

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра общей физики

И.Н. ГРАЧЕВА, Е.А. ФИЛИППОВА, А.И. ФИШМАН

ДИФРАКЦИЯ. МЕТОД ФАЗОВЫХ ДИАГРАММ

Казань – 2022

УДК 535.422
ББК 22.34

*Принято на заседании кафедры общей физики
Протокол № 6 от 31 марта 2022 года*

Рецензент:

кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Центра
квантовых технологий **Р.В. Юсупов**

Грачева И.Н., Филиппова Е.А., Фишман А.И.

Дифракция. Метод фазовых диаграмм / И.Н. Грачева, Е.А. Филиппова, А.И. Фишман. – Казань: Казан. ун-т, 2022. – 28 с.

Учебно-методическое пособие «Дифракция. Метод фазовых диаграмм» предназначено для студентов-бакалавров 1-2 года обучения, изучающих раздел курса общей физики «Оптика». В пособии описывается метод расчета дифракционных картин в ближней зоне дифракции с помощью фазовых диаграмм. Рассмотрены примеры решения задач дифракции света на круглых амплитудных и фазовых оптических элементах. Даются базовые представления о киноформной оптике.

Настоящее пособие может быть использовано во время семинарских занятий, в ходе самостоятельной работы и при выполнении работ общего физического практикума по курсу «Оптика» студентами физических и нефизических специальностей.

© Грачева И.Н., Филиппова, Е.А., Фишман А.И., 2022
© Казанский федеральный университет, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Дифракция.....	4
Метод фазовых диаграмм.....	7
Дифракция Френеля на круглых преградах	8
Зонная пластинка. Киноформная оптика.....	17
Примеры решения задач.....	22

Дифракция

Под дифракцией света понимают отклонения от законов геометрической оптики. В явлениях дифракции проявляется волновая природа света.

Представим простейшую установку для наблюдения дифракции света: точечный источник света, препятствие в виде непрозрачного круглого диска небольшого диаметра и экран для наблюдения на некотором расстоянии за диском. При этом центры всех элементов установки лежат на одной оси, а плоскости диска и экрана к ней перпендикулярны. Если следовать законам геометрической оптики, то можно предположить, что на экране будет наблюдаться тень от диска круглой формы (рис. 1а).



Рис. 1. Тень от непрозрачного диска на экране:

а) предсказание геометрической оптики; б) наблюдаемая картина

В действительности картина освещенности, наблюдаемая на экране, будет гораздо более сложной, особенно на границе света и тени, как показано на рис. 1б. Что особенно удивительно, в центре дифракционной картины напротив центра непрозрачного диска наблюдается светлое пятно! Как показывает практика, чем больше размеры диска-препятствия, тем ближе наблюдаемая картина будет к ситуации, изображенной на рис. 1а. Дифракция света на препятствиях имеет место всегда, однако масштабы и контрастность дифракционных картин сильно зависят от формы препятствий и соотношения размеров препятствий и длины волны света. В дальнейшем мы будем говорить о препятствиях (непрозрачных дисках, отверстиях и щелях), характерные размеры которых превосходят длину волны видимого излучения не более чем в 1000 раз ($\sim 0,1 \dots 1$ мм).

Основные дифракционные явления можно проанализировать на основе принципа Гюйгенса, дополненного Френелем. Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка пространства, до которой дошла световая волна, является вторичным источником сферических волн, которые распространяются во всех возможных направлениях. Дополнение Френеля состоит в том, что вторичные источники когерентны, и полное световое поле волны есть результат сложения вторичных волн с учетом их амплитуды и фазы. Таким образом, задача сводится к рассмотрению интерференции вторичных волн в точке наблюдения.

Пусть свет от некоторого точечного монохроматического источника S с частотой колебаний ω падает на отверстие σ в непрозрачном экране (рис. 2).

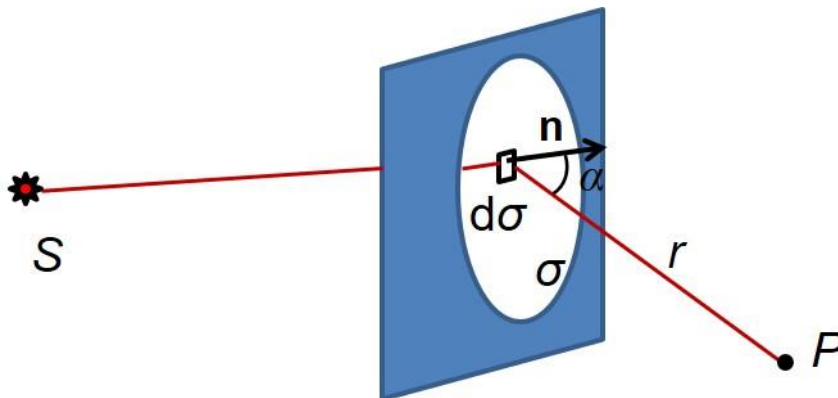


Рис. 2. Отверстие в непрозрачном экране как совокупность источников вторичных волн

Найдём интенсивность волны в точке P за экраном.

Разделим отверстие на элементарные участки с площадью $d\sigma$, каждый из которых выступает как источник вторичной сферической волны с амплитудой, пропорциональной $d\sigma$. В методе Френеля предполагается, что амплитуда световой волны в открытой части экрана такая же, как и при отсутствии экрана.

Амплитуда колебания, приходящего в точку P от участка отверстия $d\sigma$, должна быть пропорциональна амплитуде первичной волны E_0 . Учтем, что вторичные волны являются сферическими, следовательно, при удалении от отверстия амплитуда световой волны будет убывать обратно пропорционально расстоянию от экрана до точки наблюдения. Также Френель ввел дополнительный коэффициент пропорциональности K , который убывает с ростом угла α между

нормалью \mathbf{n} к участку поверхности $d\sigma$ и направлением на точку наблюдения P . При угле $\alpha = \pi/2$ коэффициент K обращается в 0. Таким образом, от произвольного участка $d\sigma$ в точку P приходит световое колебание

$$d\xi = K(\alpha) \frac{E_0 d\sigma}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (1.1)$$

здесь k – волновое число.

Результирующее колебание в точке P от всех участков отверстия σ будет представлять собой суперпозицию элементарных колебаний

$$\xi = \int_{\sigma} K(\alpha) \frac{E_0 d\sigma}{r} \cos(\omega t - kr). \quad (1.2)$$

Строгий математический расчет дифракционной картины по формуле (1.2) представляет собой, вообще говоря, нетривиальную задачу. В настоящее время существует множество численных методов для решения этой задачи с использованием современных программных продуктов. Однако в некоторых простейших случаях, отличающихся высокой симметрией, интегрирование может быть заменено наглядным геометрическим суммированием векторов на фазовой диаграмме. Каждый вектор на фазовой диаграмме соответствует колебанию в точке P от определенного открытого участка волновой поверхности $d\sigma$, а их векторная сумма представляет собой результирующее колебание в этой точке.

