КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра анализа данных и исследования операций

Е.П.Шустова

МАТЕМАТИКА

Дискретная математика. Элементы теории нечётких множеств.

ПРАКТИКУМ

учебное пособие

Казань 2020

УДК 510
ББК 22.18
Ш97

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИВМиИТ
протокол № 8 от 22 июня 2020 года

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики и математического
моделирования КФУ, **О.А.Широкова**,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры программной инженерии Высшей школы информационных
технологий и интеллектуальных систем КФУ **И.Н. Голицына**

Математика (Дискретная математика. Элементы теории нечётких множеств). Практикум. Учебное пособие/ Е.П.Шустова. – Казань: Казан. ун-т, 2020.–114 с.

Учебное пособие содержит краткий теоретический материал, примеры решения типовых задач, задачи для решения на занятиях. Данное учебное пособие удовлетворяет требованиям новых государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования по направлениям подготовки дипломированного специалиста по направлению подготовки: прикладная математика и информатика. Данное пособие ориентировано на быстрое освоение методов решения типовых задач по комбинаторике, логике, графам, автоматам, элементам нечётких множеств, нечёткой логике, нечётким графам, нечётким алгоритмам и элементам теории неопределённости. Оно носит обзорный характер. Поэтому может использоваться студентами названного направления и при подготовке к госэкзамену. Оно так же полезно студентам естественнонаучных специальностей университетов, в программу которых входят указанные разделы математики.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для проведения семинарских занятий по комбинаторике, логическому исчислению, теории графов и автоматов, элементам теории нечётких множеств, нечёткой логике, нечётким графам, нечётким алгоритмам и теории неопределенности. Изложение основных теоретических сведений носит справочный характер. Теоретический материал взят в рамку с целью выделения его из сплошного текста и специально расположен так, чтобы при его прочтении у студентов подключалась фотографическая память.

Данное учебное пособие содержит краткий теоретический материал, примеры решения типовых задач, задачи для решения на занятиях. Задачи каждого из разделов подобраны так, чтобы их решение не занимало много времени и не утомляло большими выкладками, но в то же время иллюстрировало применение к решению задач всех основных теоретических сведений, изложенных перед ними.

Приведенная теория составляет «костяк» дискретной математики и нечеткого анализа, т.е. то без знания чего нельзя обойтись специалисту в области дискретной математики и нечеткого анализа. Причем теория, используемая для решения в приведенных примерах, покрывает всю теорию, приведенную перед этими примерами. Аналогично приведенным примерам построены и задачи для решения на занятии.

ГЛАВА 1. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Комбинаторика

В следующей таблице указано количество выборок из n элементов по k элементов.

Таблица 1.

Основные формулы комбинаторики

	Составить упорядоченную выборку (в выборке важен порядок)	Составить неупорядоченную выборку (в выборке порядок не важен)
В выборке могут быть повторения (выборка с возвращениями, с повторениями)	*Размещение* n^k	$C_{n+(k-1)}^k$
В выборке различные элементы (выборка без возвращений, без повторений)	*Размещение* $A_n^k = n\cdot(n-1)\ldots(n-(k-1))$ *Перестановка* – размещение из n элементов по n местам: $n! = A_n^n = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$	*Сочетание* $C_n^k = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\ \cdot\ 2\cdot\ \ldots\cdot\ k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Размещение с ограничением спецификаций

При размещении элементов согласно спецификации $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, т.е. при указании сколько раз можно повторять в выборке один и тот же элемент, следует обратить внимание на то, что

$$|K| = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) = k.$$

Количество размещений определяется формулой:

$$(n)^{\mathrm{k}}_{\text{спец}} = \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\ldots\cdot k_n!}.$$

Если Y есть набор подмножеств $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$, то отображение множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ на Y определит *разбиение множества* X на подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_k$, при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{k} X_i = X; \\ X_i \cap X_j = \varnothing, \quad i \neq j, \ 1 < i, \quad j \leq k; \\ X_i \neq \varnothing, \quad i = \overline{1,k}; \end{cases}$$

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k| = n.$$

Каждое подмножество X_i называют *блоком разбиения* множества X, а само разбиение обозначают $B_k(X) = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$.

Количество возможных разбиений множества X на подмножества определяют *числом Стирлинга* второго рода $S(n,k)$ по правилу:

$$\begin{cases} S(n,\ 0) = 0, \quad n > 0; \\ S(n,n) = 1, \quad n \geq 0; \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k), \qquad k = \overline{0,n}, \end{cases}$$

где n – мощность множества X, а k – количество формируемых подмножеств.

Правила комбинаторики

При исполнении нескольких операций (размещений, перестановок, сочетаний или разбиений) следует применять дополнительные правила: суммы, произведения и включения-исключения.

Правило суммы: если комбинаторный объект t_i может быть выбран из исходного множества X “s” способами, а другой комбинаторный объект t_j из того же исходного множества X “p” способами, то выбор “либо t_i, либо t_j“ может быть осуществлен “$(s+p)$” способами.

Правило произведения: если комбинаторный объект t_i может быть выбран из исходного множества “s” способами и после каждого из таких выборов комбинаторный объект t_j может быть выбран “p” способами, то выбор “t_i и t_j“ в указанном порядке может быть осуществлен “$(s \cdot p)$” способами.

Правило включения-исключения: если существует множество объектов X и множество свойств $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_t\}$, которыми могут обладать элементы $x_i \in X$, то может быть выполнено разбиение множества X на подмножества по числу свойств, которыми они обладают.

В этом случае разбиение множества на подмножества удовлетворяет следующему условию:

$$|X_0| = |X| - |X_1| + |X_2| - |X_3| + \ldots (-1)^t |X_t|,$$

где $|X_0|$ - число элементов множества X, не обладающих ни одним свойством множества Y;

$|X|$- общее число элементов множества X;

$|X_1|$- число элементов множества X, обладающих только одним свойством из множества Y;

$|X_2|$- число элементов множества X, обладающих только двумя свойствами множества Y;

$|X_3|$- число элементов множества X, обладающих только тремя свойствами множества Y и т.д.

Пример. Дано X={0; 1}. Необходимо сформировать кодовые комбинации по 8 символов, среди которых пять нулей и три единицы. Сколько возможно комбинаторных объектов?

Решение. Видим, что в нашем случае $n = 2,\ k = 8,\ k_1 = 5,\ k_2 = 3.$ В силу формулы

$$(n)^{\mathrm{k}}_{\text{спец}} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \ldots \cdot k_n!}$$

количество размещений с ограничением спецификацией равно 8!/5!·3! =56. Следовательно, можно сформировать 56 кодовых комбинаций, в которых будет три единицы и пять нулей.

Замечание. Например, в кодировке КОИ-8 прописные буквы латиницы имеют следующие коды: `01000011-C, 01000101-E, 01000110-F, 01001001-I, 01001010-J, 01001100-L, 01010001-Q, 01010010-P, 01010100-T, 01011000-X` и т.д.

Пример. Дано множество $X=\{a,b,c,d\}$. Выполнить его разбиение на два одноэлементных подмножества и одно двухэлементное. Сколько и какие подмножества можно сформировать?

Решение. В нашем случае $Y=\{Y_1,Y_2,Y_3\}$, где $|Y_1|=1,\quad |Y_2|=1,\ |Y_3|=2$. Количество разбиений по формуле Стирлинга равно:

$$S(4,3)=S(3,2)+3S(3,3)=S(3,2)+3$$
$$S(3,2)=S(2,1)+2S(2,2)=S(2,1)+2$$
$$S(2,1)=S(1,0)+1S(1,1)=0+1$$
$$S(4,3)=3+2+1=6$$

а множество подмножеств есть:

B_3`(4)={{{a}, {b}, {c, d}}; {{a}, {c}, {b, d}};`

`{{a}, {d}, {b, c}}; {{b}, {c}, {a, d}};`

`{{b}, {d}, {a, c}}; {{c}, {d}, {a, b}}}.`

Пример. Даны пять букв и семь цифр. Сколько можно сформировать шестиэлементных подмножеств, содержащих две различные буквы и четыре различные цифры.

Решение. Количество подмножеств, содержащих две буквы равно

$$C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10.$$

По условию надо сформировать 6-элементные множества. Две позиции уже заняты буквами. Поэтому для цифр осталось 6-2=4 места. Вычисляем количество подмножеств, содержащих четыре цифры:

$$C_7^4=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=35.\ .$$

Тогда число подмножеств, содержащих две буквы и четыре цифры, по правилу умножения есть

$$C_5^2 \cdot C_7^4 = 10 \cdot 35 = 350.$$

Пример. Дана колода из n индексированных перфокарт. Сколькими способами можно расположить их в колоде, чтобы ни одна перфокарта с номером i не занимала i-го места (для $i = \overline{1,n}$).

Решение. Общее число перестановок перфокарт в колоде равно $n!$ Число перестановок, при котором i перфокарт занимают i мест есть $(n-i)!$ Число перестановок i перфокарт, когда i-я перфокарта занимает i-е место по правилу произведения равно:

$$\binom{n}{i} \cdot (n-i)! = \frac{n! \cdot (n-i)!}{i! \cdot (n-i)!} = \frac{n!}{i!}.$$

И наконец, число размещений перфокарт в колоде, при котором ни одна из перфокарт с номером i не занимает i-го места по правилу включения-исключения равно:

$B_0 = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^i \cdot \frac{n!}{i!}.$

Пусть n=4.

Тогда $B_0 = 4! - \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 9.$

номер места			
1	2	3	4
номер перфокарты			
4	1	2	3
3	1	4	2
2	1	4	3
4	3	1	2
3	4	1	2
2	4	1	3

В таблице приведены возможные расположения перфокарт, когда ни одна перфокарта не занимает соответствующего места.

Задачи для решения на занятии:

1. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4

a) если в числе цифры могут повторяться?

b) если в числе цифры не могут повторяться?

2. Сколько чётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4

a) если в числе цифры могут повторяться?

b) если в числе цифры не могут повторяться?

3. Сколько чётных трёхзначных чисел кратных трём можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4

a) если в числе цифры могут повторяться?

b) если в числе цифры не могут повторяться?

4. Даны четыре буквы и три цифры. Сколько можно сформировать пятиэлементных подмножеств, содержащих две буквы и две цифры

a) если буквы в сформированном подмножестве различные.

b) если цифры в сформированном подмножестве различные.

c) если буквы в сформированном подмножестве различные и на входящий набор цифр смотреть как на число.

d) если цифры и буквы в сформированном подмножестве различные.

5. Сколько различных трёхзначных чисел можно построить из цифр

a) 0, 1, 2, 3,

b) 0, 1, 2, 3, 4, 5,

чтобы каждое число содержало цифру 1 ровно два раза?

6. Каково количество матриц из n строк и m столбцов с элементами из множества $\{0, 1\}$.

7. Бросают три игральные кости (с шестью гранями каждая). Сколькими способами они могут упасть так, что все оказавшиеся вверху грани имели одинаковое число очков?

8. Из 30 сотрудников отдела английский язык знают 19 человек, немецкий - 17, французский -11, английский и немецкий - 12, английский и французский - 7, немецкий и французский - 5, все три языка - 2 человека. Сколько сотрудников не владеют иностранным языком?

Логика

Логика высказываний

Высказывание – любое повествовательное предложение. Высказывание может быть истинное или ложное, что обозначают соответственно 1 или 0.

$a = \{0, 1\}$ – булева логическая переменная.

$\dashv F$ означает «всегда верно F», т.е. *дедуктивый вывод*.

Логические операции:

1. Конъюнкция ($a \wedge b,\ ab,\ a \cdot b,\ a \& b$)

$$a \wedge b = \min\,(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 1 \text{ и } b = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

2. Дизъюнкция

$$a \vee b = \max\{a,b\} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \text{ и } b = 0 \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

3. Отрицание ($\bar{a},\ \neg a$)

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 1, \\ 1, & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

4. $\oplus$ - сложения по модулю “2”

$$a \oplus b = \begin{cases} 0, & \text{в остальных случаях} \\ 1, & \text{если } a \neq b \end{cases}$$

5. Эквивалентность ($a \Leftrightarrow b,\ a \leftrightarrow b$)

$$(a \Leftrightarrow b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b = 1 \\ 1, & \text{если } a = b = 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

6. Импликация ($a \Rightarrow b,\ a \to b$)

$$(a \Rightarrow b) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 1, b = 0 \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

7. $|$ - штрих Шеффера

$$a \,|\, b = \begin{cases} 0, & \text{если } a = b = 1 \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

8. $\downarrow$ - стрелка Пирса

$$a \downarrow b = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 0 \text{ и } b = 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$F_0=\{\cdot;\ \vee;\ \bar{\ };\ \oplus;\ \leftrightarrow;\ \to;\ |;\ \downarrow\}$ - сигнатура алгебры логики. Операции здесь записаны в порядке уменьшения силы их действия.

Равносильные формулы логики высказываний

(законы булевой алгебры)

1. двойного отрицания

$\bar{\bar{a}} = a$

2. коммутативности

$a \wedge b = b \wedge a$, $\quad a \vee b = b \vee a$

3. ассоциативности

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

4. дистрибутивности

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

5. де Моргана

$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$, $\quad \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

6. идемпотентности

$a \wedge a = a$, $\quad a \vee a = a$

7. $a \wedge 1 = a$, $\quad a \vee 1 = 1$

8. $a \wedge 0 = 0$, $\quad a \vee 0 = a$

9. противоречия

$a \wedge \bar{a} = 0$, $\quad a \vee \bar{a} = 1$

10. $(a \Rightarrow b) = \bar{a} \vee b$

11. $(a \Rightarrow b) = (\bar{b} \Rightarrow \bar{a})$

12. $(a \Leftrightarrow b) = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

$= (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$

13. $a \downarrow b = \overline{(a \vee b)}$

14. $a \,|\, b = \overline{(a \wedge b)}$

Булева функция

Однозначное вправо отображение

$f:\vec{X}(x_1,\ldots,x_n)|_{x_i\in\{0,1\}}\to f=f(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}$ – *булева функция* n переменных.

Теорема. Любая булева функция, не равная тождественно нулю, представима в виде *разложения Шеннона*

$$f(x_1,\ldots,x_k,\,x_{k+1}\ldots,\,x_n)=$$

$$=\bigvee_{\forall(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)}\ \bigwedge_{i=1}^{k} x_i^{\sigma_i}\cdot f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\,x_{k+1}\ldots,\,x_n)$$

где $\sigma_i=0{,}1,\quad i=\overline{1,k},\qquad x_i^{\sigma_i}=\begin{cases}x_i, & \sigma_i=1,\\ \bar{x}_i, & \sigma_i=0.\end{cases}$

При $k=n$ разложение Шеннона называют *предельным разложением Шеннона.*

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (предельное разложение Шеннона, т.е. когда $k=n$) булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, не равной нулю, имеет вид

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{\forall(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}}\ \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}\ .$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (двойственное предельное разложение Шеннона) булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, не равной тождественно 1, имеет вид

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigwedge_{\substack{\forall(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}}\ \bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_i^{\sigma_i}}\ .$$

Замечание. Булевы функции могут соответствовать принятию решений экспертами, схеме расположения переключателей в цепи, графу и т.д. В схеме работы электрической цепи переключатели, отмеченные одним и тем же символом, включаются и выключаются одновременно.

Пример. Выполнить эквивалентные преобразования формулы

$$F=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \overline{x}_4\vee \overline{x}_1\cdot x_3\vee \overline{x}_2\cdot x_3\vee x_3\cdot x_4.$$

Решение. По закону коммутативности, имеем:

$$F=x_3\cdot x_1\cdot x_2\cdot \overline{x}_4\vee x_3\cdot \overline{x}_1\vee x_3\cdot \overline{x}_2\vee x_3\cdot x_4.$$

По закону дистрибутивности, имеем: $F=x_3\cdot x_1\cdot x_2\cdot \overline{x}_4\vee x_3\cdot \overline{x}_1\vee x_3\cdot(\overline{x}_2\vee x_4)$.

По закону дистрибутивности, имеем: $F=x_3\cdot x_1\cdot x_2\cdot \overline{x}_4\vee x_3\cdot(\overline{x}_1\vee \overline{x}_2\vee x_4)$.

По закону дистрибутивности, имеем: $F=x_3\cdot((x_1\cdot x_2\cdot \overline{x}_4)\vee(\overline{x}_1\vee \overline{x}_2\vee x_4))$.

По закону де Моргана, имеем: $F=x_3\cdot((x_1\cdot x_2\cdot \overline{x}_4)\vee\neg(x_1\cdot x_2\cdot \overline{x}_4))$.

По закону противоречия, имеем: $F=x_3\cdot 1=x_3$.

Таким образом $F=x_3$.

Пример. Выполнить преобразования формулы

$$F=(x_1\cdot \overline{x}_2\vee \overline{x}_1\cdot x_2)\cdot\neg(x_1\cdot x_2)\vee(x_1\cdot x_2)\cdot\neg(x_1\cdot \overline{x}_2\vee \overline{x}_1\cdot x_2).$$

Решение. По закону де Моргана, имеем:

$$F=(x_1\cdot \overline{x}_2\vee \overline{x}_1\cdot x_2)\cdot(\overline{x}_1\vee \overline{x}_2)\vee(x_1\cdot x_2)\cdot(\overline{x}_1\vee x_2)\cdot(x_1\vee \overline{x}_2).$$

По закону дистрибутивности, имеем: $F=x_1\cdot \overline{x}_2\vee \overline{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot x_2$.

По законам коммутативности и дистрибутивности, имеем: $F=\overline{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot(\overline{x}_2\vee x_2)$.

По закону противоречия, имеем: $F=\overline{x}_1\cdot x_2\vee x_1$.

По закону Порецкого, имеем: $F=x_1\vee x_2$.

Таким образом $(x_1\cdot \overline{x}_2\vee \overline{x}_1\cdot x_2)\cdot\neg(x_1\cdot x_2)\vee(x_1\cdot x_2)\cdot\neg(x_1\cdot \overline{x}_2\vee \overline{x}_1\cdot x_2)=(x_2\vee x_1)$.

Пример. Выполнить преобразование формулы

$F=\neg(\overline{x}_1\vee x_2)\vee((\overline{x}_1\vee x_3)\cdot x_2)$.

Решение. По закону де Моргана, имеем: $F=\neg(\overline{x}_1\vee x_2)\cdot\neg((\overline{x}_1\vee x_3)\cdot x_2)$.

По закону де Моргана, имеем: $F = x_1\cdot \overline{x}_2\cdot(\neg(\overline{x}_1\vee x_3)\vee \overline{x}_2)$.

По закону де Моргана, имеем: $F = x_1\cdot \overline{x}_2\cdot(x_1\cdot \overline{x}_3\vee \overline{x}_2)$.

По закону дистрибутивности, имеем: $F=x_1\cdot \overline{x}_2\cdot \overline{x}_3\vee x_1\cdot \overline{x}_2$.

По закону поглощения, имеем: $F = x_1\cdot \overline{x}_2$.

Таким образом $\neg(\overline{x}_1\vee x_2)\cdot((\overline{x}_1\vee x_3)\cdot x_2)= x_1\cdot \overline{x}_2$.

Пример. Выполнить преобразование формулы:

$$F = \neg(x_1 \to x_2) \cdot (\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee (x_1 \downarrow x_2) \cdot \neg(x_3 \cdot x_4).$$

Решение. Преобразовав формулу в базис булевой алгебры, получим:

$$F = \neg(\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee \neg(x_1 \vee x_2) \cdot \neg(x_3 \cdot x_4);$$

Опустив знак “ $\overline{\ \ }$ “ до двоичных переменных, получим:

$$F = (x_1 \cdot \overline{x}_2) \cdot (\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) \cdot (\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4);$$

Преобразовав формулу по закону дистрибутивности, получим:

$$F = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_4.$$

Вынестя за скобку $\overline{x}_2$ по закону дистрибутивности, получим:

$$F = \overline{x}_2 \cdot (x_1 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_4);$$

Преобразовав по закону дистрибутивности, получим:

$$F = \overline{x}_2 \cdot (\overline{x}_3 \cdot (x_1 \vee \overline{x}_1) \vee \overline{x}_4 \cdot (x_1 \vee \overline{x}_1));$$

Использовав закон противоречия, получим:

$$F = \overline{x}_2 \cdot (\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4).$$

Пример. Устройство фиксирует принятие решения комиссией из трёх человек. Каждый член комиссии при одобрении решения нажимает свою кнопку. Если большинство членов комиссии одобряет решение, то решение принимается, что фиксируется устройством.

a) Записать таблицу истинности булевой функции, реализующей это устройство?

b) Записать совершенную дизъюнктивную нормальную форму булевой функции, реализующей это устройство.

c) Записать совершенную конъюнктивную нормальную форму булевой функции, реализующей это устройство.

d) Упростить совершенную дизъюнктивную нормальную форму этой булевой функции.

Решение.

a) Это устройство реализует функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, таблица истинности которой приведена ниже:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

b) Совершенная дизъюнктивная нормальная форма этой булевой функции имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 .$$

c) Совершенная конъюнктивная нормальная форма этой булевой функции имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \wedge x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \wedge x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \wedge \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 .$$

d) Упростим совершенную дизъюнктивную нормальную форму этой булевой функции. Представляя слагаемое $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ в виде

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3,$$

запишем данную функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

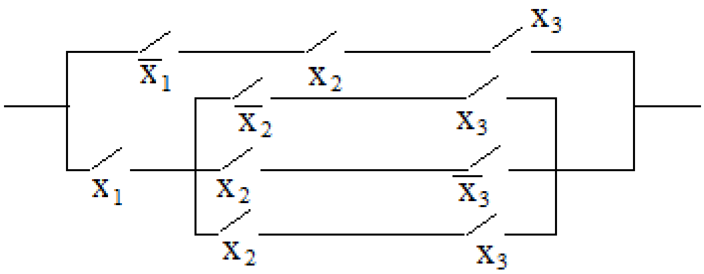
Используя далее свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, получим

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee \\ &\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = \\ &= x_2 \wedge x_3 (\overline{x_1} \vee x_1) \vee x_1 \wedge x_3 (\overline{x_2} \vee x_2) \vee x_1 \wedge x_2 (\overline{x_3} \vee x_3) = x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2. \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2.$$

Пример. Упростить следующую схему из 10 переключателей:



Решение. Устройство с приведённой схемой переключателей описывается следующей булевой функцией

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge (\overline{x_2} \wedge x_3 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_2 \wedge x_3).$$

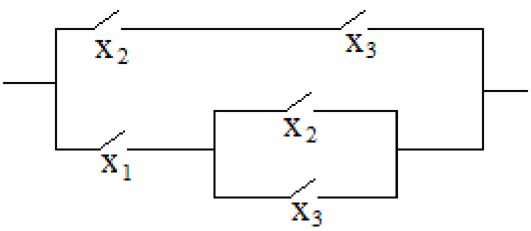
Заметим что точно такая же функция возникала и в предыдущем примере (см. пункт b)). В пункте d) эта функция была приведена упрощённому виду:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2.$$

Воспользовавшись законом дистрибутивности и затем коммутативности для последних двух слагаемых этой формулы, получим

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge (x_2 \vee x_3).$$

Этой упрощённой функции соответствует следующая схема переключателей



Эта схема переключателей является упрощённой схемой для схемы, данной в условии примера. Т. о., для работы цепи вместо 10 переключателей используются 5 переключателей.

Задачи для решения на занятии:

1. Из простых высказываний (*пропозициональных переменных*) записать логическую формулу для высказывания:
   1.1. «в компьютере применяют матричный, струйный, лазерный или литерный принтеры»,
   1.2. «компьютер содержит основной микропроцессор, оперативную память, контроллеры и порты ввода-вывода»,
   1.3. «если по проводнику протекает электрический ток, то вокруг проводника возникает магнитное поле»,
   1.4. «для того, чтобы выполнить загрузку операционной системы в компьютер, необходимо и достаточно установить в компьютер диск с записанной операционной системой».
2. Из простых высказываний записать суждение (*сложную логическую формулу*) для высказывания:
   2.1. «Если инвестиции на текущий год не изменятся, то возрастёт расходная часть бюджета или возникнет безработица, а если возрастёт расходная часть бюджета, то налоги не будут снижены и, наконец, если налоги не будут снижены и инвестиции не изменятся, то безработица не возникнет»;
   2.2. «Если цены высокие (A), то и заработная плата должна быть также высокой (B). Цены высокие или применяется регулирование цен (C). Если применяется регулирование цен, то нет инфляции ($\neg D$). Инфляция есть. Следовательно, заработная плата должна быть высокой»;
   2.3. «Если курс ценных бумаг возрастет (A) или процентная ставка снизится (B), то курс акций упадет (C) или налоги не повысятся (D); курс акций падает тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг и растут налоги; если процентная ставка снизится, то либо курс акций не понизится, либо курс ценных бумаг не возрастет.

Следовательно, если налоги повысить, то не вырастет курс ценных бумаг и вырастет курс акций»;

2.4. «Дан не треугольник ($\neg B$). Известна теорема: если сумма внутренних углов многоугольника равна 180^{o} (A), то многоугольник есть треугольник (B). Следовательно, сумма внутренних углов многоугольника не равна 180^{o}($\neg A$)».

Упростить полученную формулу, если это возможно. Записать для этих суждений таблицы истинности. Что надо сделать, чтобы записанное суждение принимало истинное значение?

3. Доказать что:

3.1. $f(x_1;\ x_2)=(x_1\cdot \bar{x}_2)=\neg(\bar{x}_1\vee x_2)=\neg(x_1\rightarrow x_2)$;

3.2. $f(x_1;\ x_2)=(\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot \bar{x}_2)=\neg(x_1\leftrightarrow x_2)=(x_1\oplus x_2)$;

3.3. $f(x_1;\ x_2)=(\bar{x}_1\cdot \bar{x}_2)=\neg(x_1\vee x_2)=(x_1\downarrow x_2)$;

3.4. $f(x_1;x_2)=(\bar{x}_1\vee \bar{x}_2)=\neg(x_1\cdot x_2)=x_1|x_2$;

3.5. $f(x_1;x_2)=((\bar{x}_1\cdot \bar{x}_2)\vee(x_1\cdot x_2))=(x_1\leftrightarrow x_2)$;

3.6. $f(x_1;x_2)=(\bar{x}_1\vee x_2)=(x_1\rightarrow x_2)$.

