

**Об устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии**

**Л.У. БАХТИЕВА,**  
канд. физ.-мат. наук,  
**Ф.Х. ТАЗЮКОВ,**  
канд. физ.-мат. наук  
(КФУ, Казань)  
lbakhtie@yandex.ru

*Представлен новый подход к решению задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии, учитывающий динамику хлопка, а также модификация алгоритма известного решения задачи методом Ритца.*

**Устойчивость, оболочка, критическая нагрузка, прогиб**

Современное самолетостроение характеризуется широким применением оболочечных конструкций. Практически значимой проблемой является исследование устойчивости замкнутой круговой цилиндрической оболочки, подвергающейся сжатию вдоль образующей усилиями  $p$ , равномерно распределенными по дуговым кромкам. Несмотря на большое количество представленных в литературе решений этой задачи (первые исследования относятся к началу XX века), некоторые вопросы до сих пор остаются открытыми. Как отмечается [1], этот случай нагружения является самым показательным с точки зрения несоответствия теоретических решений большинству экспериментов. В частности, нерешенной остается проблема влияния геометрических параметров на величину критической нагрузки.

В настоящей работе предлагаются два подхода к рассматриваемой задаче. Первый основан на известном решении нелинейных уравнений методом Ритца. Модификация алгоритма расчета позволяет учесть влияние геометрических факторов. Вторым подходом основан на рассмотрении задачи устойчивости оболочки с учетом динамических процессов, происходящих во время хлопка, что приближает теоретическую постановку задачи к экспериментальным наблюдениям.

**Влияние геометрических факторов на величину критической нагрузки**

Рассматриваемая задача в нелинейной постановке сводится к решению системы уравнений [2]

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{2} L(w, w) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad D \nabla^4 w - hL(w, \Phi) - \frac{h}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

где  $w, \Phi$  – подлежащие определению функции прогиба и усилий;  $h, R$  – толщина и радиус оболочки;  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  – изгибная жесткость,  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ;  $L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ .

К интегрированию системы (1) применим метод Ритца, выбирая аппроксимирующую функцию прогиба в виде

$$w(x, y) = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + f_0, \tag{2}$$

где  $m, n$  – волновые числа;  $L$  – длина образующей. Первое слагаемое в выражении (2) соответствует решению линейной задачи, второе отражает несимметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным направлением к центру кривизны;  $f_0$  – слагаемое, соответствующее радиальным перемещениям точек торцевых сечений, связанное с амплитудами  $f_1$  и  $f_2$  формулой  $\frac{f_0}{R} = -\frac{\nu p}{E} + f_1^2 \frac{n^2}{8R^2} - \frac{f_2}{2R}$ , выведенной в работе [2]

из условия периодичности дугового перемещения  $v$ . Как показывают эксперименты, выбор функции (2) достаточно достоверно описывает форму вмятин, наблюдающихся после потери устойчивости.

С учетом функции (2) выражение для полной энергии системы запишется в виде

$$\tilde{\mathcal{E}} = -\tilde{p}^2 - \tilde{p} (b_1 \zeta_1^2 + b_2 \zeta_2^2) + b_3 \zeta_1^2 + b_4 \zeta_2^2 + b_5 \zeta_1^4 + b_6 \zeta_2 \zeta_1^2 + b_7 \zeta_1^2 \zeta_2^2, \tag{3}$$

где введены обозначения  $b_1 = \frac{\eta \theta^2}{4}$ ;  $b_2 = \frac{\eta \theta^2}{2}$ ;  $b_3 = \frac{\eta^2 s_1^2}{48(1-\nu^2)} + \frac{\theta^4}{4s_1^2}$ ;  $b_4 = \frac{1}{8} + \frac{\eta^2 \theta^4}{6(1-\nu^2)}$ ;  $b_5 = \frac{\eta^2 (1+\theta^4)}{128}$ ;  $b_6 = -\frac{\eta}{16} \left( 1 + \frac{8\theta^4}{4s_1^2} \right)$ ;

$$b_7 = \frac{\eta^2 \theta^4}{4} \left( \frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} \right); \quad \theta = \frac{m\pi R}{nL}; \quad \eta = \frac{hn^2}{R}; \quad s_1 = 1 + \theta^2; \quad s_2 = 1 + 9\theta^2; \quad \mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}} \frac{Eh^3 L \pi}{R}; \quad \tilde{p} = \frac{pR}{Eh}; \quad \zeta_1 = \frac{f_1}{h}; \quad \zeta_2 = \frac{f_2}{h}.$$