Метод фазовых диаграмм

В методе фазовых (векторных) диаграмм гармоническое колебание представляется в виде проекции на ось x вектора, длина которого соответствует амплитуде колебания, а угол, составляемый с осью x , представляет собой фазу колебания в данный момент. На рис. 3 два вектора a_1 и a_2 соответствуют колебаниям напряжённости в точке P , вызванным волнами от двух источников. Одно колебание с амплитудой a_1 и фазой φ_1 , второе с амплитудой a_2 и фазой φ_2 .

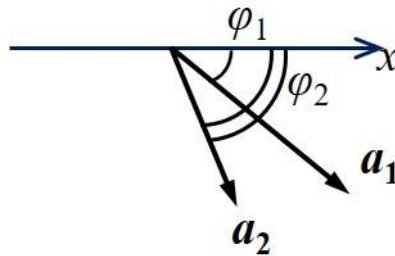


Рис. 3. Представление гармонических колебаний на фазовой диаграмме

Эти векторы вращаются *по часовой стрелке* с угловой скоростью ω , равной частоте излучения источников.

Для того чтобы найти результат суперпозиции двух и более колебаний, нужно сложить векторы на фазовой диаграмме, которые соответствуют данным колебаниям. В случае большого количества слагаемых, векторы удобно складывать методом многоугольника. Для этого нужно последовательно пристраивать векторы один за другим так, чтобы начало последующего вектора совпадало с концом предыдущего. Суммой векторов будет вектор, соединяющий начало первого вектора и конец последнего, как показано на рис. 4. Здесь вектор **A** представляет собой результат суперпозиции четырех различных колебаний.

Отметим, что когда мы говорим об амплитуде светового колебания, мы имеем в виду амплитуду напряженности электрического поля электромагнитной волны. Подавляющее большинство детекторов оптического излучения, включая глаз человека, регистрируют интенсивность света, величину, пропорциональную квадрату амплитуды напряженности. Следовательно, чтобы определить

интенсивность в данной точке дифракционной картины, нужно найти амплитуду светового колебания, пришедшего в эту точку, и возвести ее в квадрат.

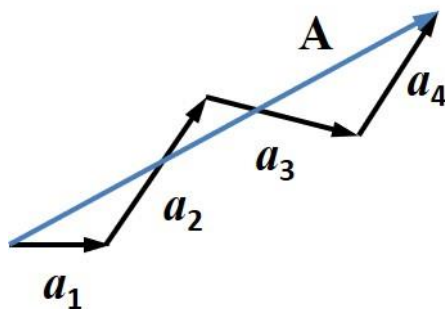


Рис. 4. Пример нахождения суммы векторов на фазовой диаграмме

Дифракция Френеля на круглых преградах

Все дифракционные явления условно делят на два типа: дифракцию Френеля и дифракцию Фраунгофера. Про дифракцию Фраунгофера говорят, когда дифракционная картина наблюдается на значительном удалении от отверстия или преграды. В этом случае волны, приходящие в точку наблюдения, можно считать плоскими. В установках для наблюдения дифракции Фраунгофера источник света и экран для наблюдения либо сильно удалены от препятствия, на котором осуществляется дифракция, либо параллельные пучки света формируются с помощью системы линз. Теория для расчета дифракционных картин в параллельных пучках света хорошо развита и имеет широкое практическое применение.

В данном пособии мы сосредоточимся на описании дифракции Френеля, когда на препятствие падает сферическая или плоская волна, а экран находится на относительно небольшом удалении от препятствия. В этом случае лучи, идущие в точку наблюдения, формируют сходящийся пучок. Для определения интенсивности света, приходящего в определенную точку экрана, будем пользоваться методом фазовых диаграмм.

Френель предложил разделять волновую поверхность σ на зоны (зоны Френеля), конфигурация которых повторяет симметрию преграды на пути распространения светового пучка. Пусть, например, точечный источник освещает

круглое отверстие в непрозрачном экране. Необходимо найти интенсивность света в точке P , расположенной на прямой, соединяющей точечный источник и центр круглого отверстия. В этом случае удобно разбить волновую сферическую поверхность на кольцевые зоны с центром на оси симметрии. Радиус зон выбирается таким образом, что расстояния от краев соседних зон до точки наблюдения P отличались на половину длины волны излучения $\lambda/2$ (см. рис. 5). При этом первая зона Френеля представляет собой поверхность шарового сегмента. Обозначим расстояние от точечного источника до интересующей нас волновой поверхности через a – это расстояние от точечного источника до краев круглого отверстия. Если расстояние между источником и точкой наблюдения равно L , то введем параметр b , равный $L - a$.

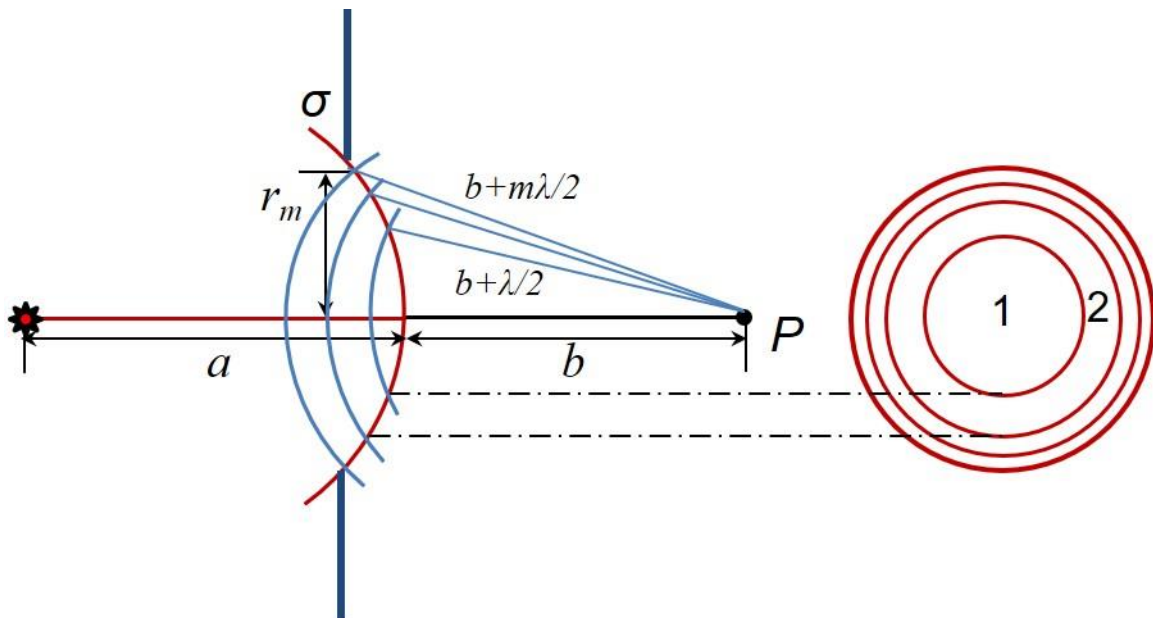


Рис. 5. Разбиение волновой поверхности в области отверстия на кольцевые зоны Френеля. Справа – вид зон Френеля на сферической поверхности σ при взгляде на неё из точки P

Тогда расстояние от границы первой зоны Френеля до точки P будет равно $b + \lambda/2$, расстояние от границы второй зоны Френеля до точки P равно $b + 2 \cdot \lambda/2$ и т.д. Внешняя граница m -ой кольцевой зоны Френеля удалена от точки наблюдения P на расстояние $b + m \cdot \lambda/2$. При таком способе разбиения на зоны разность фаз волн, приходящих от границ соседних зон, остаётся постоянной и равна π .

