Математические основы кинетической теории

(математика и английский)

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич

Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VII семестр, 2015 г.

Содержание лекции

- Решение бесстолкновительного кинетического уравнения в постоянном поле (нерелятивистский случай)
- Самосогласованные уравнения Власова на примере электростатического поля на границе «металл-вакуум»: постановка задачи Коши
- Решение задачи Коши для слабого электрического поля
- Самосогласованные уравнения Власова для плазмы с одиночным точечным зарядом: экранировка заряда

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 5. Статистическая физика. М: Наука. - 1964. – 568 с. (любое издание, начиная с 1964 г).
2. А.А. Власов. Статистические функции распределения. М: Наука. – 1966. – 356 с.
3. Ю.Л. Климонтович. Статистическая физика. М: Наука. – 1982. - 608 с.
4. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. М: Наука. – 1979. – 528 с.
5. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант». – 2010. – 508 с.; *http://rgs.vniims.ru/books/kinetics.pdf*
6. Э.Л. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука. – 1965. – 424 с.
7. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2000. – 176 с.

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в постоянном поле (нерелятивистский случай)

- Рассмотрим некоторое постоянное (статическое) поле, описываемое скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, так что $U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы в этом поле (в случае электрического поля $q = e$ – электрический заряд частицы, в случае классического гравитационного поля $q = m$ – масса частицы).

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в постоянном поле (нерелятивистский случай)

- Рассмотрим некоторое постоянное (статическое) поле, описываемое скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, так что $U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы в этом поле (в случае электрического поля $q = e$ – электрический заряд частицы, в случае классического гравитационного поля $q = m$ – масса частицы).
- Классическая функция Гамильтона имеет вид:

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в постоянном поле (нерелятивистский случай)

- Рассмотрим некоторое постоянное (статическое) поле, описываемое скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, так что $U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы в этом поле (в случае электрического поля $q = e$ – электрический заряд частицы, в случае классического гравитационного поля $q = m$ – масса частицы).
- Классическая функция Гамильтона имеет вид:

$$H = E + U = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в постоянном поле (нерелятивистский случай)

- Рассмотрим некоторое постоянное (статическое) поле, описываемое скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, так что $U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы в этом поле (в случае электрического поля $q = e$ – электрический заряд частицы, в случае классического гравитационного поля $q = m$ – масса частицы).
- Классическая функция Гамильтона имеет вид:

$$H = E + U = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + U(\mathbf{r}). \qquad (1)$$

- Таким образом, канонические уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{m}, \quad \left(= \frac{\partial H}{\partial P_i}\right); \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -q\nabla\phi, \quad \left(= -\frac{\partial H}{\partial x^i}\right). \qquad (2)$$

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в постоянном поле (нерелятивистский случай)

- Рассмотрим некоторое постоянное (статическое) поле, описываемое скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, так что $U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы в этом поле (в случае электрического поля $q = e$ – электрический заряд частицы, в случае классического гравитационного поля $q = m$ – масса частицы).
- Классическая функция Гамильтона имеет вид:

$$H = E + U = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

- Таким образом, канонические уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{m}, \quad \left(= \frac{\partial H}{\partial P_i}\right); \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -q\nabla\phi, \quad \left(= -\frac{\partial H}{\partial x^i}\right). \tag{2}$$

- Бесстолкновительные кинетические уравнения имеют вид:

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в постоянном поле (нерелятивистский случай)

- Рассмотрим некоторое постоянное (статическое) поле, описываемое скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, так что $U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы в этом поле (в случае электрического поля $q = e$ – электрический заряд частицы, в случае классического гравитационного поля $q = m$ – масса частицы).
- Классическая функция Гамильтона имеет вид:

$$H = E + U = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

- Таким образом, канонические уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{m}, \quad \left(= \frac{\partial H}{\partial P_i}\right); \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -q\nabla\phi, \quad \left(= -\frac{\partial H}{\partial x^i}\right). \tag{2}$$

- Бесстолкновительные кинетические уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + [H_a, f_a] = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}}{m_a}\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} - q_a\nabla\phi\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{P}} = 0. \tag{3}$$

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в постоянном поле (нерелятивистский случай)

- Рассмотрим некоторое постоянное (статическое) поле, описываемое скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, так что $U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы в этом поле (в случае электрического поля $q = e$ – электрический заряд частицы, в случае классического гравитационного поля $q = m$ – масса частицы).
- Классическая функция Гамильтона имеет вид:

$$H = E + U = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

- Таким образом, канонические уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{m}, \quad \left(= \frac{\partial H}{\partial P_i}\right); \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -q\nabla\phi, \quad \left(= -\frac{\partial H}{\partial x^i}\right). \tag{2}$$

- Бесстолкновительные кинетические уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + [H_a, f_a] = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}}{m_a}\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} - q_a\nabla\phi\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{P}} = 0. \tag{3}$$

- Уравнение (3) принадлежит к классу *линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных* (см. Эльсгольц). Для его решения составим *систему уравнений векторных линий*:

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в постоянном поле (нерелятивистский случай)

- Рассмотрим некоторое постоянное (статическое) поле, описываемое скалярным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$, так что $U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы в этом поле (в случае электрического поля $q = e$ – электрический заряд частицы, в случае классического гравитационного поля $q = m$ – масса частицы).
- Классическая функция Гамильтона имеет вид:

$$H = E + U = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

- Таким образом, канонические уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{m}, \quad \left(= \frac{\partial H}{\partial P_i}\right); \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -q\nabla\phi, \quad \left(= -\frac{\partial H}{\partial x^i}\right). \tag{2}$$

- Бесстолкновительные кинетические уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + [H_a, f_a] = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}}{m_a}\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} - q_a\nabla\phi\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{P}} = 0. \tag{3}$$

- Уравнение (3) принадлежит к классу *линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных* (см. Эльсгольц). Для его решения составим *систему уравнений векторных линий*:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx^1}{P_1/m} = \frac{dx^2}{P_2/m} = \frac{dx^3}{P_3/m} = \frac{dP_1}{-q\partial_1\phi} = \frac{dP_2}{-q\partial_2\phi} = \frac{dP_3}{-q\partial_3\phi}. \tag{4}$$

Решение бесстолкновительного кинетического уравнения в постоянном поле

- Далее, для нахождения общего решения уравнения (3) необходимо найти первые интегралы системы (4): $C_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{P}), \ldots, C_n(t, \mathbf{r}, \mathbf{P})$ (n=6), которые называются *характеристиками уравнения (3)*. Тогда общим решением уравнения (3) получается как решение функционального уравнения:

  где $F(z)$ – произвольная функция.

- Далее, для нахождения общего решения уравнения (3) необходимо найти первые интегралы системы (4): $C_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{P}), \ldots, C_n(t, \mathbf{r}, \mathbf{P})$ (n=6), которые называются *характеристиками уравнения (3)*. Тогда общим решением уравнения (3) получается как решение функционального уравнения:
$$F(C_1, \ldots, C_n) = 0, \qquad (5)$$
где $F(z)$ – произвольная функция.