4. Выполнить эквивалентные преобразования формул:

4.1. $F=(((F_1\vee(\neg F_2))\rightarrow F_3)\leftrightarrow F_4)$,

4.2. $F=\neg(F_1\rightarrow F_2)\&(\neg F_3\vee\neg F_4)\vee\neg(F_1\vee F_2)\&\neg(F_3\& F_4)$,

4.3. $F=F_1\&(F_2\vee\neg F_2)\vee F_2\&(F_1\vee\neg F_1)$,

4.4. $F=F_1\&(F_1\vee F_2)\ \vee F_2\&(F_1\vee\neg F_2)$.

5. Логические функции заданы таблицей истинности

Аргумент		Функция $y=f_i(x_1, x_2)$															
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

5.1. Записать совершенную дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы для каждой из указанных в таблице функций и для функций:

a) $f=f_1(x_1;x_2)f_4(x_1;x_2))$;

b) $f=f_8(f_1(x_1;x_2);f_4(x_1;x_2))$;

c) $f=f_{12}(f_{11}(f_{12}(x_1;x_2);f_4(x_1;x_2)))$;

d) $f=f_1(f_{11}(f_{12}(x_1;x_2);f_4(x_1;x_2)))$.

5.2. Упростить, если это возможно, полученные в задаче 5.1 функции.

5.3. Нарисовать схему переключателей электрической цепи, соответствующей каждой из полученных в задачах 5.1 и 5.2 функции.

Элементы логики предикатов

Предикат это функция

$$P:\vec{X}(x_1,\ldots,\,x_n)|_{x_i\in M}\rightarrow P=P(x_1,\ldots,\,x_n)\in\{0,1\}$$

Кроме логических операций вводятся:

1. *квантор общности* $\forall$ – любой, *любые, всякий, для любого, для любых, для всех*.
2. *квантор существования* $\exists$ – *существует, найдётся*.

Законы алгебры предикатов

Имя закона	Равносильные формулы $F_i=F_j$
Коммутативности	$\forall x\forall y(F(x;\ y))=\forall y\forall x(F(x;\ y))$; $\exists x\exists y(F(x;\ y))=\exists y\exists x(F(x;\ y))$. Этот закон только для одноименным кванторов.
Дистрибутивности	Только для логической связки “&” формул с кванторами $\forall$ по одной переменной x этот закон имеет вид: $\forall x(F_1(x))\&\forall x(F_2(x))=\forall x(F_1(x)\&F_2(x))$. Только для логической связки “$\vee$” формул с кванторами $\exists$ по одной переменной x этот закон имеет вид: $\exists x(F_1(x))\vee\exists x(F_2(x))=\exists x(F_1(x)\vee F_2(x))$.
Идемпотентности	$\Re x(F(x))\vee\ \Re x(F(x))=\ \Re x(F(x))$; $\Re x(F(x))\&\Re x(F(x))=\ \Re x(F(x))$, для $\Re\in\{\forall;\exists\}$.
Исключенного третьего	$\Re x(F(x))\vee\rceil\Re x(F(x))=$и, для $\Re\in\{\forall;\exists\}$
Противоречия	$\Re x(F(x))\&\rceil\Re x(F(x))=$л, для $\Re\in\{\forall;\exists\}$
де Моргана	$\forall x(\rceil F(x))=\rceil\exists x(F(x))$; $\exists x(\rceil F(x))=\rceil\forall x(F(x))$
Дополнения	$\rceil(\rceil\Re x(F(x)))=\ \Re x(F(x))$, для $\Re\in\{\forall;\exists\}$

Предваренная нормальная форма (ПНФ) формулы

Для удобства анализа сложных формул рекомендуется преобразовывать ее к нормальной форме. Если в алгебре высказываний приняты две нормальные формы ДНФ и КНФ, то в алгебре предикатов - одна *предваренная нормальная форма* (ПНФ), суть которой сводится к разделению формулы на две части: кванторную и бескванторную. Для этого кванторы формулы выносят влево по определенным правилам алгебры предикатов.

В результате таких преобразований может быть получена формула вида: $\Re_{x1}\ \Re_{x2} \ldots \Re_{xn}(M)$, где $\Re \in \{\forall; \exists\}$, а M – *матрица формулы*. Кванторную часть формулы $\Re_{x1}\ \Re_{x2} \ldots \Re_{xn}$ иногда называют *префиксом формулы*.

Затем матрицу формулы преобразуют к виду КНФ для использования принципа резолюции.

<u>Алгоритм приведения формулы к виду ПНФ:</u>

Шаг 1: исключить всюду логические связки $\leftrightarrow$ и $\rightarrow$:

$(F_1 \leftrightarrow F_2) = (F_1 \rightarrow F_2) \& (F_2 \rightarrow F_1) = (\rceil F_1 \vee F_2) \& (\rceil F_2 \vee F_1);$

$(F_1 \rightarrow F_2) = (\rceil F_1 \vee F_2);$

Шаг 2: продвинуть отрицание до элементарной формулы:

$\rceil \forall x(F) = \exists x(\rceil F);$ $\rceil (F_1 \vee F_2) = (\rceil F_1 \& \rceil F_2);$

$\rceil \exists x(F) = \forall x(\rceil F);$ $\rceil (F_1 \& F_2) = (\rceil F_1 \vee \rceil F_2);$

Шаг 3: переименовать связанные переменные:

найти самое левое вхождение предметной переменной – такое, что это вхождение связано некоторым квантором, но существует еще одно вхождение этой же переменной; затем сделать замену связанного вхождения на вхождение новой переменной. Операцию повторять пока возможна замена связанных переменных;

Шаг 4: вынести кванторы влево;

Шаг 5: преобразовать бескванторную матрицу к виду КНФ.

Алгоритм приведения матрицы формулы к виду КНФ приведен в алгебре высказываний.

Сколемовская стандартная форма формулы

Наличие разноименных кванторов усложняет вывод заключения. Для устранения кванторов существования в ПНФ и представления ее в виде $F = \forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_n (M)$ разработан *алгоритм Сколема*, вводящий сколемовскую функцию для связывания предметной переменной квантора существования с предметными переменными кванторов всеобщности.

<u>Алгоритм приведения формулы к виду ССФ:</u>

Шаг 1: представить формулу F в виде ПНФ, т.е.

$\mathbf{F} = \Re x_1 \Re x_2 \ldots \Re x_n (M)$, где $\Re_i \in \{\forall; \exists\}$;

Шаг 2: найти в префиксе самый левый квантор существования:

a) если квантор находится на первом месте префикса, то вместо переменной, связанной квантором существования, подставить всюду предметную постоянную ***a***, отличную от встречающихся постоянных в матрице формулы, а квантор существования удалить;

b) если квантор находится не на первом месте префикса, т.е. $\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_{i-1}, \exists x_i, \ldots$, то выбрать $(i-1)$-местный функциональный символ, отличный от функциональных символов матрицы M и выполнить замену предметной переменной x_i, связанной квантором существования, на функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ и квантор существования удалить.

Шаг 3: найти следующий справа квантор существования и перейти к исполнению шага 2, иначе конец.

Формулу ПНФ, полученную в результате введения сколемовской функции называют *сколемовской стандартной формой формулы (ССФ)*.

Пример. Истинен или ложен предикат $\forall (x,y) \in R^2 \left(x^2 \neq 4y^2\right)$.

Решение. Предикат $\forall (x,y) \in R^2 \left(x^2 \neq 4y^2\right)$ является записью следующего утверждения: «любая точка на плоскости не принадлежит паре пересекающихся прямых $x = \pm 2y$», что, очевидно, не является истинным, т.е. предикат ложен.

Пример. $F=\rceil\exists x_1\forall x_2(P_1(x_1)\to\forall x_3\ (P_2(x_1,\ x_3)\vee P_3(x_2,\ x_3)))$.

Решение. Выполнив отрицание формулы, получим:

$F = \forall x_1\exists x_2(\ P_1(x_1)\ \&\exists x_3(\ \rceil P_2(x_1;\ x_3)\&\rceil P_3(x_2;x_3)\ )\ \ );$

Перенеся квантор $\exists x_3$ влево, получим:

$F = \forall x_1\exists x_2\exists x_3\ (\ P_1(x_1)\&\rceil P_2(x_1;\ x_3)\&\rceil P_3(x_2;x_3)\ ).$

Матрица ПНФ содержит три элементарных дизъюнкта:

$K = \{\ P_1(x_1);\ \rceil P_2(x_1;\ x_3);\ \rceil P_3(x_2;x_3)\ ).$

Пример. Записать сколемовскую стандартную форму (ССФ) формулы

$F = \exists_{x1}\forall_{x2}\forall_{x3}\exists_{x4}\forall_{x5}\exists_{x6}(\ (\ P_1(x_1,\ x_2)\vee\rceil P_2(x_3,\ x_4,\ x_5)\ )\&P_3(x_4,\ x_6)\ ).$

Решение. Заменив предметную переменную x_1 на постоянную a, получим:

$F=\forall x_2\forall x_3\exists x_4\forall x_5\exists x_6\ ((P_1.\ (a,\ x_2)\vee\rceil P_2.(x_3,\ x_4,\ x_5))\&P_3\ (x_4,\ x_6));$

Заменив предметную переменную x_4 на функцию $f_1(x_2, x_3)$, получим:

$F=\forall x_2\forall x_3\forall x_5\exists x_6((P_1.(a,\ x_2)\vee\rceil P_2(x_3,f_1(x_2,x_3),x_5))\&P_3\ (f_1(x_2,\ x_3),\ x_6));$

Заменив предметную переменную x_6 на функцию $f_2(x_2, x_3, x_5)$, получим:

$F = \forall_{x2}\forall_{x3}\forall_{x5}($
$(P_1(a,x_2)\vee\rceil P_2(x_3,f_1(x_2,x_3),x_5))\&P_3(f_1(x_2,x_3),f_2(x_2,x_3,x_5))$
$).$

Множество дизъюнктов матрицы:

$K=\{(P_1(a,\ x_2)\vee\rceil P_2(x_3,\ f_1(x_2,x_3),\ x_5));\ P_3(f_1(x_2,x_3),\ f_2(x_2,x_3,\ x_5))\}.$

Задачи для решения на занятии:

1. Используя логику предикатов, записать высказывание:

1.1. «близким значениям аргумента соответствуют близкие значения функции от этого аргумента»,

1.2. «для любых вещественных x, y верно $x-2y=5$»,

1.3. «точка аффинного пространства лежит на прямой $x-2y=5$»,

1.4. «если $x>0$, то $|x|=x$».

2. Истинны или ложны следующие предикаты:

a) $\forall x\ \left(x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0\right)$,

b) $\forall x\ \exists y\ (x + y = 3)$,

c) $\forall x, y\ (x + y = 3)$,

d) $\exists x\ \forall y\ (x + y = 3)$,

e) $\exists x, y\ (x + y = 3)$

f) a) $\forall x \in [1,4]\ \left(1 - x^2 < y \Leftrightarrow y\right) > 0$,

g) $\exists x, y\ (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$,

h) $\forall x, y\ (x < y) \Leftrightarrow \exists z\ (x < z < y)$,

i) $\forall x, y \in N\ (x < y) \Leftrightarrow \exists z\ (x < z < y)$,

k) $\forall x\ \left(x > 2 \wedge \overline{x > 3}\right) \leftrightarrow 2 < x \leq 3$

3. Записать ПНФ для

a) $F = (\forall_x (P_1(x) \to \forall_y (P_2(y) \to P_3(z)))) \& (\rceil \forall_y (P_4(x;\ y) \to P_5(z)))$.

b) $F = \forall_x (P_1(x) \leftrightarrow \exists_x (P_2(x))) \to \forall_y (P_3(y))$.

Ответ. a) $F = \forall w \forall v \exists y (\rceil P_1(w) \vee \rceil P_2(v) \vee P_3(z)) \& P_4(x;\ y) \& \rceil P_5(z)$.

Матрица ПНФ содержит три элементарных дизъюнкта:

$K = \{(\rceil P_1(w) \vee \rceil P_2(v) \vee P_3(z));\ P_4(x;\ y);\ \rceil P_5(z)\}$.

$F = \exists z \forall w \exists x \forall_y ((P_1(z) \vee P_2(x) \vee P_3(y)) \& (\rceil P_2(w) \vee P_2(x) \vee P_3(y)) \&$

$(\rceil P_2(w) \vee \rceil P_1(z) \vee P_3(y)))$.

Матрица ПНФ содержит три элементарных дизъюнкта:

$$K = \left\{\left(P_1(z) \vee P_2(x) \vee P_3(y)\right);\ \left(\overline{P_2}(w) \vee P_2(x) \vee P_3(y)\right);\ \left(\overline{P_2(w)} \vee \overline{P_1(z)} \vee P_3(y)\right)\right\}$$

4. Записать сколемовскую стандартную форму (ССФ) формулы

a) $F = \exists_z \forall_w \exists_x \forall_y ((P_1 z) \vee P_2(x) \vee P_3(y)) \& (\rceil P_2(w) \vee P_2(x) \vee P_3(y)) \&$
$(\rceil P_2(w) \vee \rceil P_1(z) \vee P_3(y)))$.

b) $F = \exists_z \forall_w \exists_x \forall_y ((P_1 z) \vee P_2(x) \vee P_3(y)) \& (\rceil P_2(w) \vee P_2(x) \vee P_3(y)) \&$
$(\rceil P_2(w) \vee \rceil P_1(z) \vee P_3(y)))$.

Ответ. a) $F = \forall x_2 \forall x_3 \forall x_5 ((P_1(a, x_2) \vee \rceil P_2(x_3, f_1(x_2, x_3), x_5)) \& P_3(f_1(x_2, x_3), f_2(x_2, x_3, x_5)))$.

Множество дизъюнктов матрицы:

$K = \{(P_1(a,\ x_2) \vee \rceil P_2(x_3,\ f_1(x_2,\ x_3),\ x_5));\ P_3(f_1(x_2,\ x_3),\ f_2(x_2,\ x_3,\ x_5))\}$.

b) $F = \forall_w \forall_y ((P_1(a) \vee P_2(f(w)) \vee P_3(y))\ \&\ (\rceil P_2(w) \vee P_2(f(w)) \vee P_3(y))\ \&\ (\rceil P_2(w) \vee \rceil P_1(a) \vee P_3(y)))$.

Графы. Основные понятия

Основные определения и элементы графа		Некоторые классы графов
$G = \{V, r\}$ – *граф,* $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – *вершины графа,* $r = \{r_{ij} = (a_i, a_j)\}_{i, j=\overline{1,n}}$ – *рёбра (дуги) графа.*		*Граф* G называется *ориентированным*, если $\{(a_i, a_j)\}_{i, j=\overline{1,n}}$ – упорядоченные пары.
Вершины, соединённые ребром, называются *смежными*. *Смежные ребра* – рёбра с общей вершиной.		*Мультиграф* – граф, имеющий кратные рёбра.
Степенью вершины графа G называется число рёбер графа, содержащих эту вершину.		Граф, у которого степени всех вершин одинаковы, называется *однородным графом.*
Вершина графа, не принадлежащая ни одному ребру, называется *изолированной*.		Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется *нуль-графом*.
Если вершины соединены несколькими рёбрами, то такие *рёбра называются кратными*. Ребро вида (v, v) называется *петлёй*.		Граф, содержащий все возможные рёбра, называется *полным графом*.
Маршрутом в графе называется последовательность смежных рёбер. *Цепь* – маршрут, у которого все рёбра различны. *Простая (элементарная) цепь* – цепь, у которой все вершины кроме, может быть, первой и последней, различны.		Граф, имеющий петли, называется *псевдографом*.

Цикл – цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают. *Гамильтоновы циклы* – циклы, которые проходят через каждую вершину связного конечного графа только один раз. *Эйлеровы циклы* – циклы, в которых каждое ребро содержится только один раз. Если множество вершин графа разбить на попарно непересекающиеся, непустые подмножества $X=\{X_1', X_2',...X_к'\}$, т. е $X_i'\cap X_j'=\varnothing$ для $i\neq j$ и $X_i\neq\varnothing$, то формируемые с помощью инцидентных X'_i ребер $r'_i\subseteq r$ подграфы $G_1=<X_1';r_1'>$, $G_2=<X_2';r_2'>,\ldots$, $G_к=<X_к';r_к'>$ являются связными, а между собой – несвязными, т. е. $G_i\cap G_j=\varnothing$. Связный подграф G_i называют *компонентой связности*, а их количество - *числом компонент связности* k(G). Наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к графу без циклов и петель, называют *цикломатическим числом* и обозначают λ(G). Цикломатическое число можно определить по формуле $$\lambda(G)=m-n+k(G),$$ где m - число рёбер, n - число вершин, k(G) - число компонент связности графа.	*Граф G связный*, если любая пара его вершин соединяется цепью. *Дерево* – связный граф без циклов. Если в дереве n вершин, то рёбер в нём будет $n-1$. *Лес* – несвязный граф без циклов (т.е. граф, состоящий из деревьев, несвязанных между собой). *Эйлеров граф* – связный неориентированный мультиграф, для которого существует цикл, содержащий все рёбра. Граф называют *плоским* или *планарным*, если он может быть изображён на плоскости так, что рёбра или дуги графа не пересекаются. *Граф* $G=\{V, r\}$ называют *двудольным*, если его множество вершин может быть разбито на два непересекаю-

Длина маршрута равна числу смежных рёбер, соединяющих вершины x_i и x_j, т.е. $l(i, j)=\Sigma r_{k,l}$, где $k \neq l$ и $i \leq k,l \leq j$. Если ребро или дуга обладают дополнительной характеристикой – *протяжённостью* – $l(k, t)$, то *длина маршрута* равна сумме длин рёбер или дуг, его составляющих, т.е. $l(i, j)=\Sigma l(k, t)$, где $k \neq t$ и $i \leq k,t \leq j$. Длину минимального маршрута, соединяющего вершины x_i и x_j называют *расстоянием*. Если ребро или дуга обладают дополнительной характеристикой - пропускной способностью – $C(k, t)$, то *пропускная способность маршрута* равна минимальной пропускной способности ребра или дуги маршрута. Последовательность смежных вершин, соединяющая вершины x_i и x_j, называют *переходом* и обозначают $v(i, j) = (x_i, \ldots, x_j)$. *Вершинной связность* графа G=<X; r> называют наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу. *Реберной связностью* графа G=<X; r> называют наименьшее число ребер, удале-	щихся подмножества X’ и X\X’ так, что каждое ребро графа G соединяет две вершины из разных подмножеств. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют четную длину. *Граф* $G = \{V, r\}$ называют *взвешенным*, если его рёбра или вершины имеют дополнительные характеристики.

ние которых приводит к несвязному графу.

Если множество вершин графа G=<X; r> разбить на два подмножества X' и X\X' при условии, что $X' \cup (X \setminus X') = X$ и $X' \cap (X \setminus X') = \varnothing$, то множество рёбер или дуг, одни из концевых вершин которых принадлежат множеству X', а другие - множеству (X\X'), называют *разрезом*. Поиск разрезов сводится выделению множества рёбер, соединяющих эти подмножества.

Способы задания и описания графов

Граф может быть задан или описан:

1. диаграммой.
2. *списком отношений* - применяется в тех случаях, когда необходимо хранить информацию о весе ребра (протяжённость, загрузка, пропускная способность линии связи и т.п.) и поиска инцидентных вершин.
3. *списком смежности* - применяется в тех случаях, когда необходимо хранить информацию о весе вершины (время исполнения оператора, надёжность контактной площадки или загруженность узла и т.п.) и поиска смежных вершин.
4. *для неориентированного* графа *матрицей смежности* (δ_{ij}), в которой δ_{ij} равно числу рёбер, содержащих a_i и a_j.
5. *для ориентированного* графа *матрицей смежности* (δ_{ij}), в которой δ_{ij} равно числу рёбер, выходящих из a_i и входящих в a_j.
6. *для неориентированного* графа *матрицей инциндентности* (q_{ij}), в которой

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если}\ \ \mathrm{r_{ij}}\ \textit{инциндентно}\ \mathrm{x_j} \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

В каждой строке матрицы количество единиц равно двум, а в каждом столбце – степени вершины σ_i.

7. *для ориентированного* графа *матрицей инциндентности* (q_{ij}), в которой

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если}\ \ \mathrm{r_{ij}}\ \textit{исходит из вершины}\ \mathrm{x_i} \\ 0, & \textit{если}\ \mathrm{r_{ij}}\ \textit{неинциндентна} \\ & \textit{вершинам}\ \mathrm{x_i}\ \textit{и}\ x_{\mathrm{j}} \\ -1, & \textit{если}\ \ \mathrm{r_{ij}}\ \textit{заходит в вершину}\ \mathrm{x_i} \end{cases}$$

8. *Матрицей весов вершинно-взвешенного графа, т.е.,* матрицей-столбцом, число строк которой равно числу вершин n, а позициями – значение веса вершины: $\mathrm{P}(\mathrm{G}) = \begin{Vmatrix} \mathrm{p1} \\ \mathrm{p2} \\ \cdots \\ \mathrm{pn} \end{Vmatrix}$.

Матрицей весов реберно-взвешенного графа, т.е., квадратной матрицей, элементы которой определяются соотношением:

$$L(i, j) = \begin{cases} 0, \text{ если } i=j; \\ l_{i,j}, \text{ если вершина } \mathrm{x_i} \text{ смежна вершине } x_j \text{ и вес ребра } l_{i,j}; \\ \infty, \text{ если вершина } x_i \text{ несмежна вершине } x_j. \end{cases}$$

10. *Матрицей достижимости*. Пусть $h(x_i)$ – множество вершин, которые смежны вершине $\mathrm{x_i}$ (т.е., “окрестность” вершины $\mathrm{x_i}$) или достижимы из x_i за “один шаг”. Тогда отображение $h(h(x_i))=h^2(x_i)$ есть вершины графа, достижимые из $\mathrm{x_i}$ за “два шага” через вершины, сформированные на “первом шаге”. Отображение $h(h(h(x_i)))=h^3(x_i)$ есть вершины, достижимые из вершины x_i за ”три шага” через вершины, сформированные на втором шаге. Так как любая вершина связного графа должна быть достижима за $p \le n$ “шагов”, то множество вершин достижимых из вершины x_i за это число “шагов” может быть представлено в виде:

$$q^p(x_i) = I \cup h(x_i) \cup h^2(x_i) \cup \ldots \cup h^p(x_i),$$

где I –диагональ матрицы.

Для построения матрицы достижимости удобно использовать матрицу смежности, т.е.

$$||q^p|| = I \cup ||r|| \cup ||r^2|| \cup ||r^3|| \cup .. \cup ||r^p||.$$

Для возведения в степень матрицы смежности используют *правило умножения булевых матриц*:

$$r_{i,j}^2 = {}_{k=1}\vee^n (r_{i,k} \cdot r_{k,j}),$$

$$r_{i,j}^3 = {}_{k=1}\vee^n (r_{i,k} \cdot r_{k,j}^2)$$

и так далее.

Для поиска числа компонент связности к(G) используют механизм вычисления матриц достижимости.

Замечание. При задании ориентированного графа с петлями рекомендуется расщеплять вершину с петлей на две вершины: вершину-исток и вершину-сток.

В каждом столбце матрицы инцидентности число “+1” равно *полустепени исхода* вершины x_i, т.е. σ_i^+, а число “-1” равно *полустепени захода* вершины x_i, т.е. σ_i^-.

Основные виды подмножеств графа

Граф $G' = <X'; r'>$ называют *подграфом* графа $G = <X; r>$, если он опирается на подмножество вершин исходного графа, т.е. $X' \subseteq X$, и инцидентных им рёбер.

Граф $G'=<X'; r'>$ называют *частичным* для графа G=<X; r>, если он использует подмножество рёбер исходного графа, т.е. $r' \subseteq r$, и инцидентные им вершины.

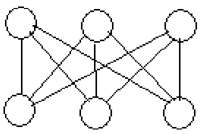
Граф $G' = <X; r'>$ называют *суграфом* для графа $G = <X; r>$, если он использует подмножество рёбер исходного графа, т.е. $r' \subseteq r$, и все вершины исходного графа.

Суграф $G' = <X'; r'>$, формируемый без циклов, петель и кратных рёбер, называют *остовом* графа $G = <X; r>$.

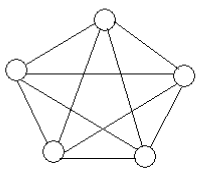
Раскраска вершин графа		**Раскраска дуг графа**
Наименьшее число $\gamma(G)$, при котором никакие две смежные вершины графа не могут быть окрашены в один цвет, называют *хроматическим числом* графа. Хроматическое число полного n-вершинного графа равно n, пустого графа - 1, графа с циклом чётной длины - 2, графа с циклом нечётной длины - 3, графа типа дерево - 2. Чаще может быть рекомендована оценка числа красок по формуле: $\gamma(G) \le max_i\{\delta_i+1\}$.		Раскраской рёбер графа $G=\{V, r\}$ называется разбиение сигнатуры r графа $r=\bigcup_i U_i$, $U_{i_\alpha} \cap U_{i_\beta} = \varnothing$, $\alpha \neq \beta$, при котором каждое подмножество U_i не содержит ни одной пары смежных рёбер. Каждому подмножеству сопоставляется краска, при этом *рёбра*, принадлежащие одному и тому же подмножеству, называются *соцветными*. *Граф* $G=\{V, r\}$ называется *рёберно* k-*раскрашиваемым*, если его рёбра можно раскрасить k красками так, чтобы никакие смежные рёбра не были окрашены одним цветом. *Хроматическим классом (хроматическим индексом)* графа называется число k такое, что граф является рёберно k-раскрашиваемым, но его рёбра не могут быть раскрашены в $k-1$ ветов. Хроматический класс графа G обозначается $H(G)$.

Критерии планарности графов. Толщина графа

Теорема (Понтрягина)*. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного одному из графов:*



(1)



(2)

Теорема. *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к* (1) или (2).

Толщиной $t(G)$ *графа* G называется наименьшее число планарных графов, объединение которых даёт граф G.

$$t(G) \geq 1 + \left] \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i - 2}{6(n-2)} \right[,$$

где] [– целая часть, s_i – степень i-й вершины.

