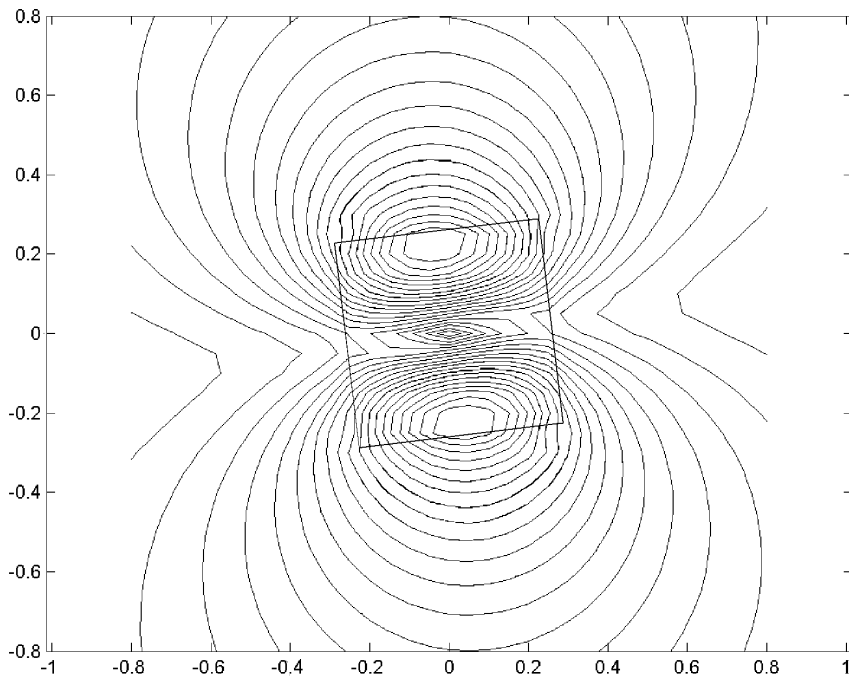


Рис. 5. Линии уровня функции  $|E_3|$  для волновода квадратного поперечного сечения.

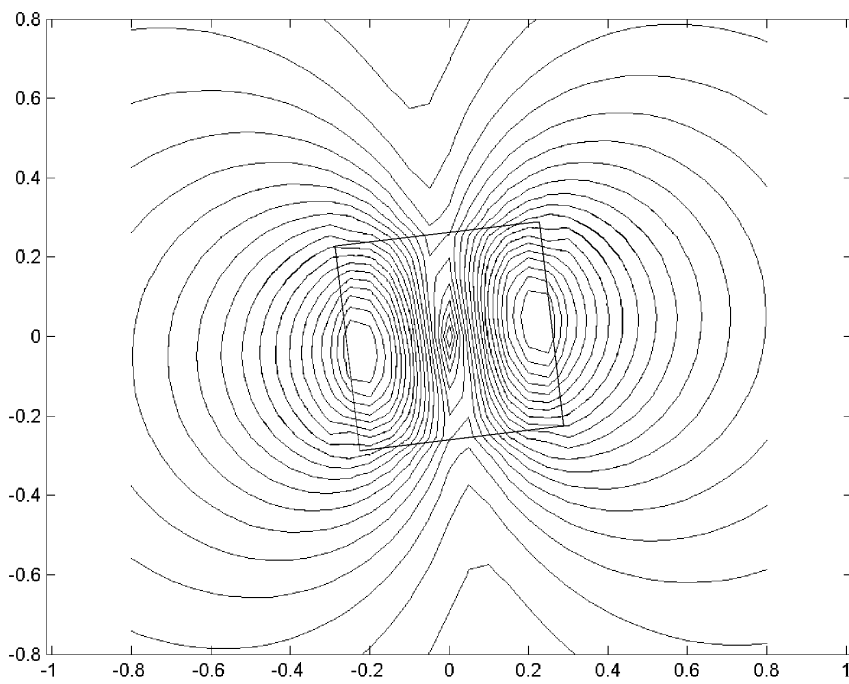


Рис. 6. Линии уровня функции  $|H_3|$  для волновода квадратного поперечного сечения.

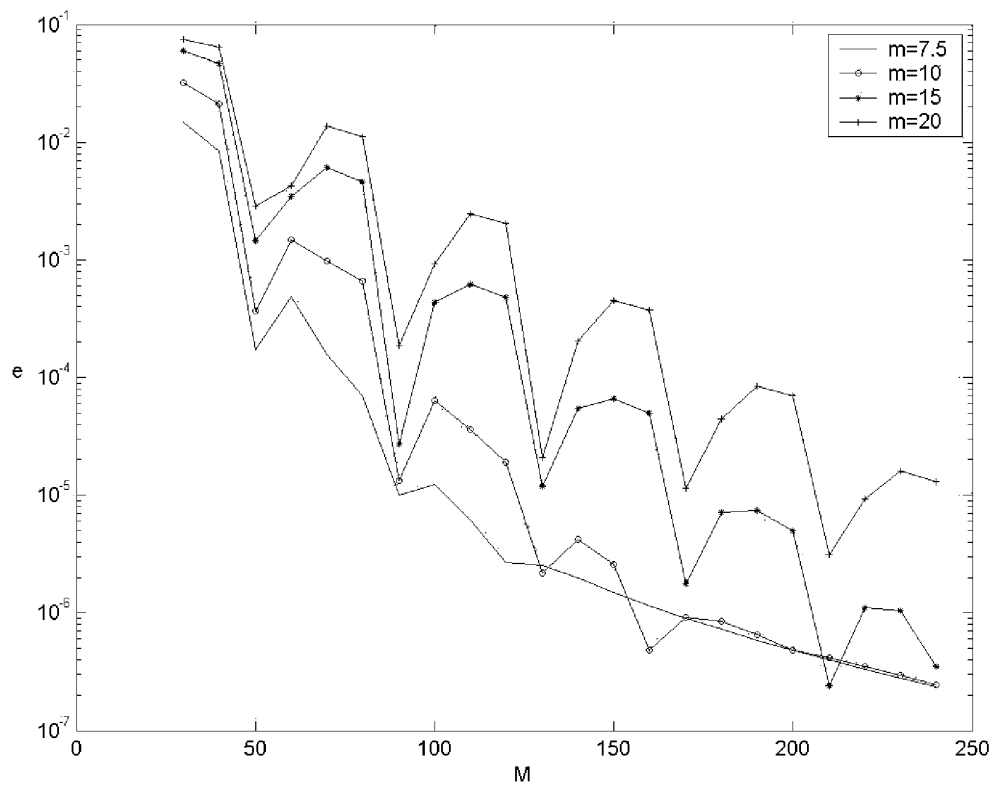


Рис. 7. Зависимость относительной ошибки  $e$  метода Галеркина от числа базисных функций  $M$  и параметра  $m$ , определяющего “гладкость” контура  $\Gamma$ .