- Далее, для нахождения общего решения уравнения (3) необходимо найти первые интегралы системы (4): $C_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{P}), \dots, C_n(t, \mathbf{r}, \mathbf{P})$ (n=6), которые называются *характеристиками уравнения (3)*. Тогда общим решением уравнения (3) получается как решение функционального уравнения:
$$F(C_1, \dots, C_n) = 0, \tag{5}$$
где $F(z)$ – произвольная функция.
- Для интегрирования конкретных уравнений характеристик следует воспользоваться следующим свойством равных дробей (см. Филиппов):
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_a}{b_2} = \cdots \frac{a_n}{b_n} \equiv t \Rightarrow \frac{\sum_i k_i a_i}{\sum_i k_i b_i} = t, \quad \text{для } \forall k_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

- Далее, для нахождения общего решения уравнения (3) необходимо найти первые интегралы системы (4): $C_1(t,\mathbf{r},\mathbf{P}),\ldots,C_n(t,\mathbf{r},\mathbf{P})$ (n=6), которые называются *характеристиками уравнения (3)*. Тогда общим решением уравнения (3) получается как решение функционального уравнения:
$$F(C_1,\ldots,C_n)=0, \tag{5}$$
где $F(z)$ – произвольная функция.
- Для интегрирования конкретных уравнений характеристик следует воспользоваться следующим свойством равных дробей (см. Филиппов):
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_a}{b_2}=\cdots\frac{a_n}{b_n}\equiv t\Rightarrow\frac{\sum_i k_ia_i}{\sum_i k_ib_i}=t,\quad \text{для } \forall k_i,\ i=\overline{1,n}. \tag{6}$$
- Таким образом, легко найти, например, следующую характеристику уравнения (3):
$$C_1=\frac{\mathbf{P}^2}{2m}+q\phi(\mathbf{r})\equiv E-U=\mathcal{E}, \tag{7}$$
которая является интегралом полной энергии частицы.

- Далее, для нахождения общего решения уравнения (3) необходимо найти первые интегралы системы (4): $C_1(t,\mathbf{r},\mathbf{P}),\ldots,C_n(t,\mathbf{r},\mathbf{P})$ (n=6), которые называются *характеристиками уравнения (3)*. Тогда общим решением уравнения (3) получается как решение функционального уравнения:
$$F(C_1,\ldots,C_n)=0, \tag{5}$$
где $F(z)$ – произвольная функция.
- Для интегрирования конкретных уравнений характеристик следует воспользоваться следующим свойством равных дробей (см. Филиппов):
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_a}{b_2}=\cdots\frac{a_n}{b_n}\equiv t\Rightarrow\frac{\sum_i k_ia_i}{\sum_i k_ib_i}=t,\quad \text{для } \forall k_i,\ i=\overline{1,n}. \tag{6}$$
- Таким образом, легко найти, например, следующую характеристику уравнения (3):
$$C_1=\frac{\mathbf{P}^2}{2m}+q\phi(\mathbf{r})\equiv E-U=\mathcal{E}, \tag{7}$$
которая является интегралом полной энергии частицы.
- Этой характеристики достаточно для описания статической изотропной бесстолкновительной плазмы. Таким образом, решение бесстолкновительного кинетического уравнения, соответствующее этому случаю примет вид:

где $f_a(z)$ пока произвольные функции своих аргументов с единственным пока условием сходимости интегралов от них по импульсным переменным.

- Далее, для нахождения общего решения уравнения (3) необходимо найти первые интегралы системы (4): $C_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{P}), \ldots, C_n(t, \mathbf{r}, \mathbf{P})$ (n=6), которые называются *характеристиками уравнения (3)*. Тогда общим решением уравнения (3) получается как решение функционального уравнения:
$$F(C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{5}$$
где $F(z)$ – произвольная функция.
- Для интегрирования конкретных уравнений характеристик следует воспользоваться следующим свойством равных дробей (см. Филиппов):
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_a}{b_2} = \cdots \frac{a_n}{b_n} \equiv t \Rightarrow \frac{\sum_i k_i a_i}{\sum_i k_i b_i} = t, \quad \text{для } \forall k_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{6}$$
- Таким образом, легко найти, например, следующую характеристику уравнения (3):
$$C_1 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r}) \equiv E - U = \mathcal{E}, \tag{7}$$
которая является интегралом полной энергии частицы.
- Этой характеристики достаточно для описания статической изотропной бесстолкновительной плазмы. Таким образом, решение бесстолкновительного кинетического уравнения, соответствующее этому случаю примет вид:
$$f_a = f_a\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r})\right), \tag{8}$$
где $f_a(z)$ пока произвольные функции своих аргументов с единственным пока условием сходимости интегралов от них по импульсным переменным.

- Далее, для нахождения общего решения уравнения (3) необходимо найти первые интегралы системы (4): $C_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{P}), \ldots, C_n(t, \mathbf{r}, \mathbf{P})$ (n=6), которые называются *характеристиками уравнения (3)*. Тогда общим решением уравнения (3) получается как решение функционального уравнения:
$$F(C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{5}$$
где $F(z)$ – произвольная функция.
- Для интегрирования конкретных уравнений характеристик следует воспользоваться следующим свойством равных дробей (см. Филиппов):
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_a}{b_2} = \cdots \frac{a_n}{b_n} \equiv t \Rightarrow \frac{\sum_i k_i a_i}{\sum_i k_i b_i} = t, \quad \text{для } \forall k_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{6}$$
- Таким образом, легко найти, например, следующую характеристику уравнения (3):
$$C_1 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r}) \equiv E - U = \mathcal{E}, \tag{7}$$
которая является интегралом полной энергии частицы.
- Этой характеристики достаточно для описания статической изотропной бесстолкновительной плазмы. Таким образом, решение бесстолкновительного кинетического уравнения, соответствующее этому случаю примет вид:
$$f_a = f_a\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r})\right), \tag{8}$$
где $f_a(z)$ пока произвольные функции своих аргументов с единственным пока условием сходимости интегралов от них по импульсным переменным.
$$F^{i_1 \ldots i_n} \equiv \int\limits_P P^{i_1} \cdots P^{i_n} f_a\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r})\right) d^3\mathbf{P} \neq \pm\infty. \tag{9}$$

Моменты изотропной функции распределения (8)

Моменты изотропной функции распределения (8)

- Очевидно, что плотность тока, определяющаяся первым моментом относительно изотропной функции распределения (8), равна нулю, так как в пространстве импульсов нет выделенного направления:

- Очевидно, что плотность тока, определяющаяся первым моментом относительно изотропной функции распределения (8), равна нулю, так как в пространстве импульсов нет выделенного направления:

$$\mathbf{J} = \int\limits_P \mathbf{P} f_a\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r})\right) d^3\mathbf{P} \equiv 0. \tag{10}$$

- Очевидно, что плотность тока, определяющаяся первым моментом относительно изотропной функции распределения (8), равна нулю, так как в пространстве импульсов нет выделенного направления:
$$\mathbf{J} = \int\limits_P \mathbf{P} f_a\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r})\right) d^3\mathbf{P} \equiv 0. \qquad (10)$$
- Для плотности заряда a - го сорта получим, переходя к сферической системе координат в пространстве импульсов
$$P^1 = p\cos\theta\cos\varphi;\ P^2 = p\cos\theta\sin\varphi;\ P^3 = p\sin\theta; \qquad (11)$$
$$d^3\mathbf{P} = p^2 dp\sin\theta d\theta d\phi; \quad (p\in[0,+\infty); \theta\in[-\pi/2.\pi/2];\ \varphi\in[0,2\pi]) \qquad (12)$$
и интегрируя по угловым переменным, получим:
$$\rho_a(\mathbf{r}) = 4\pi e_a \int\limits_0^\infty p^2 f_a\left(\frac{p^2}{2m_a} + e_a\phi(\mathbf{r})\right) dp; \qquad (13)$$
$$\rho(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_a e_a \int\limits_0^\infty p^2 f_a\left(\frac{p^2}{2m_a} + e_a\phi(\mathbf{r})\right) dp. \qquad (14)$$