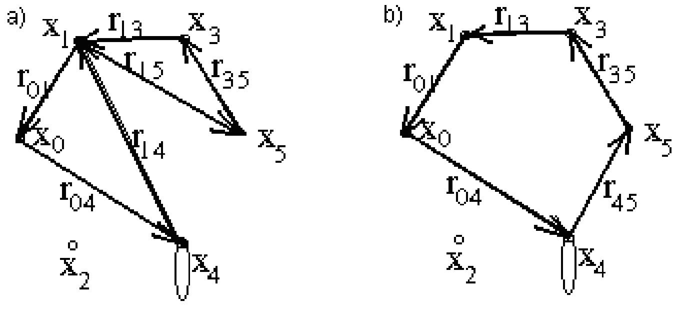
Основные области применения графов

Вершинами графа могут быть операторы программы и команды операционной системы, контактные площадки на плате компьютера и узлы компьютерной сети, события в любой сфере человеческой деятельности, а рёбрами – связи операторов программы, команд операционной системы, контактных площадок на плате компьютера, узлов в компьютерной сети, связи событий в любой сфере человеческой деятельности.

Ориентированные деревья интенсивно используют при организации данных в компьютере, при синтаксическом анализе программ компиляторами, при формировании каталогов и организации маршрутов.

Плоские графы используют при проектировании печатных плат, сетей телекоммуникации и т.п.

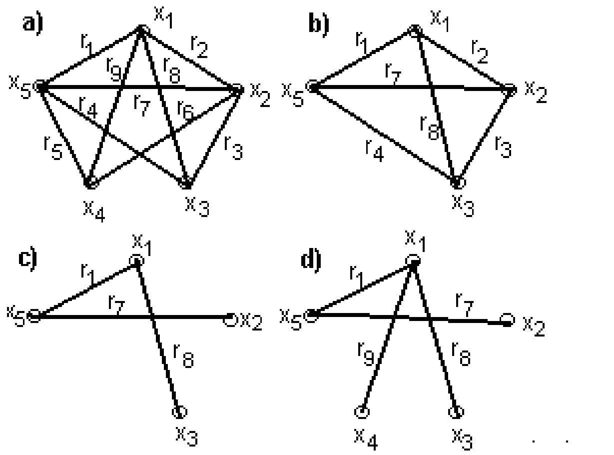
Пример. Рассмотрим графы



Эйлеров а) и гамильтонов b) пути

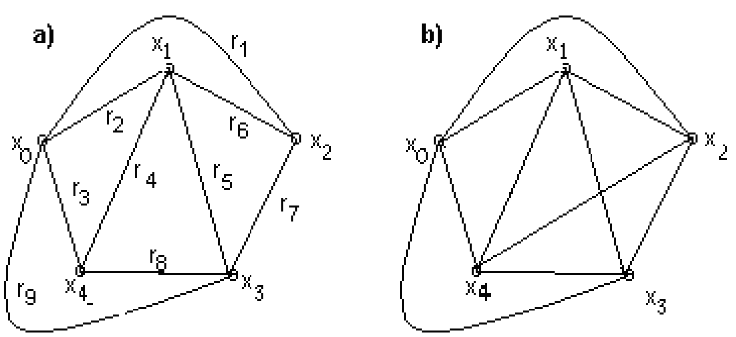
Здесь, например, расстояние между вершинами x_0 и x_5 графа b) равно 2.

Пример. На приведённом ниже рисунке приведен граф а) и его суграф d). Суграф задан подмножеством рёбер графа $r'=\{r_1, r_7, r_8, r_9\}\subseteq r$ и множеством вершин исходного графа $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}\subseteq X$.



Подграф b), частичный c), суграф d) графа а)

Пример. На следующем рисунке

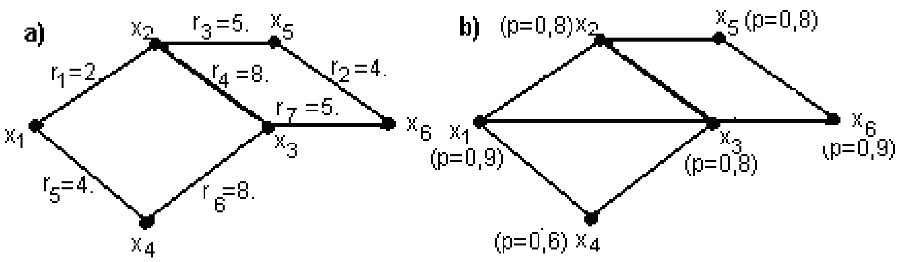


Планарный а) и непланарный b) графы

приведены для сравнения планарный и непланарный графы. У непланарного графа ребро (x_1, x_3) при любой деформации будет пересекать ребро (x_2, x_4) или (x_0, x_2), а ребро (x_2, x_4) – пересекать ребро (x_1, x_3) или (x_0, x_3).

Пример. На приведённом ниже рисунке a) приведен реберно-взвешенный граф. Дополнительными характеристиками каждого ребра могут быть объем передаваемой информации или стоимость ее передачи, протяжённость или пропускная способность ребра. Каждому ребру графа приписана условная характеристика – вес.

На рис. b) приведен вершинно-взвешенный граф. Дополнительными характеристиками каждой вершины могут быть время исполнения команды или оператора программы, вероятность наступления события или надёжность эксплуатации узла и т.п. Каждой вершине графа приписана условная характеристика – вес.



Реберно-взвешенный a) и вершинно-взвешенный b) графы

В первой из приведенных ниже таблиц записаны характеристики графа a), а во второй – для графа b) по модели G=<X; r>.

a)

r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
(x_i, x_j)	(x_1,x_2)	(x_5,x_6)	(x_2,x_5)	(x_2,x_3)	(x_1,x_4)	(x_3,x_4)	(x_3,x_6)
$l(r_i)$	2	4	5	8	4	8	5

b)

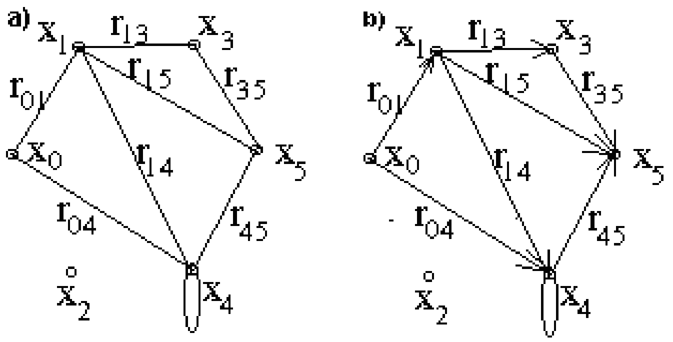
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$h(x_i)$	x_2, x_3, x_4	x_1, x_3, x_5	x_1, x_4, x_6	x_1, x_3	x_2, x_6	x_3, x_5
$p(x_i)$	0,9	0,8	0,8	0,6	0,8	0,9

В следующей таблице записана матрица весов для графа а).

а)

L	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	2	$\propto$	4	$\propto$	$\propto$
x_2	2	0	8	$\propto$	5	$\propto$
x_3	$\propto$	8	0	8	$\propto$	5
x_4	4	$\propto$	8	0	$\propto$	$\propto$
x_5	$\propto$	5	$\propto$	$\propto$	0	4
x_6	$\propto$	$\propto$	5	$\propto$	4	0

Пример. Даны графы:



Неориентированный а) и ориентированный b) графы

В первой таблице приведена матрица инцидентности для неориентированного графа а), а во второй – матрица инцидентности для ориентированного графа b).

а)

q	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
r_{01}	1	1	0	0	0	0
r_{04}	1	0	0	0	1	0
r_{13}	0	1	0	1	0	0
r_{14}	0	1	0	0	1	0
r_{15}	0	1	0	0	0	1
r_{35}	0	0	0	1	0	1
r_{44}	0	0	0	0	± 1	0
r_{45}	0	0	0	0	1	1
σ	2	4	0	2	6	3

b)

q	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
r_{01}	+1	-1	0	0	0	0
r_{04}	+1	0	0	0	-1	0
r_{13}	0	+1	0	-1	0	0
r_{14}	0	+1	0	0	-1	0
r_{15}	0	+1	0	0	0	-1
r_{35}	0	0	0	+1	0	-1
r_{44}	0	0	0	0	1	0
r_{45}	0	0	0	0	+1	-1
σ^+	2	3	0	1	1	0
σ^-	0	1	0	1	2	3

В первой из приведённых ниже таблиц записана матрица смежности для неориентированного графа а), а в следующей таблице – матрица смежности для ориентированного графа b), но при условии, что строки заданы вершинами-истоками, а столбцы - вершинами-стоками.

a)							
r	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	σ_i
x_0	0	1	0	0	1	0	2
x_1	1	0	0	1	1	1	4
x_2	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	0	0	1	2
x_4	1	1	0	0	1	1	4
x_5	0	1	0	1	1	0	3
σ_i	2	4	0	2	4	3	

b)							
r	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	σ_i^+
x_0	0	1	0	0	1	0	3
x_1	0	0	0	1	1	1	3
x_2	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	1	1
x_4	0	0	0	0	1	1	2
x_5	0	0	0	0	0	0	0
σ_i^-	0	1	0	0	2	3	

Пример. В таблице r дана матрица смежности неориентированного графа. Определить достижимость каждой вершины графа.

Окрестностью вершины x_1 является $\{x_2, x_4\}$, $x_2 – \{x_1, x_3\}$, $x_3 – \{x_2, x_4\}$, $x_4 – \{x_1, x_3\}$.

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	1	0

q	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	1
x_2	1	1	1	0
x_3	0	1	1	1
x_4	1	0	1	1

r^2	x_1	x_2	x_3	x_4
$_1$	1	0	1	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	0	1	0	1

q^2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1

Ответ: любая вершина графа достижима не более, чем за “два шага”.

Пример. Дана матрица смежности ориентированного графа. Определить достижимость каждой вершины графа.

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1
x_4	1	0	0	0

q	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	1
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	1
x_4	1	0	0	1

r^2	x_1	x_2	x_3	x_4
$_1$	1	0	1	0
x_2	0	0	0	1
x_3	1	0	0	0
x_4	0	1	0	1

q^2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	0	1	1	1
x_3	1	0	1	1
x_4	1	1	0	1

r^3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	0	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	1	0

q^3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1

Ответ: любая вершина графа достижима не более, чем за “три шага”.

Пример. Определить хроматическое число графа, заданного матрицей смежности

r	x	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	0	1
x_2	1	0	1	1	1
x_3	0	1	0	1	1
x_4	0	1	1	0	1
x_5	1	1	1	1	0

Проверим число красок по трем основаниям:

1) граф содержит циклы четной и нечетной длины, т. е. число красок должно быть $\gamma(G) \geq 3$;

2) наибольшая степень вершин x_2 и x_5 равна 4, т. е. Число красок должно быть $\gamma(G) < 5$;

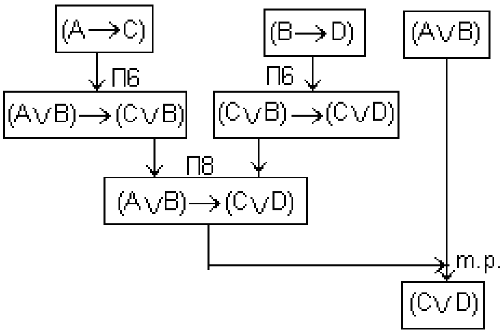
3) плотность графа $\rho(G)=4$ (см. таблицу ниже), т. е. полный подграф содержит четыре вершины. Следовательно, число красок должно быть $\gamma(G)=4$.

q	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1
x_2	1	1	1	1	1
x_3	0	1	1	1	1
x_4	0	1	1	1	1
x_5	1	1	1	1	1

Пример. Доказать с помощью графа *дедуктивного вывода*

$$\dashv (A\vee B;\ A\Rightarrow C,\ B\Rightarrow D)\Rightarrow C\vee D.$$

Решение. Соответствующий граф имеет вид

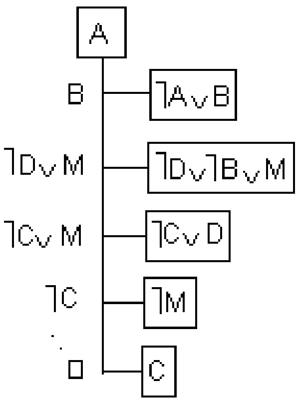


Пример. Доказать методом от противного с помощью графа истинность заключении

$$\dashv\Big(\big((A\Rightarrow B)\wedge(C\Rightarrow D),\ \ D\wedge B\Rightarrow M,\ \ \overline{M}\big)\Rightarrow(\overline{A}\vee\overline{C})\Big)$$

Доказательство. Для доказательства этой формулы применим метод доказательства «от противного», т.е. предположим, что условие последнего заключения выполняется (имеет место), а вывод неверен. Т.о., в нашем случае мы имеем $\big((A\Rightarrow B)\wedge(C\Rightarrow D),\ D\wedge B\Rightarrow M,\ \overline{M}\big)$ и $\overline{(\overline{A}\vee\overline{C})}$, т.е. имеем одновременно следующее множество дизъюнктов:

$(A\Rightarrow B)=\overline{A}\vee B$, $(C\Rightarrow D)=\overline{C}\vee D$, $((D\wedge B)\Rightarrow M)=\overline{(D\wedge B)}\vee M=\overline{D}\vee B\vee M$, $\overline{M}$ и $\overline{(\overline{A}\vee\overline{C})}=A\wedge C$, которое записываем в качестве исходных вершин графа как показано на рисунке



Около вертикальной линии на стыках ставим резольвенты, т.е. то, что следует при выполнении соединённых посылок. Из графа видим, что пришли к противоречию, т.е. к ложному высказыванию $\overline{C} \wedge C$. Значит наше предположение было неверно. Поэтому верно

$$\dashv\left(\left(\left(A \Rightarrow B\right) \wedge \left(C \Rightarrow D\right),\ \ D \wedge B \Rightarrow M,\ \ \ \overline{M}\right) \Rightarrow \left(\overline{A} \vee \overline{C}\right)\right).$$

Задачи для решения на занятии:

1. Граф $G = \{V, R\}$ задан матрицей смежности

1.1.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	0	0	1	1
x_2	1	0	1	1	1	1
x_3	0	1	0	1	1	1
x_4	0	1	1	0	1	0
x_5	1	1	1	1	0	0
x_6	1	1	1	0	0	0

1.2.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	2	0	0	1	1
x_2	2	0	1	1	1	1
x_3	0	1	0	1	1	1
x_4	0	1	1	0	1	0
x_5	1	1	1	1	0	0
x_6	1	1	1	0	0	0

1.3.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	1
x_2	1	0	1	1	1
x_3	1	1	0	1	0
x_4	0	1	1	0	1
x_5	1	1	0	1	1

1.4.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	1	0	0	0	1
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	1	1	0

1.7.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	1	1
x_2	1	0	1	1	1
x_3	1	1	0	1	1
x_4	1	1	1	0	1
x_5	1	1	1	1	0

1.8.

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	2	1	1
x_2	1	0	2	0
x_3	1	0	0	1
x_4	2	0	0	0

1.9.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	1	1	0
x_2	1	0	1	1	1	1
x_3	1	1	0	1	1	0
x_4	1	1	1	0	1	1
x_5	1	1	1	1	0	1
x_6	0	1	0	1	1	0

1.10.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	1	1	1
x_2	1	0	1	1	1	1
x_3	1	1	0	1	1	1
x_4	1	1	1	0	1	1
x_5	1	1	1	1	0	1
x_6	1	1	1	1	1	0

1.5.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	1	0	1	1
x_2	0	0	1	0	1	1
x_3	1	1	0	1	0	0
x_4	0	0	1	0	1	1
x_5	1	1	0	1	0	0
x_6	1	1	0	1	0	0

1.6.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
x_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
x_9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

1.11.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	2	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0
x_3	0	1	0	2	2
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	2	1	0

1.12.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	1	1
x_2	1	0	0	1	0
x_3	1	1	0	0	0
x_4	2	0	1	0	0
x_5	0	0	0	1	0

a) Изобразить граф $G=\{V,R\}$ диаграммой, списком отношений и списком смежности.

b) Записать матрицу инцидентности графа $G=\{V,R\}$.

c) Записать матрицу достижимости графа $G=\{V,R\}$.

d) Длина маршрута, соединяющего *вершины* x_2 и x_4 равна ____.

e) Граф $G=\{V,R\}$ является

☐ ориентированным

☐ неориентированным

☐ мультиграфом

☐ однородным

☐ неоднородным

☐ нуль-графом

☐ полным графом

☐ псевдографом

☐ связным

☐ деревом

☐ лесом

☐ Эйлеровым

☐ плоским

☐ двудольным

☐ взвешенным

f) Вершины x_2 и x_4 в графе $G=\{V,R\}$ являются

○да ○нет	смежными
○да ○нет	изолированными
○да ○нет	взвешенными

g) в графе $G=\{V,R\}$ имеются

○да ○нет	Гамильтоновы циклы
○да ○нет	Эйлеровы циклы
○да ○нет	циклов нет

h) Число компонент связности k(G) графа $G=\{V,R\}$ равно ___.

i) Вершинная связность графа $G=\{V,R\}$ равна ___.

j) Рёберная связность графа $G=\{V,R\}$ равна ___.

k) Цикломатическое число графа $G=\{V,R\}$ равно ____.

l) Хроматическое число графа $G=\{V,R\}$ равно ____.

m) Минимальная правильная раскраска вершин графа $G=\{V,R\}$ имеет __ цвета.

n) Минимальная правильная раскраска рёбер графа $G=\{V,R\}$ имеет ____ цвета.

o) Толщина графа $G=\{V,R\}$ равна ____.

p) Граф, заданный списком смежности

Вершины X	x_2	x_3	x_4	x_5
$h(X)$ – смежные к вершинам из первой строки	x_3, x_4	x_4	x_2	x_2, x_4

является:

○да ○нет	подграфом графа $G=\{V,R\}$
○да ○нет	частичным для графа $G=\{V,R\}$
○да ○нет	суграфом для графа $G=\{V,R\}$
○да ○нет	остовом графа $G=\{V,R\}$
○да ○нет	нет на все перечисленные выше подпункты

2. Реберно-взвешенный граф задан списком отношений:

r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
(x_i; xj)	(x_1; x_3)	(x_2; x_4)	(x_2; x_5)	(x_3; x_4)	(x_3; x_5)	(x_4; x_5)
l_i	4	8	6	10	2	5

a) нарисуйте граф;

b) укажите разрез для $X'=\{x_1, x_2, x_4\}$ и $X\backslash X'=\{x_3, x_5, x_6\}$;

c) нарисуйте частичный граф на рёбрах $\{r_2, r_4, r_6\}$;

d) нарисуйте суграф на рёбрах $\{r_1, r_3, r_5, r_7\}$;

e) нарисуйте подграф на вершинах x_2, x_4, x_5, x_6;

f) составьте матрицу инцидентности и матрицу смежности.

g) составьте матрицу весов.

3. Граф задан списком отображений:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
h_{x_i}	x_2	x_1, x_4	x_4	x_2, x_3, x_5, x_6	x_4	x_4

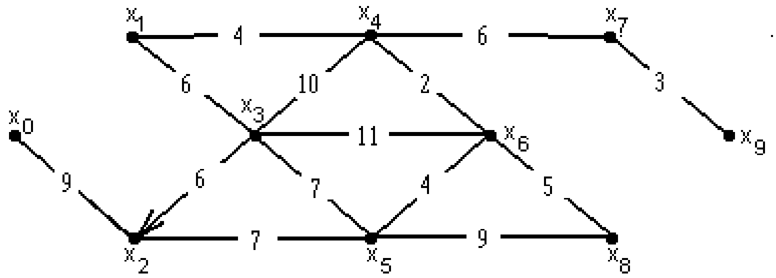
a) нарисуйте граф;

b) укажите маршрут и переход из вершины x_3 в вершину x_6;

c) укажите разрез для $X'=\{x_1, x_2, x_4\}$ и $X\backslash X'=\{x_3, x_5, x_6\}$;

d) составьте матрицу инцидентности и матрицу смежности.

e) найти число компонент связности графа.



4*. Найти кратчайшие пути между любой парой вершин графа

5. Доказать с помощью графа дедуктивного вывода

5.1. $\dashv\left((A\Rightarrow B)\wedge\ (C\Rightarrow D), B\wedge D\Rightarrow E, \overline{E}\right)\Rightarrow\left(\overline{C}\vee\overline{A}\right).$

5.2. $\dashv\left(\ ((A\vee B)\Rightarrow C,\quad C\Rightarrow(D\vee M)),\quad M\Rightarrow N,\quad \overline{D}\wedge\overline{N}\right)\Rightarrow\overline{A}$

Операции над графами

Рассмотрим графы $G_1 = \{X_1, r_1\}$, $G_2 = \{X_2, r_2\}$, $G = \{X, r\}$.

1. *Дополнительный граф* $\overline{G} = \{V, \overline{r}\}$.

$$\overline{r}(i,j) = \begin{cases} 1, & r(i,j) = 0 \\ 0, & r(i,j) = 1. \end{cases}$$

$\overline{r}(i,j)$ матрица смежности графа $\overline{G}$.

2. *Объединение графов.*

Граф $G = G_1 \cup G_2$, для которого $X = X_1 \cup X_2$ и $r = r_1 \cup r_2$ есть объединение графов G_1 и G_2. Матрицы смежности всех графов должны иметь число строк и столбцов $|X| = |X_1 \cup X_2|$. Значение смежности вычисляют по формуле:

$$r(i,j) = r_1(i,j) \vee r_2(i,j).$$

3. *Пересечение графов.*

Граф $G = G_1 \cap G_2$, для которого $X = X_1 \cap X_2$ и $r = r_1 \cap r_2$ есть пересечение графов G_1 и G_2. Матрицы смежности всех графов должны иметь число строк и столбцов $|X| = |X_1 \cup X_2|$. Значение смежности вычисляют по формуле:

$$r(i,j) = r_1(i,j) \cdot r_2(i,j).$$

4. *Композиция графов.*

Граф $G = G_1 \bullet G_2$, для которого $X \subset X_1 \cup X_2$, а дуга $r_{ij} \in r$ существует тогда и только тогда, когда есть хотя бы одна вершина x_k, принадлежащая графам G_1 и G_2, что обеспечивает маршрут через вершину x_k, с началом в $x_{i_1} \in X_1$ и концом в $x_{j_2} \in X_2$. Значение смежности вычисляют по формуле:

$$r(i,j) = \bigvee_{k=1}^{n} r_1(i,k) \cdot r_2(k,j)$$

5. Сумма (соединение) графов.

Граф $G = G_1 + G_2$ представляет собой объединение графов G_1, G_2 и двудольного полного графа, построенного на носителях $X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$ и $X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$. Каждая вершина $x \in X_1$, не вошедшая в пересечение $X_1 \cap X_2$, соединяется со всеми вершинами X_2, не вошедшими в пересечение $X_1 \cap X_2$, и наоборот.

$$X = X_1 \cup X_2, \quad r = r_1 \cup r \cup \left\{ (x_1, x_2) \middle| \; x_1 \in \left(X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)\right), \; x_2 \in \left(X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)\right) \right\}.$$

6. Прямое произведение графов.

$G = G_1 * G_2$ есть граф, множество вершин которого $X = \left\{ (x_{i_1}, x_{j_2}) \right\} \subseteq (X_1 \otimes X_2)$, а множество рёбер $r = \left\{ (x_{i_1}, x_{j_2}) \right\}$ существует тогда и только тогда, когда в графах G_1 и G_2 есть соответственно рёбра $(x_{i_1}, x_{t_1}) \in r_1$ и $(x_{j_2}, x_{s_2}) \in r_2$.

Для поиска смежных вершин графа G удобно использовать списки отображений вершин графов G_1 и G_2 и составить списки отображений для $(x_{i_1}, x_{j_2}) \in X \otimes Y$. Элементы списка смежных вершин графа G следует определять по правилу:

$$h\,(x_{i_1}, x_{j_2}) = \left\{ h\,(x_{i_1}),\; h\,(x_{i_2}) \right\}.$$

Хроматическое число $\gamma(G)$ графа G удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\gamma(G) \le \gamma(G_a) \cdot \gamma(G_b), \qquad G = G_a \cup G_b$$

$$\gamma(G) = \gamma(G_a) + \gamma(G_b), \qquad \begin{cases} G = G_a + G_b, \\ G_a \cap G_b = 0 \end{cases}$$

$$\gamma(G) \le \min\left(\gamma(G_a),\; \gamma(G_b) \right), \qquad G = G_a \times G_b$$

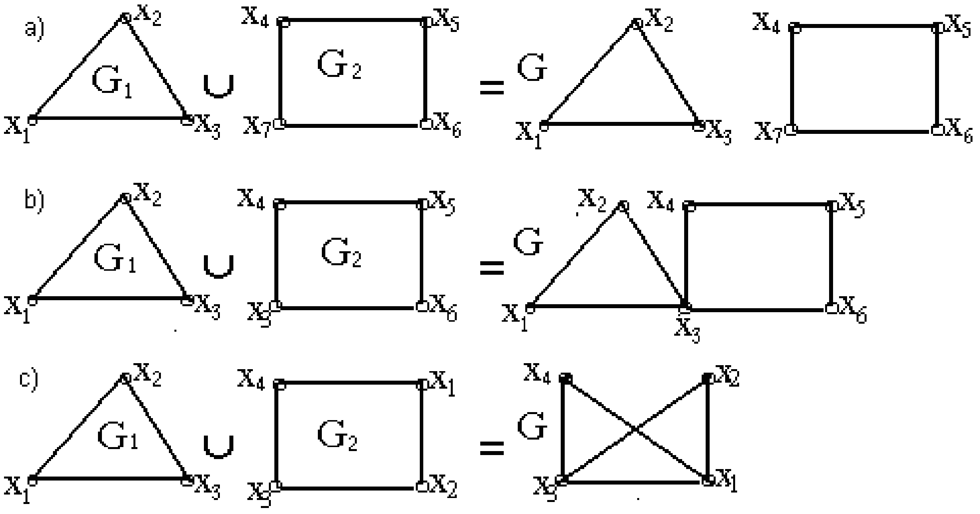
Отображения графов

Изоморфизм есть взаимно однозначное отображение объектов произвольной природы, выражающее тождество их строения.