Метод Ритца приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial \zeta_1} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial \zeta_2} = 0. \tag{4}$$

Из первого уравнения (4) найдем безразмерную нагрузку, а из второго – выражение для квадрата амплитуды  $\zeta_1$  :

$$\tilde{p} = \frac{b_3 + 2b_5\zeta_1^2 + b_6\zeta_2 + b_7\zeta_2^2}{b_1}, \quad \zeta_1^2 = \frac{2(\tilde{p}b_2 - b_4)\zeta_2}{b_6 + 2b_7\zeta_2}, \quad \text{откуда получаем}$$

$$\tilde{p} = \frac{b_3b_6 + (2b_3b_7 + b_6^2 - 4b_4b_5)\zeta_2 + 3b_6b_7\zeta_2^2 + 2b_7^2\zeta_2^3}{b_1b_6 + (2b_1b_7 - 4b_2b_5)\zeta_2}. \quad (5)$$

Добавляя к формуле (5) условие минимума нагрузки, приходим к кубическому уравнению относительно амплитуды  $\zeta_2$ , решая которое и подставляя найденные корни в формулу (5), находим безразмерное значение критической нагрузки  $\tilde{p}_k$ . Расчеты показывают, что эта величина существенным образом зависит от входящих в коэффициенты уравнения волновых параметров  $\eta$  и  $\theta$  (3). Известные результаты [1, 2] получены минимизацией критической нагрузки по двум указанным параметрам, что приводит к значениям  $\tilde{p}_k$ , не зависящим от геометрии оболочки. Это противоречит экспериментальным данным.

Формулы, выведенные на основании обработки результатов многочисленных испытаний [1], показывают, что величина критической нагрузки зависит как от относительной толщины оболочки (параметр  $R/h$ ), так и от ее относительной длины (параметр  $L/R$ ). Например, предлагается формула [1]

$$\tilde{p}_k = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[ 3,87\sqrt{h/R} + 10^{-3}\sqrt{R/h} + 1,46(R/L)^2 (h/R) \right]. \quad (6)$$

Отмечается, что формула (6), как и другие аналогичные эмпирические зависимости, носит приближенный характер, и желательно уточнить ее, более аккуратно проведя теоретические расчеты.

Заметим, что параметры  $\eta$  и  $\theta$  не являются независимыми величинами, так как в них входит одно и то же волновое число  $n$ . Следовательно, нельзя минимизировать по этим двум параметрам. В настоящей работе предлагается следующий алгоритм расчета. Фиксируя волновое число  $m$ , выражаем волновое число  $n$  через параметр  $\eta$  и подставляем это значение в  $\theta$ . Нагрузку  $\tilde{p}$  минимизируем по параметру  $\eta$ . Проводя расчеты для различных значений  $m$ , выбираем ту величину, которая соответствует наименьшей критической нагрузке. На рис. 1 представлены графики, полученные при расчете оболочки с параметрами  $R/h = 400$ ,  $L/R = 3$ . Видно, что минимум нагрузки в данном случае достигается при  $m = 4$ .

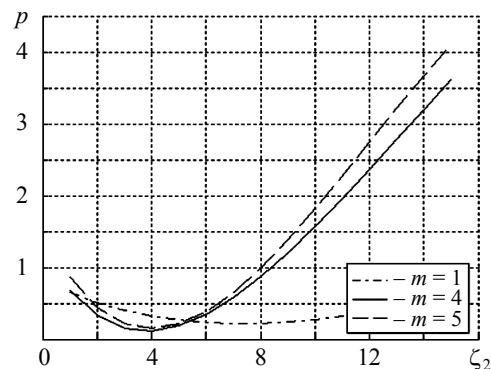


Рис. 1. Зависимость нагрузки от амплитуды прогиба

Полученные результаты показывают, что величина  $\tilde{p}_k$  зависит от геометрии оболочки, что хорошо согласуется с экспериментальными данными и формулой (6). В таблице приведены результаты расчетов для различных значений геометрических параметров.