- Очевидно, что плотность тока, определяющаяся первым моментом относительно изотропной функции распределения (8), равна нулю, так как в пространстве импульсов нет выделенного направления:

$$\mathbf{J} = \int\limits_P \mathbf{P} f_a\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r})\right) d^3\mathbf{P} \equiv 0. \tag{10}$$

- Для плотности заряда a - го сорта получим, переходя к сферической системе координат в пространстве импульсов

$$P^1 = p\cos\theta\cos\varphi;\; P^2 = p\cos\theta\sin\varphi;\; P^3 = p\sin\theta; \tag{11}$$

$$d^3\mathbf{P} = p^2 dp \sin\theta d\theta d\phi; \quad (p \in [0, +\infty); \theta \in [-\pi/2.\pi/2];\; \varphi \in [0, 2\pi]) \tag{12}$$

и интегрируя по угловым переменным, получим:

$$\rho_a(\mathbf{r}) = 4\pi e_a \int\limits_0^\infty p^2 f_a\left(\frac{p^2}{2m_a} + e_a\phi(\mathbf{r})\right) dp; \tag{13}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_a e_a \int\limits_0^\infty p^2 f_a\left(\frac{p^2}{2m_a} + e_a\phi(\mathbf{r})\right) dp. \tag{14}$$

- Рассмотрим в качестве $f_a(p)$ распределение Максвелла:

,

- Очевидно, что плотность тока, определяющаяся первым моментом относительно изотропной функции распределения (8), равна нулю, так как в пространстве импульсов нет выделенного направления:

$$\mathbf{J} = \int\limits_P \mathbf{P} f_a\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r})\right) d^3\mathbf{P} \equiv 0. \qquad (10)$$

- Для плотности заряда a - го сорта получим, переходя к сферической системе координат в пространстве импульсов

$$P^1 = p\cos\theta\cos\varphi;\;\; P^2 = p\cos\theta\sin\varphi;\;\; P^3 = p\sin\theta; \qquad (11)$$

$$d^3\mathbf{P} = p^2 dp\sin\theta d\theta d\phi; \quad (p \in [0, +\infty); \theta \in [-\pi/2.\pi/2];\; \varphi \in [0, 2\pi]) \qquad (12)$$

и интегрируя по угловым переменным, получим:

$$\rho_a(\mathbf{r}) = 4\pi e_a \int\limits_0^\infty p^2 f_a\left(\frac{p^2}{2m_a} + e_a\phi(\mathbf{r})\right) dp; \qquad (13)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_a e_a \int\limits_0^\infty p^2 f_a\left(\frac{p^2}{2m_a} + e_a\phi(\mathbf{r})\right) dp. \qquad (14)$$

- Рассмотрим в качестве $f_a(p)$ распределение Максвелла:

$$f_a(\mathbf{p}) = A\mathrm{e}^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2m_a T}} \Rightarrow f_a = A\exp\left(-\frac{\frac{p^2}{2m_a} + e_a\phi(\mathbf{r})}{T}\right) \qquad (15)$$

,

Уравнения Власова: плоская симметрия

- Тогда, выполняя интегрирование по частям в (14), с учетом известного соотношения:

  получим:

- Тогда, выполняя интегрирование по частям в (14), с учетом известного соотношения:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{16}$$

получим:

- Тогда, выполняя интегрирование по частям в (14), с учетом известного соотношения:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{16}$$

получим:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(\mathbf{r})}{T}}. \tag{17}$$

Уравнения Власова: плоская симметрия

- Тогда, выполняя интегрирование по частям в (14), с учетом известного соотношения:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{16}$$

получим:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}}) \mathrm{e}^{-\frac{e_a \phi(\mathbf{r})}{T}}. \tag{17}$$

- Запишем теперь уравнение Максвелла для статического электрического поля с плотностью заряда (17) (полагая заряд электрона равным $-e < 0$):

Уравнение (18) фактически и является самосогласованным уравнением Власова, описывающим одновременно электрическое поле и функцию распределения зарядов.

- Тогда, выполняя интегрирование по частям в (14), с учетом известного соотношения:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{16}$$

получим:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(\mathbf{r})}{T}}. \tag{17}$$

- Запишем теперь уравнение Максвелла для статического электрического поля с плотностью заряда (17) (полагая заряд электрона равным $-e < 0$):

$$\boxed{\triangle\phi = -4\pi\rho \Rightarrow \triangle\phi = -4\pi\sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(\mathbf{r})}{T}}.} \tag{18}$$

Уравнение (18) фактически и является самосогласованным уравнением Власова, описывающим одновременно электрическое поле и функцию распределения зарядов.

- Тогда, выполняя интегрирование по частям в (14), с учетом известного соотношения:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{16}$$

получим:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{e_a \phi(\mathbf{r})}{T}}. \tag{17}$$

- Запишем теперь уравнение Максвелла для статического электрического поля с плотностью заряда (17) (полагая заряд электрона равным $-e < 0$):

$$\triangle\phi = -4\pi\rho \Rightarrow \triangle\phi = -4\pi \sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{e_a \phi(\mathbf{r})}{T}}. \tag{18}$$

Уравнение (18) фактически и является самосогласованным уравнением Власова, описывающим одновременно электрическое поле и функцию распределения зарядов.

- Рассмотрим это уравнение в случае плоской симметрии, когда все функции зависят лишь от одной координаты x:

- Тогда, выполняя интегрирование по частям в (14), с учетом известного соотношения:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad (16)$$

получим:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(\mathbf{r})}{T}}. \qquad (17)$$

- Запишем теперь уравнение Максвелла для статического электрического поля с плотностью заряда (17) (полагая заряд электрона равным $-e<0$):

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \Rightarrow \Delta\phi = -4\pi\sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(\mathbf{r})}{T}}. \qquad (18)$$

Уравнение (18) фактически и является самосогласованным уравнением Власова, описывающим одновременно электрическое поле и функцию распределения зарядов.

- Рассмотрим это уравнение в случае плоской симметрии, когда все функции зависят лишь от одной координаты x:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi\sum_a e_a A_a (2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(x)}{T}}. \qquad (19)$$

Электрическое поле на границе двух металлов: граничные условия

- Рассмотрим контакт двух металлов. Металлы отличаются от плазмы твердо закрепленными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. Поэтому плотность ионов в металле можно считать постоянной $n_i(x) = \mathrm{const}$. Таким образом, слева располагается металл с концентрацией ионов n_i^1, справа – n_i^2 (см. Рис. 1). В этом смысле вакуум тоже можно считать твёрдым телом, так как и в нем концентрация ионов постоянна $n_i^2 = 0$.