Можно показать, что площади зон Френеля при таком разбиении будут одинаковыми.

Обозначим радиус m -й зоны (длину перпендикуляра, опущенного из любой точки внешнего края m -ой зоны на прямую, соединяющую источник света и точку наблюдения) через r_m . Поскольку расстояния $a \gg \lambda$ и $b \gg \lambda$, можно показать [2, 4], что r_m выражается формулой:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}. \quad (1.3)$$

Оценим размер зон Френеля. Если $a = b = 1$ м, $\lambda = 500$ нм, то радиус первой зоны

Френеля $r_1 = \sqrt{\frac{500 \cdot 10^{-9}}{2}} = 5 \cdot 10^{-4}$ м = 0,5 мм. Радиус второй зоны Френеля

$r_2 = 0,7$ мм.

Предложенный подход можно использовать и в случае падения на экран плоской волны. Для этого в формуле (1.3) нужно устремить расстояние a к бесконечности. Тогда для радиуса m -ой зоны Френеля получается выражение:

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}. \quad (1.4)$$

Таким образом, зная длину волны света, расстояния от точечного источника до *отверстия* в экране и от экрана до точки наблюдения, можно определить количество открытых зон Френеля.

Для поиска амплитуды светового поля и интенсивности в точке P воспользуемся методом фазовых диаграмм. Разобьем поверхность каждой зоны на множество кольцевых подзон, как это показано на рис. 6 для первой зоны Френеля. Радиусы подзон выбираем таким образом, чтобы разность фаз колебаний, приходящих от соседних зон, оставалась постоянной. Световому колебанию, пришедшему в точку P от каждой узкой кольцевой подзоны, соответствует вектор a на фазовой диаграмме. На рис. 6 вектор a' изображает колебание напряжённости поля в точке P , вызванное вторичной световой волной от первой подзоны первой зоны Френеля. Начало каждого последующего вектора совпадает с концом предыдущего, при этом каждый раз вектор поворачивается против часовой

стрелки на один и тот же угол, равный разности фаз между колебаниями от волн от двух соседних подзон. Фаза волны, приходящей в точку P от края первой зоны Френеля, меньше фазы волны, пришедшей от центральной части, на π (векторы a' и a'' на рис. 6). Цепочка векторов a формирует половину окружности; их сумма будет представлять собой вектор A_1 , направленный по диаметру окружности.

Если открыта только одна первая зона Френеля и закрыты все остальные, интенсивность световой волны в точке наблюдения P будет пропорциональна квадрату длины вектора A_1 .

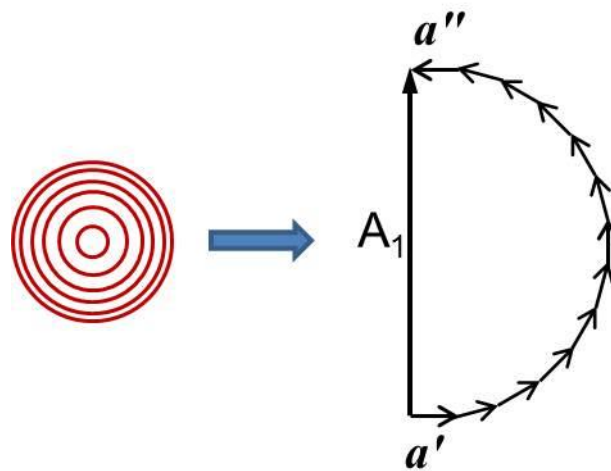


Рис. 6. Построение на фазовой диаграмме вектора A_1 , который соответствует действию первой зоны Френеля

Теперь рассмотрим ситуацию, когда в открытом отверстии помещаются две зоны Френеля, первая и вторая. Вторую зону также разобьём на подзоны и изобразим их вклад на векторной диаграмме (см. рис. 7). Волне от внешнего края второй зоны соответствует вектор a''' . Разность фаз между векторами a' и a''' равна 2π . Поскольку из-за коэффициента K длина каждого последующего вектора на фазовой диаграмме будет незначительно меньше, чем предыдущего, вместо замкнутой окружности образуется виток спирали, как показано на рис. 7. Соединяя начало первого вектора и конец последнего, мы получаем вектор $A_1 + A_2$, который соответствует действию двух открытых зон Френеля: первой и второй. Очевидно, что длина его много меньше, чем длина вектора A_1 , и интенсивность света в центре дифракционной картины будет близка к 0. Тот же результат

получится, если будет открыто любое другое четное количество зон Френеля. Если же в отверстии помещается нечетное количество зон Френеля, например, 1-ая, 2-ая и 3-я, то результат интерференции трех световых колебаний будет практически таким же, как от одной открытой 1-ой зоны, поскольку сумма колебаний от 2-ой и 3-ей зоны с учетом их близких амплитуд и разности фаз в π близка к 0 (см. рис. 7б).