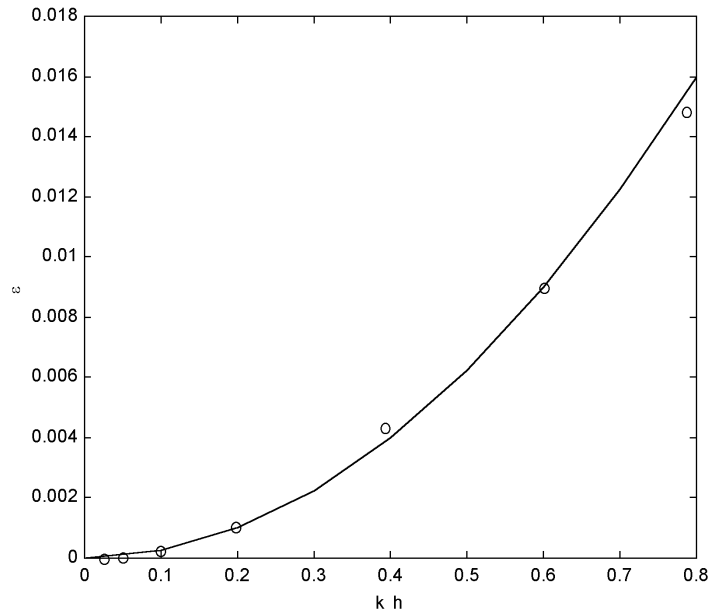


Рис. 8. Квадратичная зависимость точности вычислений  $\varepsilon$  собственных значений методом конечных элементов от максимального размера стороны треугольника  $kh$ . Сплошная линия — график функции  $\varepsilon = 0,025(kh)^2$ , кружочки — результаты вычислений методом конечных элементов.

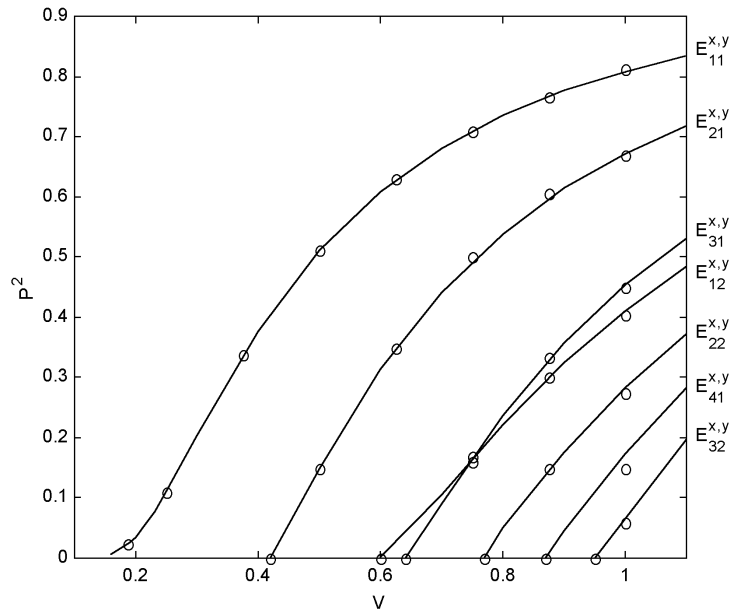


Рис. 9. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода прямоугольного поперечного сечения,  $P^2 = ((\beta/k)^2 - n_\infty^2)/(n_+^2 - n_\infty^2)$ ,  $V = (bk/\pi)\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом конечных элементов, кружочками обозначены данные из работы [135].

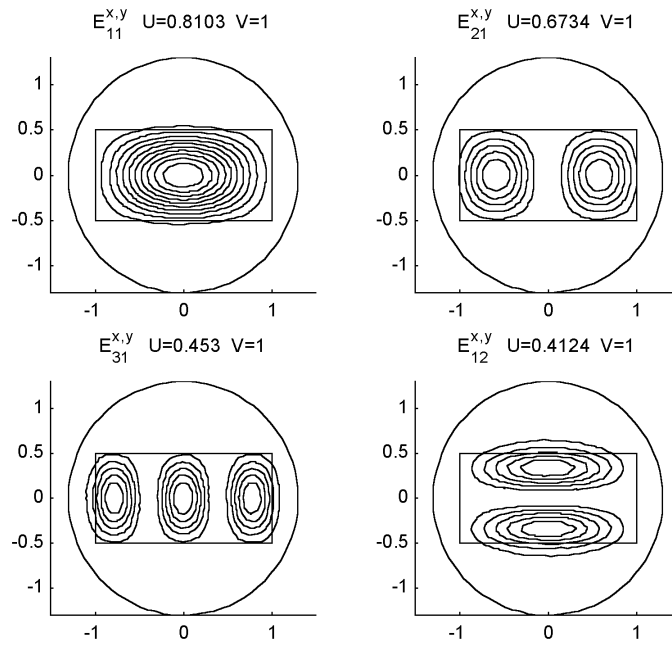


Рис. 10. Линии уровня квадратов собственных функций задачи (4.12), с. 123, для волновода прямоугольного поперечного сечения.

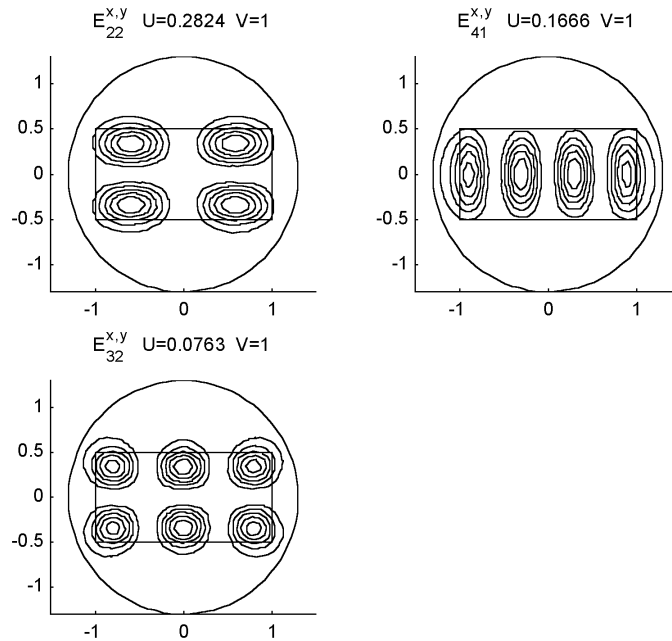


Рис. 11. Линии уровня квадратов собственных функций задачи (4.12), с. 123, для волновода прямоугольного поперечного сечения.