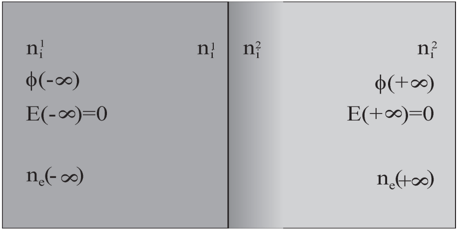
- Рассмотрим контакт двух металлов. Металлы отличаются от плазмы твердо закрепленными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. Поэтому плотность ионов в металле можно считать постоянной $n_i(x) = \mathrm{const}$. Таким образом, слева располагается металл с концентрацией ионов n_i^1, справа – n_i^2 (см. Рис. 1). В этом смысле вакуум тоже можно считать твёрдым телом, так как и в нем концентрация ионов постоянна $n_i^2 = 0$.
- 

Figure 1. Контакт двух проводников. Полагая внешнее электрическое поле отсутствующим, получим

$$E(-\infty) = E(+\infty) = 0; \Rightarrow \quad (20)$$

$$\phi(-\infty) = \phi_1; \ \phi(+\infty) = \phi_2. \quad (21)$$

На бесконечности плазма должна быть электронейтральна, поэтому:

где Z_i – заряд ионов в соответствующих проводниках.

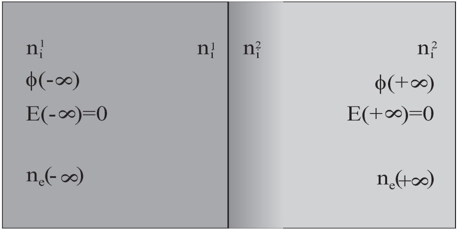
- Рассмотрим контакт двух металлов. Металлы отличаются от плазмы твердо закрепленными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. Поэтому плотность ионов в металле можно считать постоянной $n_i(x) = \mathrm{const}$. Таким образом, слева располагается металл с концентрацией ионов n_i^1, справа – n_i^2 (см. Рис. 1). В этом смысле вакуум тоже можно считать твёрдым телом, так как и в нем концентрация ионов постоянна $n_i^2 = 0$.
- 

Figure 1. Контакт двух проводников. Полагая внешнее электрическое поле отсутствующим, получим

$$E(-\infty) = E(+\infty) = 0; \Rightarrow \quad (20)$$

$$\phi(-\infty) = \phi_1; \ \phi(+\infty) = \phi_2. \quad (21)$$

На бесконечности плазма должна быть электронейтральна, поэтому:

$$n_e(-\infty) = Z_1 n_i^1; \ n_e(+\infty) = Z_2 n_i^2, \quad (22)$$

где Z_i – заряд ионов в соответствующих проводниках.

Электрическое поле на границе двух металлов: граничные условия

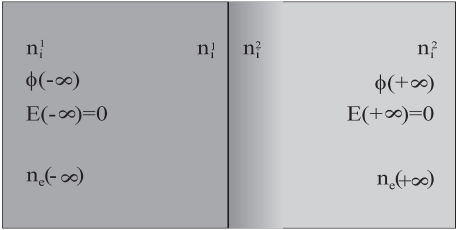
- Рассмотрим контакт двух металлов. Металлы отличаются от плазмы твердо закрепленными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. Поэтому плотность ионов в металле можно считать постоянной $n_i(x) = \mathrm{const}$. Таким образом, слева располагается металл с концентрацией ионов n_i^1, справа – n_i^2 (см. Рис. 1). В этом смысле вакуум тоже можно считать твёрдым телом, так как и в нем концентрация ионов постоянна $n_i^2 = 0$.
- 

Figure 1. Контакт двух проводников. Полагая внешнее электрическое поле отсутствующим, получим

$$E(-\infty) = E(+\infty) = 0; \Rightarrow \qquad (20)$$

$$\phi(-\infty) = \phi_1; \; \phi(+\infty) = \phi_2. \qquad (21)$$

На бесконечности плазма должна быть электронейтральна, поэтому:

$$n_e(-\infty) = Z_1 n_i^1; \; n_e(+\infty) = Z_2 n_i^2, \qquad (22)$$

где Z_i – заряд ионов в соответствующих проводниках.
- С другой стороны в нашем случае согласно (17):

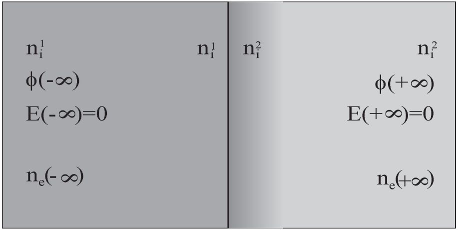
- Рассмотрим контакт двух металлов. Металлы отличаются от плазмы твердо закрепленными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. Поэтому плотность ионов в металле можно считать постоянной $n_i(x) = \text{const}$. Таким образом, слева располагается металл с концентрацией ионов n_i^1, справа – n_i^2 (см. Рис. 1). В этом смысле вакуум тоже можно считать твёрдым телом, так как и в нем концентрация ионов постоянна $n_i^2 = 0$.
- 

Figure 1. Контакт двух проводников. Полагая внешнее электрическое поле отсутствующим, получим

$$E(-\infty) = E(+\infty) = 0; \Rightarrow \quad (20)$$

$$\phi(-\infty) = \phi_1; \ \phi(+\infty) = \phi_2. \quad (21)$$

На бесконечности плазма должна быть электронейтральна, поэтому:

$$n_e(-\infty) = Z_1 n_i^1; \ n_e(+\infty) = Z_2 n_i^2, \quad (22)$$

где Z_i – заряд ионов в соответствующих проводниках.
- С другой стороны в нашем случае согласно (17):

$$\rho(x) = Zen_i - eA_e(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{e\phi(x)}{T}}. \quad (23)$$

Электрическое поле на границе двух металлов: граничные условия

- Из (23) получим на бесконечности:

$$Z_1 n_i^1 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \tag{24}$$

$$Z_2 n_i^2 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \tag{25}$$

- Из (23) получим на бесконечности:

$$Z_1 n_i^1 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \tag{24}$$

$$Z_2 n_i^2 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \tag{25}$$

- Поделив обе части (25) на соответствующие части (24) и логарифмируя, получим:

- Из (23) получим на бесконечности:
$$Z_1 n_i^1 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \tag{24}$$
$$Z_2 n_i^2 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \tag{25}$$
- Поделив обе части (25) на соответствующие части (24) и логарифмируя, получим:
$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{T}{e} \ln \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}. \tag{26}$$

- Из (23) получим на бесконечности:

$$Z_1 n_i^1 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \qquad (24)$$

$$Z_2 n_i^2 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \qquad (25)$$

- Поделив обе части (25) на соответствующие части (24) и логарифмируя, получим:

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{T}{e} \ln \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}. \qquad (26)$$

- Далее, из (24) найдем:

Таким образом, мы выразили все параметры задачи через единственную постоянную – ϕ_1.

- Из (23) получим на бесконечности:

$$Z_1 n_i^1 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \qquad (24)$$

$$Z_2 n_i^2 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \qquad (25)$$

- Поделив обе части (25) на соответствующие части (24) и логарифмируя, получим:

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{T}{e} \ln \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}. \qquad (26)$$

- Далее, из (24) найдем:

$$A_e = \frac{Z_1 n_i^1}{(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{e\phi_1}{T}}. \qquad (27)$$

  Таким образом, мы выразили все параметры задачи через единственную постоянную – ϕ_1.