Необходимыми условиями изоморфизма графов являются равенство числа вершин и рёбер, одинаковость числа петель и наборов степеней вершин Достаточным условием является существование перенумерации вершин одного из графов, при которой матрицы смежности станут одинаковыми.

Два графа гомеоморфны, если они изоморфны с точностью до вершин степени 2, т.е., они преобразуются до графов, изоморфных друг другу, заменой некоторых рёбер цепями соответствующей длины.

Пример.



Объединение графов G_1 и G_2

Ниже вычисляется матрица смежности объединения графов G_1 и G_2 по рис. 18с).

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	0
x_2	1	0	1	0
x_3	1	1	0	0
x_4	0	0	0	0

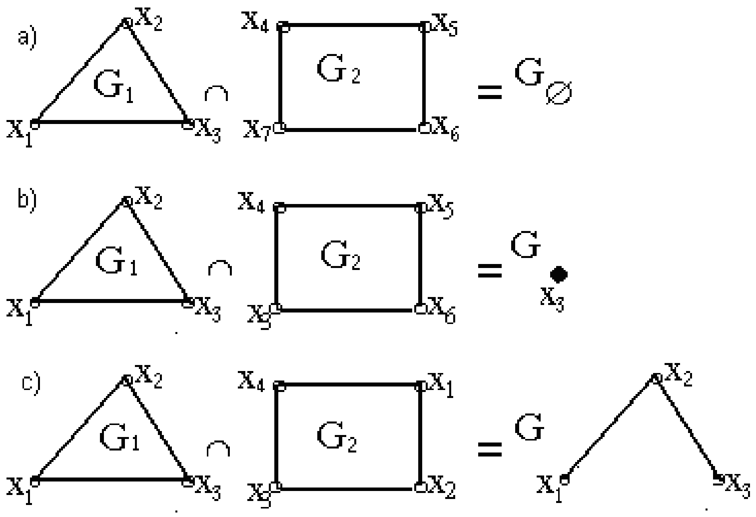
$\cup$

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	1	0

=

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	0	1	0
x_3	1	1	0	1
x_4	1	0	1	0

Пример.



Пересечение графов G_1 и G_2

Ниже вычисляется матрица смежности пересечения графов G_1 и G_2 по рис. c).

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	0
x_2	1	0	1	0
x_3	1	1	0	0
x_4	0	0	0	0

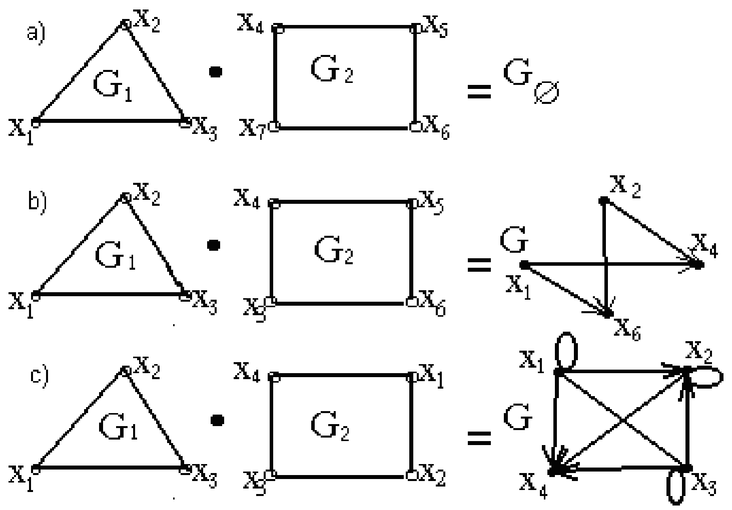
$\cap$

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1
x_4	1	0	1	0

$=$

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	0
x_2	1	0	1	0
x_3	0	1	0	0
x_4	0	0	0	0

Пример.

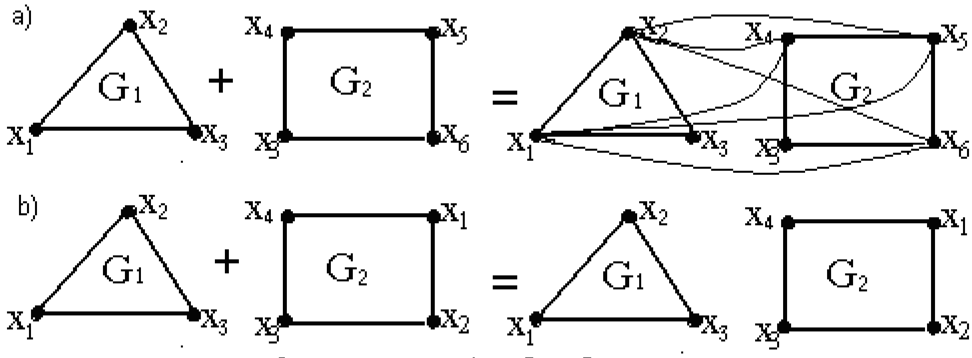


Композиция графов G_1 и G_2

Ниже вычисляется матрица смежности для композиции графов G_1 и G_2 по рис. c).

$$
\begin{array}{c|cccc}
r_1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\bullet
\begin{array}{c|cccc}
r_2 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
x_4 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
=
\begin{array}{c|cccc}
r & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
x_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

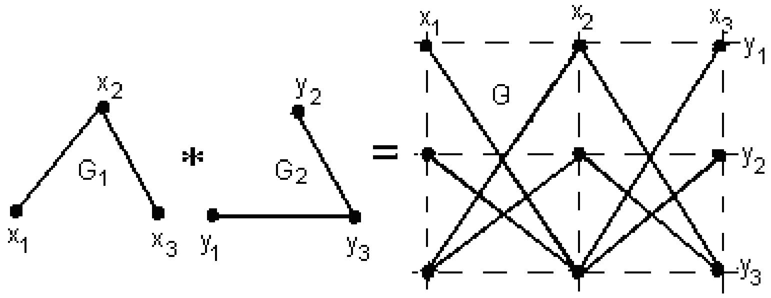
Пример.



Соединение графов G_1 и G_2

На рис. a) $X_1 \cap X_2 = x_3$. Следовательно, ребра двудольного графа соединяют только вершины x_1 и x_2 графа G_1 с вершинами x_4, x_5, x_6 графа G_2. На рис. b) $X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$. Следовательно, $X_1 \backslash (X_1 \cap X_2) = \varnothing$, а $X_2 \backslash (X_1 \cap X_2) = x_4$. Следовательно, множество ребер двудольного графа $(x^{(1)}, x^{(2)}) = \varnothing$.

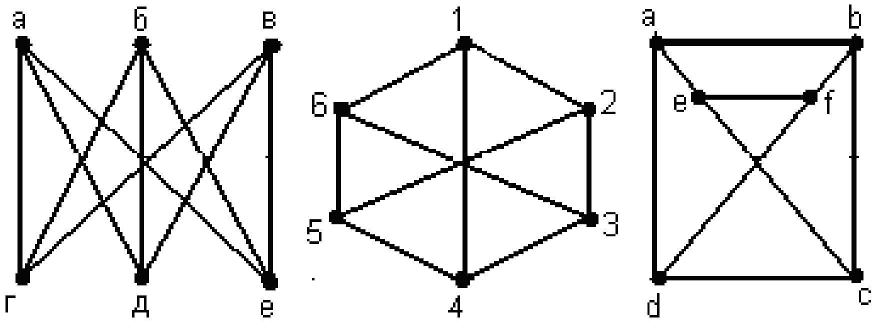
Пример. Ниже составлены списки отображений и показан процесс вычисления прямого произведения для графов



Прямое произведение графов G_1 и G_2

x_i	$h(x_i)$		y_j	$h(y_j)$		(x_i, y_j)	$h(x_i, y_j)$
x_1	x_2		y_1	y_3		(x_1, y_1)	(x_2, y_3)
x_2	x_1, x_3	*	y_2	y_3	=	(x_1, y_2)	(x_2, y_3)
x_3	x_2		y_3	y_1, y_2		(x_1, y_3)	$(x_2, y_1), (x_2, y_2)$
						(x_2, y_1)	$(x_1, y_3), (x_3, y_3)$
						(x_2, y_2)	$(x_1, y_3), (x_3, y_3)$
						(x_2, y_3)	$(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)$
						(x_3, y_1)	(x_2, y_3)
						(x_3, y_2)	(x_2, y_3)
						(x_3, y_3)	$(x_2, y_1), (x_2, y_2)$

Пример. На приведённом ниже рисунке даны три графа. Изоморфны ли они?



Представленные ниже матрицы смежности этих трех графов полностью совпадают в результате исполнения операции перестановки строк и столбцов, имеют одинаковое число вершин и одинаковые степени вершин.

r_1	а	б	в	г	д	е
а	0	0	0	1	1	1
б	0	0	0	1	1	1
в	0	0	0	1	1	1
г	1	1	1	0	0	0
д	1	1	1	0	0	0
е	1	1	1	0	0	0
σ	3	3	3	3	3	3

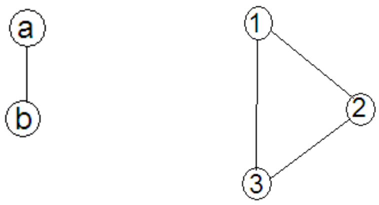
r_2	1	3	5	2	4	6
1	0	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	1	1	1
2	1	1	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0
σ	3	3	3	3	3	3

r_3	a	c	f	b	d	e
a	0	0	0	1	1	1
c	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1
b	1	1	1	0	0	0
d	1	1	1	0	0	0
e	1	1	1	0	0	0
σ	3	3	3	3	3	3

Поэтому представленные графы изоморфны.

Задачи для решения на занятии:

1. Даны графы



Найти объединение, пересечение, сумму и прямое произведение графов.

2. Графы $G = \{V, R\}$ заданы матрицами смежности (из задачи 1 предыдущего пункта):

2.1.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	0	0	1	1
x_2	1	0	1	1	1	1
x_3	0	1	0	1	1	1
x_4	0	1	1	0	1	0
x_5	1	1	1	1	0	0
x_6	1	1	1	0	0	0

2.2.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	2	0	0	1	1
x_2	2	0	1	1	1	1
x_3	0	1	0	1	1	1
x_4	0	1	1	0	1	0
x_5	1	1	1	1	0	0
x_6	1	1	1	0	0	0

2.3.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	1
x_2	1	0	1	1	1
x_3	1	1	0	1	0
x_4	0	1	1	0	1
x_5	1	1	0	1	1

2.4.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	1	0	0	0	1
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	1	1	0

2.5.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	1	0	1	1
x_2	0	0	1	0	1	1
x_3	1	1	0	1	0	0
x_4	0	0	1	0	1	1
x_5	1	1	0	1	0	0
x_6	1	1	0	1	0	0

2.7.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	1	1
x_2	1	0	1	1	1
x_3	1	1	0	1	1
x_4	1	1	1	0	1
x_5	1	1	1	1	0

2.8.

r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	2	1	1
x_2	1	0	2	0
x_3	1	0	0	1
x_4	2	0	0	0

2.9.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	1	1	0
x_2	1	0	1	1	1	1
x_3	1	1	0	1	1	0
x_4	1	1	1	0	1	1
x_5	1	1	1	1	0	1
x_6	0	1	0	1	1	0

2.10.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	1	1	1
x_2	1	0	1	1	1	1
x_3	1	1	0	1	1	1
x_4	1	1	1	0	1	1
x_5	1	1	1	1	0	1
x_6	1	1	1	1	1	0

2.11.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	2	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0
x_3	0	1	0	2	2
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	2	1	0

2.6.

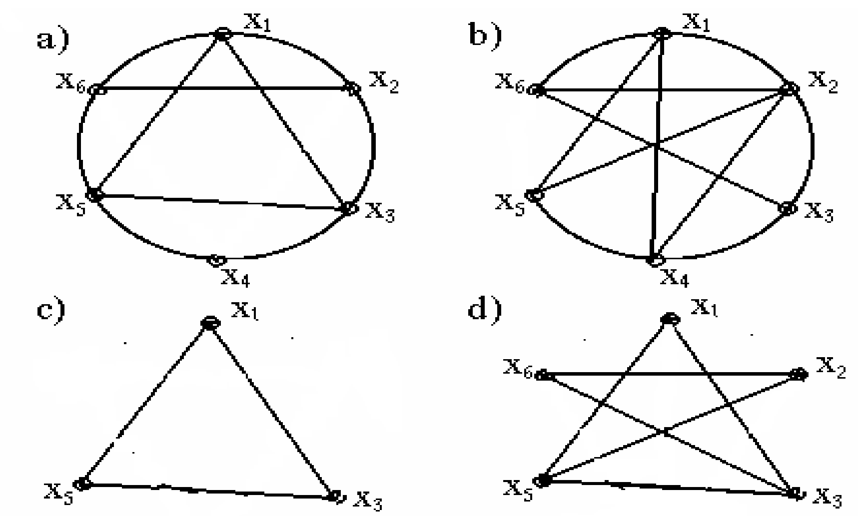
r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
x_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
x_9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

2.12.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	1	1
x_2	1	0	0	1	0
x_3	1	1	0	0	0
x_4	2	0	1	0	0
x_5	0	0	0	1	0

Для всевозможных пар графов, из приведённых выше графов, найти: объединение, пересечение, композицию, соединение графов, прямое произведение.

3. Для каждого из четырёх графов



найти дополнение. Для всевозможных пар графов, из приведённых выше четырёх графов, найти: объединение, пересечение, композицию, соединение графов, прямое произведение.

Сетевые графы и их параметры

В основе методов сетевого планирования и управления (СПУ) лежит графическое представление проекта (комплекса работ для достижения поставленной цели) в виде сетевого графа. На сетевых графах работы обычно изображают ориентированными дугами (стрелками), а события – вершинами. Рядом со стрелкой указывают числовые характеристики: время выполнения работы, расход ресурса, количество исполнителей, стоимость работы и т.д. Также принято считать работами и те процессы, которые не требуют ни затрат времени, ни ресурсов. Это так называемые зависимости (*фиктивные работы*). Они показывают, что одна работа не может совершаться раньше другой. На сетевых графах фиктивные работы обычно изображают пунктирными линиями. Событие обозначает факт окончания всех работ в него входящих или начала работ из него выходящих. На сетевом графике события изображаются геометрическими фигурами (круги, квадраты) с указанием номера или шифра события.

Сетью (сетевым графиком) называется ориентированный граф $G=(X,r)$, в котором $X=X^{+}\cup X^{-}$, где X^{+} – множество вершин графа $G=(X,r)$, из которых дуги только выходят, X^{-} – множество вершин графа $G=(X,r)$, в которые дуги только входят.

Требования, которым должен удовлетворять сетевой график:

1. не должно быть тупиков, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа (за исключением завершающего события),
2. не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа,
3. нельзя допускать, чтобы два смежных события были связаны двумя или большим количеством работ, что чаще всего бывает при изображении параллельно выполняемых работ. Чтобы избежать этого, рекомендуется ввести дополнительное событие и связать его с последующим зависимо-

стью (фиктивной работой,

4. не должно быть замкнутых циклов, т.е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими,
5. если какие-либо работы могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей им работы, то последняя изображается как ряд последовательно выполняемых работ, каждая из которых завершается определённым событием,
6. если для выполнения одной из работ необходимо получение результатов всех работ, входящих в предшествующее для неё событие, адля другой работы достаточно получить результат только одной или нескольких из этих работ, то должно быть дополнительно введено новое событие, отражающее результаты только этих последних работ, а также фиктивная работа, связывающая новое событие с прежним.

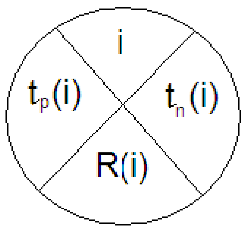
Правило упорядочения вершин графа (метод вычёркивания дуг)

1. Исходную вершину (в которую не входит ни одна дуга) отнесём к рангу 0 и присвоим ей номер 1.
2. Вычеркнем все дуги, выходящие из вершины 1 и отнесём вершины, оказавшиеся без входящих дуг, к первому рангу. Этим вершинам присвоим в произвольном порядке номера $2, 3, \ldots, k_1$.
3. Вычеркнув все дуги, выходящие из вершины предыдущего ранга i, отнесём вершины, оказавшиеся без входящих дуг, к следующему $(i+1)$-му рангу. Присвоим им номера $k_i+1, \ldots, k_{i+1}$. Этот шаг повторяем до тех пор пока все вершины не будут пронумерованы.

Расчёт временных параметров сетевого графика **(в случае, когда работы характеризуется временем выполнения)**	
Длина самого длинного пути, соединяющего 1-е (начальное) событие с j-тым событием	$t_{\text{длинн}}(\mathrm{j}) = \max\limits_{r_{ij} \in M} \left\{ t_{\text{длинн}}(i) + t_{ij} \right\}, \quad j = \overline{2, n}$, где $r_{ij} = (i, j)$ – рёбра, соединяющие i-ю

(вершиной графа)	вершину с j-й вершиной; M – множество всех рёбер, ведущих к j-й вершине из вершин, ранг которых на 1 меньше, чем ранг j-й вершины; t_{ij} – время выполнения работы (i, j).
Длина самого короткого пути, приводящего от j-й вершины к последней	$t_{\text{кор}}(\text{j}) = \min\limits_{r_{ij} \in M} \{t_{\text{кор}}(i) - t_{ji}\}, \quad j = \overline{n-1,1}$, где N – множество всех рёбер, выходящих из j-й вершины и ведущих к вершинам, ранг которых на 1 больше ранга j-й вершины.
Ранний срок свершения события a_{j} (т.е., самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы)	$t_{\text{р}}(\text{j}) = t_{\text{длинн}}(\text{j}), \quad j = \overline{2,n}$ Считаем $t_p(1) = 0.$
Поздний срок свершения события a_{j} (т.е., самый поздний момент времени, после которого остаётся ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием.	$t_{\text{п}}(\text{j}) = t_{\text{кор}}(\text{j}), \quad j = \overline{2,n}$ Считаем $t_{\text{п}}(\text{n}) = t_{\text{р}}(n).$
Резерв времени события a_{j}	$R(j) = t_{\text{п}}(\text{j}) - t_{\text{р}}(\text{j}), \quad j = \overline{1,n}$
Интервал свободы события a_{j}	$[t_{\text{р}}(\text{j}),\ t_{\text{п}}(\text{j})], \quad j = \overline{1,n}$

Замечание. При расчёте временных параметров вручную (если количество событий невелико) удобно проводить вычисления непосредственно на графе, воспользовавшись четырёхсекторной схемой. В этом случае каждый кружок, обозначающий событие, делят на 4 сектора, в каждом из которых записывается соответствующая информация.



Ранний срок начала работы (i, j)	$t_{\text{рн}}(\text{i, j}) = t_p(\text{i})$
Ранний срок окончания работы (i, j)	$t_{\text{ро}}(\text{i, j}) = t_p(\text{i}) + t_{ij}$
Поздний срок окончания работы (i, j)	$t_{\text{по}}(\text{i, j}) = t_{\text{п}}(\text{j})$
Поздний срок начала работы (i, j)	$\boldsymbol{t_{\text{пн}}(\text{i, j}) = t_{\text{п}}(\text{j}) - t_{ij}}$
Срок выполнения работы (i, j)	$\left[t_{\text{рн}}(\text{i, j}),\ t_{\text{по}}(\text{i, j})\right],\quad i = \overline{1, n-1},\quad j = \overline{2, n}$
Полный резерв времени работы (i, j), т.е., максимально возможный запас времени, на который можно отсрочить начало этой работы или увеличить продолжительность её выполнения при условии, что событие a_{j} наступит не позднее своего последнего срока.	$R_{\text{п}}(\text{i}, j) = t_{\text{п}}(\text{j}) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij},$ $i = \overline{1, n-1},\quad j = \overline{2, n}$
Свободный резерв времени, т.е., запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что a_{i} и a_{j} наступят в свои ранние сроки.	$R_{\text{св}}(\text{i}, j) = t_{\text{р}}(\text{j}) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij},$ $i = \overline{1, n-1},\quad j = \overline{2, n}$
Независимый резерв времени, т.е., запас времени, которым можно располагать при выполнении работы (i, j) при условии, что a_{i} наступит в свой поздний срок, а a_{j} – в свой ранний срок.	$R_{\text{незав}}(\text{i}, j) = \max\left\{0,\ t_{\text{р}}(\text{j}) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}\right\},$ $i = \overline{1, n-1},\quad j = \overline{2, n}$

Замечание. $R_{св}(\mathrm{i}, j)$ присущ только данной работе (i, j) и его использование никак не повлияет на выполнение последующих работ. Только отдельные работы обладают $R_{св}(\mathrm{i}, j)$. Использование $R_{незав}(\mathrm{i}, j)$ на работе (i, j) не влияет на ранние и поздние сроки свершения всех событий и работ сети. Его нельзя передать ни предшествующим, ни последующим работам, он присущ только данной работе.

Максимальный поток через сеть равен минимальной пропускной способности её разреза.

Разрезом в сети называется разрез графа, соответствующего этой сети, разбивающий его на две компоненты связности (ими являются X^+ и X^-).

Критический путь - максимальный по продолжительности полный путь. В сетевом графике может быть несколько критических путей.

Подкритический путь - полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий.

Замечание. В описанных методах анализа сетей предполагалось, что время выполнения работ точно известно, однако на практике сроки выполнения работ обычно довольно неопределенны. В таких случаях обычно используют экспертные оценки минимальной (a), максимальной (b) и наиболее вероятной длительности (m) работ для расчета их ожидаемой продолжительности. Тогда ожидаемая продолжительность работы определяется по формуле

$$t_o = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

Пример. Необходимо спроектировать, изготовить и сдать в эксплуатацию некоторый электрический прибор согласно полученному техническому заданию (ТЗ). Известно, что для этого необходимо выполнить работы, приведённые в таблице:

N	Содержание работы	Предшествующие работы	Ожидаемый срок выполнения работы (дней)
A	Разработка технических условий на прибор	-	5
B	Общая компоновка прибора	A	5
C	Разработка и выдача ТЗ на составление рабочей документации по эксплуатации прибора	A	3
D	Разработка технологии изготовления электрической части прибора	B	8
E	Разработка технологии изготовления механической части прибора	B	6
F	Оформление и размещение заказов на покупные элементы, необходимые для сборки прибора	B	10
G	Изготовление электрической части прибора	D	25
H	Изготовление механической части прибора	E	18
I	Выполнение заказов на покупные элементы	F	15
J	Передача информации о характеристиках прибора для разработки рабочей документации по эксплуатации прибора	G,H,I	0
K	Сборка прибора	G,H,I	12
L	Разработка рабочей документации по эксплуатации прибора	J, C	12
M	Контрольные испытания прибора	L,K	10

- Построить сетевой график выполнения проекта и рассчитать его параметры.
- Каково минимальное время выполнения проекта?
- На сколько дней можно отложить выполнение работы:

  a) D

  b) F

  без отсрочки завершения проекта в целом.
- На сколько дней можно увеличить продолжительность выполнения работы

  a) D

  b) F

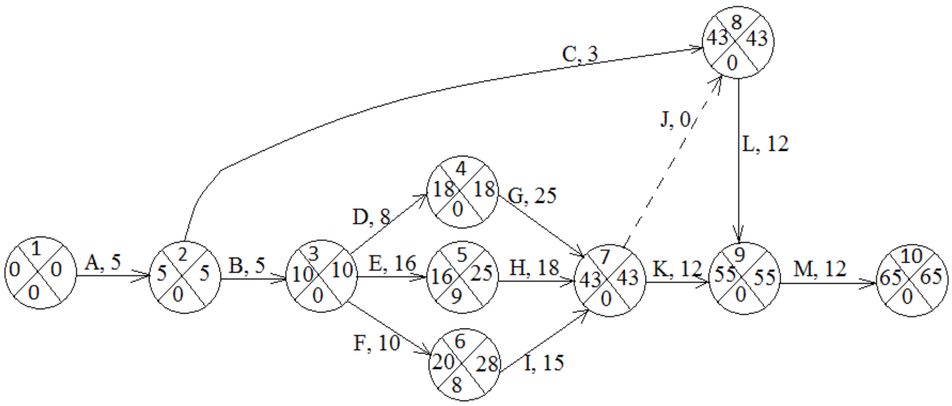
  без отсрочки завершения проекта в целом.
- На сколько дней изменится срок выполнения проекта, если срок выполнения работы F увеличить на

  a) 3 дня?

  b) 9 дней?

Решение.

- Сетевой график проекта с нанесёнными на нём нумерацией вершин, ранних и поздних сроков свершений событий, а также резервом времени событий приведён ниже.



На основе вычисленных и указанных на приведённом выше сетевом графе ранних и поздних сроков событий можно определить временные параметры работ сети.

При составлении таблицы, для записи временных параметров работ, обычно коды работ записывают в определенном порядке. Сначала записываются все работы, выходящие из исходного, первого, события, затем - выходящие из второго события, потом - из третьего и т.д.

N	Код работы	$t(i,j)$	$T_{рн}(i,j)$	$T_{ро}(i,j)$	$T_{пн}(i,j)$	$T_{по}(i,j)$	$R_{п}(i,j)$	$R_{c}(i,j)$	$R_{незав}(i,j)$
A	1,2	5	0	5	0	5	0	0	0
B	2,3	5	5	10	5	10	0	0	0
C	2, 8	3	5	8	52	43	35	35	35
D	3,4	8	10	18	10	18	0	0	0
E	3,5	6	10	16	19	25	9	0	0
F	3,6	10	10	20	18	28	8	0	0
G	4,7	25	18	43	18	43	0	0	0
H	5,7	18	16	34	25	43	9	9	0
I	6,7	15	20	35	28	43	8	8	0
J	7,8	0	43	43	55	43	0	0	0
K	7,9	12	43	55	43	55	0	0	0
L	8,9	12	43	55	43	55	0	0	0
M	9,10	10	55	65	55	65	0	0	0

- Видим, что в данном проекте через события, имеющие нулевой резерв времени, проходят три пути:

  1) 1,2,8,9,10;

  2) 1,2,3,4,7,8,9,10;

  3) 1,2,3,4,7,9,10.

Непосредственное суммирование длительностей работ этих путей показывает, что путь 1) не является критическим. Критическими являются пути 2) и 3). Длина критического пути равна 65. Поэтому проект будет минимальное время выполнения проекта 65 дней при указанном выше распределении сроков выполнения работ.