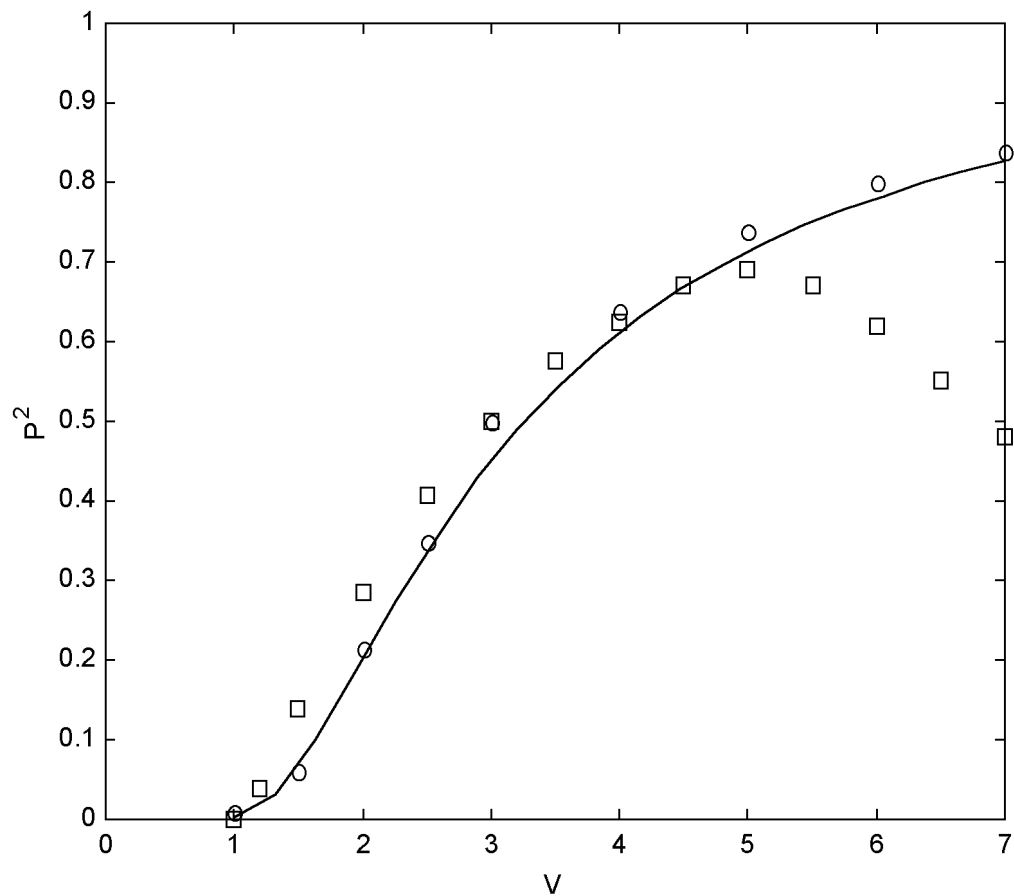


Рис. 12. Дисперсионная кривая для основной волны волновода треугольного поперечного сечения,  $P^2 = ((\beta/k)^2 - n_\infty^2)/(n_+^2 - n_\infty^2)$ ,  $V = (ak/2)\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ . Сплошная линия — результаты расчетов методом конечных элементов, кружочки — данные [146], квадратики — данные [150].

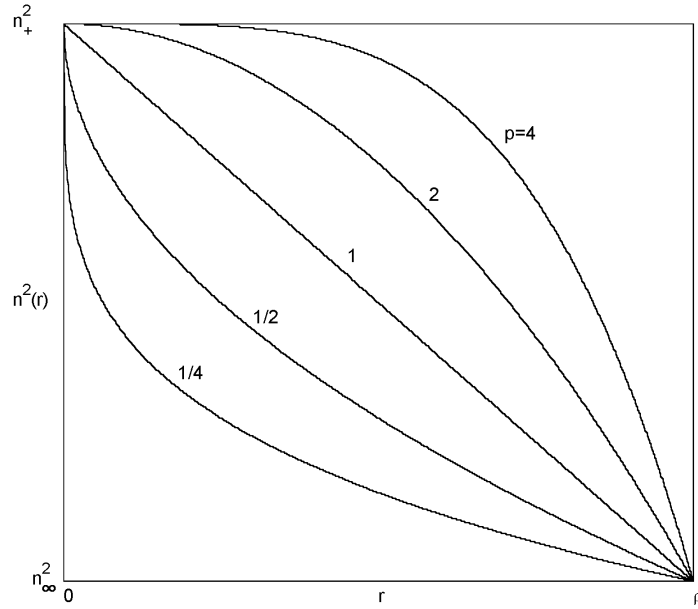


Рис. 13. Степенной закон изменения показателя преломления. Графики функции  $n^2 = n_+^2 (1 - (r/\rho)^p (n_+^2 - n_\infty^2)/n_+^2)$  для  $p = 1/4, 1/2, 1, 2, 4$ .

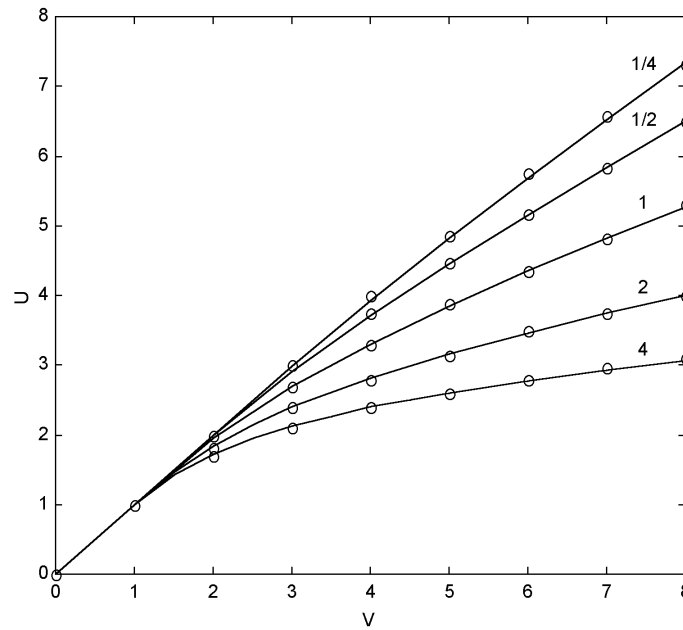


Рис. 14. Дисперсионные кривые для основных собственных волн волноводов кругового поперечного сечения с показателем преломления, изменяющимся по степенному закону для  $p = 1/4, 1/2, 1, 2, 4$ . Здесь  $U = \rho k \sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$ ,  $V = \rho k \sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом конечных элементов, кружочками обозначены данные из работы [91].

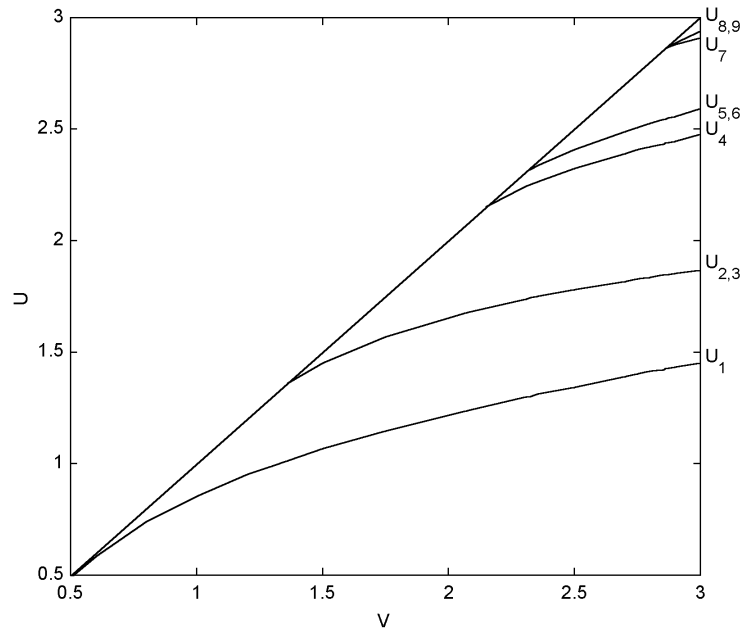


Рис. 15. Дисперсионные кривые, построенные методом конечных элементов, для девяти собственных волн волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения,  $U = \rho k \sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$ ,  $V = \rho k \sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ .

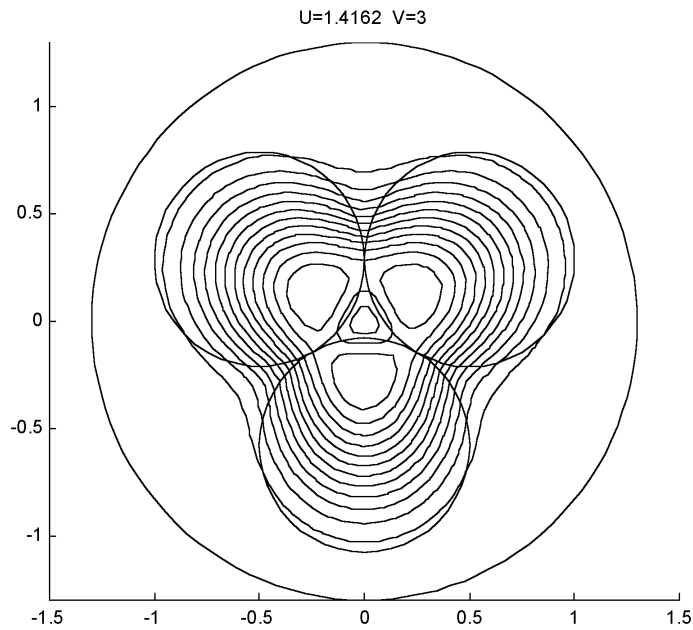


Рис. 16. Линии уровня квадрата собственной функции задачи (4.12), с. 123, для основной собственной волны волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения.

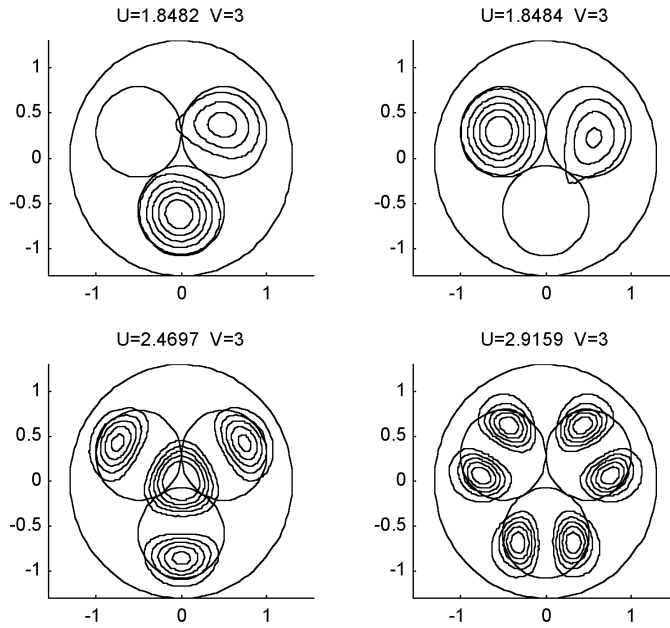


Рис. 17. Линии уровня квадратов собственных функций задачи (4.12), с. 123, для волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения.

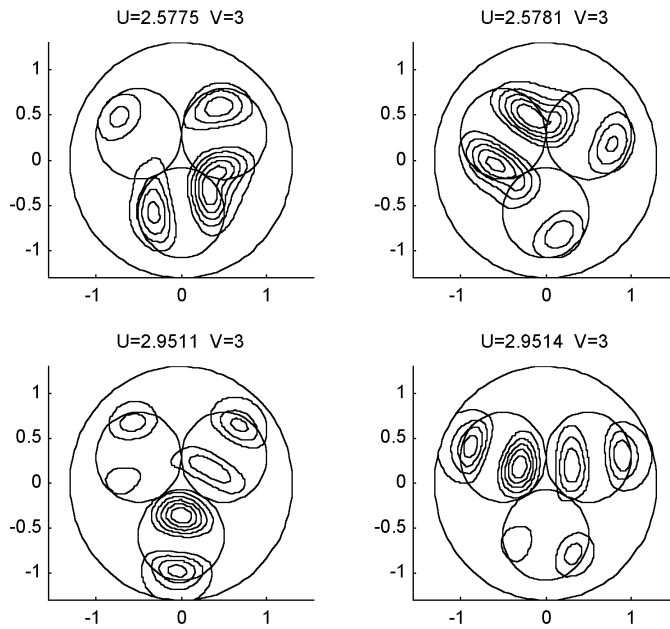


Рис. 18. Линии уровня квадратов собственных функций задачи (4.12), с. 123, для волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения.

## Литература

1. Боголюбов А.Н. Расчет оптических волноводов методом конечных разностей / А.Н. Боголюбов, И.В. Митина, А.Г. Свешников // Математические модели прикладной электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 136–155.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
3. Вайникко Г.М. О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений / Г.М. Вайникко, О.О. Карма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14. — № 4. — С. 828–837.
4. Вайникко Г.М. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра / Г.М. Вайникко, О.О. Карма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14. — № 6. — С. 1393–1408.
5. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения / Е.Н. Васильев — М.: Радио и связь, 1987. — 272 с.
6. Васильев Е.Н. Численные методы в задачах расчета диэлектрических волноводов, диэлектрических резонаторов и устройств на их основе / Е.Н. Васильев, В.В. Солодухов // Моск. энерг. ин-т. Научн. тр. — 1983. — № 19. — С. 68–78.
7. Веселов Г.И. О спектре комплексных волн круглого диэлектрического волновода / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский // Радиотехника. — 1983. — № 2. — С. 55–58.

8. Векуа И.Н. О метагармонических функциях / И.Н. Векуа // Труды Тбилисского Матем. ин-та. — 1943. — Т. 12. — С. 105–174.
9. Векуа И.Н. О полноте системы метагармонических функций / И.Н. Векуа // Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 90. — № 5. — С. 715–717.
10. Веселов Г.И. Алгоритм расчета собственных волн открытого диэлектрического волновода произвольного сечения / Г.И. Веселов, Г.Г. Воронин, Н.И. Платонов // Микроэлектронные радиотехнические устройства и техника СВЧ: сб. науч. тр. по проблемам микроэлектроники. — М.: МИЭТ, 1980. — С. 53–67.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 527 с.
12. Войтович Н.Н. Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения / Н.Н. Войтович, Б.З. Каценеленбаум, А.Н. Сивов, А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24. — № 7. — С. 1245–1263.
13. Войтович Н.Н. Расчет диэлектрических волноводов сложного профиля методом наименьших квадратов / Н.Н. Войтович // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24. — № 5. — С. 1058–1060.
14. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Миттры. — М.: Мир, 1977. — 485 с.
15. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во КГУ, 1994. — 288 с.
16. Габдулхаев Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во КГУ, 1995. — 231 с.