- Из (23) получим на бесконечности:

$$Z_1 n_i^1 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \tag{24}$$

$$Z_2 n_i^2 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \tag{25}$$

- Поделив обе части (25) на соответствующие части (24) и логарифмируя, получим:

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{T}{e} \ln \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}. \tag{26}$$

- Далее, из (24) найдем:

$$A_e = \frac{Z_1 n_i^1}{(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{e\phi_1}{T}}. \tag{27}$$

  Таким образом, мы выразили все параметры задачи через единственную постоянную – ϕ_1.

- Будем в дальнейшем для определенности полагать

  В случае, когда справа находится вакуум, т.е., $n_2^i = 0$, согласно (26) $\phi_2 = -\infty = \mathrm{const}$.

- Из (23) получим на бесконечности:

$$Z_1 n_i^1 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \tag{24}$$

$$Z_2 n_i^2 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \tag{25}$$

- Поделив обе части (25) на соответствующие части (24) и логарифмируя, получим:

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{T}{e} \ln \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}. \tag{26}$$

- Далее, из (24) найдем:

$$A_e = \frac{Z_1 n_i^1}{(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{e\phi_1}{T}}. \tag{27}$$

  Таким образом, мы выразили все параметры задачи через единственную постоянную – ϕ_1.

- Будем в дальнейшем для определенности полагать

$$n_1 > n_2. \tag{28}$$

  В случае, когда справа находится вакуум, т.е., $n_2^i = 0$, согласно (26) $\phi_2 = -\infty = \mathrm{const}$.

- Из (23) получим на бесконечности:
$$Z_1 n_i^1 = A_e(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \tag{24}$$
$$Z_2 n_i^2 = A_e(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \tag{25}$$
- Поделив обе части (25) на соответствующие части (24) и логарифмируя, получим:
$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{T}{e} \ln \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}. \tag{26}$$
- Далее, из (24) найдем:
$$A_e = \frac{Z_1 n_i^1}{(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{e\phi_1}{T}}. \tag{27}$$
Таким образом, мы выразили все параметры задачи через единственную постоянную – ϕ_1.
- Будем в дальнейшем для определенности полагать
$$n_1 > n_2. \tag{28}$$
В случае, когда справа находится вакуум, т.е., $n_2^i = 0$, согласно (26) $\phi_2 = -\infty = \mathrm{const}$.
- С учетом (27) уравнение Пуассона (18) примет вид:

- Из (23) получим на бесконечности:

$$Z_1 n_i^1 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_1}{T}}, \tag{24}$$

$$Z_2 n_i^2 = A_e (2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{e\phi_2}{T}}. \tag{25}$$

- Поделив обе части (25) на соответствующие части (24) и логарифмируя, получим:

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{T}{e} \ln \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}. \tag{26}$$

- Далее, из (24) найдем:

$$A_e = \frac{Z_1 n_i^1}{(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{e\phi_1}{T}}. \tag{27}$$

  Таким образом, мы выразили все параметры задачи через единственную постоянную – ϕ_1.
- Будем в дальнейшем для определенности полагать

$$n_1 > n_2. \tag{28}$$

  В случае, когда справа находится вакуум, т.е., $n_2^i = 0$, согласно (26) $\phi_2 = -\infty = \mathrm{const}$.
- С учетом (27) уравнение Пуассона (18) примет вид:

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi e \left(Z n_i - Z_1 n_i^1 \mathrm{e}^{\frac{e(\phi-\phi_1)}{T}} \right).} \tag{29}$$

Размерностное преобразование, окончательное уравнение

- Введем новую безразмерную потенциальную функцию Φ и новую безразмерную переменную ξ:

$$\Phi = \frac{e\phi}{T}, \tag{30}$$

$$\xi = \frac{x}{\lambda_D}; \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 Z n_i^1}}, \tag{31}$$

где λ_D – так называемый радиус Дебая - Хюккеля, а $\Phi(\xi)$ – отношение потенциальной энергии электрона в электрическом поле к его средней кинетической энергии.

- Введем новую безразмерную потенциальную функцию Φ и новую безразмерную переменную ξ:

$$\Phi = \frac{e\phi}{T}, \tag{30}$$

$$\xi = \frac{x}{\lambda_D}; \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 Z n_i^1}}, \tag{31}$$

где λ_D – так называемый радиус Дебая - Хюккеля, а $\Phi(\xi)$ – отношение потенциальной энергии электрона в электрическом поле к его средней кинетической энергии.
- Далее, учитывая, что потенциал электрического поля задан с точностью до константы, положим:

Размерностное преобразование, окончательное уравнение

- Введем новую безразмерную потенциальную функцию Φ и новую безразмерную переменную ξ:

$$\Phi = \frac{e\phi}{T}, \qquad (30)$$

$$\xi = \frac{x}{\lambda_D}; \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 Z n_i^1}}, \qquad (31)$$

где λ_D – так называемый радиус Дебая - Хюккеля, а $\Phi(\xi)$ – отношение потенциальной энергии электрона в электрическом поле к его средней кинетической энергии.

- Далее, учитывая, что потенциал электрического поля задан с точностью до константы, положим:

$$\phi(-\infty) \equiv \phi_1 = 0. \qquad (32)$$

- Введем новую безразмерную потенциальную функцию Φ и новую безразмерную переменную ξ:

$$\Phi = \frac{e\phi}{T}, \qquad (30)$$

$$\xi = \frac{x}{\lambda_D}; \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 Z n_i^1}}, \qquad (31)$$

где λ_D – так называемый радиус Дебая - Хюккеля, а $\Phi(\xi)$ – отношение потенциальной энергии электрона в электрическом поле к его средней кинетической энергии.

- Далее, учитывая, что потенциал электрического поля задан с точностью до константы, положим:

$$\phi(-\infty) \equiv \phi_1 = 0. \qquad (32)$$

- Таким образом, уравнение Власова (29) примет следующий компактный вид:

$$\frac{d^2\Phi_-}{d\xi^2} = \mathrm{e}^{\Phi_-} - 1; \quad \xi < 0; \qquad (33)$$

$$\frac{d^2\Phi_+}{d\xi^2} = \mathrm{e}^{\Phi_+} - \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}; \quad \xi \geq 0. \qquad (34)$$

- Введем новую безразмерную потенциальную функцию Φ и новую безразмерную переменную ξ:

$$\Phi = \frac{e\phi}{T}, \tag{30}$$

$$\xi = \frac{x}{\lambda_D}; \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 Z n_i^1}}, \tag{31}$$

где λ_D – так называемый радиус Дебая - Хюккеля, а $\Phi(\xi)$ – отношение потенциальной энергии электрона в электрическом поле к его средней кинетической энергии.