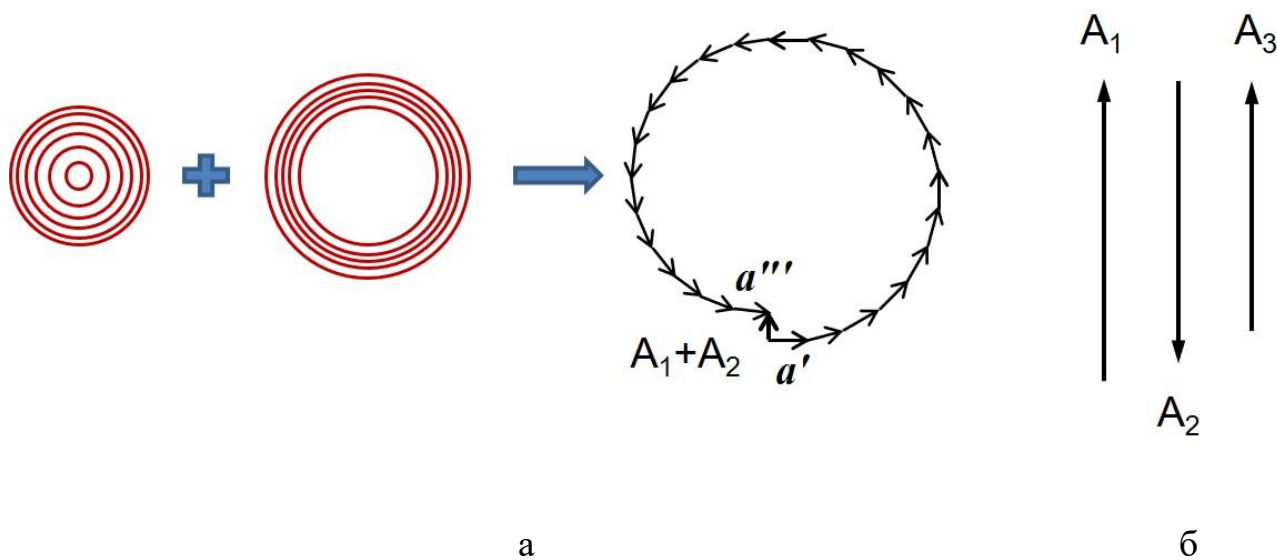


Рис. 7. а) Построение на фазовой диаграмме вектора $A_1 + A_2$, который соответствует совместному действию первой и второй зон Френеля. б) Векторы A_1 , A_2 и A_3 , соответствующие открытым по отдельности первой, второй и третьей зонам

Теперь мысленно уберем экран с отверстием и определим, используя принцип Гюйгенса-Френеля, интенсивность в точке P при полностью открытом волновом фронте. При этом световое колебание в точке наблюдения – это результат интерференции от очень большого числа открытых зон Френеля (в пределе – бесконечного). Каждая следующая открытая зона будет соответствовать полувитку спирали на фазовой диаграмме. Мы получили спираль Френеля (см. рис. 8). Результатом суммы всех векторов на спирали Френеля будет вектор A_0 – вектор, изображающий напряжённость светового поля в точке P при полностью открытом волновом фронте. Очевидно, что длина вектора A_1 примерно в два раза больше длины вектора A_0 . Поэтому можно заключить, что если открыта только

первая зона Френеля, то интенсивность света в точке наблюдения будет в 4 раза больше, чем при полностью открытом фронте волне.

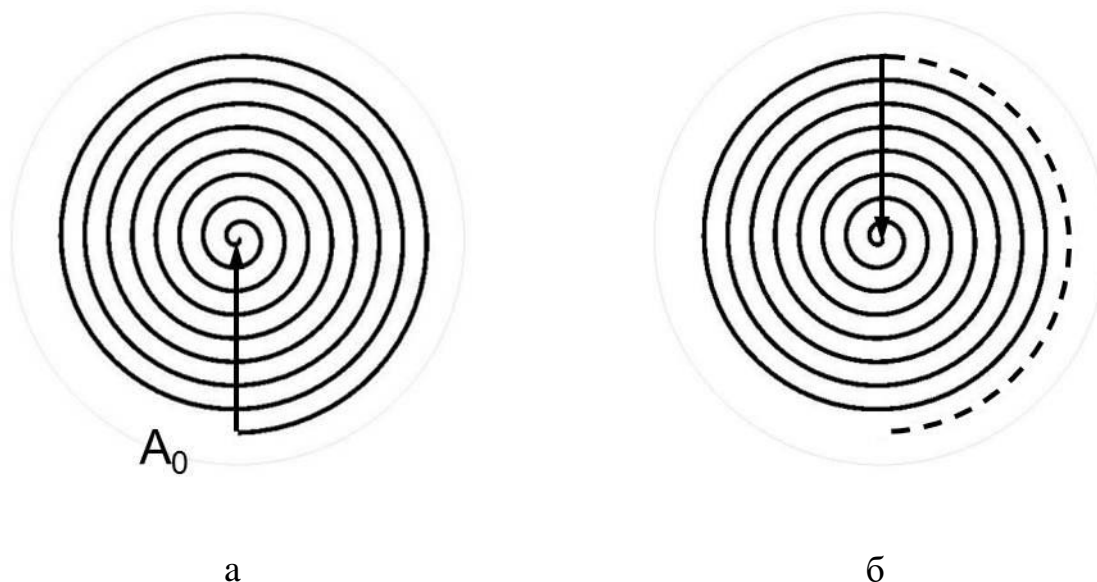


Рис. 8. а) Спираль Френеля и вектор A_0 , соответствующий полностью открытому волновому фронту. б) Спираль Френеля и вектор, соответствующий колебанию в центре дифракционной картины при дифракции на непрозрачном диске, закрывающем первую зону Френеля

Определим с помощью спирали Френеля интенсивность света в центре дифракционной картины, когда между точечным источником и точкой наблюдения расположен непрозрачный диск, закрывающий первую зону Френеля.

В этом случае открыты все зоны Френеля, начиная со второй. Это значит, что начало вектора результирующего колебания на спирали Френеля совпадает с началом второго полувитка спирали, в самой ее верхней точке, а конец вектора – с центром спирали, как на рис. 8б.

Значит, интенсивность света в центре дифракционной картины практически такая же, как и в отсутствии диска при полностью открытом волновом фронте. Светлое пятно в центре дифракционной картины, образующейся от непрозрачного круглого диска, называется пятном Пуассона. Обратите внимание, если мы будем постепенно увеличивать диаметр диска, начало вектора будет скользить

по спирали, при этом конец будет оставаться все время в одной точке – в фокусе спирали. Интенсивность пятна Пуассона будет плавно уменьшаться.

Рассмотрим ситуацию, когда на пути распространения плоской световой волны находится круглый прозрачный стеклянный диск, закрывающий полторы зоны Френеля. Найдём интенсивность волны в точке P .

Внесение стеклянного диска приводит к уменьшению фазы световой волны, проходящей через диск, на величину φ , равную:

$$\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nh - h) = \frac{2\pi h}{\lambda_0}(n - 1), \quad (1.5)$$

где Δ - оптическая разность хода, вносимая диском, h - толщина диска, n - показатель преломления стекла, λ_0 - длина волны света в вакууме.