17. Галишникова Т.Н. Численные методы в задачах дифракции / Т.Н. Галишникова, А.С. Ильинский. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 208 с.
18. Гончаренко А.М. Основы теории оптических волноводов / А.М. Гончаренко, В.А. Карпенко. — Минск: Наука и техника, 1983. — 237 с.
19. Гохберг И.Ц. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн // Успехи матем. наук. — 1957. — Т. 12. — Вып. 2. — С. 44–118.
20. Дианов Е.М. Волоконная оптика: проблемы и перспективы / Е.М. Дианов // Вестн. АН СССР. — 1989. — № 10. — С. 41–51.
21. Дмитриев В.И. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 166 с.
22. Дробница В.В. Метод расчета плоского электромагнитного поля в среде со слоем переменной толщины / В.В. Дробница, В.А. Цеццохо // Математические проблемы геофизики. — Новосибирск: Взд-во ВЦ СО АН СССР, 1971. — Вып. 2. — С. 251–284.
23. Завадский В.Ю. Моделирование волновых процессов / В.Ю. Завадский. — М.: Наука, 1991. — 248 с.
24. Захаров Е.В. Метод расчета собственных волн диэлектрических волноводов произвольного сечения / Е.В. Захаров, Х.Д. Икрамов, А.Н. Сивов // Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1980. — Вып. 32. — С. 71–85.
25. Захаров Е.В. Численный анализ дифракции радиоволн / Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. — М.: Радио и связь, 1982. — 184 с.

26. Ильинский А.С. Обоснование метода расчета собственных волн микрополосковой линии передачи / А.С. Ильинский // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17. — № 10. — С. 1868–1874.
27. Ильинский А.С. Применение метода Галеркина для расчета и исследования распределения токов основного и высших типов нормальных волн несимметричной полосковой линии / А.С. Ильинский, В.В. Зарубанов // Радиотехника и электроника. — 1980. — Т. 25. — № 9. — С. 1844–1850.
28. Ильинский А.С. Результаты применения спектрального метода к расчету микрополосковых линий передачи / А.С. Ильинский, В.В. Зарубанов // Математические модели прикладной электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 160–176.
29. Ильинский А.С. Математические модели электродинамики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.
30. Ильинский А.С. Развитие методов Тихонова в прикладной электродинамике / А.С. Ильинский, А.Г. Свешников // Вестн. МГУ. Выч. математика и кибернетика. — 1986. — Вып. 3. — С. 28–42.
31. Ильинский А.С. Исследование математических моделей микрополосковых линий / А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов // Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — С. 175–198.
32. Ильинский А.С. Математическое моделирование процесса распространения электромагнитных колебаний в целевой линии передачи / А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1987. — Т. 27. — № 2. — С. 252–261.
33. Ильинский А.С. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в за-



- дачах дифракции) / А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов. — М.: ИПР-ЖР, 1996. — 176 с.
34. Ильинский А.С. Развитие метода операторных уравнений для решения задачи о собственных волнах связанных микрополосковых линий со слоистым диэлектриком подложки / А.С. Ильинский, Е.В. Чернокожин, Ю.В. Шестопапов // Математические модели прикладной электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 116–136.
35. Ильинский А.С. Математическая модель для задачи распространения волн в микрополосковых устройствах / А.С. Ильинский, Ю.В. Шестопапов // Вычисл. методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1980. — Вып. 32. — С. 85–103.
36. Ильинский А.С. О спектре нормальных волн щелевых линий передачи / А.С. Ильинский, Ю.В. Шестопапов // Радиотехника и электроника. — 1981. — Т. 26. — № 10. — С. 2064–2073.
37. Ильинский А.С. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн / А.С. Ильинский, Ю.В. Шестопапов. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 184 с.
38. Карпенко В.А. Теоретические и экспериментальные исследования прямоугольного диэлектрического волновода / В.А. Карпенко, Ю.Д. Столяров, В.Ф. Холомеев // Радиотехника и электроника. — 1980. — Т. 25. — № 1. — С. 51–57.
39. Карчевский Е.М. Об одной спектральной задаче теории диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39. — № 8. — С. 1293–1299.
40. Карчевский Е.М. Существование и свойства решений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов,

Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2000. — Т. 40. — № 8. — С. 1250–1263.

41. Карчевский Е.М. О решении векторной задачи о собственных волнах цилиндрических волноводов на основе нелокального краевого условия / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т. 42. — № 7. — С. 1051–1066.
42. Карчевский Е.М. Об одной спектральной задаче для оператора Гельмгольца на плоскости / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач: материалы Всероссийского семинара. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1998. — С. 19-20.
43. Карчевский Е.М. Приближенный метод решения спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Всероссийской школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, Изд-во ДАС, 1999. — С. 77–79.
44. Карчевский Е.М. Исследование и приближенный метод решения спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Современные проблемы матем. моделирования: труды VIII Всероссийской школы-семинара. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1999. — С. 53–64.
45. Карчевский Е.М. Об одном методе решения эллиптических задач в неограниченных областях / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности: труды Всероссийской конференции. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2000. — С. 72–84.
46. Карчевский Е.М. Вопросы существования и численные методы в спектральной теории слабонаправляющих диэлектрических вол-

новодов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: НИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 55–78.

47. Карчевский Е.М. Векторная задача о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский, Г.П. Корнилов // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 2002. — С. 4–40.
48. Карчевский Е.М. Численный метод поиска дисперсионных кривых и собственных волн оптических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский, Г.П. Корнилов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2005. — № 12. — С. 2203–2218.
49. Карчевский Е.М. Исследование спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов с малым скачком показателя преломления / Е.М. Карчевский // Исследования по прикладной математике: сб. науч. ст. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1997. — Вып. 22. — С. 47–51.
50. Карчевский Е.М. Об определении постоянных распространения собственных волн диэлектрических волноводов методами теории потенциала / Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1998. — Т. 38. — № 1. — С. 132–136.
51. Карчевский Е.М. К исследованию спектра собственных волн диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39. — № 9. — С. 1558–1563.
52. Карчевский Е.М. Исследование численного метода решения спектральной задачи теории диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 1. — С. 10–17.

53. Карчевский Е.М. Исследование спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов с произвольным контуром поперечного сечения / Е.М. Карчевский // Исследования по прикладной математике: сб. науч. ст. — Казань: Унипресс, 1999. — Вып. 21. — С. 132–140.
54. Карчевский Е.М. Исследование задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 7. — С. 998–999.
55. Карчевский Е.М. Применение методов теории сингулярных интегральных операторов в задаче о собственных волнах волновода с размытой границей / Е.М. Карчевский // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 2002. — С. 64–78.
56. Карчевский Е.М. Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей / Е.М. Карчевский, А.И. Носич, С.И. Соловьев // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: НИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 79–114.
57. Карчевский Е.М. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 4. — С. 563–565.
58. Карчевский Е.М. Существование собственных значений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Известия вузов. Математика. — 2003. — № 3. — С. 78–80.