- Из столбца для $R_n(i,j)$ последней таблицы видим, что без отсрочки завершения проекта в целом отложить выполнение работы:

a) D нельзя, т.к. для неё $R_n(3,4) = 0$,

b) F можно максимум на 8 дней, т.к. для неё $R_n(3,6) = 8$.

- Из столбца для $R_n(i, j)$ последней таблицы видим так же, что без отсрочки завершения проекта в целом увеличить продолжительность выполнения работы:

  a) D нельзя, т.к. для неё $R_n(3,4) = 0$,

  b) F можно максимум на 8 дней, т.к. для неё $R_n(3,6) = 8$.

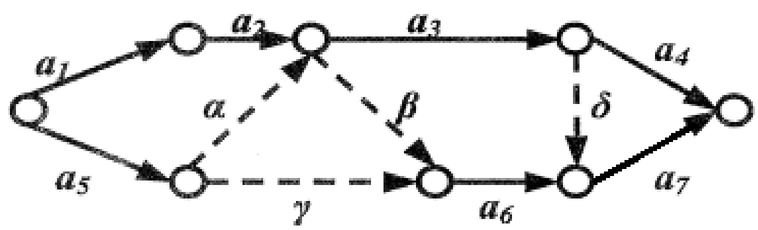
- Если срок выполнения работы F увеличить на:

  a) 3 дня, то срок выполнения проекта не изменится, т.к. для неё $R_n(3,6) = 8$.

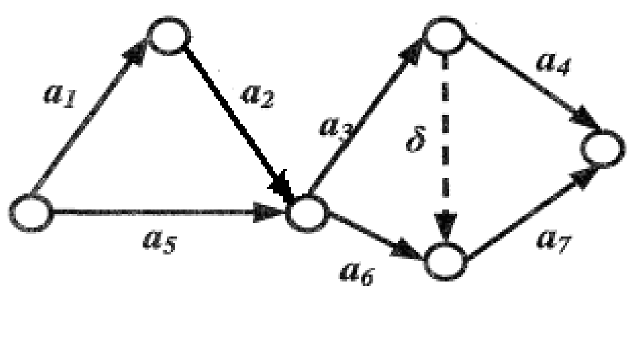
  b) 9 дней, то срок выполнения проекта увеличится на 1 день, т.к. для неё $R_n(3,6) = 8$.

Пример. На приведённом ниже рисунке изображены сеть *G* и упрощенная сеть G_1. При упрощении выброшены дуги α, β, γ. Последовательность выполнения работ при этом не изменилась. Дугу δ выбросить нельзя, так как после этого дуги a_4 и a_7 — будут неразличимы.

G:



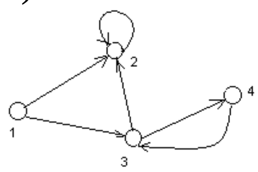
G₁:



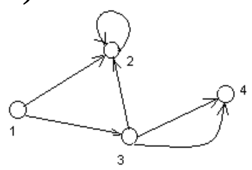
Задачи для решения на занятии:

1. Какие из приведённых ниже графов являются сетевыми графиками.

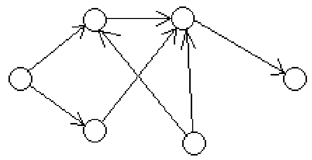
a)



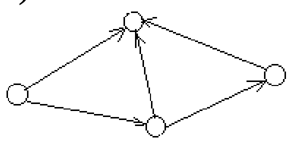
c)



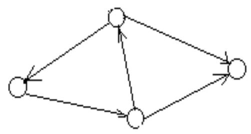
e)



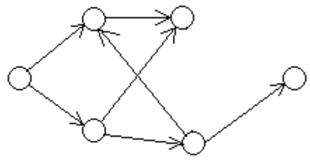
b)



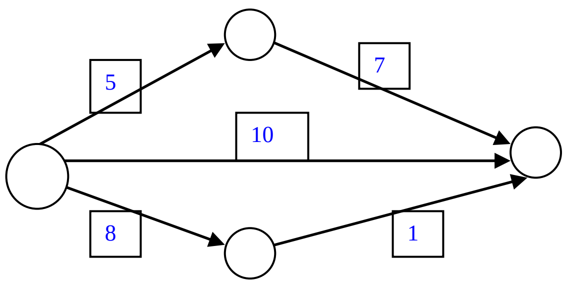
d)



f)



2. Пронумеровать вершины и рассчитать параметры сетевого графика, изображённого на рисунке



3. Проект строительства нового каркасного дома включает в себя работы, указанные в таблице.

Наименование работы	Предшествующие ей работы	Продолжительность выполнения работы (дней)
a_1 – очистка строительного участка	–	2
a_2 – завоз оборудования	–	3
a_3 – земляные работы	a_1	2
a_4 – заливка фундамента	a_3	3
a_5 – наружные водопроводно-канализационные работы	a_3, a_4	7

a_6 – возведение каркаса дома	a_4	15
a_7 – прокладка электропроводки	a_6	5
a_8 – создание перекрытий	a_7	3
a_9 – создание каркаса крыши	a_6	3
a_{10} –внутренние водопроводно-канализационные работы	a_5, a_8	7
a_{11} – покрытие крыши	a_9	4
a_{12} – наружные изоляционные работы	a_6, a_{10}	3
a_{13} – вставка окон и наружных дверей	a_6	5
a_{14} –обкладка дома кирпичом	a_{12}, a_{13}	20
a_{15} – штукатурка стен и потолков	a_7, a_{10}	6
a_{16} – облицовка стен и потолков	a_{15}	5
a_{17} – изоляция крыши	a_9, a_{16}	3
a_{18} – ландшафтные работы	a_{14}, a_{16}	5

- Построить сетевой график выполнения проекта и рассчитать его параметры.
- Каково минимальное время выполнения проекта?
- На сколько дней можно отложить выполнение работы:

  a) a_3

  b) a_{12}

  без отсрочки завершения проекта в целом.
- На сколько дней можно увеличить продолжительность выполнения работы

  a) a_3

  b) a_{12}

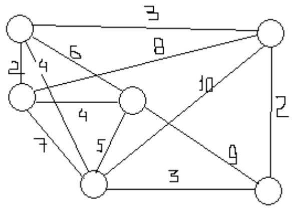
  без отсрочки завершения проекта в целом.
- На сколько дней изменится срок выполнения проекта, если срок выполнения работы a_{12} увеличить на

a) 3 дня?

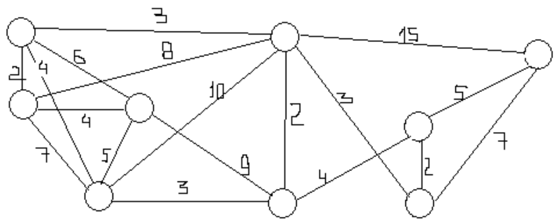
b) 9 дней?

4*. Автодорожная компания проектирует сеть дорог с твёрдым покрытием, соединяющую населённые пункты, являющимися вершинами приведённого ниже графа.

4.1.



4.2



Необходимо построить транспортную сеть с минимальными затратами.

5*. В компьютерный класс завезли 5 компьютеров, которые требуется связать локальной сетью. Известны расстояния между компьютерами. Требуется связать компьютеры таким образом, чтобы общая длина кабеля была бы наименьшей.

N \ N	1	2	3	4	5
1	-	4	5	7	1
2	4	-	3	8	6
3	5	3	-	4	1
4	7	8	4	-	2
5	1	6	1	2	-

Языки и грамматики. Машина Тьюринга. Алгоритмы и автоматы

$A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ – *алфавит.*

a_i – *символы* (буквы, цифры, знаки операций). *Слова* – конечные последовательности символов.

$Я_0$ – множество слов, на длину которых не наложены никакие ограничения.

$Я \subset Я_0$ – язык в алфавите A.

G – *грамматика языка* $Я$ (совокупность правил, с помощью которых в алфавите A порождаются новые слова из языка $Я$, и только они).

Два языка называются *эквивалентными*, если множества слов, из которых они состоят, совпадают.

Две грамматики G_1 и G_2 над языком $Я$ называются *эквивалентными*, если языки, ими порождаемые, эквивалентны.

Рассмотрим *базисные подстановки* $\alpha_i \to \beta_i$, где α_i, β_i – формулы или слова, в том числе и пустые в алфавите A.

Каждую подстановку $\alpha_i \to \beta_i$ будем понимать как *правило вывода*. Часто системы подстановок называют *полусистемами Туэ*.

Грамматика леволинейная с конечным числом состояний, если правила порождения слов из алфавита $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ задаются следующим образом:

1) существует конечное число состояний (называемых *нетерминальными* символами) $\{S_0, S_1, \ldots, S_r\}$;

2) $S_0 \to (m_0, S_j)$, $\quad j=\overline{1,r}$;

3) $S_j \to (a_i, S_q)$, где $j=\overline{1,r}$, $i=\overline{1,n}$, $q=\overline{0,r}$;

где m_0 – специальный знак пробела между словами, $S_0 \to (m_0, S_j)$ означает переход из состояния S_0 в состояние S_j при считывании входного символа m_0, $S_j \to (a_i, S_q)$ означает переход из состояния S_j в состояние S_q при считывании входного символа a_i.

Язык, порождаемый грамматикой с конечным числом состояний, называется *языком с конечным числом состояний*. Структуру таких языков удобно изображать в виде графа, вершины которого сопоставлены состояниям S_j, а дуги – парам (a_i, S_q).

Машина Тьюринга

Вдоль бесконечной (в обе или в одну сторону) ленты, разделённой на клетки, перемещается управляющая головка (УГ). Заданы внешний алфавит $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, внутренний алфавит (алфавит состояний) $S = \{S_0, S_1, \ldots, S_r\}$ и алфавит перемещений $D = \{\text{н, л, п}\}$. Все клетки ленты заполнены символами из A, по одному символу в каждой клетке. Предполагается, что вся бесконечная лента всегда заполнена символами m_0, за исключением тех клеток, где записаны какие-либо другие символы из A.

УГ может находиться в состояниях из $S = \{S_0, S_1, \ldots, S_r\}$. Состояние S_0 означает, что машина не производит никакой работы (выключена). Предполагается, что в конце работы машина всегда переходит в состояние S_0. В процессе работы машины УГ может перемещаться в дискретные такты времени вдоль ленты. Перемещение происходит либо на одну клетку вправо (п), либо на одну клетку влево (л). Перемещение УГ в данный такт работы может отсутствовать (н).

В каждый такт работы УГ совершает действия, записанные в виде:

$$(a_i, S_j) \to (a_k, S_p, d_l),$$

это означает, что, находясь в состоянии S_j и считывая из клетки символ a_i, УГ записывает в данную клетку ленты символ a_k, переходит в состояние S_p и совершает движение, определяемое символом d_l. Причём считаем, что в выключенном состоянии машина не работает, т.е., $(a_i, S_0) \to (a_i, S_0, \text{н})$.

Работу машины Тьюринга можно задать *с помощью графа*, вершины которого взаимно однозначно соответствуют состояниям этого устройства, дуги – переходам из одного состояния в другое, при этом каждая дуга (S_i, S_p) взвешена парой $(m_i, m_k\, d_l)$.

Под *алгоритмом* понимается точно определенное правило действий (программа), для которого задано указание, как и в какой последовательности это правило необходимо применять к исходным данным задачи, чтобы получить ее решение.

Тезис Тьюринга. Для любого алгоритма можно построить машину Тьюринга, функционирование которой эквивалентно этому алгоритму.

Конечный автомат

Конечным автоматом M называется алгебраическая структура

$$M = (S, A, t, S_0, F, p),$$

где S непустое множество состояний,

A – конечный входной алфавит,

t – отображение $t: A \times S \to S$ называемое функцией переходов,

S_0 – начальное состояние ($S_0 \in S$),

F – множество заключительных состояний ($F \in S$),

p – отображение $p: A \times S \to A$, называемое функцией заключительного вывода.

Конечный автомат можно определить как четвёрку (a, b, S_i, S_j), что означает: при переходе из состояния S_i в состояние S_j в результате входного воздействия a автомат вырабатывает на своём выходе символ b.

Автоматный оператор T:

$$b = T(a, S_i, S_j)$$

переводит входную последовательность символов $a(a_i)$ в выходную $b(b_i)$ в зависимости от начального состояния S_0 и реализуемой односторонней линейной грамматики.

Автомат удобно представлять в виде функции T на графе, каждой вершине которого взаимно однозначно соответствует состояние автомата, и если из состояния S_i в состояние S_j автомат переходит в результате входного воздействия a, вырабатывая при этом символ b, то соответствующие вершины S_i и S_j соединены дугой (S_i, S_j), взвешенной парой (a,b).

При изображении графа детерминированного автомата следует *соблюдать следующие условия:*

- для каждого символа $a \in A$ есть дуга, исходящая из некоторой вершины этого графа;
- каждый символ $a \in A$ у каждой вершины-истока принадлежит только одной дуге;
- если между двумя вершинами существует несколько дуг (что возможно при различных символах на входе, то есть $a_i \neq a_j$), то эти дуги могут быть заменены одной дугой с указанием дизъюнктивной связи этих переходов.

Конечный автомат так же изображают парой таблиц

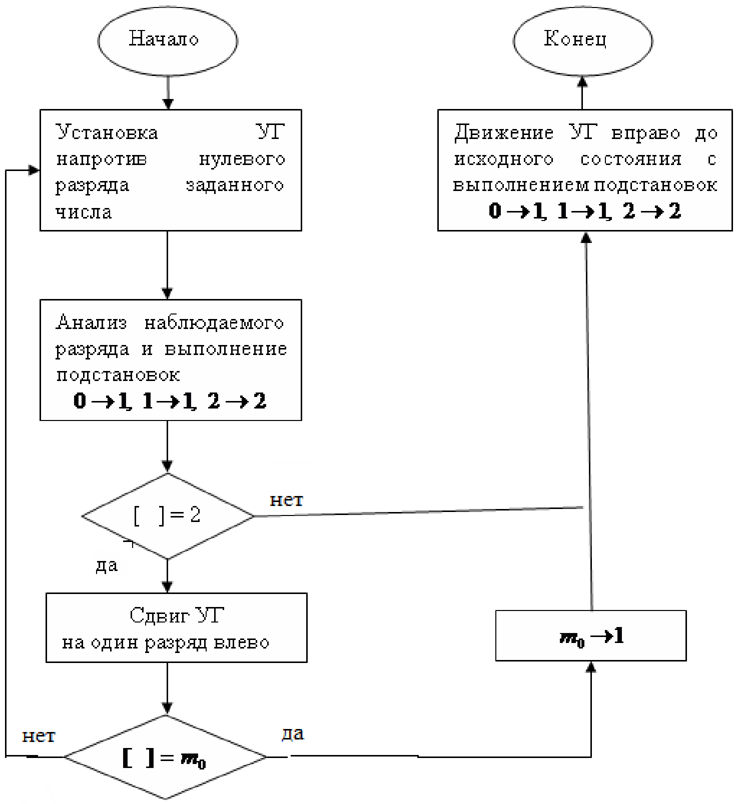
Конечный автомат										
$t: A \times S \to S$						$p: A \times S \to A,$				
A	S					A	S			
	s_1	s_2	$\dots$	s_n			s_1	s_2	$\dots$	s_n
a_1	s_{11}	s_{12}	$\dots$	s_{1n}		a_1	b_{11}	b_{12}	$\dots$	b_{1n}
a_2	s_{21}	s_{22}	$\dots$	s_{2n}		a_2	b_{21}	b_{22}	$\dots$	b_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	b_{m1}	b_{m2}	$\dots$	s_{mn}		a_n	b_{m1}	b_{m2}	$\dots$	b_{mn}

где b_{ij} – выданный в этот момент символ, s_{ij} – очередное состояние автомата, строки помечены входными символами алфавита A, столбцы – текущее состояние. Некоторые клетки таблиц могут быть неопределенны. Тогда в них ставится символ «*» а автомат называется недетерминированным (неопределённым). Иногда эти таблицы склеивают в одну, т.е., записывают в виде:

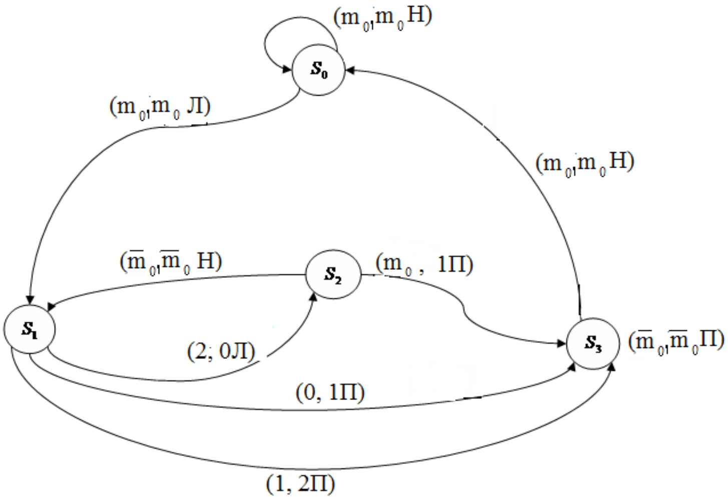
Конечный автомат				
$p: A \times S \to A, \quad t: A \times S \to S$				
A	S			
	s_1	s_2	$\dots$	s_n
a_1	$b_{11},\ s_{11}$	$b_{12},\ s_{12}$	$\dots$	$b_{1n},\ s_{1n}$
a_2	$b_{21},\ s_{21}$	$b_{22},\ s_{22}$	$\dots$	$b_{2n},\ s_{2n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	b_{m1}, s_{m1}	$b_{m2},\ s_{m2}$	$\dots$	$b_{mn},\ s_{mn}$

Пример. Синтезировать машину Тьюринга, реализующую прибавление 1 к целому n-разрядному числу, представленному в троичной системе с алфавитом цифр $\{0, 1, 2\}$.

Решение. Алгоритм реализации этой операции представлен на приведённой ниже схеме (символ в квадратных скобках означает содержимое наблюдаемого УГ разряда).



Работа соответствующей машины Тьюринга изображена с помощью графа:

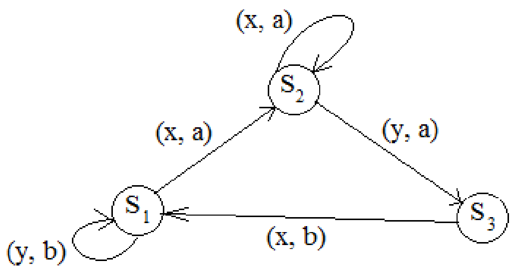


Пример. Дана односторонняя линейная грамматика с алфавитом терминальных символов $A_T = \{x, y, a, b\}$, с алфавитом нетерминальных символов $A_н = \{S_1, S_2, S_3\}$ и следующими правилами вывода:

$$S_1 \to ybS_1,\quad S_1 \to xaS_2,\quad S_2 \to xaS_2,\quad S_2 \to yaS_3,\quad S_3 \to xbS_1.$$

Представить этот автомат на графе. Как будет работать автомат и что выдаст на выходе, если установить автомат в начальное положение S_1 и подать на вход последовательность терминальных символов $\{y, x, y, x\}$?

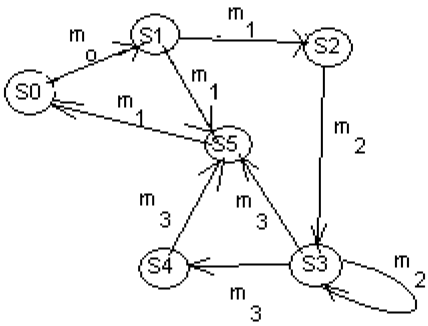
Решение. Эта грамматика реализуется конечным автоматом, изображённом на графе:



Если автомат установить в начальное положение S_1 и подать на вход последовательность терминальных символов $\{y, x, y, x\}$, то на выходе получим последовательность терминальных символов (b, a, a, b), нетерминальные же символы образуют последовательность $\{S_1, S_1, S_2, S_3\}$.

Задачи для решения на занятии:

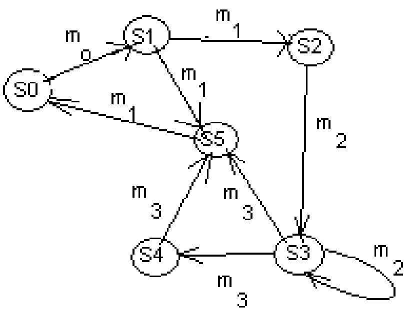
1. С помощью грамматики, задаваемой графом



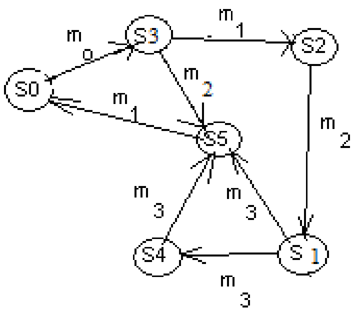
где $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ – алфавит, m_0 – символ пробела, порождается язык, который состоит из следующего множества слов ………………………………..

2. Какие из графов

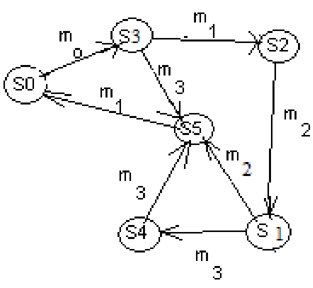
a)



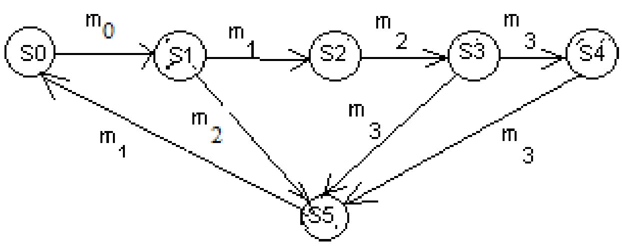
b)



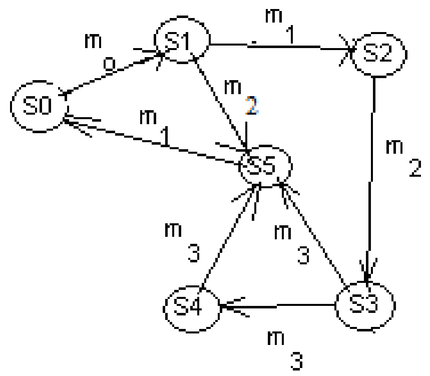
c)



d)



порождают языки эквивалентные языку, порождаемому графом



где $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ – алфавит, m_0 – символ пробела.

3. Синтезировать машину Тьюринга, реализующую:

a) прибавление 1 к целому n-разрядному числу, представленному в двоичной системе с алфавитом цифр $\{0, 1\}$.

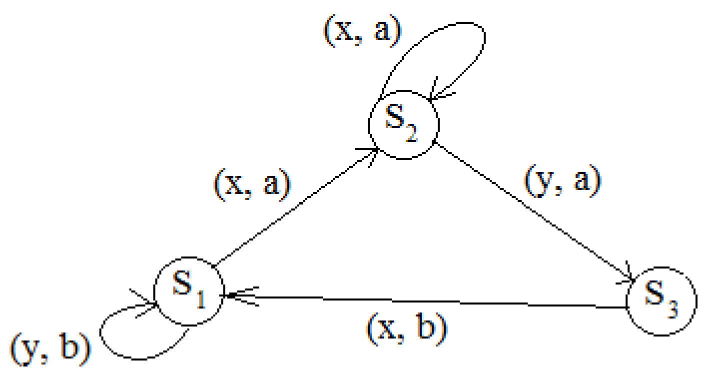
b) вычитание 1 от целого n-разрядного числа, представленного в двоичной системе с алфавитом цифр $\{0, 1\}$.

c) прибавление 2 к целому n-разрядному числу, представленному в троичной системе с алфавитом цифр $\{0, 1, 2\}$.

d) вычитание 1 от целого n-разрядного числа, представленного в троичной системе с алфавитом цифр $\{0, 1, 2\}$.

e) вычитание 2 от целого n-разрядного числа, представленного в троичной системе с алфавитом цифр $\{0, 1, 2\}$.

4. Работа автомата представлена на графе



4.1. Как будет работать автомат и что выдаст на выходе, если установить автомат в начальное положение S_1 и подать на вход последовательность терминальных символов

a) $\{y, x, x, y, x\}$,

b) $\{x, x, y\}$,

c) $\{x, y, x, x\}$.

4.2. Какая последовательность символов подана на вход автомата, если автомат был установлен в начальное положение S_1 и выдал ba.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

Нечёткие множества и их основные характеристики

Пусть U – универсальное (базовое) множество. Множество

$$A' := \{m_{A'}(u_i) \,|\, u_i\}_{i \in I}$$

называется нечётким подмножеством множества $A \subset U$, отображение

$$m_A : u_i \in U \to m_{A'}(u_i) \in [0,1] \subset R$$

называется *степенью(функцией) принадлежности элемента* $u_i \in U$ *множеству* $A \subset U$.

*М*ножество A называется *носителем нечёткого множества* A'.

Если для некоторого $u_i \in U$ имеем $m_{A'}(u_i) = 1$, то элемент “чётко” принадлежит множеству A'.

Если все элементы носителя A имеют значение $m_{A'}(u_i) = 1$, то задано *“чёткое” подмножество* A' множества U.

Если для некоторого $u_i \in U$ имеем $m_{A'}(u_i) = 0$, то элемент “четко” не принадлежит множеству A'.

Если все элементы носителя A имеют значение $m_{A'}(u_i) = 0$, то задано *“чёткое” пустое множество*.

Точкой перехода множества A' называется элемент u множества A', для которого $m_{A'}(u) = 0.5$.

Высотой d нечёткого *множества* A' называется максимальное значение функции принадлежности этого множества

$$d = \max_{u \subset A'} m_{A'}(u).$$

Если $d = 1$, то нечёткое *множество* называется *нормальным*.

Сюпремум $Sup\ A'$ – *точная верхняя грань, т.е.* максимальное значение функции принадлежности, присутствующее в множестве.

Одноточечным нечётким множеством называется множество, носитель которого состоит из единственной точки. Нечёткое множество A' иногда рассматривают как объединение составляющих его одноточечных множеств: $A' = m_1(u_1) + \ldots + m_n(u_n)$ где знак + обозначает операцию объединения; m_i - степень принадлежности u_i множеству A'.