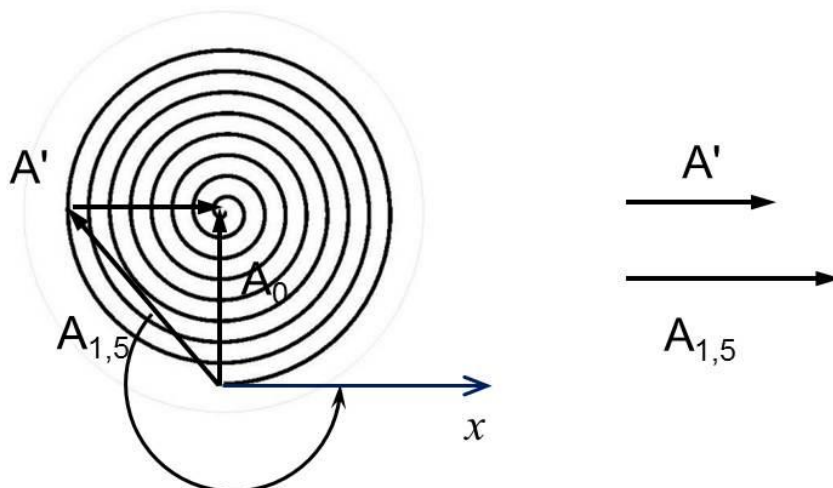


Рис. 9. Векторы на фазовой диаграмме, соответствующие вкладам от полутора ($\mathbf{A}_{1,5}$) и остальных (\mathbf{A}') зон Френеля. \mathbf{A}_0 – вклад всех зон Френеля

Обратимся к фазовой диаграмме. Сначала представим, что диска на пути волны нет. Изобразим на фазовой диаграмме вектор $\mathbf{A}_{1,5}$, соответствующий первым полутора зонам Френеля, и вектор \mathbf{A}' , соответствующий вкладу остальных зон (рис. 9). Векторная сумма указанных векторов должна давать вектор \mathbf{A}_0 , определяющий амплитуду световой волны в точке наблюдения при полностью открытом волновом фронте. Начало вектора $\mathbf{A}_{1,5}$ совпадает с началом спирали Френеля, тогда как конец указывает на середину второго полувитка. Векторы \mathbf{A}_0 , $\mathbf{A}_{1,5}$ и \mathbf{A}' связаны соотношением:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_{1,5}.$$

Если теперь часть волнового фронта, равную полутора зонам Френеля, закрыть стеклянным диском, то, как следует из уравнения (1.5), фаза вектора $\mathbf{A}_{1,5}$ уменьшится на величину φ . На векторной диаграмме это отображается поворотом вектора $\mathbf{A}_{1,5}$ против часовой стрелки на угол φ . При этом вектор \mathbf{A}' останется без изменений. Результатом действия двух частей волнового фронта будет векторная сумма \mathbf{A}' и повернутого вектора $\mathbf{A}_{1,5}$.

Можно рассчитать, чему должна быть равна толщина диска, чтобы интенсивность в точке наблюдения была максимальной. Сумма двух векторов максимальна по модулю, когда эти векторы сонаправлены. Вектор $\mathbf{A}_{1,5}$ нужно повернуть против часовой стрелки до положительного направления оси x на угол $\pi + \pi/4 = 5\pi/4$ (рис. 9). Тот же результат с такой же интенсивностью света в точке наблюдения получится, если мы повернем вектор $\mathbf{A}_{1,5}$ на угол $5\pi/4 + 2\pi$, $5\pi/4 + 4\pi$ и т.д. Таким образом, толщина диска, при которой в точке наблюдения интенсивность света будет максимальна, определяется из соотношения

$$\frac{2\pi h}{\lambda_0}(n-1) = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m.$$

$$h = \frac{\lambda_0}{n-1} \left(\frac{5}{8} + m \right), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.6)$$

Осталось рассчитать, насколько в указанном случае интенсивность света будет больше, чем в отсутствие стеклянного диска. Предположим, что без диска интенсивность света в точке наблюдения равна I_0 , что соответствует A_0^2 . В пределах первого витка спирали Френеля можно считать, что длина вектора \mathbf{A}' приблизительно равна длине вектора \mathbf{A}_0 . Тогда из прямоугольного треугольника получаем, что $A_{1,5} = \sqrt{A'^2 + A_0^2} = A_0\sqrt{2}$. После поворота вектора $\mathbf{A}_{1,5}$ результат суммы $\mathbf{A}' + \mathbf{A}_{1,5}$ даст нам вектор, длина которого равна $A_0 + A_0\sqrt{2} = A_0(1 + \sqrt{2})$. Следовательно, если часть светового фронта в полторы первые зоны закрыть

стеклянным диском, толщина которого определяется по формуле (1.6), то интенсивность в точке наблюдения будет равна:

$$I = I_0(1 + \sqrt{2})^2 = I_0(1 + 2 + 2\sqrt{2}) = I_0(3 + 2\sqrt{2}) \approx 5,8I_0.$$

Стоит задуматься над вопросом, откуда берется добавочная интенсивность света, ведь никаких дополнительных источников света мы в установку не добавляем. Вспомним, что согласно принципу Гюйгенса-Френеля, вторичные источники когерентны, и полное световое поле волны есть результат сложения вторичных волн с учетом их амплитуды и фазы. Другими словами, происходит перераспределение интенсивности пучка света по экрану: если в каком-то месте экрана интенсивность увеличивается, то в других местах экрана она должна уменьшиться, что и наблюдается на опыте.

Иногда в условии задачи говорится о том, что половину (или какую-то долю) зоны Френеля закрыли по диаметру. Что это значит с точки зрения фазовой диаграммы? Вернемся к рис. 6, где показано, как первая зона Френеля делится на подзоны, и представим, что мы непрозрачным экраном в виде полудиска закрыли половину первой зоны. У каждой подзоны площадь уменьшилась в два раза, при этом количество подзон осталось тем же самым, и разность фаз между колебаниями от соседних подзон не изменилась. Принцип построения первого полувитка на спирали Френеля не нарушится, однако теперь при постоянном угле между соседними векторами длина каждого вектора будет в два раза меньше, чем при полностью открытой первой зоне, и мы получим картину, как на рис. 10. Здесь для сравнения пунктиром нарисована та же область спирали Френеля при полностью открытой первой зоне.

Представим теперь, что мы бесконечной полуплоскостью закрыли половину всего волнового фронта. Это будет соответствовать ситуации, когда все зоны Френеля закрыты наполовину по диаметру. Спираль Френеля сохранит свою конфигурацию, но в масштабе уменьшится в два раза. Вектор \mathbf{A}_0 тоже уменьшится в два раза. Тогда интенсивность света в центре дифракционной картины уменьшится в 4 раза по сравнению с полностью открытым волновым

фронтом. Этот же результат мы получим, если будем делить плоскую волновую поверхность не на кольца, а на узкие полоски.

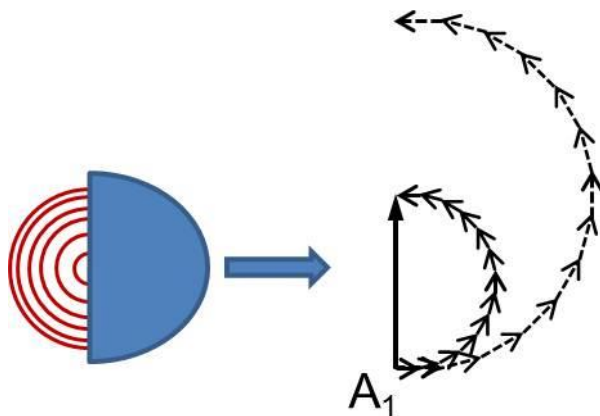


Рис. 10. Первый полувиток спирали Френеля при наполовину закрытой по диаметру первой зоне Френеля

Зонная пластинка. Киноформная оптика

Мы уже убедились в том, что, меняя толщину и показатель преломления материала, из которого изготовлено прозрачное препятствие для световой волны, мы можем поворачивать векторы на фазовой диаграмме, и таким образом управлять интенсивностью света в точке наблюдения. Явления подобного рода изучает и находит им практическое применение особый раздел оптического приборостроения - киноформная оптика. Простейший прибор киноформной оптики — это фазовая зонная пластинка.