59. Карчевский Е.М. Математическое моделирование распространения волн в цилиндрическом диэлектрическом волноводе / Е.М. Карчевский, Е.В. Трифонов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Всероссийской школы-конференции, посв. 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, Изд-во ДАС, 1999. — С. 112–113.
60. Карчевский Е.М. Об определении комплексных постоянных пространства цилиндрических диэлектрических волноводов методами теории потенциала / Е.М. Карчевский, Е.В. Трифонов // Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач: труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Т. 2. — Казань: Унипресс, 1999. — С. 245–250.
61. Карчевский Е.М. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 4. — С. 563–565.
62. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
63. Каценеленбаум Б.З. О распространении электромагнитных волн вдоль бесконечных диэлектрических цилиндров при низких частотах / Б.З. Каценеленбаум // Докл. АН СССР. — 1947. — Т. 58. — № 7. — С. 1317–1320.
64. Каценеленбаум Б.З. Симметричное и не симметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра / Б.З. Каценеленбаум // Журнал технической физики. — 1949. — Т. 19. — № 10. — С. 1168–1181.

65. Клеев А.И. Расчет диэлектрических волноводов методом коллокации / А.И. Клеев, А.Б. Маненков // Изв. вузов. Радиофизика. — 1988. — Т. 31. — № 1. — С. 93–99.
66. Клеев А.И. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Частные методы (обзор) / А.И. Клеев, А.Б. Маненков, А.Г. Рожнев // Радиотехн. и электроника. — 1993. — Т. 38. — № 5. — С. 769–788.
67. Клеев А.И. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Универсальные методики (обзор) / А.И. Клеев, А.Б. Маненков, А.Г. Рожнев // Радиотехн. и электроника. — 1993. — Т. 38. — № 11. — С. 1938–1968.
68. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. — М.: Мир, 1987. — 312 с.
69. Кузнецов В.А. Дисперсионные характеристики прямоугольного диэлектрического волновода / В.А. Кузнецов, А.М. Лерер // Радиотехника и электроника. — 1982. — Т. 27. — № 4. — С. 651–657.
70. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения / В.Д. Купрадзе. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 280 с.
71. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
72. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 371 с.
73. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн / И.К. Лифанов. — М.: ТОО "Янус", 1995. — 519 с.

74. Любимов Л.А. Диэлектрический волновод эллиптического сечения / Л.А. Любимов, Г.И. Веселов, Н.А. Бей // Радиотехника и электроника. — 1961. — Т. 51. — Вып. 11. — С. 1871–1880.
75. Малов А.В. Расчет собственных волн диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения методом интегральных уравнений / А.В. Малов, В.В. Солодухов, А.А. Чурилин // Антенны. — М.: Радио и связь, 1984. — Вып. 31. — С. 189–195.
76. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала / С.Г. Михлин. — М.: Гостехтеориздат, 1952. — 216 с.
77. Муравей Л.А. Аналитическое продолжение по параметру функций Грина внешних краевых задач для двумерного уравнения Гельмгольца / Л.А. Муравей // Матем. сборник. — 1978. — Т. 105. — № 1. — С. 63–108.
78. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — 600 с.
79. Никифоров А.Ф. Основы теории специальных функций / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. — М.: Наука, 1974. — 303 с.
80. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. — М.: Наука, 1978. — 543 с.
81. Панасюк В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. — Киев: Наук. думка, 1984. — 344 с.
82. Поединчук А.Е. О регуляризации спектральных задач волнового рассеяния на незамкнутых экранах / А.Е. Поединчук, Ю.А. Тучкин, В.П. Шестопапов // Доклады АН СССР. — 1987. — Т. 295. — № 6. — С. 1358–1362.

83. Пресдорф З. Линейные интегральные уравнения / З. Пресдорф // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальн. направления. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1988. — Т. 27. — С. 5–130.
84. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
85. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А.Б. Самохин. — М.: Радио связь, 1998. — 160 с.
86. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80. — № 3. — С. 345–347.
87. Свешников А.Г. Дифракция на ограниченном теле / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184. — № 1. — С. 71–74.
88. Свешников А.Г. Применение метода конечных разностей к расчету световодов / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов // Вычисл. математика и программирование. — 1978. — Вып. 28. — С. 104–117.
89. Свешников А.Г. Расчет плоского волновода-трансформатора конечно-разностным методом / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов // Вычисл. математика и программирование. — 1978. — Вып. 28. — С. 118–133.
90. Смагин С.И. Метод потенциалов в трехмерной задаче дифракции электромагнитных волн / С.И. Смагин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1990. — Т. 29. — № 1. — С. 82–92.
91. Снайдер А. Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. — М.: Радио и связь, 1987. — 656 с.



92. Сухинин С.В. О дискретности собственных частот открытых акустических резонаторов / С.В. Сухинин // Неклассические задачи упругости и пластичности. — Новосибирск, 1981. — Вып. 49. — С. 157–163.
93. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы / Х.-Г. Унгер. — М.: Мир, 1980. — 656 с.
94. Цецохо В.А. Задача об излучении электромагнитных волн в слоистой среде с осевой симметрией // Вычислительные системы. Новосибирск, 1964. Вып. 12. С. 52–78.
95. Чернокожин Е.В. Об одном методе вычисления характеристических чисел мероморфной оператор-функции / Е.В. Чернокожин, Ю.В. Шестопапов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1985. — Т. 25. — № 9. — С. 1413–1416.
96. Шестопапов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В.П. Шестопапов. — Киев: Наукова думка, 1987. — 288 с.
97. Шестопапов В.П. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В.П. Шестопапов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов. — Киев: Наук. думка, 1984. — 296 с.
98. Шестопапов Ю.В. К обоснованию метода интегральных уравнений для расчета постоянных распространения в полосковых устройствах / Ю.В. Шестопапов // Числ. методы электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — С. 40–50.
99. Шестопапов Ю.В. К обоснованию спектрального метода расчета собственных волн микрополосковых линий / Ю.В. Шестопапов // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16. — № 8. — С. 1504–1512.
100. Шестопапов Ю.В. Свойства спектра одного класса несамосопряженных краевых задач для систем уравнений Гельмгольца /

- Ю.В. Шестопапов // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 252. — № 5. — С. 1108–1111.
101. Шестопапов Ю.В. О спектре семейства несамосопряженных краевых задач для систем уравнений Гельмгольца // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21. № 6. С. 1459–1470.
102. Шестопапов Ю.В. Достаточные условия существования дискретного спектра собственных волн щелевых линий передачи / Ю.В. Шестопапов // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 264. — № 5. — С. 1131–1135.
103. Шестопапов Ю.В. Дискретный спектр собственных волн экранированной открытой щелевой линии / Ю.В. Шестопапов // Ж. вычисл. математики и мат. физики. — 1983. — Т. 23. — № 6. — С. 1392–1401.
104. Шестопапов Ю.В. Об одномерных уравнениях теории регулярных линий передачи / Ю.В. Шестопапов // Радиотехника и электроника. — 1983. — Т. 28. — № 7. — С. 1426–1428.
105. Шестопапов Ю.В. Существование дискретного спектра нормальных волн микрополосковых линий передачи со слоистым диэлектрическим заполнением / Ю.В. Шестопапов // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 273. — № 3. — С. 594–596.
106. Шестопапов Ю.В. Нормальные волны щелевой линии, помещенной в слой диэлектрика / Ю.В. Шестопапов // Методы синтеза и применение многослойных интерференционных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 28–29.
107. Шестопапов Ю.В. Собственные волны открытых и экранированных щелевых линий, образованных областями произвольного поперечного сечения / Ю.В. Шестопапов // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 289. — № 4. — С. 840–845.

108. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
109. Яровой А.Г. Применение метода поверхностных потенциалов в задаче дифракции электромагнитных волн на пронизываемом цилиндре в плоскостройной среде / А.Г. Яровой // Математическое моделирование. — 1995. — Т. 7. — № 2. — С. 3–16.
110. Bagby J.S. Integral formulation for analysis of integrated dielectric waveguides / J.S. Bagby, D.P. Nyquist, B.C. Drachman // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1985. — MTT-29. — P. 906–915.
111. Bagby J.S. Dyadic Green's functions for integrated electronic and optical circuits / J.S. Bagby, D.P. Nyquist // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1987. — MTT-35 — P. 206–210.
112. Bamberger A. Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber / A. Bamberger, A.-S. Bonnet // SIAM J. Math. Analysis. — 1990. — V. 21. — № 6. P. 1487–1510.
113. Bastiaansen H.J.M. Domain-integral analysis of channel waveguides in anisotropic multi-layered media / H.J.M. Bastiaansen, N.H.G. Baken, H. Blok // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1992. — V. 40. — P. 1918–1926.
114. Bonnet-BenDhia A.S. Guided modes of integrated optical guides. A mathematical study / A.S. Bonnet-BenDhia, G. Caloz, F. Mahe // IMA J. Appl. Math. — 1998. — V. 60. — P. 225–261.
115. Bonnet-BenDhia A.S. Study at high frequencies of a stratified waveguide / A.S. Bonnet-BenDhia, G. Caloz, M. Dauge, F. Mahe // IMA J. Appl. Math. — 2001. — V. 66. — P. 231–257.
116. Bonnet-Ben Dhia A.S. Mathematical analysis of guided water waves / A.S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joli // SIAM J. Appl. Math. — 1993. — V. 53. — № 6. — P. 1507–1550.

117. Bonnet-Ben Dhia A.S. Mathematical analysis and numerical approximation of optical waveguides / A.S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly // *Mathematical Modelling in Optical Science. Frontiers. Appl. Math.* — 2001. — V. 22. — SIAM Philadelphia. PA. — P. 273–324.
118. Bonnet-Ben Dhia A.S. Computation of the modes of dielectric waveguides by finite elements coupled with an integral representation / A.S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly // *Numerical Methods in Engineering.* — 1992. — P. 73–77.
119. Collin R.E. *Field Theory of Guided Waves* / R.E. Collin. — New York: IEEE Press, 1991. — 578 p.
120. Colton D. Time harmonic electromagnetic waves in an inhomogeneous medium / D. Colton, R. Kress // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.* — 1990. — V. 116A. — P. 279–293.
121. Karchevskii E.M. Simulation of weakly guiding optical fibers by finite element method with exact boundary condition / R. Dautov, E.M. Karchevskii // *International Conference on Transparent Optical Networks, Krakov, Poland, 2001: Proceedings.* — 2001. — P. 206–210.
122. Kartchevski E.M. Green's function expansions in dyadic root functions for shielded layered waveguide problems obtained via residue theory / G.W. Hanson, A.I. Nosich, E.M. Kartchevski // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications.* — 2003. — V. 17. — № 5. — P. 759–761.
123. Karchevskii E.M. Study of spectrum of guided waves of dielectric fibres / E.M. Karchevskii // *International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, 2-5 June 1998: Proceedings.* — 1998. — P. 787–789.

124. Karchevskii E.M. Surface and leaky guided waves on dielectric fibres of arbitrary cross-section / E.M. Karchevskii // Progress in Electromagnetics Research Symposium, Nantes, France, 13-17 July 1998: Proceedings. — 1998. — P. 325.
125. Karchevskii E.M. Universal algorithm for the accurate computation of the modal characteristics of arbitrary-shape optical fibers / E.M. Karchevskii // International Conference on Transparent Optical Networks, Kielce, Poland, June 9-11, 1999: Proceedings. — 1999. — P. 201–204.
126. Karchevskii E.M. Universal algorithm for solution of eigenvalue problems of the theory of electromagnetic waves / E.M. Karchevskii // XXVI General Assembly International Union of Radio Science, Toronto, Ontario, Canada, August 13-21, 1999: Proceedings. — 1999. — P. 41.
127. Karchevskii E.M. Mathematical analysis and numerical modeling of the guided modes of the step-index optical fibers / E.M. Karchevskii // The Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Santiago de Compostela, Spain, July 10-14, 2000: Proceedings. — SIAM Proc. in Applied Mathematics, 2000. — V. 102. — P. 414–419.
128. Karchevskii E. Mathematical analysis and numerical simulation of the guided modes of the weakly guiding optical fibers / E. Karchevskii, R. Dautov // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, 12-15 September 2000: Proceedings. — 2000. — P. 396.
129. Karchevskii Y. Computing complex propagation constants of dielectric waveguides / Y. Karchevskii, E. Trifonov // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory,

Kharkov, Ukraine, 12-15 September 2000: Proceedings. — 2000. — P. 536–537.

130. Kartchevski E. Convergence of the galerkin method for numerical calculation of the guided modes of an integrated optical guide / E. Kartchevski // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Dnepropetrovsk, Ukraine, 14-17 September, 2004: Proceedings. — 2004. — P. 263–265.
131. Kartchevski E.M. Mathematical analysis of the guided modes of an integrated optical guide / E.M. Kartchevski, G. Hanson // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kiev, Ukraine, 10-13 September, 2002: Proceedings. — 2002. — P. 230–232.
132. Kartchevski E.M. Mathematical analysis of the guided modes of integrated optical guides / E.M. Kartchevski, G. Hanson // The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Jyväskylä, Finland, June 30 - July 4, 2003: Proceedings. — 2003. — P. 445–450.
133. Kartchevski E.M. Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber / E.M. Kartchevski, A.I. Noshich, G.W. Hanson // SIAM J. Appl. Math. — 2005. — V. 65. — № 6. — P. 2033–2048.
134. Karchevskii E.M. A new method for the computation of eigenmodes in dielectric waveguides / G.P. Kornilov, R.Z. Dautov, E.M. Karchevskii // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Dnepropetrovsk, Ukraine, 14-17 September, 2004: Proceedings. — 2004. — P. 266–268.
135. Eyges L. Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape / L. Eyges, P. Gianino, P. Wintersteiner // J. Opt. Soc. Am. — 1979. — V. 69. — № 9. — P. 1226–1235.

