## § 3. Образ оператора. Ядро оператора. Ранг матрицы.

Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор. Множ-во всех векторов $y$ из пр-ва $Y$ таких, что $y = Ax$ для некоторого $x \in X$ называется областью значений или образом оператора и обозначается через $\operatorname{Im}(A)$. Множество $\operatorname{Im}(A)$ – линейное подпространство пространства $Y$. Размерность подпространства $\operatorname{Im}(A)$ называется рангом оператора $A$ и обозначается через $\operatorname{rank}(A)$.

Множ-во всех векторов $x \in X$ таких, что $Ax = 0$, называется ядром оператора $A$ и обозначается через $\operatorname{Ker}(A)$. Это множество – линейное подпространство пр-ва $X$. Размерность подпространства $\operatorname{Ker}(A)$ называется дефектом оператора $A$ и обозначается через $\operatorname{def}(A)$

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{def}(A) = n.$$

### Упражнения.

№1). Согласно определению $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$. Пусть $x, y$ – произвольные векторы из $\operatorname{Ker}(A)$ $\alpha, \beta$ – любые числа. Тогда $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$, т.е. линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит множ-ву $\operatorname{Ker}(A)$.

№2) Обозначим $C = AB$. Столбцы матрицы $C$ линейно выражаются через столбцы матрицы $A$, которые в свою очередь линейно выражаются через максимальную подсистему л. н. столбцов матрицы $A$. Число столбцов в этой подсистеме равно $\operatorname{rank}(A)$. Назовем столбцы этой подсистемы базисными. Можно сказать, что столбцы матрицы $C$ принадлежат подпространству, натянутому на базисные столбцы матрицы $A$. Следовательно число линейно независимых столбцов матрицы $C$ не может превышать $\operatorname{rank}(A)$. С другой стороны, строки матрицы $C$ линейно выражаются через строки матрицы $B$. Проведя аналогичные рассуждения, заключаем, что $\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(B)$.

№3).

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $a^1, a^2$ – линейно независимы. Они образуют минимальную линейно независимую подсистему, т.к. определители, составленные из компонент векторов $a^1, a^2, a^3$ и $a^1, a^2, a^4$ $= 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Downarrow$$

$a^1, a^2, a^3$ и $a^1, a^2, a^4$ линейно зависимы. Это не единственная макс. л.н. подсистема. Такими же св-вами обладают $a^1, a^3$ и $a^1, a^4$. Ранг $= 2$.

№4). Пусть $y \in Im(A)$. Тогда $y = Ax$ для некоторого вектора $x \in X_n$ т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1, \dots, Ae^n).$$

С другой стороны, если $y \in L(Ae^1, \dots, Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax,$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е. $y \in Im(A)$. Значит $Im(A) = L(Ae^1, \dots, Ae^n)$.

№6). Каждому элементу пр-ва $P_n$ оператор $D$ ставит в соответствие полином из $P_{n-1}$. Поэтому $Im(D) = P_{n-1}$, и можно считать что $D: P_n \to P_{n-1}$. Любой полином нулевой степени оператор $D$ обращает в 0. Полиномы более высоких степеней в результате диф-ия не могут обратиться в ф-цию, тождественно $= 0$. Поэтому $Ker(D) = P_0$.

№9). Образ – плоскость $(x, a) = 0$, ядро – прямая $[x, a] = 0$.

№10). Последние $n-r$ столбцов матрицы $A_c$ нулевые, в то время как первые $r$ – линейно независимы.

№11).

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4.$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 2 + 6 - 6 - 0 = 0.$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{rank}(A) = 2.$$

№12).

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 142 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -48 \cdot 11 + 0 + 0 - 0 - 0 - 24 \neq 0.$$

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Downarrow$

rank = 3.

№13).

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 10 - 12 + 12 + 4 + 10 = 0.$$

rank = 2.

б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$$\det = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 24.$$

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 \neq 0.$$

$$\det = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \\ -8 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -140 - 32 - 42 + 96 - 98 + 20 =$$
$$= -172 + 54 - 78 \neq 0.$$

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 84 + 12 + 36 - \cancel{12} - \cancel{12} - 36 - 84 - 12 = 0.$$

rank = 2.

№14). $\Delta = 0$. rank = 2  $\Delta \neq 0$  rank = 3.

①. $$\begin{array}{c} \lambda \\ \left(\begin{matrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{matrix}\right) \end{array}$$  ~~det =~~

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 12 \\ \hline 34 \\ +\, 17\phantom{0} \\ \hline 204 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 17 + 10 + 0 -$$
$$- 4 - 0 - 210 = 0.$$

rank = 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 204 + 10 + 7 -$$
$$- 4 - 7 - 210. \neq 0.$$

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 7 & 17 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 17 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Downarrow$

rank = 3.

$\cancel{\begin{vmatrix} 4 & 10 & 1 \end{vmatrix}}$

N°15)

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 25 & 31 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$d = \begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 25$$

$$d = \begin{vmatrix} 25 & 31 & 43 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 50.$$

$$d = \begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

rank = 3.

в)

$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 0 & 43/17 & -43/17 & -43/17 & -86/17 \\ 0 & 581/17 & -581/17 & -581/17 & -1162/17 \\ 0 & 1072/17 & -1072/17 & -1072/17 & -2144/17 \\ 0 & 1397/17 & -1397/17 & -1397/17 & -2794/7 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 0 & 43/17 & -43/17 & -43/17 & -86/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 17 & -28 \\ 0 & 43/17 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad d = \begin{vmatrix} 17 & -28 & 45 \\ 0 & 43/7 & -43/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

rank = 2.

№16).

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$

$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ rank = 2.

б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$d = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$

$d = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$d = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 0$ rank = 2.

№7).

при $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{rank} = 2.$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

при $\lambda \neq 3.$ $\qquad$ $\text{rank} = 3.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \neq$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = -12$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

№18)

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 0 & 6348/47 & 17/47 & -19044/47 & 12/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 47 & -67 \\ 0 & 6348/47 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$d = \begin{vmatrix} 47 & -67 & 35 \\ 0 & 6348/47 & 17/47 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$d = \begin{vmatrix} 47 & -67 & 201 \\ 0 & 17/47 & -19044/17 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$d = \begin{vmatrix} 47 & -67 & 155 \\ 0 & 6348/47 & 12/47 \\ 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} =$$

$$= -6348 \cdot 30 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \neq 0.$$

$\mathrm{rank} = 3.$