Идея зонной пластинки принадлежит Френелю. Зоны Френеля на поверхности волнового фронта выделяются так, чтобы фазы световых колебаний, приходящих от четных и от нечетных зон, отличались на π (см. рис. 7б). Если каким-то образом закрыть все четные зоны, то колебания от всех открытых нечетных зон будут приходить в точку наблюдения в одной и той же фазе и в сумме давать вектор, длина которого во много раз превосходит длину вектора A_0 . Зонная пластинка собирает свет в одной точке пространства подобно тому, как это делает линза в ее фокусе. Для изготовления зонной пластинки на прозрачном материале наносится система колец - зон Френеля, и все четные или нечетные зоны

«закрашиваются», делаются непрозрачными для световой волны. Пример внешнего вида амплитудных зонных пластинок приведен на рисунке 11.



Рис. 11. Амплитудная зонная пластинка

Но при прохождении света через амплитудную зонную пластинку как минимум 50% энергии падающей волны теряется на поглощение в темных областях пластинки. Этого недостатка лишена фазовая зонная пластинка. В фазовой пластинке все области прозрачны для света, а фазы световых колебаний от четных зон Френеля повернуты на π путем изменения оптического пути, то есть толщины пластинки в этих местах. На рис. 12 показано сечение по диаметру двухуровневой фазовой зонной пластинки. Здесь для каждой четной зоны Френеля оптический путь уменьшается на величину, равную $\lambda/2$. Следовательно, векторы, соответствующие четным зонам Френеля на фазовой диаграмме, окажутся повернутыми на угол $\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi$. При этом векторы, которые соответствуют нечетным зонам Френеля, останутся без изменений. В результате векторы всех зон Френеля окажутся сонаправленными.

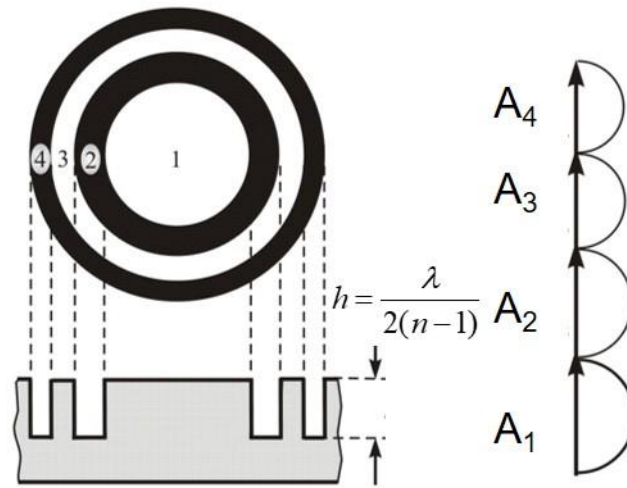


Рис. 12. Профиль двухуровневой фазовой зонной пластинки и векторы, соответствующие первым 4-м зонам Френеля на фазовой диаграмме

Амплитуда результирующего колебания для двухуровневой фазовой зонной пластинки будет в два раза больше, чем для амплитудной. Соответственно, интенсивность света в точке наблюдения будет больше в 4 раза. Двухуровневая зонная пластинка способна сфокусировать в точке P до 40% всей падающей на нее световой энергии.

Итак, фазовая зонная пластинка (как и амплитудная) может выступать в качестве линзы, фокусируя падающий на нее параллельный пучок в точку. Сначала рассмотрим ситуацию, когда на зонную пластинку падает монохроматический свет. Из формулы (1.3) для радиуса m -ой зоны Френеля можно получить выражения для фокусного расстояния зонной пластинки.

$$r_m^2 = \frac{mab\lambda}{a+b},$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{r_m^2}, \quad (1.7)$$

$f = \frac{r_m^2}{m\lambda}$ – фокусное расстояние для длины волны λ . Говорят, что зонная пластинка обладает хроматизмом – ее фокусное расстояние зависит от длины волны падающего света. Если мы будем освещать зонную пластинку пучком света, содержащим в себе несколько спектральных компонент (например, светом

газоразрядной лампы с узкими линиями), мы получим несколько разнесенных в пространстве фокусов, каждый из которых соответствует своей длине волны. Из выражения для фокусного расстояния следует, что наиболее близко к пластинке будет располагаться фокус красных длин волн, а фокус фиолетовых волн наиболее удален. Стоит отметить, что и для каждой длины волны зонная пластинка будет иметь несколько фокусов. В одном кольце зонной пластинки может укладываться одна, три, пять и т.д. зон Френеля, и каждому набору зон соответствует свой фокус.

Для того, чтобы собрать в фокусе зонной пластинки больше световой энергии, используют многоуровневые фазовые зонные пластинки. В качестве примера познакомимся с принципом действия трёхуровневой зонной пластинки.

Разделим область первой и второй зоны Френеля на *три* кольцевые части равной площади (при этом выделенные части будут различной ширины) и обозначим на фазовой диаграмме три вектора, которые соответствуют указанным частям. Поскольку эти векторы будут в сумме давать тот же результат, что и первые две зоны Френеля, их векторная сумма должна быть близка к нулю, как показано на рис. 13б.

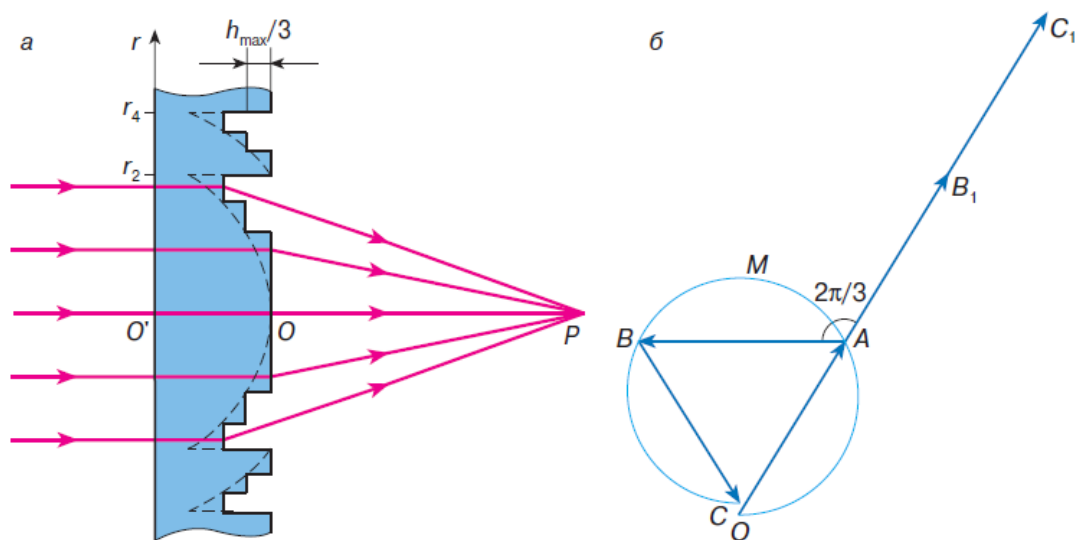


Рис. 13. Профиль трёхуровневой фазовой пластинки (а) и векторы на фазовой диаграмме, описывающие действие первых двух зон Френеля (б)