136. Givoli D. Exact non-reflecting boundary conditions / D. Givoli, J.B. Keller // J. Comput. Phys. — 1989. — V. 82. — P. 172–192.
137. Givoli D. Nonreflecting boundary conditions (review article) / D. Givoli // J. Comput. Phys. — 1991. — V. 94. — P. 1–29.
138. Goell J.E. A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides / J.E. Goell // Bell Sys. Tech. J. — 1969. — V. 48. — P. 2133–2160.
139. Goolin A.V. Numerical study of stability and nonlinear eigenvalue problems / A.V. Goolin, S.V. Kartyshov // Surv. Math. Ind. — 1993. — V. 3. — P. 29–48.
140. Harrington R.F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields / R.F. Harrington. — McGraw-Hill, 1961. — 328 p.
141. Hormander L. Linear Partial Differential Operators / L. Hormander. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — 379 p.
142. Hunsperger R.G. Integrated optics: theory and technology / R.G. Hunsperger // Optical Sciences 33. — New York: Springer-Verlag, 1991. — 426 p.
143. Jablonski T.F. Complex modes in open lossless dielectric waveguides / T.F. Jablonski // J. Opt. Soc. Am. A. — 1994. — V. 11. — № 4. — P. 1272–1282.
144. Jablonski T.F. Analysis of dielectric guiding structures by the iterative eigenfunction expansion method / T.F. Jablonski, M.J. Sowinski // IEEE Trans. Microwave Theory Techniques. — 1989. — MTT-37. — P. 63–70.
145. James J.R. Point-matched solutions for propagating modes on arbitrarily-shaped dielectric rods / J.R. James, I.N.L. Gallet // Radio and Electron. Eng. — 1972. — V. 42. — P. 103–113.

146. James J.R. Modal analysis of triangular-cored glass-fibre waveguide / J.R. James, I.N.L. Gallett // IEE Proc. — 1973. — V. 120. — № 11. — P. 1362–1370.
147. Joly P. Mathematical analysis of electromagnetic open waveguides / P. Joly, C. Poirier // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 1995. — V. 29. — № 5. — P. 505–575.
148. Joly P. A numerical method for the computation of electromagnetic modes in optical fibres / P. Joly, C. Poirier // Math. Meth. Appl. Sci. — 1999. — V. 22. — P. 389–447.
149. Karimov I.P. Optical Fiber Telecommunications III / I.P. Karimov, T.L. Koch. — New York: Academic Press, 1997. — 437 p.
150. Keuster E.F. Fundamental mode propagation on dielectric fibres of arbitrary cross-section / E.F. Keuster, R.C. Pate // IEE PROC-H. 1980. — V. 126. — № 1. — P. 41–47.
151. Kress R. Linear integral equations / R. Kress. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 365 p.
152. Kolk E.W. Domain integral equation analysis of integrated optical channel and ridge waveguides in stratified media / E.W. Kolk, N.H.G. Baken, H. Blok // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1990. — V. 38. — P. 78–85.
153. Lu M. Anisotropic dielectric waveguides / M. Lu, M.M. Fejer // J. Opt. Soc. Am. A. — Feb. 1993. — V. 10. — № 2. — P. 246–261.
154. Marcuse D. Theory of Dielectric Optical Waveguides / D. Marcuse. — New York: Academic Press, 1974. — 576 p.
155. Mikhlin S.G. Singular integral operators / S.G. Mikhlin, S.P. Prossdorf. — Berlin: Springer-Verlag, 1986. — 528 p.



156. Miller C.M. Optical Fiber Splices and Connectors: Theory and Methods / C.M. Miller. — Marcel Dekker, 1986. — 378 p.
157. Mittra R. Analisis of open dielectric waveguides using mode-matching technique and variational metods / R. Mittra, V. Jamnejad, Y. Hou // IEEE Trans. on MTT. — 1980. — V. 28. — № 1. — P. 36–43.
158. Muller C. Grundproblems der Mathematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen / C. Muller. — Berlin: Springer, 1957. — 345 p.
159. Nosich A.I. On correct formulation and general properties of wave scattering by discontinuities in open waveguides / A.I. Nosich // Proc. of Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET 90). — Gurzuf, 1990. — P. 100–112.
160. Nosich A.I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering / A.I. Nosich // J. Electromag. Waves Applicat. — 1994. — V. 8. — № 3. — P. 329–353.
161. Neumaier A. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem / A. Neumaier // SIAM J. Numer. Anal. — 1985. — V. 22. — № 5. — P. 914–923.
162. Pedreira D.G. A method for computing guided waves in integrated optics. Part I. Mathematical analysis / D.G. Pedreira, P. Joly // SIAM J. Numer. Analysis. — 2001. — V. 39. — P. 596–623.
163. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen fur die Wellengleichung / H. Reichardt // Abh. Mathem. Seminar Univ. Hamburg. — 1960. — V. 24. — P. 41–53.
164. Rozzi T. Open Electromagnetic Waveguides / T. Rozzi, M. Mongiardo. — London: IEE Publ., 1997. — 375 p.

165. Sammut R. Leaky modes on circular optical waveguides / R. Sammut, A.W. Snyder // Applied Optics. — Feb. 1976. — V. 15. — № 2. — P. 477–482.
166. Sammut R. Leaky modes on a dielectric waveguide: orthogonality and excitation / R. Sammut, A.W. Snyder // Applied Optics. — April 1976. — V. 15. — № 4. — P. 1040–1044.
167. Sammut R.A. Comparison of leaky mode and leaky ray analysis of circular optical fibers / R.A. Sammut // J. Opt. Soc. Am. — 1976. — V. 66. — № 4. — P. 370–371.
168. Shestopalov Yu.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics / Yu.V. Shestopalov, Yu.G. Smirnov, E.V. Chernokozhin. — VSP, 2000. — 117 p.
169. Snyder A.W. Leaky-ray theory of optical waveguides of circular cross section / A.W. Snyder // Appl. Phys. — 1974. — V. 4. — P. 273–298.
170. Snyder A.W. Anisotropic fibers with nonaligned optical (stress) axes / A.W. Snyder, A. Ankiewicz // J. Opt. Soc. Am. A. — June 1986. — V. 3. — № 6. — P. 856–863.
171. Solbach K. The electromagnetic fields and the phase constants of dielectric image lines / K. Solbach, I. Wolff // IEEE Trans. on MTT. — 1978. — V. 26. — № 4. — P. 266–274.
172. Splunter J.M. Computational analysis of propagation properties of integrated-optical waveguides using a domain integral equation / J.M. Splunter, H. Blok, N.H.G. Baken, M.F. Dane // Proc. URSI Int. Symp. on EM Theory. — Budapest, 1986. — P. 321–323.
173. Steinberg S. Meromorphic families of compact operators / S. Steinberg // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — V. 31. — № 5. — P. 372–379.

174. Urbach H.P. Analysis of the domain integral operator for anisotropic dielectric waveguides / Urbach H.P. // SIAM J. Math. Anal. — 1996. — V. 27. — P. 204–220.
175. Wilczewski F. Bending loss of leaky modes in optical fibers with arbitrary index profiles / F. Wilczewski // Optics Letters. — July 1994. — V. 19. — № 14. — P. 1031–1033.