- Далее, учитывая, что потенциал электрического поля задан с точностью до константы, положим:

$$\phi(-\infty) \equiv \phi_1 = 0. \tag{32}$$

- Таким образом, уравнение Власова (29) примет следующий компактный вид:

$$\frac{d^2\Phi_-}{d\xi^2} = \mathrm{e}^{\Phi_-} - 1; \quad \xi < 0; \tag{33}$$

$$\frac{d^2\Phi_+}{d\xi^2} = \mathrm{e}^{\Phi_+} - \frac{Z_2 n_i^2}{Z_1 n_i^1}; \quad \xi \geq 0. \tag{34}$$

- Уравнения (33) - (34) должны решаться с условиями на границе перехода и на бесконечности:

$$\Phi_-(0) = \Phi_+(0); \qquad \Phi'_-(0) = \Phi'_+(0), \tag{35}$$

$$\Phi_-(-\infty) = 0; \quad \Phi'_-(-\infty) = \Phi'_+(+\infty) = 0. \tag{36}$$

- Уравнения Власова (33) – (34) являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка вида:
$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = F(\Phi). \qquad (37)$$

- Уравнения Власова (33) – (34) являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка вида:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = F(\Phi). \tag{37}$$

- Для их решения сделаем замену переменных:

- Уравнения Власова (33) – (34) являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка вида:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = F(\Phi). \tag{37}$$

- Для их решения сделаем замену переменных:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = U(\Phi, \xi); \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} \equiv \frac{d}{d\xi}U \equiv \frac{dU}{d\Phi}U. \tag{38}$$

Решение нелинейных уравнений Власова

- Уравнения Власова (33) – (34) являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка вида:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = F(\Phi). \tag{37}$$

- Для их решения сделаем замену переменных:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = U(\Phi,\xi); \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} \equiv \frac{d}{d\xi}U \equiv \frac{dU}{d\Phi}U. \tag{38}$$

- Таким образом, уравнение (37) преобразуется к простому уравнению:

- Уравнения Власова (33) – (34) являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка вида:
$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = F(\Phi). \tag{37}$$
- Для их решения сделаем замену переменных:
$$\frac{d\Phi}{d\xi} = U(\Phi,\xi); \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} \equiv \frac{d}{d\xi}U \equiv \frac{dU}{d\Phi}U. \tag{38}$$
- Таким образом, уравнение (37) преобразуется к простому уравнению:
$$\frac{dU^2}{d\Phi} = 2F(\Phi) \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\xi} = \pm\sqrt{2\int F(\Phi)d\Phi + \mathrm{Const}_1} \tag{39}$$

- Уравнения Власова (33) – (34) являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка вида:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = F(\Phi). \tag{37}$$

- Для их решения сделаем замену переменных:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = U(\Phi, \xi); \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} \equiv \frac{d}{d\xi}U \equiv \frac{dU}{d\Phi}U. \tag{38}$$

- Таким образом, уравнение (37) преобразуется к простому уравнению:

$$\frac{dU^2}{d\Phi} = 2F(\Phi) \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\xi} = \pm\sqrt{2\int F(\Phi)d\Phi + \mathrm{Const}_1} \tag{39}$$

- Таким образом, окончательно решение уравнения Власова можно записать в квадратурах в неявном виде:

$$\boxed{\int \frac{d\Phi}{\sqrt{2\int F(\Phi)d\Phi + \mathrm{Const}_1}} = \pm\xi + \mathrm{Const}_2.} \tag{40}$$

- Уравнения Власова (33) – (34) являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка вида:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = F(\Phi). \tag{37}$$

- Для их решения сделаем замену переменных:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = U(\Phi,\xi); \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} \equiv \frac{d}{d\xi}U \equiv \frac{dU}{d\Phi}U. \tag{38}$$

- Таким образом, уравнение (37) преобразуется к простому уравнению:

$$\frac{dU^2}{d\Phi} = 2F(\Phi) \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\xi} = \pm\sqrt{2\int F(\Phi)d\Phi + \mathrm{Const}_1} \tag{39}$$

- Таким образом, окончательно решение уравнения Власова можно записать в квадратурах в неявном виде:

$$\boxed{\int \frac{d\Phi}{\sqrt{2\int F(\Phi)d\Phi + \mathrm{Const}_1}} = \pm\xi + \mathrm{Const}_2.} \tag{40}$$

- С учетом граничных условий на $=\infty$ в левом полупространстве получим из (40):

- Уравнения Власова (33) – (34) являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка вида:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = F(\Phi). \tag{37}$$

- Для их решения сделаем замену переменных:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = U(\Phi,\xi); \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} \equiv \frac{d}{d\xi}U \equiv \frac{dU}{d\Phi}U. \tag{38}$$

- Таким образом, уравнение (37) преобразуется к простому уравнению:

$$\frac{dU^2}{d\Phi} = 2F(\Phi) \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\xi} = \pm\sqrt{2\int F(\Phi)d\Phi + \mathrm{Const}_1} \tag{39}$$

- Таким образом, окончательно решение уравнения Власова можно записать в квадратурах в неявном виде:

$$\boxed{\int \frac{d\Phi}{\sqrt{2\int F(\Phi)d\Phi + \mathrm{Const}_1}} = \pm\xi + \mathrm{Const}_2.} \tag{40}$$

- С учетом граничных условий на $= \infty$ в левом полупространстве получим из (40):

$$\frac{d\Phi_-}{d\xi} = \sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi_-} - 1 - \Phi_-)}. \tag{41}$$

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$

- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля

$$\Phi \ll 1, \tag{43}$$

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$

- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля

$$\Phi \ll 1, \tag{43}$$

- Тогда, разлагая подкоренное выражение в ряд Тейлора по малости Φ с точностью до квадратов, получим $\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)} \approx \Phi^2$ и, таким образом:

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$

- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля

$$\Phi \ll 1, \tag{43}$$

- Тогда, разлагая подкоренное выражение в ряд Тейлора по малости Φ с точностью до квадратов, получим $\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)} \approx \Phi^2$ и, таким образом:

$$\boxed{\Phi_-(\xi) = \Phi_0 \mathrm{e}^{\xi}. \tag{44}}$$

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:
$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$
- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля
$$\Phi \ll 1, \tag{43}$$
- Тогда, разлагая подкоренное выражение в ряд Тейлора по малости Φ с точностью до квадратов, получим $\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)} \approx \Phi^2$ и, таким образом:
$$\boxed{\Phi_-(\xi) = \Phi_0 \mathrm{e}^{\xi}.} \tag{44}$$
- В этом же приближении найдем с помощью (41):

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(e^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$

- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля

$$\Phi \ll 1, \tag{43}$$

- Тогда, разлагая подкоренное выражение в ряд Тейлора по малости Φ с точностью до квадратов, получим $\sqrt{2(e^{\Phi} - 1 - \Phi)} \approx \Phi^2$ и, таким образом:

$$\boxed{\Phi_-(\xi) = \Phi_0 e^{\xi}.} \tag{44}$$

- В этом же приближении найдем с помощью (41):

$$\frac{d\Phi_-}{d\xi} = \Phi_-; \Rightarrow \Phi_-'(0) = \Phi_0. \tag{45}$$

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$

- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля

$$\Phi \ll 1, \tag{43}$$

- Тогда, разлагая подкоренное выражение в ряд Тейлора по малости Φ с точностью до квадратов, получим $\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)} \approx \Phi^2$ и, таким образом:

$$\boxed{\Phi_-(\xi) = \Phi_0 \mathrm{e}^{\xi}.} \tag{44}$$

- В этом же приближении найдем с помощью (41):

$$\frac{d\Phi_-}{d\xi} = \Phi_-; \Rightarrow \Phi'_-(0) = \Phi_0. \tag{45}$$

- Таким образом, на границе раздела имеем:

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$

- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля

$$\Phi \ll 1, \tag{43}$$

- Тогда, разлагая подкоренное выражение в ряд Тейлора по малости Φ с точностью до квадратов, получим $\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)} \approx \Phi^2$ и, таким образом:

$$\boxed{\Phi_-(\xi) = \Phi_0 \mathrm{e}^{\xi}.} \tag{44}$$

- В этом же приближении найдем с помощью (41):

$$\frac{d\Phi_-}{d\xi} = \Phi_-; \Rightarrow \Phi'_-(0) = \Phi_0. \tag{45}$$

- Таким образом, на границе раздела имеем:

$$\Phi_-(0) = \Phi_0; \quad \Phi'_-(0) = -\Phi_0. \tag{46}$$

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \qquad (42)$$

- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля

$$\Phi \ll 1, \qquad (43)$$

- Тогда, разлагая подкоренное выражение в ряд Тейлора по малости Φ с точностью до квадратов, получим $\sqrt{2(\mathrm{e}^{\Phi} - 1 - \Phi)} \approx \Phi^2$ и, таким образом:

$$\boxed{\Phi_-(\xi) = \Phi_0 \mathrm{e}^{\xi}. \qquad (44)}$$

- В этом же приближении найдем с помощью (41):

$$\frac{d\Phi_-}{d\xi} = \Phi_-; \Rightarrow \Phi'_-(0) = \Phi_0. \qquad (45)$$

- Таким образом, на границе раздела имеем:

$$\Phi_-(0) = \Phi_0; \quad \Phi'_-(0) = -\Phi_0. \qquad (46)$$

- В правой полуплоскости имеем в линейном по Φ приближении, полагая в уравнении (34) $n_i^2 = 0$:

$$\Phi_-(0) = \Phi_0 = C1 - 1; \quad \Phi'_-(0) = -\Phi_0 = -C1, \qquad (48)$$

- Решение уравнения (41) в неявном виде можно записать с помощью потенциала на границе раздела $\Phi_-(0) \equiv \Phi_0$, в то время как невозможно формально оттолкнуться от условия на бесконечности, где $\xi = -\infty$:

$$\int\limits_{\Phi}^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(e^{\Phi} - 1 - \Phi)}} = -\xi; \quad \xi < 0. \tag{42}$$

- Этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим случай слабого электрического поля

$$\Phi \ll 1, \tag{43}$$

- Тогда, разлагая подкоренное выражение в ряд Тейлора по малости Φ с точностью до квадратов, получим $\sqrt{2(e^{\Phi} - 1 - \Phi)} \approx \Phi^2$ и, таким образом:

$$\boxed{\Phi_-(\xi) = \Phi_0 e^{\xi}. \tag{44}}$$

- В этом же приближении найдем с помощью (41):

$$\frac{d\Phi_-}{d\xi} = \Phi_-; \Rightarrow \Phi'_-(0) = \Phi_0. \tag{45}$$

- Таким образом, на границе раздела имеем:

$$\Phi_-(0) = \Phi_0; \quad \Phi'_-(0) = -\Phi_0. \tag{46}$$

- В правой полуплоскости имеем в линейном по Φ приближении, полагая в уравнении (34) $n_i^2 = 0$:

$$\Phi_+ = C1e^{-\xi} - 1. \tag{47}$$

$$\Phi_-(0) = \Phi_0 = C1 - 1; \quad \Phi'_-(0) = -\Phi_0 = -C1, \tag{48}$$

Решение уравнений Власова для границы металл-вакуум

- Решая систему линейных алгебраических уравнений (48), найдем:

- Решая систему линейных алгебраических уравнений (48), найдем:

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2}; \quad C1 = \frac{1}{2}. \tag{50}$$

- Решая систему линейных алгебраических уравнений (48), найдем:

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2}; \quad C1 = \frac{1}{2}. \tag{50}$$

- Таким образом найдем решение линейного уравнения Власова:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\xi}; \quad \xi < 0 \quad \Rightarrow \phi = -\frac{T}{2e}e^{\frac{x}{\lambda_D}}; \tag{51}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\xi}; \quad \xi \geq 0 \quad \Rightarrow \phi = \frac{T}{2e}e^{-\frac{x}{\lambda_D}} - \frac{T}{e}. \tag{52}$$

- Решая систему линейных алгебраических уравнений (48), найдем:

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2}; \quad C1 = \frac{1}{2}. \tag{50}$$

- Таким образом найдем решение линейного уравнения Власова:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\xi}; \quad \xi < 0 \quad \Rightarrow \phi = -\frac{T}{2e} e^{\frac{x}{\lambda_D}}; \tag{51}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\xi}; \quad \xi \geq 0 \quad \Rightarrow \phi = \frac{T}{2e} e^{-\frac{x}{\lambda_D}} - \frac{T}{e}. \tag{52}$$

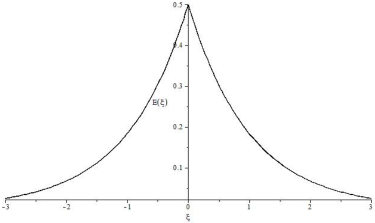


Figure 2. Приведенная напряженность электрического поля Φ'_ξ на границе «металл - вакуум» (51) – (52).

Сферически-симметричное решение уравнений Власова для заряда в плазме

- Пусть в начале координат находится заряд q, а плазма в целом электронейтральна, т.е.:

$$n_e(\infty) = Zn_i(\infty) \qquad = n_0; \tag{53}$$

$$\phi(\infty) = 0; \quad \phi'(\infty) = 0. \tag{54}$$

- Пусть в начале координат находится заряд q, а плазма в целом электронейтральна, т.е.:

$$n_e(\infty) = Zn_i(\infty) \qquad = n_0; \tag{53}$$

$$\phi(\infty) = 0; \quad \phi'(\infty) = 0. \tag{54}$$

- Рассмотрим уравнение Власова (18) в случае сферической симметрии, полагая $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ и учитывая формулу для оператора Лапласса в сферической системе координат в случае сферической симметрии:

- Пусть в начале координат находится заряд q, а плазма в целом электронейтральна, т.е.:

$$n_e(\infty) = Zn_i(\infty) \qquad = n_0; \tag{53}$$

$$\phi(\infty) = 0; \quad \phi'(\infty) = 0. \tag{54}$$

- Рассмотрим уравнение Власова (18) в случае сферической симметрии, полагая $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ и учитывая формулу для оператора Лапласса в сферической системе координат в случае сферической симметрии:

$$\triangle\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi}{dr}. \tag{55}$$

- Пусть в начале координат находится заряд q, а плазма в целом электронейтральна, т.е.:

$$n_e(\infty) = Zn_i(\infty) \qquad = n_0; \tag{53}$$

$$\phi(\infty) = 0; \quad \phi'(\infty) = 0. \tag{54}$$

- Рассмотрим уравнение Власова (18) в случае сферической симметрии, полагая $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ и учитывая формулу для оператора Лапласса в сферической системе координат в случае сферической симметрии:

$$\triangle\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi}{dr}. \tag{55}$$

- Таким образом уравнение Власова (18) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi}{dr} = -4\pi\sum_a e_a A_a(2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(x)}{T}}} \tag{56}$$