F - *множествами* $F(U)$ называют совокупность всех нечётких подмножеств произвольного (базового) множества U, а их функции принадлежности F -функциями.

Нечёткие и лингвистические переменные

Нечёткая переменная определяется как $< A,\ X,\ Ca >$, где

A - наименование переменной,

$X = (x)$ – область определения переменной, набор возможных значений X,

$Ca = \{m(x) \mid x\}$ - нечёткое множество, описывающее ограничения на возможные значения переменной A (семантику).

Л. Заде ввел понятие *лингвистической переменной*, значениями которой являются слова и (или) предложения естественного языка, которые описываются нечёткими значениями.

Лингвистическая переменная определяется как $< B, T, X, G, M >$.

B – наименование (имя) переменной.

T – множество её значений (*базовое терм-множество*), состоит из наименований нечётких переменных, областью определения каждой из которых является множество X.

G - *синтаксическая процедура* (грамматика), позволяющая оперировать элементами терм-множества T, в частности - генерировать новые осмысленные термы. $T' = T \cup G(T)$ задает расширенное терм-множество ($\cup$ - знак объединения).

M - *семантическая процедура*, позволяющая приписать каждому новому значению лингвистической переменной нечёткую семантику, путем формирования нового нечёткого множества.

Операции над нечёткими множествами

УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО: степени принадлежности элементов домножаются на число.

$$q * A' = \{q * m_A(u) \mid u\}$$

НОРМАЛИЗАЦИЯ: нечеткое множество нормально, если сюпремум множества равен единице. Для нормализации пересчитывают принадлежности элементов:

$$m'_A(u) = \frac{m_A(u)}{Sup\, m_A(u)}$$

АЛЬФА-СРЕЗ: множество альфа уровня – те элементы исходного множества, принадлежность которых выше или равна заданного порога. Порог, равный 1/2, называют *точкой перехода*.

$$A_q = \{u | u \in A \wedge m_A(u) > q\}$$

Пусть $A' := \{m_{A'}(u_i) \mid u_i\}_{i \in I}$, $B' := \{m_{B'}(v_j) \mid v_j\}_{i \in I}$ – нечёткие подмножества множества U, где $u, v \in U,\ I, J \subset \mathrm{N}$.

Дополнение $\overline{A'}$ ***нечёткого множества*** A'

$\overline{A'} = \{u \mid u \notin A',\ u \in U\}$

$m_{\overline{A'}}(u) = 1 - m_{A'}(u)$.

Прямое произведение

$A' \otimes B' = \left\{ < m_{A' \otimes B'}(u_i, v_j) \mid (u_i, v_j) > \ \middle| u_i \in A',\ v_j \in B' \right\}$

$m_{A' \otimes B'}(u_i, u_j) = m_{A'}(u_i)\ \&\ m_{B'}(u_j) = \min\{m_{A'}(u_i),\ m_{B'}(u_j)\}$

Включение нечёткого множества A' ***в нечёткое множество*** B'

$A' \subset B'$

$m_{A' \subset B'} = \&(m_{A'}(u) \to m_{B'}(u)) = \&(m_{\overline{A'}}(u) \vee m_{B'}(u)) = \min\{\max\{(1 - m_{A'}(u)),\ m_{B'}(u)\}\}$

Если $m_{A' \subset B'} \geq 0.5$, то множество A' нечётко включено в множество B'.

Равенство нечётких множеств A' ***и*** B' $A' \cong B'$ $m_{A' \cong B'} = \&(m_{A'}(u) \leftrightarrow m_{B'}(u)) = \&((m_{\overline{A'}}(u) \vee m_{B'}(u)) \& (m_{A'}(u) \vee m_{\overline{B'}}(u))) =$ $= \min\{ \min\{\max\{1 - m_{A'}(u),\ m_{B'}(u)\};\ \max\{m_{A'}(u),\ 1 - m_{B'}(u)\}\}\}.$ Если $m_{A' \cong B'} \geq 0.5$, то множества A' и B' нечётко равны.
Объединение нечетких множеств A' ***и*** B' есть множество $A' \cup B' = \{u \mid u \in A' \ или\ u \in B'\}$, $m_{A' \cup B'}(u) = m_{A'}(u) \vee m_{B'}(u) = \max\{m_{A'}(u),\ m_{B'}(u)\}$.
Пересечение нечётких множеств A' ***и*** B' есть множество $A' \cap B' = \{u \mid u \in A' \ и\ u \in B'\}$, $m_{A' \cap B'}(u) = m_{A'}(u) \wedge m_{B'}(u) = \min\{m_{A'}(u),\ m_{B'}(u)\}$.
Разность нечётких множеств A' ***и*** B' есть множество $A' \setminus B' = A' \cap \overline{B'} = \{u \mid u \in A',\ u \notin B'\}$, $m_{A' \setminus B'}(u) = m_{A'}(u) \wedge (1 - m_{B'}(u)) = \min\{m_{A'}(u),\ 1 - m_{B'}(u)\}$.
Симметрическая разность нечётких множеств A' ***и*** B' есть нечёткое множество $A' \Delta B' = (A' \cap \overline{B'}) \cup (\overline{A'} \cap B')$, $m_{A' \Delta B'}(u) = (m_{A'}(u) \wedge m_{\overline{B'}}(u)) \vee (m_{\overline{A'}}(u) \wedge m_{B'}(u)) =$ $= \max\{ \min\{m_{A'}(u),\ 1 - m_{B'}(u)\},\ \min\{1 - m_{A'}(u),\ m_{B'}(u)\}\}.$

Пример. $<$ «большое», $\{[0,5),[5,7),[7,10)\}$, $\{0 \mid [0,5), 0.4 \mid [5,7), 1 \mid [7,10)\}$ $>$. Здесь «большое» – наименование переменной,

$\{[0,5),[5,7),[7,10)\}$ – область определения переменной,

$\{0 \mid [0,5), 0.4 \mid [5,7), 1 \mid [7,10)\}$ – нечёткое множество, описывающее ограничения на возможные значения переменной «большое» (семантика).

Пример. Лингвистическая переменная «возраст» принимает нечёткие значения: молодой, не молодой, старый, не очень старый и т.д.

Пример. Дан электрический двигатель и эксперт должен отнести значения скорости вращения работающего двигателя в четыре класса: $X_1' =$ нулевая скорость вращения, X_2'– малая, X_3'–средняя и X_4'– большая. Пусть скорость вращения двигателя изменяется в пределах от 0 до 3050 об/мин.

скорость (об/мин)	степень принадлежности			
	«Нулевая»	«Малая»	«Средняя»	«Большая»
0	1	0	0	0
500	0,3	0,5	0	0
900	0	1	0	0
1500	0	0,3	0,5	0
2000	0	0	1	0
2250	0	0	0,3	0,8
2700	0	0	0.5	1
3050	0	О	0	1

Здесь терм-множество – «скорость вращения двигателя», а лингвистические переменные: «нулевая», «малая», «средняя» и «большая».

Эксперт разбил диапазон изменения скорости на восемь поддиапазонов, установил три уровня принадлежности: 0.3, 0.5, 1 и составил таблицу принадлежности. В этом случае нечёткие множества описаны так:

X_1' ("нулевая») $=\{1|0,\ 0.3|500\}$,

X_2' («малая») = $\{0.5|500,\ 1|900,\ 0.3|1500\}$,

X_3' («средняя»)=$\{0.5|1500,\ 1|2000,\ 0.3|2250,\ 0.5|2700\}$,

X_4' («большая») = $\{0.8|2250,\ 1|2700,\ 1|3050\}$.

Пример. Пусть $A'=\{0.1|x_1,\ 0.6|x_2,\ 0.4|x_3,\ 1|x_5\}$,

$B'=\{0.6|x_1,\ 0.4|x_2,\ 0.2|x_3, 0.7|x_4,\ 0.9|x_5\}$,

$C'=\{0.5|y_1,\ 0.8|y_2,\ 0.3|y_3\}$ –

нечёткие подмножества множества $U=\{x_i\,|\,i=1,2,3,4,5\}$. Тогда

a) дополнение множества A' имеет вид $\overline{A}'=\{0.9|x_1,\ 0.4|x_2,\ 0.6|x_3,\ 1|x_4\}$,

b) $A'\cap B'=\{0.1|x_1,\ 0.4|x_2,\ 0.2|x_3,\ 0.9|x_5\}$,

c) $A'\cup B'=\{0.6|x_1,\ 0.6|x_2,\ 0.4|x_3,\ 0.7|x_4,\ 1|x_5\}$,

d) $A'\setminus B'=\{0.1|x_1,\ 0.6|x_2,\ 0.4|x_3,\ 0.1|x_5\}$,

e) $A'\Delta B'=\{0.6|x_1,\ 0.6|x_2,\ 0.4|x_3, 0.7|x_4,\ 0.1|x_5\}$,

f) В следующей таблице на пересечении i-той строки и j-го столбца стоит степень принадлежности элемента $(x_i,\ x_j)$ множеству $A'\otimes B'$.

$A'\otimes B'$.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
x_2	0.6	0.4	0.2	0.6	0.6
x_3	0.4	0.4	0.2	0.4	0.4
x_5	0.6	0.4	0.2	0.7	0.9

g) В следующей таблице на пересечении i-той строки и j-го столбца стоит степень принадлежности элемента $(y_i,\ x_j)$ множеству $C'\otimes B'$.

$C'\otimes B'$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	0.5	0.4	0.2	0.5	0.5
y_2	0.6	0.4	0.2	0.7	0.8
y_3	0.3	0.3	0.2	0.3	0.3

h) Степень включения множества A' в B'равна

$$m_{A'\subset B'} = \min\{\max\{(1-m_{A'}(u)),\ m_{B'}(u)\}\} =$$
$$= \min\{\max\{0.9, 0.6\}, \max\{0.4, 0.4\}, \max\{0.6, 0.2\}, \max\{1, 0.7\}, \max\{0, 0.9\}\} =$$
$$= \min\{0.9,\ 0.4,\ 0.6,\ 1,\ 0.9\} = 0.4.$$

i) Степень включения множества B' в A' равна

$$m_{B'\subset A'} = \min\{\max\{m_{A'}(u),\ 1-m_{B'}(u)\}\} =$$
$$= \min\{\max\{0.1, 0.4\}, \max\{0.6, 0.6\}, \max\{0.4, 0.8\}, \max\{0, 0.3\}, \max\{1, 0.1\}\} =$$
$$= \min\{0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 0.3,\ 1\} = 0.3.$$

j) Степень равенства множеств A', B' равна

$$m_{A'\cong B'} = \&(m_{A'}(u) \leftrightarrow m_{B'}(u)) = \&((m_{\overline{A'}}(u) \vee m_{B'}(u))\&(m_{A'}(u) \vee m_{\overline{B'}}(u))) =$$
$$= \min\{\ \min\{\max\{1-m_{A'}(u),\ m_{B'}(u)\};\ \max\{m_{A'}(u),\ 1-m_{B'}(u)\}\}\} =$$
$$= \min\{\ \min\{\max\{1-m_{A'}(u),\ m_{B'}(u)\}\},\ \ \min\{\max\{m_{A'}(u),\ 1-m_{B'}(u)\}\}\ \} =$$
$$= \min\{0.4,\ 0.3\} = 0.3.$$

Пример. Даны нечёткие множества A' и B':

A'	y_1	y_2
x_1	0.2	0.3
x_2	0.4	0.7

B'	y_1	y_2
x_1	0	0.9
x_2	0.8	0.5

универсального множества $U = \{(x_i, y_j) | i = 1,2\}$. Тогда

a) Дополнение множества A', пересечение и объединение множеств A, B соответственно имеют вид:

$\overline{A'}$	y_1	y_2
x_1	0.8	0.7
x_2	0.6	0.3

x_1	0	0.3
x_2	0.4	0.5

x_1	0.2	0.9
x_2	0.8	0.7

b) Разности $A'\backslash B'$, $B'\backslash A'$ и симметрическая разность $A'\Delta B'$ имеют соответственно вид:

$A'\backslash B'$	y_1	y_2
x_1	0.2	0.1
x_2	0.2	0.5

$B'\backslash A'$	y_1	y_2
x_1	0	0.7
x_2	0.6	0.3

$A'\Delta B'$	y_1	y_2
x_1	0.2	0.7
x_2	0.6	0.5

c) Носитель множества B' имеет вид: $B = Supp\,B' = \{(x_1,y_2),\,(x_2,y_1),\,(x_2,y_2)\}$.

d) Степень принадлежности прямого произведения вычисляем по формуле $m_{A'\otimes B'}(u_i,u_j)=m_{A'}(u_i)\,\&\,m_{B'}(u_j)=\min\{m_{A'}(u_i),\,m_{B'}(u_j)\}$. В приведённой ниже таблице для прямого произведения на пересечении i-той строки и j-го столбца стоит степень принадлежности $m_{A'\otimes B'}(u_i,u_j)$ элемента (u_i,u_j) множеству $A'\otimes B'$, где $u_i \in A',\ v_j \in B'$.

$A'\otimes B'$		B		
		$u_2=(x_1,y_2)$	$u_3=(x_2,y_1)$	$u_4=(x_2,y_2)$
A	$u_1=(x_1,y_1)$	0.2	0.2	0.2
	$u_2=(x_1,y_2)$	0.3	0.3	0.3
	$u_3=(x_2,y_1)$	0.4	0.4	0.4
	$u_4=(x_2,y_2)$	0.7	0.7	0.5

e) Степень включения множества A' в B' равна

$$m_{A'\subset B'} = \min\{\max\{(1-m_{A'}(u)),\ m_{B'}(u)\}\} =$$
$$= \min\{\max\{0.8,0\},\max\{0.7,0.9\},\max\{0.6,0.8\},\max\{0.3,0.5\}\} =$$
$$= \min\{0.8,\ 0.9,\ 0.8,\ 0.5\} = 0.5$$

f) Степень включения множества B' в A' равна

$$m_{B'\subset A'} = \min\{\max\{m_{A'}(u),\ 1-m_{B'}(u)\}\} =$$
$$= \min\{\max\{0.2,1\},\max\{0.3,0.1\},\max\{0.6,0.8\},\max\{0.7,0.5\}\} =$$
$$= \min\{1,\ 0.3,\ 0.8,\ 0.7\} = 0.3$$

g) Степень равенства множеств A', B' равна

$$m_{A'\cong B'} = \&(m_{A'}(u) \leftrightarrow m_{B'}(u)) = \&((m_{\overline{A'}}(u) \vee m_{B'}(u)) \& (m_{A'}(u) \vee m_{\overline{B'}}(u))) =$$
$$= \min\{ \min\{\max\{1 - m_{A'}(u),\ m_{B'}(u)\};\ \max\{m_{A'}(u),\ 1 - m_{B'}(u)\}\}\} =$$
$$= \min\{ \min\{\max\{1 - m_{A'}(u),\ m_{B'}(u)\}\},\ \min\{\max\{m_{A'}(u),\ 1 - m_{B'}(u)\}\}\} =$$
$$= \min\{0.5,\ 0.3\} = 0.3.$$

h) Высота множества B' равна 0.9.

Задачи для решения на занятии:

1. Даны нечёткие подмножества:

a) $A' = \{0.3 \mid x_1,\ 0.6 \mid x_2, 0.4 \mid x_4\}$, $B' = \{0.8 \mid x_1, 0.9 \mid x_2, 0.2 \mid x_3, 0.7 \mid x_4,\ 0.1 \mid x_5\}$

универсального множества $U = \{x_i \mid i = 1,2,3,4,5\}$,

b)

A'	y_1	y_2		B'	y_1	y_2	y_3
x_1	0.2	0.4		x_1	0	0.9	0.6
x_2	0.7	0.3		x_2	0.8	0.5	1

универсального множества $U = \{(x_i, y_j) \mid i = 1, 2, 3\}$,

c) $A' = \{0 \mid [0,5),\ 0.02\, x^2 \mid [5,7),\ 1 \mid [7,10)\}$,

$B' = \{0.1x \mid [0,5), 0.8 \mid [5,7), 0.2 \mid [7,10), -0.05x \mid [10,15)\}$ универсального множества $U = [0, 15)$.

Найти дополнение множества A, $A' \cap B'$, $A' \cup B'$, $A' \setminus B'$, $B' \setminus A'$, $A' \Delta B'$, носитель множества A', высоту множества B', степень включения множества A' в B', степень включения множества B' в A', степень равенства множеств A' и B'.

Нечёткие отображения и отношения.

Задано *нечёткое отображение* $h':X \xrightarrow{m} Y$, когда чётко заданы носители отображения X, Y и нечётко – принадлежность каждой пары (x_i, y_j) нечёткому отображению h', т.е.,

$$h' = \left\{ < m_{h'}(x_i, y_j) | (x_i, y_j) > \;\middle|\; x_i \in X, y_j \in Y \right\},$$

где $m_{h'}(x_i, y_j)$ - *степень принадлежности* $(x_i, y_i) \in X \otimes Y$ нечёткому отображению h', или коротко:

$$h' = \{ m_{h'}(x_i, y_j) | (x_i, y_j) \},$$

где $x_i \in X$, $y_j \in Y$.

Нечёткие отображения удобно описывать матрицами, строки которой есть $x_i \in X$ – *прообразы нечёткого отображения*, а столбцы - $y_i \in Y$ – *образы нечёткого отображения*. Тогда в клетках (x_i, y_j) будут указаны значения их степени принадлежности $m_{h'}(x_i, y_j)$.

Если даны два нечётких отображения

$$h_1' = \left\{ < m_{h_1'}(x_i, y_j) | (x_i, y_j) > \;\middle|\; x_i \in X, y_j \in Y \right\},$$

$$h_2' = \left\{ < m_{h_2'}(y_j, z_k) | (y_j, z_k) > \;\middle|\; y_j \in Y, z_k \in Z \right\}$$

то их *композиция* это нечёткое отображение

$$h' = h_1' \bullet h_2' = \left\{ < m_{h'}(x_i, z_k) | (x_i, z_k) > \;\middle|\; x_i \in X, z_k \in Z \right\}.$$

Степень принадлежности элементов h_1' и h_2' нечёткому отображению h существует тогда и только тогда, когда есть хотя бы один элемент $y_j \in Y$, принадлежащий h_1' и h_2', т. е.

$$m_{h'}(x_i, z_k) = \bigvee_{i=1}^{I} \left(m_{h_1'}(x_i, y_j) \wedge m_{h_2'}(y_j, z_k) \right) = \max \left\{ \min \left\{ m_{h_1'}(x_i, y_j),\ m_{h_2'}(y_j, z_k) \right\} \right\}.$$

Наглядно говоря, чтобы найти композицию этих отображений надо действовать аналогично нахождению элементов произведения матриц, только вместо произведений совпадающих элементов брать минимум из совпавших элементов, а вместо суммы брать максимум из полученных элементов.

Если в определении нечёткого отображения $X = Y$, то нечёткое отображение h' называют *нечётким отношением* и обозначают обычно символом r', т.е.

$$r' = \left\{ < m_{r'}(x_i, x_j) | (x_i, x_j) > \ \middle| x_i, x_j \in X \right\}.$$

Если дано n-арное отношение $r'(x_1, x_2, \dots x_n) : X^{n-1} \to X$, то значение функции принадлежности должно быть найдено для каждого набора $x_{1_i}, x_{2_i}, \dots x_{n_i}$, т.е. $r' = \left\{ < m_{r'}(x_{1_i}, x_{2_i}, \dots x_{n_i}) | (x_{1_i}, x_{2_i}, \dots x_{n_i}) > \ \middle| x_{1_i}, x_{2_i}, \dots x_{n_i} \in X \right\}$.

Свойства нечётких отношений	
Рефлексивность	*Степень рефлексивности* $\alpha(r')_{ref} = \wedge_i m_{r'}(x_i, x_i) = \min_i \{ m_{r'}(x_i, x_i) \}$ Отношение r' называют *нечётко рефлексивным*, если $\alpha(r')_{ref} \geq 0.5$. Отношение r' называют *нечеткого нерефлексивным*, если $\alpha(r')_{ref} \leq 0.5$.
антирефлексивность	*Степень антирефлексивности* $\alpha(r')_{antiref} = \wedge_i m_{\overline{r'}}(x_i, x_i) = \min_i \{ 1 - m_{r'}(x_i, x_i) \}$. Отношение r' называют *нечётко антирефлексивным*, если $\alpha(r')_{antiref} \geq 0.5$. Отношение r' называют *нечётко неантирефлексивным*, если $\alpha(r')_{antiref} \leq 0.5$.

Симметрич-ность	*Степень симметричности* $$\alpha(r')_{sym} = \underset{\substack{i,j\\ i\neq j}}{\wedge}\{m_{r'}(x_i,x_j)\Rightarrow m_{r'}(x_j,x_i)\} = \\ = \underset{\substack{i,j\\ i\neq j}}{\wedge}\{\neg m_{r'}(x_i,x_j)\vee m_{r'}(x_j,x_i)\} = \\ = \min_{i,i\neq j}\left\{\max_j\{1-m_{r'}(x_i,x_j),\ m_{r'}(x_j,x_i)\}\right\}$$ Отношение r’ называют *нечётко симметричным***,** если $\alpha(r')_{sym}\geq 0.5$. Отношение r’ называют *нечёткого несимметричным*, если $\alpha(r')_{sym}\leq 0.5$.
антисимметричность	*Степенью антисимметричности* $$\alpha(r')_{antisym} = \underset{\substack{i,j\\ i\neq j}}{\wedge}\left\{\overline{\left(m_{r'}(x_i,x_j)\Rightarrow m_{r'}(x_j,x_i)\right)}\right\} = \\ = \underset{\substack{i,j\\ i\neq j}}{\wedge}\{\overline{m_{r'}}(x_i,x_j)\vee \overline{m_{r'}}(x_j,x_i)\} = \\ = \min_{i,i\neq j}\left\{\max_j\{1-m_{r'}(x_i,x_j),\ 1-m_{r'}(x_j,x_i)\}\right\}$$ Отношение r’ называют *нечетко антисимметричным*, если $\alpha(r')_{antisym}\geq 0.5$. Отношение r’ называют *нечётко неантисимметричным*, если $\alpha(r')_{antisym}\leq 0.5$.
Транзитив-ность	*Степенью транзитивности* $$\alpha(r')_{tr} = \underset{i,j.k}{\wedge}\left\{\left(\underset{j}{\vee}\{m_{r'}(x_i,x_j)\wedge m_{r'}(x_j,x_k)\Rightarrow m_{r'}(x_i,x_k)\}\right)\right\} =$$ $$= \min_k\left\{\max_i\left\{\min_{i,k}\left\{\max_j\{1-m_{r'}(x_i,x_j),1-m_{r'}(x_j,x_k)\}\right\}, m_{r'}(x_i,x_k)\right\}\right\}.$$ Отношение r’ *нечётко транзитивно*, если $\alpha(r')_{tr}\geq 0.5$. Отношение r’ *нечётко нетранзититвно*, если $\alpha(r')_{tr}\leq 0.5$.

Отношение r', для которого $\begin{cases}\alpha(r')_{ref} \ge 0.5\\ \alpha(r')_{sym} \ge 0.5\\ \alpha(r')_{tr} \ge 0.5\end{cases}$ есть *отношение нечёткой эквивалентности*.	*Степень нечёткой эквивалентности* определяется выражением: $$\alpha(r')_{эквив} = \alpha(r')_{ref} \wedge \alpha(r')_{sym} \wedge \alpha(r')_{tr} = \\ = \min\{\alpha(r')_{ref},\ \alpha(r')_{sym},\ \alpha(r')_{tr}\} \ge 0.5.$$
Отношение r', для которого $\begin{cases}\alpha(r')_{ref} \ge 0.5\\ \alpha(r')_{antisym} \ge 0.5\\ \alpha(r')_{tr} \ge 0.5\end{cases}$ есть *отношение нечёткого нестрогого порядка*.	*Степень нечёткого нестрогого порядка* определяется выражением: $$\alpha(r')_{нестрог\ пор} = \alpha(r')_{ref} \wedge \alpha(r')_{antisym} \wedge \alpha(r')_{tr} = \\ = \min\{\alpha(r')_{ref},\ \alpha(r')_{antisym},\ \alpha(r')_{tr}\} \ge 0.5.$$
Отношение r', для которого $\begin{cases}\alpha(r')_{antiref} \ge 0.5\\ \alpha(r')_{antisym} \ge 0.5\\ \alpha(r')_{tr} \ge 0.5\end{cases}$ есть *отношение нечёткого строгого порядка*.	*Степень нечёткого строгого порядка* определяется выражением: $$\alpha(r')_{строг\ пор} = \alpha(r')_{antiref} \wedge \alpha(r')_{antisym} \wedge \alpha(r')_{tr} = \\ = \min\{\alpha(r')_{antiref},\ \alpha(r')_{antisym},\ \alpha(r')_{tr}\} \ge 0.5.$$

Пример. Пусть $A' = \{1 - x^2 \mid (-1,1)\}$ нечёткое подмножество универсального множества $U = (-\infty, \infty)$ и $h : x \in A' \to y = \dfrac{1}{x}$. Найти $m_{h(A')}$ и $h(A')$.

Решение. $m_{h(A')}(y) = m_{A'}(h^{-1}(y)) = 1 - \dfrac{1}{y^2}$. Поэтому

$$h(A') = \left\{1 - \frac{1}{y^2} \,\middle|\, (-\infty, -1),\ 1 - \frac{1}{y^2} \,\middle|\, (1, \infty)\right\}.$$

Пример. Пусть стоит вопрос о степени влияния 4 секторов экономики $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ России на её успешное экономическое развитие. Свое мнение высказали главы трёх регионов России $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и два ответственных за этот вопрос представителя правительства России $Z = \{z_1, z_2\}$. Выяснилось их нечёткое понимание степени влияния. Оценки степени влияния, высказанные представителями регионов, представлены как нечёткое отображение $h_1' : X \to Y$, а представителей правительства – как нечёткое отображение $h_2' : Y \to Z$.

h’1	y1	y2	y3	y4
x1	0.7	0.2	0.6	1
x2	0.3	1	0.4	0.3
x3	0.8	0.9	1	0

h’2	z1	z2
y1	0,9	0.2
y2	0,5	0,9
y3	0,4	0,9
y4	0.8	0.1

a) Каков график нечёткого отображения мнения представителя 1-го региона о степени влияния каждой отрасли на развитие России.

b) Каково влияние 1-й отрасли на успешное развитие России.

c) Выяснить вопрос о согласованности мнений представителей регионов и представителей правительства.