Здесь вектор **OA** отвечает центральной части зоны, следующей части соответствует вектор **AB**, а крайней части вектор **BC**. Пренебрегая расстоянием **OC**, мы считаем, что треугольник **ABC** равносторонний, все его углы равны $\pi/3$. Для того чтобы сумма трех векторов была максимальна, необходимо вектор **AB** повернуть по часовой стрелке на угол $2\pi/3$ и вектор **BC** повернуть в ту же сторону на угол $4\pi/3$. Следовательно, необходимо углубить вторую кольцевую часть на величину $h_2 = \frac{\lambda}{3(n-1)}$, а третью кольцевую часть на величину в два раза больше,

$$h_3 = \frac{2\lambda}{3(n-1)}.$$

Сечение по диаметру трехуровневой фазовой зонной пластинки изображено на рис. 13а. Можно оценить, какую часть от полной световой энергии падающей волны такая пластинка фокусирует в точку. Треугольник **ABC** вписан в окружность. Полная энергия падающей волны соответствует квадрату длины окружности, а сфокусированная энергия – квадрату периметра треугольника. Пусть сторона треугольника равна a . Радиус окружности, описанной вокруг треугольника, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Длина окружности $L = 2\pi R = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}a$.

Таким образом, сфокусированная энергия соответствует значению $9a^2$, полная энергия $\frac{4\pi^2}{3}a^2 \approx 13a^2$. Трехуровневая фазовая зонная пластинка позволяет сфокусировать в точку до 70% всей энергии падающей световой волны.

Похожим способом можно разделить область первых двух зон Френеля на четыре, пять и так далее частей, получая четырехуровневую, пятиуровневую и т.д. зонные пластинки. С каждым увеличением числа разбиений растет доля энергии падающей волны, которую пластинка фокусирует в точку, так как периметр вписанного в окружность многоугольника будет приближаться к длине окружности. В предельном случае, когда число частей стремится к бесконечности, мы получим оптический прибор, который собирает в точку 100% световой энергии, – киноформ осесимметричной линзы, изображенный на рис. 14.

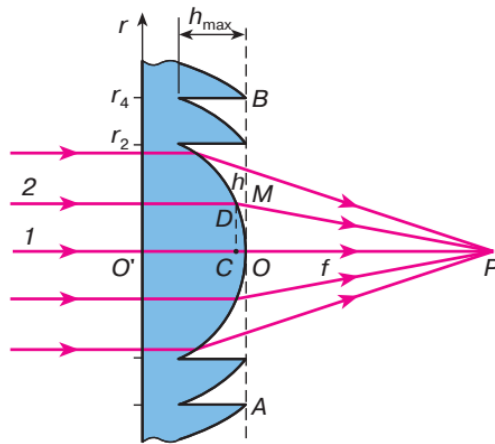


Рис. 14. Сечение по диаметру киноформа осесимметричной линзы и ход лучей через нее

Примеры решения задач

Задача 1. Плоская монохроматическая световая волна падает на непрозрачный экран, состоящий из секторов двух кругов (см. рис. 15). Радиус одного из них равен радиусу 1-й зоны Френеля, другого – радиусу 2-й зоны Френеля. Определить интенсивность света в точке наблюдения, если в отсутствие экрана она равна I_0 .

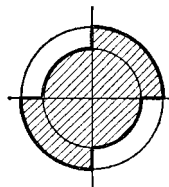


Рис. 15

Решение. Очевидно, что интенсивность в точке наблюдения создают все зоны Френеля, начиная с 3-ей и до бесконечности, а также открытая часть второй зоны. Секторы второго круга вырезаны по радиальным прямым и в сумме закрывают половину второй зоны Френеля, причем половину по диаметру. Изобразим на фазовой диаграмме вектор, соответствующий всем открытым зонам Френеля, начиная с третьей (вектор \mathbf{A}_{03} на рис. 16), и вектор, описывающий действие половины второй зоны Френеля по диаметру (вектор \mathbf{a}_2 на рис. 16). Для этого мы должны взять вектор второй зоны Френеля и уменьшить его длину в два раза, сохраняя его направление. Результирующее колебание в точке наблюдения будет

определяться векторной суммой двух указанных векторов. Как видно из рис. 16, их векторная сумма равна нулю, следовательно, интенсивность света в точке наблюдения также будет равняться нулю.

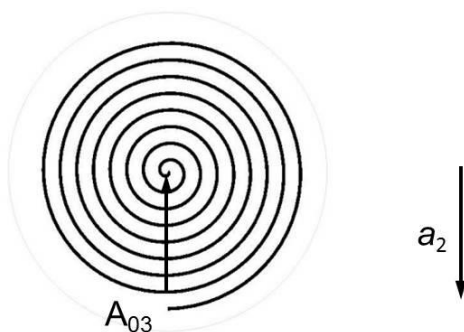


Рис. 16. Векторы на фазовой диаграмме

Задача 2. Плоская монохроматическая световая волна с частотой ω_0 падает на непрозрачный экран с отверстием, открывающим для точки наблюдения P первую зону Френеля. Половину отверстия по диаметру перекрыли стеклянной пластинкой толщины d (показатель преломления $n = 1,5$). При какой толщине пластинки интенсивность в точке P будет минимальной?

Решение. Сначала представим, что стеклянной пластинки на пути света нет. На фазовой диаграмме векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , соответствующие вкладам от левой и правой половин отверстия, будут сонаправлены, а их сумма равна вектору \mathbf{A}_0 . Чтобы интенсивность в точке P стала близка к нулю, необходимо развернуть один из векторов на угол $\varphi = \pi + 2\pi m$. Внесение стеклянной пластинки, покрывающей, например, левую половину отверстия, увеличивает оптический путь волны на $\Delta = d(n - 1)$, что соответствует повороту вектора \mathbf{a}_1 против часовой стрелки на угол

$$\varphi = k\Delta = \frac{\omega_0}{c} d(n - 1).$$

Итак,

$$\frac{\omega_0}{c} d(n - 1) = \pi + 2\pi m,$$

$$d = \frac{c}{\omega_0(n-1)} \left(\frac{1}{2} + m \right) = \frac{2c}{\omega_0} \left(\frac{1}{2} + m \right).$$

Задача 3. Источник света и точка наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от круглого отверстия в непрозрачном экране. Радиус отверстия равен радиусу 1-й зоны Френеля. Интенсивность колебаний в точке наблюдения равна I_0 . Найти интенсивность I в точке наблюдения, если посередине между источником и экраном с отверстием расположить без нарушений осевой симметрии тонкую собирающую линзу Л, такую, что источник при этом оказывается в ее фокусе.