- Пусть в начале координат находится заряд q, а плазма в целом электронейтральна, т.е.:

$$n_e(\infty) = Zn_i(\infty) \qquad = n_0; \tag{53}$$

$$\phi(\infty) = 0; \quad \phi'(\infty) = 0. \tag{54}$$

- Рассмотрим уравнение Власова (18) в случае сферической симметрии, полагая $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ и учитывая формулу для оператора Лапласса в сферической системе координат в случае сферической симметрии:

$$\triangle\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi}{dr}. \tag{55}$$

- Таким образом уравнение Власова (18) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi}{dr} = -4\pi\sum_a e_a A_a(2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(x)}{T}}} \tag{56}$$

- Учитывая условия на бесконечности (53) – (54) и приравнивая на бесконечности концентрации зарядов электронов и ионов, получим соотношение:

- Пусть в начале координат находится заряд q, а плазма в целом электронейтральна, т.е.:

$$n_e(\infty) = Zn_i(\infty) \qquad = n_0; \tag{53}$$

$$\phi(\infty) = 0; \quad \phi'(\infty) = 0. \tag{54}$$

- Рассмотрим уравнение Власова (18) в случае сферической симметрии, полагая $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ и учитывая формулу для оператора Лапласса в сферической системе координат в случае сферической симметрии:

$$\triangle\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi}{dr}. \tag{55}$$

- Таким образом уравнение Власова (18) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi}{dr} = -4\pi\sum_a e_a A_a(2\pi m_a T)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{e_a\phi(x)}{T}}} \tag{56}$$

- Учитывая условия на бесконечности (53) – (54) и приравнивая на бесконечности концентрации зарядов электронов и ионов, получим соотношение:

$$eA_e(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}} = ZeA_i(2\pi m_i T)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow A_i = \frac{1}{Z}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{\frac{3}{2}} A_e. \tag{57}$$

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Тогда уравнение Власова (56) примет следующий вид:

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Тогда уравнение Власова (56) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} = \left(\mathrm{e}^{\Phi} - \mathrm{e}^{-Z\Phi}\right). \tag{59}$$

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Тогда уравнение Власова (56) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} = \left(\mathrm{e}^{\Phi} - \mathrm{e}^{-Z\Phi}\right). \tag{59}$$

- В линейном по Φ приближении уравнение (59) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} - \Phi(1+Z) = 0. \tag{60}}$$

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Тогда уравнение Власова (56) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} = \left(\mathrm{e}^{\Phi} - \mathrm{e}^{-Z\Phi}\right). \tag{59}$$

- В линейном по Φ приближении уравнение (59) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} - \Phi(1+Z) = 0.} \tag{60}$$

- Для решения этого уравнения сделаем стандартную замену

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Тогда уравнение Власова (56) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} = \left(\mathrm{e}^{\Phi} - \mathrm{e}^{-Z\Phi}\right). \tag{59}$$

- В линейном по Φ приближении уравнение (59) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} - \Phi(1+Z) = 0.} \tag{60}$$

- Для решения этого уравнения сделаем стандартную замену

$$\Phi = \frac{\psi(xi)}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} \equiv \frac{\psi''}{\xi}. \tag{61}$$

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Тогда уравнение Власова (56) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} = \left(\mathrm{e}^{\Phi} - \mathrm{e}^{-Z\Phi}\right). \tag{59}$$

- В линейном по Φ приближении уравнение (59) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} - \Phi(1+Z) = 0.} \tag{60}$$

- Для решения этого уравнения сделаем стандартную замену

$$\Phi = \frac{\psi(xi)}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} \equiv \frac{\psi''}{\xi}. \tag{61}$$

- Таким образом, в безразмерных переменных (ψ, ξ) уравнение Власова принимает вид:

и имеет своим сходящимся на бесконечности решением:

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Тогда уравнение Власова (56) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} = \left(\mathrm{e}^{\Phi} - \mathrm{e}^{-Z\Phi}\right). \tag{59}$$

- В линейном по Φ приближении уравнение (59) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} - \Phi(1+Z) = 0.} \tag{60}$$

- Для решения этого уравнения сделаем стандартную замену

$$\Phi = \frac{\psi(xi)}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} \equiv \frac{\psi''}{\xi}. \tag{61}$$

- Таким образом, в безразмерных переменных (ψ, ξ) уравнение Власова принимает вид:

$$\psi'' + (1+Z)\psi = 0. \tag{62}$$

и имеет своим сходящимся на бесконечности решением:

- Подставим (57) в уравнение Власова (56) и произведем размерностное преобразование:

$$\frac{e\phi}{T} = \Phi; \quad r = \lambda_D \xi, \tag{58}$$

- Тогда уравнение Власова (56) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} = \left(\mathrm{e}^{\Phi} - \mathrm{e}^{-Z\Phi}\right). \tag{59}$$

- В линейном по Φ приближении уравнение (59) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} - \Phi(1+Z) = 0.} \tag{60}$$

- Для решения этого уравнения сделаем стандартную замену

$$\Phi = \frac{\psi(xi)}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi} \equiv \frac{\psi''}{\xi}. \tag{61}$$

- Таким образом, в безразмерных переменных (ψ, ξ) уравнение Власова принимает вид:

$$\psi'' + (1+Z)\psi = 0. \tag{62}$$

и имеет своим сходящимся на бесконечности решением:

$$\psi(\xi) = C\mathrm{e}^{-\xi} \Rightarrow \phi(r) = \frac{T\lambda_D}{er} C\mathrm{e}^{-\frac{r}{\lambda_D}}. \tag{63}$$

Дебаевская экранировеа заряда в плазме

- Учитывая, что при $r \to 0$ решение (63) должно переходить в кулоновское решение для заряда q, т.е., q/r, найдем, сравнивая, константу C:

- Учитывая, что при $r \to 0$ решение (63) должно переходить в кулоновское решение для заряда q, т.е., q/r, найдем, сравнивая, константу C:
$$C = \frac{eq}{T\lambda_D}. \tag{64}$$

Дебаевская экранировеа заряда в плазме

- Учитывая, что при $r \to 0$ решение (63) должно переходить в кулоновское решение для заряда q, т.е., q/r, найдем, сравнивая, константу C:
$$C = \frac{eq}{T\lambda_D}. \tag{64}$$
- Таким образом, получим окончательно для поля одинаночного заряда q в однородной плазме:

- Учитывая, что при $r \to 0$ решение (63) должно переходить в кулоновское решение для заряда q, т.е., q/r, найдем, сравнивая, константу C:

$$C = \frac{eq}{T\lambda_D}. \tag{64}$$

- Таким образом, получим окончательно для поля одинаночного заряда q в однородной плазме:

$$\boxed{\phi(r) = \frac{q}{r}\mathrm{e}^{-\frac{r}{\lambda_D}}.} \tag{65}$$

- Учитывая, что при $r \to 0$ решение (63) должно переходить в кулоновское решение для заряда q, т.е., q/r, найдем, сравнивая, константу C:

$$C = \frac{eq}{T\lambda_D}. \tag{64}$$

- Таким образом, получим окончательно для поля одинаночного заряда q в однородной плазме:

$$\boxed{\phi(r) = \frac{q}{r} \mathrm{e}^{-\frac{r}{\lambda_D}}.} \tag{65}$$

- Решение (65) описывает так называемую Дебаевское экранирование заряда в плазме. Фактически на расстоянии нескольких Дебаевских радиусов электрическое поле заряда практически полностью экранируется.