Решение.

a) Образ элемента x_1 при отображении h_1', т.е. график нечёткого отображения мнения представителя 1-го региона о степени влияния каждой отрасли на развитие России есть нечёткое множество

$$Y'_{x_1} = \{m_{h_1'}(x_1, y_1) \mid (x_1, y_1),\ m_{h_1'}(x_1, y_2) \mid (x_1, y_2),\ m_{h_1'}(x_1, y_3) \mid (x_1, y_3),\ m_{h_1'}(x_1, y_4) \mid (x_1, y_4)\} =$$
$$= \{0.7 \mid (x_1, y_1),\ 0.2 \mid (x_1, y_2),\ 0.6 \mid (x_1, y_3),\ 1 \mid (x_1, y_4)\}.$$

Видим, что по его мнению наиболее значимой для успешного развития России является 4-я отрасль и степень её важности равна 0.7.

b) Прообразом, например, для y_1 является нечёткое множество

$$X'_{y_1} = \{m_{h_1'}(x_1, y_1) | (x_1, y_1),\ m_{h_1'}(x_2, y_1) | (x_2, y_1), m_{h_1'}(x_3, y_1) | (x_3, y_1)\} = \\ = \{0.7 | (x_1, y_1),\ 0.3 | (x_2, y_1), 0.8 | (x_3, y_1)\}.$$

Видим, что влияние 1-й отрасли на успешное развитие России каждый из представителей регионов оценивает по разному. А именно, второй эксперт это влияние в отличие от остальных считает незначительным.

c) Выясним вопрос о согласованности мнений представителей регионов и представителей правительства. Для этого найдём композицию $h'_1 \bullet h'_2$ этих отображений

h'_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.7	0.2	0.6	1
x_2	0.3	1	0.4	0.3
x_3	0.8	0.9	1	0

•

h'_2	z_1	z_2
y_1	0,9	0.2
y_2	0,5	0,9
y_3	0,4	0,9
y_4	0.8	0.1

=

$h'_1 \bullet h'_2$	z_1	z_2
x_1	0.8	0.6
x_2	0.5	0.9
x_3	0.8	0.9

Здесь, например, вычисление $m_{h'_1 \bullet h'_2}(x_1, x_2)$ имеет вид:

$$m_{h'_1 \bullet h'_2}(x_1, x_2) = \max\{\min\{0.7, 0,2\},\ \min\{0.2, 0.9\},\ \min\{0.6, 0.9\},\ \min\{1, 0.1\}\} = 0.6.$$

Заметим, что если мнения согласованы хотя бы на половину, то обычно считают их согласованными. Из таблицы для $h'_1 \bullet h'_2$ видим, что не смотря на то что мнения представителей регионов и правительства разные, они в целом согласованные, т.к. все степени принадлежности больше 0.5. Наименьшая согласованность мнений по этому вопросу представителя 2-го региона с 1-ым представителя России.

Пример. Даны нечёткое отображение $h': A' \to B'$

h'	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,2	0	0.7
x_2	0	0	0	0
x_3	1,0	0	0,4	0.6
x_4	0	0,3	0	0
x_5	0	0,7	0,8	0

и нечёткое множество $A' = \{0.7 | x_1, 0.4 | x_2, 1 | x_4\}$. Найти $B' = h'(A')$.

Решение.

A’	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0. 7	0. 4	0	1	0

$\bullet$

h’	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,2	0	0.7
x_2	0	0	0	0
x_3	1	0	0,4	0.6
x_4	0	0,3	0	0
x_5	0	0,7	0,8	0

=

=

B’	y_1	y_2	y_3	y_4
	0	0,3	0	0.7

Ответ: $B' = \{0.3 \,|\, y_2, 0.7 \,|\, x_2, 1 \,|\, y_4\}$

Пример. Определить тип отношений.

r’$_1$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,8	0,2	0,7	0,2
x_2	0,4	0,6	0,6	0,2
x_3	0,6	0,7	0,8	0,3
x_4	0,3	0,1	0,3	0,7

r’$_2$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	0	0	0,2
x_2	0,7	0,3	0,6	0,8	0,9
x_3	0,7	0,4	0,2	0,8	0,9
x_4	0,8	0	0	0	0,3
x_5	1	0	0,1	0,7	0

Решение.

$\alpha(r'_1)_{ref} = \min\{0.8, 0.6, 0.8, 0.7\} = 0.6,$

$\alpha(r'_1)_{antiref} = \min\{0.2, 0.4, 0.2, 0.3\} = 0.2,$

$\alpha(r'_1)_{sym} = \min\{0.8, 0.6, 0.8, 0.7, 0.8, 0.7\} = 0.6,$

$\alpha(r'_1)_{antisym} = \min\{0.8, 0.4, 0.8, 0.3, 0.9, 0.7\} = 0.3,$

$\alpha(r'_1)_{tr} = \min\{0.7, 0.7, 0.7, 0.6, 0.7, 0.7\} = 0.6.$

Следовательно, $\alpha(r'_1)_{эквив} = \min\{0.6, 0.6, 0.6\} = 0.6.$

$\alpha(r'_2)_{ref} = \min\{0, 0.3, 0.2, 0, 0\} = 0,$

$\alpha(r'_2)_{antiref} = \min\{1, 0.7, 0.8, 1, 1\} = 0.7,$

$\alpha(r'_2)_{sym} = \min\{1, 1, 1, 1, 0.4, 0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.7\} = 0.1,$

$\alpha(r'_2)_{antisym} = \min\{1, 1, 1, 0.8, 0.6, 1, 1, 1, 0.9, 0.7\} = 0.6,$

$\alpha(r'_2)_{tr} = 0.7.$

Следовательно, $\alpha(r'_1)_{неч\ \ пор} = \min\{0.7, 0.6, 0.7\} = 0.6.$

Ответ: r'_1 это отношение нечёткой эквивалентности,

r'_2 – отношение нечёткого строгого порядка.

Задачи для решения на занятии:

1. Даны нечёткие подмножества:

a) $A' = \{0.3 \mid x_1, 0.2 \mid x_2, 0.7 \mid x_4\}$, $B' = \{y_2, y_3\}$ универсального множества $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и нечёткое отображение

$h' = \{0.4 \mid (x_1, y_1), 0.9 \mid (x_2, y_1), 0.5 \mid (x_3, y_2), 0.8 \mid (x_4, y_2), 0.7 \mid (x_4, y_3), 0.9 \mid (x_2, y_3)\}$.

b) $A' = \{1 - x^2 \mid (-1,1)\}$, $B' = \{0.5 \mid (-2), 0.5 \mid 2\}$ универсального множества $U = (-1, 3)$ и $h : x \in A' \to y = \dfrac{1}{x}$. Найти $m_{h(A')}$ и $h(A')$.

Найти образ нечёткого множества A' и прообраз множества B' при отображении h'.

2. Даны нечёткие отношения:

r_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0.8	0
x_2	0	0.6	1	1
x_3	0.7	1	0.8	0
x_4	0	1	0	1

r_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0.3	0	0.9
x_2	0.5	0	1	0
x_3	0	0.8	0.4	1
x_4	1	0	1	0

r_3	x_1	x_2	r_3	r_4
x_1	0.4	0.2	1	0
x_2	0	0.5	0	0.9
x_3	0	0.7	1	0.8
x_4	0	1	0	1

r'_4	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,1	1,0	0,2	0,3
x_2	0,5	1,0	0	0
x_3	0,4	0,9	0	1,0
x_4	0	0,8	0,1	1,0

r'_5	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0,9	0	0,8	1,0
x_2	1,0	1,0	1,0	1,0
x_3	0,6	1,0	1,0	0,3
x_4	1,0	0,7	1,0	0

Какими свойствами они обладают? Вычислить всевозможные композиции этих отношений.

3. Пусть в пределах региона необходимо разместить пять магазинов розничной торговли $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, представляющих четыре фирмы оптовой торговли $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Руководители фирм обратились в консалтинговую фирму для построения рациональной структуры использования и размещения магазинов в регионе.

Пусть эксперты консалтинговой фирмы установили, что на структуру использования и размещения магазинов наибольшее влияние оказывают «доступность магазина» (y_1), «высокое качество товара» (y_2), «высокий уровень обслуживания» (y_3) и «низкие цены» (y_4), т.е. $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$.

Эксперты, обсуждая с руководителями магазинов и фирм организацию торговли, установили их нечёткое понимание значимости пожеланий покупателя. Учёт принятых показателей руководителями магазинов и руководителей фирм представлен соответственно в приведённых ниже таблицах как нечёткие отображения.

h'_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.8	0	0.9	0
x_2	0.9	0.8	0	0.6
x_3	0.3	0	0.9	0
x_4	0	0.2	0	1
x_5	1	0.5	1	1

h'_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0,1	0,5	0,7
y_2	0,5	0,9	0,6	0,6
y_3	0,4	0,9	0,5	0,4
y_4	0,8	0,1	0,5	0,6

Согласованы ли в целом мнения по рассматриваемым показателям руководителей магазинов и фирм? Есть ли такие руководители магазинов, чьё мнение

a) согласовано со всеми руководителями фирм?

b) не согласовано ни с одним из руководителей фирм?

Что здесь выступает в качестве терм-множества, лингвистической и нечёткой переменной?

Нечёткие графы

Во многих практических задачах невозможно установить чёткую принадлежность вершин графу и/или чёткие отношения между его вершинами. В этом случае говорят о нечётких графах.

Нечёткие графы $G' = \{X, r'\}$ могут быть заданы в тех же видах, что и чёткие графы. На диаграмме над дугой (x_i, x_j) ставится $m(x_i, x_j)$ нечёткое отношение между вершинами x_i, x_j графа.

Все характеристики нечётких графов получаются из соответствующих характеристик чётких графов (графов), с тем лишь отличием, что степень принадлежности теперь не 0 или 1 как в чётких графах, а число от 0 до 1 включительно. Операции над нечёткими графами определяются также как над чёткими графами, с той лишь разницей что теперь имеем дело с нечёткими множествами. А значит и осуществлять эти операции надо так как это определялось для нечётких множеств. Причём данные нечётких отношений и отображений удобно представить матрицами смежности и/или инцидентности, что позволит применить матричные методы при исполнении алгебраических операций.

Вершины x и x_i графа G' называют *нечётко смежными,* если для r' имеем $m(x, x_i) \in (0,1)$. Вершину x и дугу (x, x_i) называют *нечётко инцидентными*, если $m(x, x_i) > 0$. Здесь $m(x, x_i) > 0$ интерпретируется как степень инцидентности.

Матрица смежности нечёткого графа есть квадратная таблица строки и столбцы которой помечены вершинами графа, а в позициях матрицы указаны значения $m(x_i, x_j)$.

Матрица инцидентности нечёткого графа есть прямоугольная таблица, строки которой помечены ребрами для неориентированного графа или дугами для ориентированного, а столбцы вершинами графа. Каждая вершина графа $x \in X$ характеризуется степенью или валентностью σ_i, равной числу ребер или дуг, инцидентных данной вершине и имеющих $m(x_i) > 0$. Для ориентированного графа определяют полустепени исхода σ_i^+ и захода σ_i^-. Каждой вершине графа приписывают максимальную степень инциденции $m(x_i)$.

Иногда в нечётком графе между какими-то парами вершин есть несколько дуг или ребер. Такие графы называют *нечёткими мультиграфами*. Каждое ребро или дуга могут иметь различные степени инциденции с инцидентными им парами вершин $m(x_i, x_j)$. Поэтому каждая из них участвует в анализе нечеткого графа отдельно.

Пример. Неориентированный граф $G' = \{X, r'\}$, где $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ задан списком нечётких отношений

$$r' = \{0.7 | (x_1, x_2),\ 0.2 | (x_1, x_4),\ 0.1 | (x_1, x_5),\ 0.7 | (x_2, x_2),\ 0.8 | (x_2, x_5),\ 0.9 | (x_3, x_4),\ 0.3 | (x_3, x_5),$$
$$0.7 | (x_2, x_1),\ 0.2 | (x_4, x_1),\ 0.1 | (x_5, x_1),\ 0.4 | (x_3, x_3),\ 0.8 | (x_5, x_2),\ 0.9 | (x_4, x_3),\ 0.3 | (x_5, x_3)\ \}$$

Задать этот граф:

a) диаграммой,

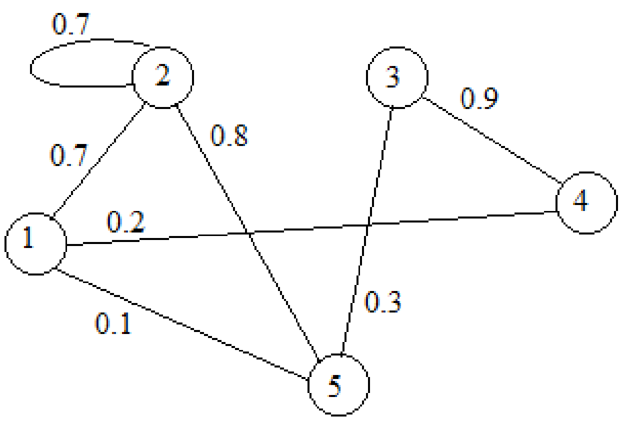
b) списком смежности,

c) матрицей смежности,

d) матрицей инцидентности, матрицей весов рёберно-взвешенного графа,

Решение.

a) диаграмма имеет вид



b) список смежности имеет вид:

x_i	h'_{xi}
x_1	$0{,}7/x_2$, $0{,}2/x_4$, $0{,}1/x_5$
x_2	$0{,}7/x_1$, $0{,}7/x_2$, $0{,}8/x_5$
x_3	$0{,}9/x_4$, $0{,}3/x_5$
x_4	$0{,}2/x_1$, $0{,}9/x_3$
x_5	$0{,}1/x_1$, $0{,}8/x_2$, $0{,}3/x_3$

c) матрица смежности:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0.7	0	0.2	0.1
x_2	0.7	0.7	0	0	0.8
x_3	0	0	0	0.9	0.3
x_4	0.2	0	0.9	0	0
x_5	0.1	0.8	0.3	0	0

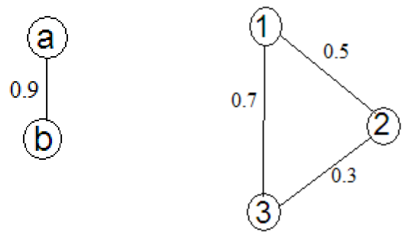
d) Матрицу инцидентности $Q(q_{ij})$ легко составить по диаграмме или по списку смежности. Она имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(x_1, x_2)	0.7	0.7			
(x_1, x_4)	0.2			0.2	
(x_1, x_5)	0.1				0.1
(x_2, x_2)		0.7			
(x_2, x_5)		0.8			0.8
(x_3, x_4)			0.9	0.9	
(x_3, x_5)			0.3		0.3

$P = (\ 0.7 \quad 0.8 \quad 0.9 \quad 0.9 \quad 0.8\ )$ – матрица весов.

Задачи для решения на занятии:

2. Даны нечёткие графы



Найти объединение, пересечение, сумму и прямое произведение этих графов.

3. Нечёткий граф $G'=\{X,r'\}$ задан матрицей смежности

2.1.

r ‘	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0.7	0	0	0.2	1
x_2	0.7	0	0.2	0.1	1	0.5
x_3	0	0.2	0	0.8	0.3	1
x_4	0	0.1	0.8	0	0.6	0
x_5	0.2	1	0.3	0.6	0	0
x_6	1	0.5	1	0	0	0

2.2.

r '	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0.2	0	0	0.8	1
x_2	0.2	0	0.2	0.1	1	0.5
x_3	0	0.2	0	0.8	0.8	0.7
x_4	0	0.1	0.8	0	0.6	0
x_5	0.8	1	0.8	0.6	0	0
x_6	1	0.5	0.7	0	0	0

2.3.

r '	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0.5	0.8	0	1
x_2	0.5	0	0.2	0.1	1
x_3	0.8	0.2	0	0.8	0
x_4	0	0.1	0.8	0	0.6
x_5	1	1	0	0.6	0.7

2.4.

r '	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	0.5	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0.6	0	0	0	0.2
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0.8	0	0.9	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	0.5	0.7	0

2.5.

r '	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0.5	0	0.8	0.3
x_2	0	0	0.2	0	0.6	0.9
x_3	0.5	0.2	0	1	0	0
x_4	0	0	1	0	0.5	0.7
x_5	0.8	0.6	0	0.5	0	0
x_6	0.3	0.9	0	0.7	0	0

2.7.

r '	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0.1	0.4	1	0.5
x_2	0.1	0	0.2	0.1	1
x_3	0.4	0.2	0	0.8	0.3
x_4	1	0.1	0.8	0	0.6
x_5	0.5	1	0.3	0.6	0

2.8.

r '	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0.2	0.5	0.1
x_2	0.5	0	0.2	0
x_3	0.5	0	0	0.8
x_4	0.9	0	0	0

2.9.

r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0.1	1	0.2	1	0
x_2	0.1	0	0.2	0.1	1	0.8
x_3	1	0.2	0	0.8	0.3	0
x_4	0.2	0.1	0.8	0	0.6	0.6
x_5	1	1	0.3	0.6	0	0.2
x_6	0	0.8	0	0.6	0.2	0

2.10.

r '	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0.1	0.8	0.5	0.9	0.7
x_2	0.1	0	0.2	0.1	1	1
x_3	0.8	0.2	0	0.8	0.5	0.4
x_4	0.5	0.1	0.8	0	0.6	1
x_5	0.9	1	0.5	0.6	0	0.2
x_6	0.7	1	0.4	1	0.2	0

2.11.

r '	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0.9	0	0	0
x_2	0.2	0	0.2	0	0
x_3	0	0.2	0	0.3	0.2
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0.2	1	0

2.6.

r'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0.1	0	0.2	0.1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	1	0.9	0	0
x_6	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0.4	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0.9	0	0	0	0.7	1
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0.7	0	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

2.12.

r'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0.2	0.7	0.5	1
x_2	0.2	0	0	0.8	0
x_3	0.7	0.4	0	0	0
x_4	0.9	0	0.6	0	0
x_5	0	0	0	1	0

q) Изобразить граф $G'=\{X,r'\}$ диаграммой, списком отношений и списком смежности.

r) Записать матрицу инцидентности графа $G'=\{X,r'\}$.

s) Записать матрицу достижимости графа $G'=\{X,r'\}$.

t) Граф $G'=\{X,r'\}$ является

- ☐ ориентированным
- ☐ неориентированным
- ☐ мультиграфом
- ☐ однородным
- ☐ неоднородным
- ☐ нуль-графом
- ☐ полным графом
- ☐ псевдографом
- ☐ связным
- ☐ деревом
- ☐ лесом
- ☐ Эйлеровым
- ☐ плоским
- ☐ двудольным
- ☐ взвешенным

u) Вершины x_2 и x_4 в графе $G'=\{X,r'\}$ являются

○ да ○нет	смежными
○ да ○нет	изолированными
○ да ○нет	взвешенными

v) в графе $G'=\{X,r'\}$ имеются

○ да ○ нет	Гамильтоновы циклы
○ да ○ нет	Эйлеровы циклы
○ да ○ нет	циклов нет

w) Число компонент связности k(G) графа $G'=\{X,r'\}$ равно ___.

x) Вершинная связность графа $G'=\{X,r'\}$ равна ___.

y) Рёберная связность графа $G'=\{X,r'\}$ равна ___.

z) Цикломатическое число графа $G'=\{X,r'\}$ равно ____.

aa) Хроматическое число графа $G'=\{X,r'\}$ равно ____.

bb) Минимальная правильная раскраска вершин графа $G'=\{X,r'\}$ имеет __ цвета.

cc) Минимальная правильная раскраска рёбер графа $G'=\{X,r'\}$ имеет ____ цвета.

dd) Толщина графа $G'=\{X,r'\}$ равна ____.

ee) Граф, заданный списком смежности

Вершины X	x_2	x_3	x_4	x_5
$h(X)$ – смежные к вершинам из первой строки	$0.2\,|\,x_3$, $0.1\,|\,x_4$	$0.8\,|\,x_4$	$0.1\,|\,x_2$	$1\,|\,x_2$, $0.6\,|\,x_4$

является:

○ да	○ нет	подграфом графа $G'=\{X,r'\}$
○ да	○ нет	частичным для графа $G'=\{X,r'\}$
○ да	○ нет	суграфом для графа $G'=\{X,r'\}$
○ да	○ нет	остовом графа $G'=\{X,r'\}$
○ да	○ нет	нет на все перечисленные выше подпункты

r) По матрице смежности исходного графа найти матрицу смежности для дополнения исходного графа.

s) Для всевозможных пар графов, из приведённых выше графов, найти: объединение, пересечение, композицию, соединение графов, прямое произведение.

4. Реберно-взвешенный граф задан списком отношений:

r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
$(x_i; xj)$	$0.4\|(x_1, x_3)$	$0.7\|(x_2, x_4)$	$0.5\|(x_2, x_5)$	$0.3\|(x_3, x_4)$	$0.9\|(x_3; x_5)$	$0.2\|(x_4; x_5)$
l_i	4	8	6	10	2	5

a) нарисуйте граф;

b) составьте матрицу инцидентности и матрицу смежности.

c) составьте матрицу весов.

d) укажите разрез для $V'=\{0.4|x_1, 0.7|x_2, 0.7|x_4\}$ и $X'\backslash V'$;

e) нарисуйте частичный граф на рёбрах $\{r_2, r_4, r_6\}$;

f) нарисуйте суграф на рёбрах $\{r_1, r_3, r_5, r_7\}$;

g) нарисуйте подграф на вершинах x_2, x_4, x_5, x_6;

Нечёткая логика.

Теория неопределённости (приближённых рассуждений)

Нечёткие алгоритмы и автоматы

Нечёткая логика

Нечёткие высказывания это предложения A', ***степень истинности*** $m_{A'}$ или ложности $m_{\overline{A'}}$, которых также принимает значение на интервале $[0; 1]$.

Нечёткие предикаты это высказывательные функции, аргументами которых являются *предметные переменные и предметные постоянные.* Степень истинности предметных переменных и высказывательных функций также принадлежит интервалу [0; 1].

Нечёткие формулы. Для формирования сложных высказываний используют логические связки отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции. Так формируются нечёткие логические формулы.

Нечёткое высказывание	Формула	Степень истинности
«не A'»	$\overline{A'}$	$m_{\overline{A'}} = 1 - m_{A'}$
«A' и B'»	$A' \wedge B' = A' \cap B'$	$m_{A' \wedge B'} = \min\{m_{A'},\ m_{B'}\}$
«A' или B'»	$A' \vee B' = A' \cup B'$	$m_{A' \vee B'} = \max\{m_{A'},\ m_{B'}\}$
«если A', то B'»	$A' \to B' = \overline{A'} \vee B'$	$m_{A' \to B'} = \max\{1 - m_{A'},\ m_{B'}\}$
«если A', то B'»	$A' \to B'$	Larsen $m_{A' \to B'} = m_{A'}\, m_{B'}$
«если A', то B'»	$A' \to B'$	Lukasiewicz $m_{A' \to B'} = \min\{1, 1 - m_{A'} + m_{B'}\}$
«если A', то B'»	$A' \to B' = A' \otimes B'$ Mamdani	$m_{A' \to B'} = \min\{m_{A'},\ m_{B'}\}$
«если A', то B'»	$A' \to B'$	Standard Strict

		$m_{A'\to B'} = \begin{cases} 1, & m_{A'} \le m_{B'} \\ 0, & m_{A'} > m_{B'} \end{cases}$
«если A', то B'»	$A' \to B'$	Godel $m_{A'\to B'} = \begin{cases} 1, & m_{A'} \le m_{B'} \\ m_{B'}, & m_{A'} > m_{B'} \end{cases}$
«если A', то B'»	$A' \to B'$	Gaines $m_{A'\to B'} = \begin{cases} 1, & m_{A'} \le m_{B'} \\ \dfrac{m_{B'}}{m_{A'}}, & m_{A'} > m_{B'} \end{cases}$
«A' эквивалентно B'»	$A' \leftrightarrow B' =$ $= (A' \to B') \wedge (B' \to A')$	$m_{A'\leftrightarrow B} = \min\{m_{A'\to B'}, m_{B'\to A}\}$
«если A', то B', иначе C'»	$((A' \to B'), C') =$ $= (A' \to B) \vee (\overline{A'} \to C)$	$m_{((A'\to B'), C')} =$ $= \max\{m_{A'\to B'},\ m_{A'\to C'}\}$

Равносильные формулы нечёткой логики высказываний

13. коммутативности

$a \wedge b = \mathrm{b} \wedge a, \qquad a \vee b = \mathrm{b} \vee a$

14. ассоциативности

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

15. дистрибутивности

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

16. де Моргана

$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}, \qquad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

17. идемпотентности

$a \wedge a = a, \qquad a \vee a = a$

18. $a \wedge 1 = a, \qquad a \vee 1 = 1$

19. $a \wedge 0 = 0, \qquad a \vee 0 = a$

Замечание. Законы противоречия и “третьего не дано” (двойного отрицания) для нечётких высказываний не выполняются.

Элементы теории неопределённости

(приближенных рассуждений)

Нечёткие алгоритмы и автоматы

Под приближенными рассуждениями понимается процесс, при котором из нечётких посылок получают некоторые следствия, возможно, тоже нечёткие.

Нечётким логическим выводом (fuzzy logic inference) называется аппроксимация зависимости каждой выходной лингвистической переменной от входных лингвистических переменных и получение заключения в виде нечёткого множества, соответствующего текущим значениям входов, с использованием нечеткой базы знаний и нечётких операций. Основу нечёткого логического вывода составляет *композиционное правило Заде*.

Композиционное правило вывода Заде (generalized modus ponens):

Предпосылка	$F' = (A' \rightarrow B')$
Событие	A^*
Вывод	$A^* \bullet F$

Здесь на предпосылку F' смотрим как на нечёткое отображение. Это правило имеет два отличия от формулировки правила вывода чёткой логики: во-первых, здесь допускается, что A', A^*', B' — нечёткие множества, и, во-вторых, A^*' необязательно идентично A'.