Решение. Считаем источник точечным монохроматическим с длиной волны света λ . Если принять расстояния от источника до непрозрачного экрана и от экрана до точки наблюдения равными b , то радиус отверстия равен (см. формулу (1.3)):

$$r = \sqrt{\frac{\lambda b^2}{b+b}} = \sqrt{\frac{\lambda b}{2}}.$$

При этом для точки наблюдения открыта одна первая зона Френеля. После внесения в систему тонкой собирающей линзы Л геометрия волнового фронта падающей на отверстие волны изменится: после преломления в линзе выйдет параллельный пучок лучей (см. рис. 17а). На экран будет падать плоская волна. В этом случае радиус m -ой зоны Френеля для точки наблюдения выражается формулой (1.4) $r_m = \sqrt{m\lambda b}$. Но радиус отверстия остался неизменным, значит, $m = 1/2$. При падении плоской волны на то же самое отверстие в экране для точки наблюдения оказывается открытой только внутренняя половина первой зоны Френеля. Изобразим на фазовой диаграмме соответствующий вектор (вектор $\mathbf{A}_{0,5}$ на рис. 17б).

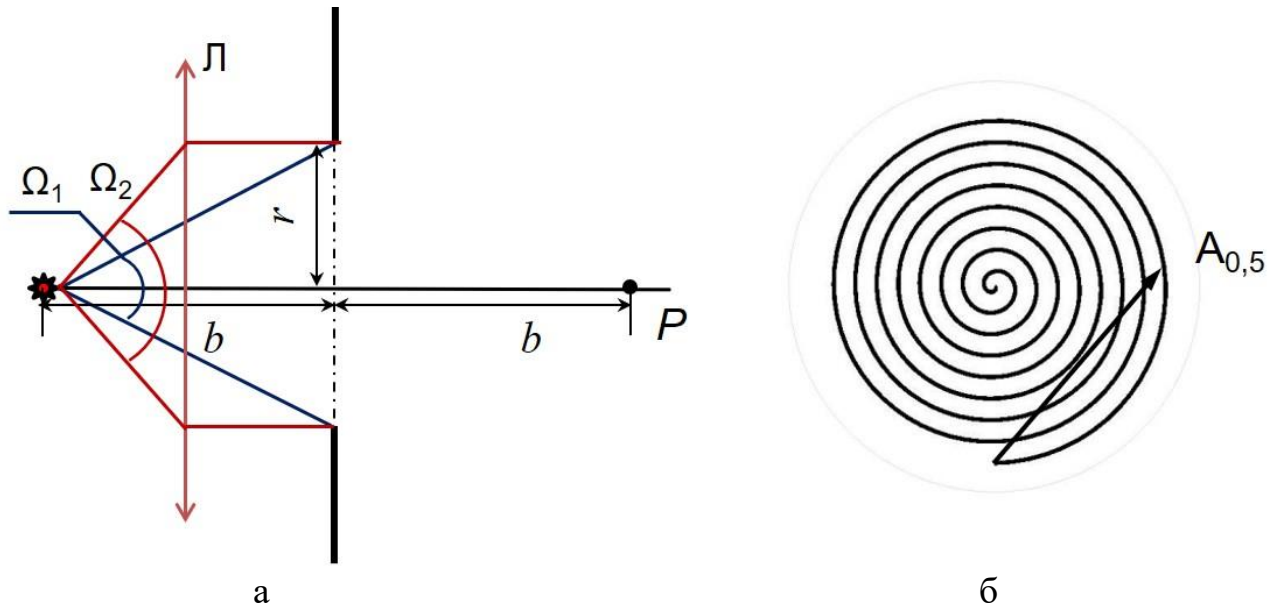


Рис. 17. а) Схема хода лучей из источника на отверстие без линзы и с линзой Л. б) Вектор $A_{0,5}$ на фазовой диаграмме Френеля

Внесение линзы изменяет не только геометрию волнового фронта, но и энергию световой волны, падающую на отверстие в экране. Обратимся к рис. 17а. Без линзы полный световой поток, падающий на отверстие, пропорционален величине телесного угла Ω_1 .

$$\Phi_1 = I_{\text{ист}} \Omega_1 = I_{\text{ист}} \frac{\pi r^2}{b^2},$$

здесь $I_{\text{ист}}$ – сила света изотропного точечного источника.

Так как линза помещена точно посередине между источником и экраном, световой поток, падающий на отверстие, после внесения линзы равен

$$\Phi_2 = I_{\text{ист}} \Omega_2 = I_{\text{ист}} \frac{\pi r^2}{(b/2)^2} = 4\Phi_1.$$

Интегральная интенсивность дифракционной картины во втором случае с линзой будет в 4 раза больше, чем без линзы. На фазовой диаграмме это соответствует увеличению радиуса полной спирали Френеля в 2 раза. Будем сравнивать все векторы на фазовой диаграмме с длиной вектора A_1 – вектор первой зоны Френеля без линзы. Интенсивность I_0 пропорциональна A_1^2 . После внесения

линзы длина вектора, соответствующего первой зоне Френеля, станет равна $A_1' = 2A_1$. Очевидно, что длина вектора $A_{0,5}$ равна

$$A_{0,5} = \frac{A_1'}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}A_1.$$

Тогда в установке с линзой интенсивность в точке наблюдения будет равна

$$I = \frac{2A_1^2}{A_1^2} I_0 = 2I_0.$$

Ответ. Интенсивность увеличится в два раза.

Рекомендуемая литература:

1. Бутиков Е. И. Оптика. Изд.3, СПб.: Издательство Лань, 2022. §6.1, §6.2.
2. Иродов И. Е. Волновые процессы. Основные законы. Изд.8, М.: Лаборатория знаний, 2020. §5.1, §5.2.
3. Ландсберг Г. С. Оптика. Изд.7, М.: Физматлит, 2017. §§33-35.
4. Савельев И. В. Курс общей физики. Т.2. Изд.16, СПб.: Издательство Лань, 2022. §§125-128.
5. Сивухин Д. В. Общий курс физики. т.4. Оптика. Изд.4, М.: Физматлит, 2021. §§39-41.

Учебное издание

**Грачева Ирина Николаевна, Филиппова Елена Алексеевна,
Фишман Александр Израилович**

ДИФРАКЦИЯ. МЕТОД ФАЗОВЫХ ДИАГРАММ

Дизайн обложки

Подписано в печать хх.хх.2022.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .

Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28