В общем случае *нечёткий вывод решения происходит за три (или четыре) шага*:

1) *этап фаззификации*. С помощью функций принадлежности всех термов входных лингвистических переменных и на основании задаваемых чётких значений из универсумов входных лингвистических переменных определяются степени уверенности в том, что выходная лингвистическая переменная принимает кон-

кретное значение. Эта степень уверенности есть ордината точки пересечения графика функции принадлежности терма и прямой $x =$ чёткое значение ЛП.

2) *этап непосредственного нечёткого вывода.* На основании набора правил (нечёткой базы знаний) вычисляется значение истинности для предпосылки каждого правила. Используя один из способов построения нечёткой импликации, мы получим для каждого правила соответствующую нечёткую переменную.

3) *этап композиции (агрегации, аккумуляции).* Все нечёткие переменные, полученные на 2-м шаге, объединяются вместе, и формируется единственное нечёткое множество — значение для каждой выводимой лингвистической переменной. Обычно используются функции **MAX** или **SUM**.

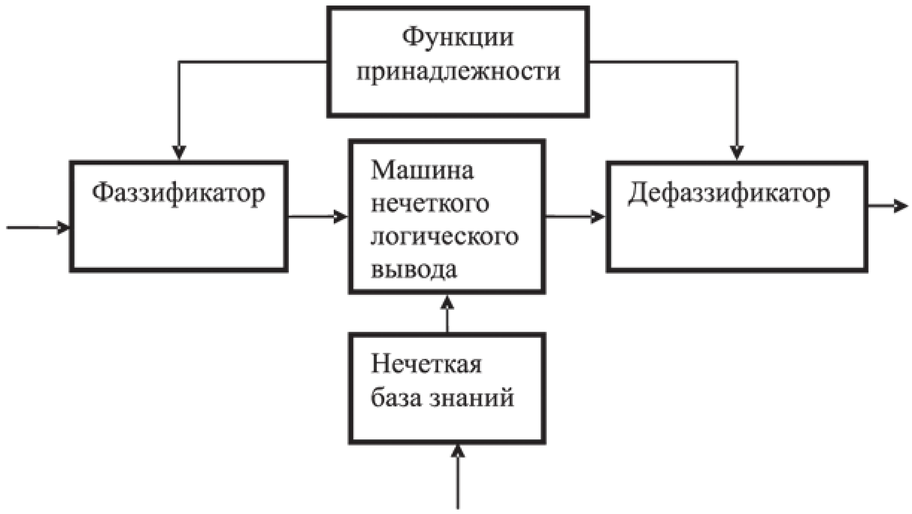
4) *этап дефаззификации (необязательный)*. Используется тогда, когда полезно преобразовать нечёткий набор значений выводимых лингвистических переменных к точным. Имеется достаточно большое количество методов перехода к точным значениям (по крайней мере, 30).

Процедура дефаззификации в теории нечётких множеств аналогична нахождению характеристик (математического ожидания, моды, медианы) случайных величин в теории вероятности. Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор чёткого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности (метод «максимума»). Однако пригодность этого способа распространяется лишь на одноэкстремальные функции принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности часто используются следующие методы дефаззификации:
1) ***COG*** (Center Of Gravity) — "центр тяжести" ("методы полной интерпретации"), т.е. нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечёткого множества.
2) ***MOM*** (Mean Of Maximums) — "центр максимумов". При использовании метода центра максимумов требуется найти среднее арифметическое элементов

универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежностей.

3) ***First Maximum*** — "первый максимум" — максимум функции принадлежности с наименьшей абсциссой.

Функциональная схема процесса нечёткого вывода в упрощенном виде представлена на приведённом ниже рисунке. На ней выполнение первого этапа нечёткого вывода — фаззификации — осуществляет фаззификатор. За процедуру непосредственно нечёткого вывода ответственна машина нечёткого логического вывода, которая производит второй этап процесса вывода на основании задаваемой нечёткой базы знаний (набора правил), а также этап композиции. Дефаззификатор выполняет последний этап нечёткого вывода — дефаззификацию.



Во многих случаях *нечёткий алгоритм* удобно представлять в виде ориентированного нечёткого графа. Каждой дуге ставят в соответствие инструкцию условия или инструкцию операции. Входные, выходные, внутренние переменные в *нечётком алгоритме* представляются нечёткими множествами. Выполнение алгоритма эквивалентно поиску в графе путей, связывающих помеченные вершины: начальные и конечные.

Автоматы, работающие с нечёткой входной информацией (с использованием, конечно, нечёткой базой знаний), аналогично чётким можно изобра-

жать как в виде графа, так и таблицей (см. главу 1, Языки и грамматики. Машина Тьюрига. Алгоритмы и автоматы) .

Пример. Пусть $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$– универсальные множества,

Найти B', более или менее равный $A'=$ МАЛЫЙ= $\{1|1, 0.6|2\}$, по правилу

F'=примерно равны=

F'	1	2	3	4
1	0,8	0,2	0,7	0,2
2	0,4	0,6	0,6	0,2
3	0	0,7	0,8	0,3
4	0	0,1	0,3	0,7

Решение. Этот приближенный вывод можно записать в виде

Предпосылка	$F = (U \to V)$ – примерно равны
Событие	A'
Вывод	$A' \bullet F$

Тогда получим

$$B' = A' \bullet F' = (1 \quad 0.6 \quad 0 \quad 0) \bullet \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\max\{\min\{1, 0.8\}, \min\{0.6, 0.4\}, \min\{0, 0\}, 0\} \quad \max\{0.4, 0.6, 0, 0\} \quad \max\{0, 0.6, 0, 0\} \quad 0.1 \right) =$$

$$= (0.8 \quad 0.6 \quad 0.6 \quad 0.1)$$

что можно проинтерпретировать следующим образом:

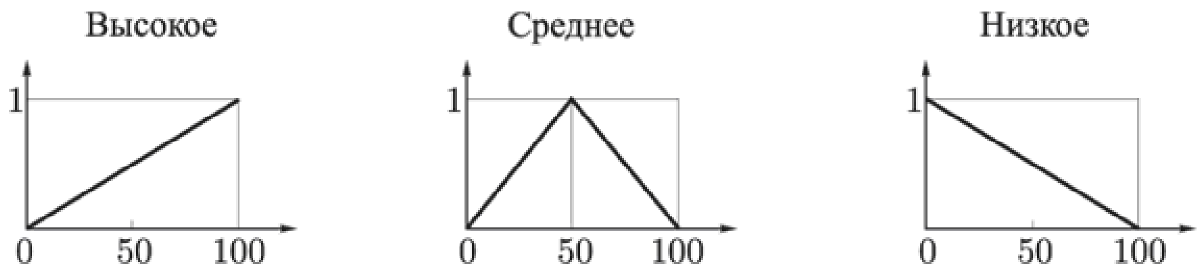
В = БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ МАЛЫЙ,

если терм БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ определяется как оператор увеличения нечеткости.

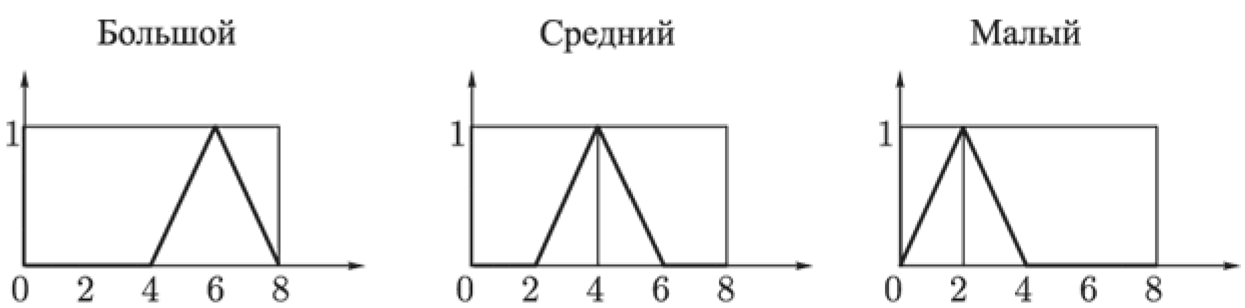
Пример. Работа реактора описывается тремя параметрами: температура, давление и расход рабочего вещества. Все показатели измеримы, множества возможных значений известны. Графики функций принадлежности имеют вид:

Температура. Множество возможных значений [0, 150].

Давление. Универсум — отрезок [0, 100].



Расход. Универсум — отрезок [0, 8].



Также из опыта работы с системой известны некоторые правила:

- если Температура низкая и Расход малый, то Давление низкое;

- если Температура средняя, то Давление среднее;
- если Температура высокая или Расход большой, то Давление высокое,

связывающие значения этих параметров.

Предположим, что сломался датчик, измеряющий давление, но знать его показания необходимо хотя бы приблизительно. Показатели двух других параметров известны: температура 85 и расход 3.5.

Решение. Введём обозначения:

$T_н$ – температура низкая,
$T_с$ – температура средняя,
$T_в$ – температура высокая,

$Д_н$ – давление низкое,
$Д_с$ – давление среднее,
$Д_в$ – давление высокое,

$P_м$ – расход малый,
$P_с$ – расход средний,
$P_б$ – расход большой.

Запишем правила работы реактора в этих обозначениях:

- $T_н \wedge P_м \rightarrow Д_н$
- $T_с \rightarrow Д_с$
- $T_в \vee P_б \rightarrow Д_в$

По условию известны: $T = 85,\ P = 3.5.$ Произведем расчет значения давления.

Этап 1. Фаззификация. По заданным значениям входных параметров найдем степени уверенности простейших утверждений:

$$T_в = 0.7 \quad T_с = 1,\ T_н = 0.3, \quad P_б = 0,\ \ P_с = 0.75,\ \ P_м 0.25.$$

Этап 2. Непосредственный нечёткий вывод. Вычислим степени уверенности посылок правил:

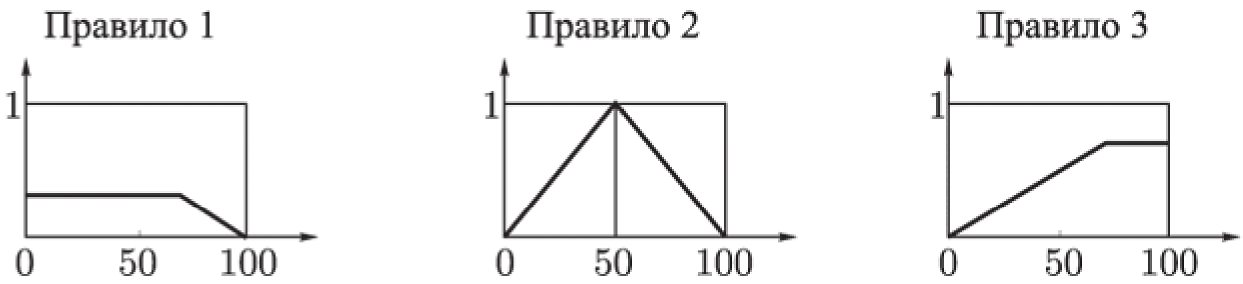
$$m_{T_н \wedge P_м}(85, 3.5) = \min\left\{m_{T_н}(85), m_{P_м}(35)\right\} = \min\left\{0.3, 0.25\right\} = 0.25,$$

$$m_{T_с}(85) = 1,$$

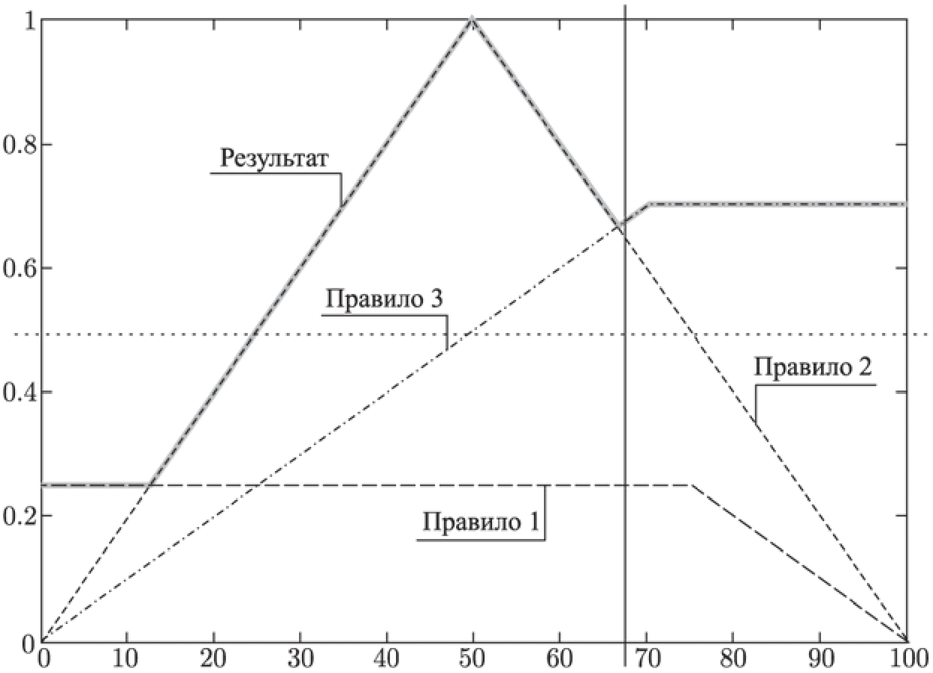
$$m_{T_в \vee P_б}(85, 3.5) = \max\left\{m_{T_в}(85), m_{P_б}(3.5)\right\} = \max\ \left\{0.7, 0\right\} = 0.7$$

Степень уверенности посылки мы вычислили, а степень уверенности заключения задается функцией принадлежности соответствующего терма. Поэтому, используя один из способов построения нечёткой импликации, мы получим новую нечёткую переменную, соответствующую степени уверенности в значении выходных данных при применении к заданным входным соответствующего правила. Используя определение нечёткой импликации как минимума левой и правой частей (определение Mamdani), имеем:

$$
\begin{aligned}
&m_{T_{\text{н}} \wedge P_{\text{м}} \to \text{Д}_{\text{н}}}(85, y) = \min\left\{m_{T_{\text{н}} \wedge P_{\text{м}}}(85),\ m_{\text{Д}_{\text{н}}}(y)\right\} = \min\left\{m_{T_{\text{н}} \wedge P_{\text{м}}}(85),\ m_{\text{Д}_{\text{н}}}(y)\right\} = \\
&m_{T_c \to \text{Д}_c}(85, \mathrm{y}) = \min\left\{m_{T_c}(85), m_{\text{Д}_c}(y)\right\} = \min\left\{1, m_{\text{Д}_c}(y)\right\}, \\
&m_{T_{\text{в}} \vee P_{\text{б}} \to \text{Д}_{\text{в}}} = \min\left\{m_{T_{\text{в}} \vee P_{\text{б}}}(85), m_{T_{\text{в}} \vee P_{\text{б}}}(y)\right\} = mix\ \left\{0.7, m_{T_{\text{в}} \vee P_{\text{б}}}(y)\right\}.
\end{aligned}
$$



3 этап. Этот этап называется аккумуляцией. Теперь необходимо объединить результаты применения всех правил. Один из основных способов аккумуляции — построение максимума полученных функций принадлежности. Получаем:

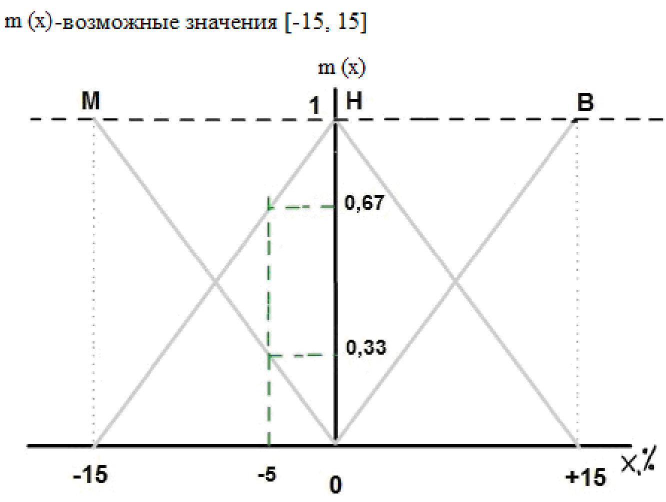


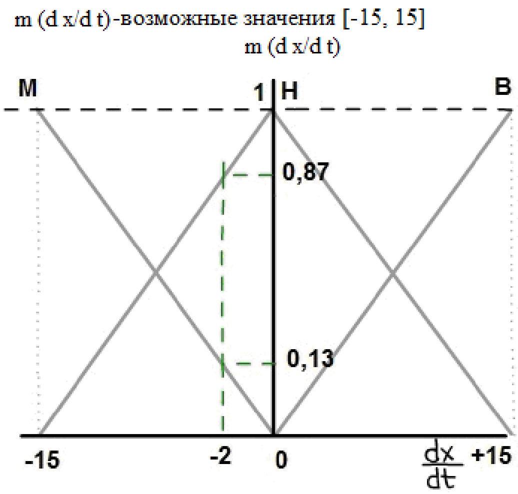
Полученную функцию принадлежности уже можно считать результатом. Это новый терм выходной переменной Давление. Его функция принадлежности говорит о степени уверенности в значении давления при заданных значениях входных параметров и использовании правил, определяющих соотношение входных и выходных переменных. Но обычно все-таки необходимо какое-то конкретное числовое значение. Для его получения используется этап дефаззификации, т.е. получения конкретного значения из универса по заданной на нем функции принадлежности.

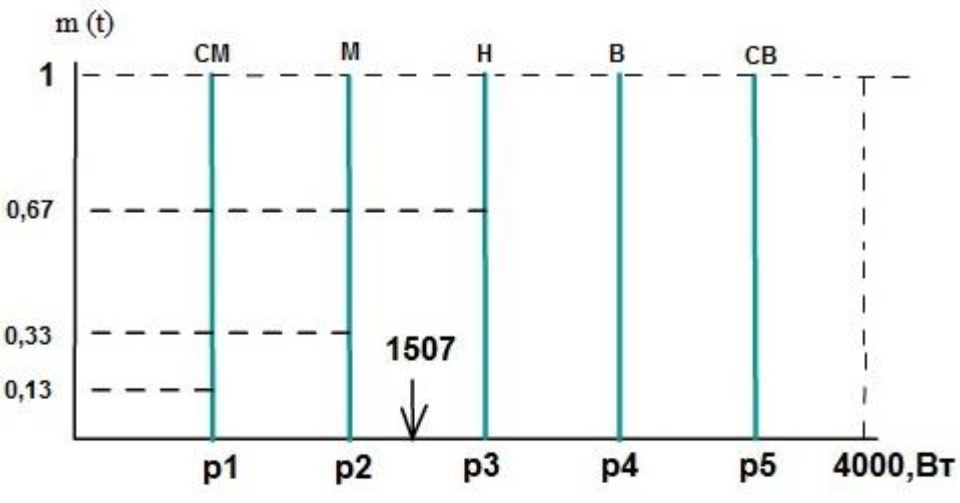
4 этап. Дефаззификация. Существует множество методов дефаззификации, но в нашем случае достаточно метода первого максимума. Применяя его к полученной функции принадлежности, получаем, что значение давления – 50. Таким образом, если мы знаем, что температура равна 85, а расход рабочего вещества – 3,5, то можем сделать вывод, что давление в реакторе равно примерно 50.

Задачи для решения на занятии:

1. Работа зерносушилки описывается тремя параметрами: x, $\frac{dx}{dt}$ и P. Все показатели измеримы, множества возможных значений известны. В качестве входных величин используется отклонение x от нормы между заданной и текущей влажностью зерна, которая измеряется влагомером, установленным внутри зерносушилки, и скоростью $\frac{dx}{dt}$ изменения этой влажности. В качестве выходной - P. Графики функций принадлежности имеют вид:







Примем значения мощностей калорифера: $P_1 = 250$; $P_2 = 1000$; $P_3 = 2000$; $P_4 = 3000$; $P_5 = 3700$.

Совокупность всех правил, по которым работает зерносушилка, представлена в виде таблицы, в которой столбцы соответствуют условиям одного параметра, строки — условиям другого параметра, а на их пересечениях записываются выводы, соответствующие этим условиям.

Отклонение влажности (x)	Скорость изменения влажности (dx/dt)		
	М	Н	В
М	СМ	М	Н
Н	М	Н	В
В	Н	В	СВ

Здесь отклонение влажности x (М-уменьшить, Н-норма и В-увеличить), скорость $\frac{dx}{dt}$ изменения влажности (М-меньше, Н- норма и В-увеличить).

Управление температурой подаваемого воздуха (мощностью P калорифера) представим пятью термами: сильно уменьшить (СМ), уменьшить (М), норма (Н), увеличить (В) и сильно увеличить (СВ).

Пусть имеет место отклонение влажности, равное минус 5%, она продолжает снижаться со скоростью минус 2%. Каким тогда должно быть значение установки мощности P калорифера?

Приложение 1.

Законы алгебры чётких множеств

- *коммутативности*: $(A \cup B) = (B \cup A)$ и $(A \cap B) = (B \cap A)$;
- *ассоциативности*: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- *дистрибутивности*: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- *идемпотентности*: $A \cap A = A$ и $A \cup A = A$;
- *поглощения*: $A \cap (A \cup B) = A$ и $A \cup (A \cap B) = A$;
- *противоречия*: $A \cap \rceil A = \varnothing$, $A \cup \rceil A = U$;
- *двойного отрицания*: $\rceil(\rceil A) = A$;
- *закон де Моргана*: $\rceil(A \cup B) = \rceil A \cap \rceil B$ и $\rceil(A \cap B) = \rceil A \cup \rceil B$;
- *свойства универсального и пустого множества*:

  $A \cup U = U$ и $A \cap U = A$, $A \cup \varnothing = A$ и $A \cap U = A$.

Отношения чёткой теории множеств

Бинарное отношение рефликсивно, если для каждого $x_i \in X$ имеем $r(x_i; x_i)=1$. Такими отношениями являются “..=..”, “..быть похожим..”, “..быть изоморфным..”, “..быть эквивалентным..” и т.п. При матричном описании такого отношения на главной диагонали матрицы будут только “1”, т.е. $r(x_i, x_i)=1$.

Бинарное отношение антирефлексивно, если для каждого $x_i \in X$ имеем $r(x_i, x_i)=0$.

Такими отношениями являются “..>.. ”, “..<..”, “..быть родителем..”, “..быть частью..” и т.п..

При матричном описании такого отношения на главной диагонали матрицы будут только “0”, т.е. $r(x_i, x_i)=0$.

Бинарное отношение симметрично, если для любой пары $(x_i, x_j) \in R$ при $i \neq j$ имеем $r(x_i, x_i)=r(x_j, x_i)=1$. Такими отношениями являются “..≠..”, “..быть похожим..”, “..быть эквивалентным..”, “..быть родственником..” и т.п.. При матричном задании такого отношения будет симметричное расположение “1” относительно главной диагонали, т.е. $r(x_i, x_i)=r(x_j, x_i)$.

Бинарное отношение антисимметрично, если для любой пары (x_i, x_j) при $i \neq j$ имеем $r(x_i, x_i) \neq r(x_j, x_i)$, а при $i=j$ имеем $r(x_i, x_i)=1$. Такими отношениями являются “..≥..”, “..≤..” и т.п.. При матричном задании такого отношения это означает несимметричное расположение “1” относительно главной диагонали и наличие “1” на главной диагонали.

Бинарное отношение асимметрично, если для любой пары (x_i, x_j) при $i \neq j$ имеем $r(x_i, x_i) \neq r(x_j, x_i)$, а при $i=j$ имеем $r(x_i, x_i)=0$.. Такими отношениями являются “..>..”, “..<..”, “быть родителем” и т.п. При матричном задании такого отношения это означает несимметричное расположение “1” относительно главной диагонали и наличие “0” на главной диагонали.

<u>*Бинарное отношение транзитивно*</u>, если для любых элементов x_i, x_j, $x_k \in X$ $r(x_i, x_i)=1$ тогда и только тогда, когда $r(x_i, x_k)=1$ и $r(x_k, x_i)=1$. Такими отношениями являются “..>..”, “..<..”, “быть родителем”, “быть родственником” и т.п..

Наиболее изученными классами отношений являются отношения эквиваленции, частичного и строгого порядка.

Бинарное отношение, удовлетворяющее условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности формируют класс *отношений эквиваленции*.

Такими отношениями являются “..=..”, “..быть похожим..”, “..быть родственником..”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моделирование систем. В 2 ч. Ч. 1. Основы системотехники и исследования систем: курс лекций / К.Н. Мезенцев; под ред. д-ра техн. наук, проф. А.Б. Николаева. – М.: МАДИ, 2017. – 84 с., http://lib.madi.ru/fel/fel1/fel18E454.pdf .
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.:Советское радио, 1972.
3. Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В. Дискретная математика: учеб. для студентов втузов.–М.: АСТ: Астрель, 2006. –477 с.
4. Губин Н.М., Добронравов А.С., Дорохов Б.С. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи. М.: Радио и связь, 1993.
5. Журбенко Л.Н. Никонова Г.А., Никонова Н.В. и др. Высшая математика в примерах и задачах (Прикладные вопросы анализа. Элементы теории вероятностей и математической статистики).– Казань: КГТУ, 2002, 92 с.
6. Ляшенко И.Н. Карагодова Е.А. и др. Линейное и нелинейное программирование.–Киев: Изд-е обединение «Вища школа», 1975.-372 с.
7. Пономарев В. Ф. Дискретная математика для инженеров.–М.: Горячая линия – Телеком, 2009.–320 с.
8. Сетевое планирование и управление. Под ред. Д.И.Голенко. М., Экономика, 1967.
9. Сетевые графики в планировании. Под ред. Разумова. М., Высшая школа, 1975.
10. Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решений.–М., Аудит, ЮНИТИ, 1997.
11. Яхъяева Г.Э. Нечёткие множества и нейронные сети. Серия: Основы информационных технологий. Учебное пособие.–М.: Бином. Лаборатория знаний Интуит, 2012.–316 с.

Содержание

Шустова Евгения Петровна

М А Т Е М А Т И К А

Дискретная математика. Элементы теории нечётких множеств.

П Р А К Т И К У М

учебное пособие

Корректура автора

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Казань, ул. Кремлевская, д.18