| $L/R$ | Критические параметры | $R/h$  |        |        |        |
|-------|-----------------------|--------|--------|--------|--------|
|       |                       | 100    | 150    | 400    | 1000   |
| 1     | $m$                   | 1      | 1      | 1      | 4      |
|       | $n$                   | 4      | 4      | 7      | 13     |
|       | $\tilde{p}_k$         | 0,2125 | 0,1439 | 0,1179 | 0,1143 |
| 2     | $m$                   | 1      | 1      | 2      | 4      |
|       | $n$                   | 4      | 4      | 7      | 13     |
|       | $\tilde{p}_k$         | 0,1378 | 0,1297 | 0,1179 | 0,1143 |
| 3     | $m$                   | 2      | 2      | 4      | 6      |
|       | $n$                   | 4      | 5      | 8      | 13     |
|       | $\tilde{p}_k$         | 0,1156 | 0,1155 | 0,1154 | 0,1143 |
| 5     | $m$                   | 3      | 4      | 6      | 10     |
|       | $n$                   | 4      | 8      | 8      | 13     |
|       | $\tilde{p}_k$         | 0,1149 | 0,1148 | 0,1143 | 0,1143 |

Как видим, влияние геометрии оболочки на величину  $\tilde{p}_k$  уменьшается с ростом отношений  $R/h$ ,  $L/h$  и стремится к значению  $\tilde{p}_k = 0,1143$ , которое получается при минимизации нагрузки по двум параметрам  $\eta$  и  $\theta$ .

### Решение задачи с учетом динамических процессов

Анализ закритических деформаций оболочки [2] показывает, что процесс перехода от одних равновесных форм к другим не является статическим: оболочка переходит от начальной формы к изогнутой устойчивой форме динамически, посредством хлопка, который, как правило, влечет за собой появление значительных пластических деформаций и приводит к потере несущей способности оболочки. В связи с этим предложим решение поставленной задачи с учетом динамических процессов.

Чтобы получить уравнение движения оболочки, используем [3] принцип Остроградского – Гамильтона

$$\delta \int_0^t L dt = 0, \quad (7)$$

где функция Лагранжа  $L = K - \mathcal{E}$ ,  $K$  – кинетическая энергия,  $\mathcal{E}$  – потенциальная энергия, для которой получено выражение (3);  $t$  – время.

Величину  $K$  найдем по формуле  $K = \frac{\rho h}{2} \iint \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy$ .

С учетом выражения (2) и принятых ранее обозначений можно получить

$$\tilde{K} = \frac{1}{4} \left( \frac{R}{V} \right)^2 \left( \dot{\zeta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\zeta}_2^2 + \frac{\eta^2}{4} \zeta_1^2 \zeta_2^2 \right), \quad (8)$$

где  $K = \tilde{K} \frac{\pi L E h^3}{R}$ ;  $V$  – скорость звука в материале оболочки.

Из равенства (7) получаем [4] систему уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \dot{\zeta}_1} \right) - \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial \zeta_1} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \dot{\zeta}_2} \right) - \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial \zeta_2} = 0, \quad (9)$$

а также условия в начальный момент времени

$$\zeta_1(0) = \zeta_{10}; \quad \zeta_2(0) = \zeta_{20}; \quad \dot{\zeta}_1(0) = \dot{\zeta}_2(0) = 0 \quad (10)$$

и в момент потери устойчивости  $t = t_k$

$$\dot{\zeta}_1(t_k) = \dot{\zeta}_2(t_k) = 0. \quad (11)$$

Условия (11) соответствуют динамическому критерию устойчивости [5].

Уравнения (9) с учетом выражений (3) и (8) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_1}{d\tau^2} + \frac{16\zeta_1}{4 + \eta^2 \zeta_1^2} \left( -\tilde{p} b_1 + b_3 + b_6 \zeta_2 + 2b_5 \zeta_1^2 + b_7 \zeta_2^2 + \frac{\eta^2}{16} \dot{\zeta}_1^2 \right) &= 0; \\ \frac{d^2 \zeta_2}{d\tau^2} + 4 \left( -2\tilde{p} b_2 \zeta_2 + 2b_4 \zeta_2 + b_6 \zeta_1^2 + 2b_7 \zeta_1^2 \zeta_2 \right) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\tau = tV/R$  – безразмерный параметр времени.

Численное решение системы уравнений (12) с начальными условиями  $\zeta_{10} = 0,01$ ;  $\zeta_{20} = 0$  показывает, что при небольших нагрузках ( $\tilde{p} < \tilde{p}_k$ ) оболочка колеблется около исходного положения равновесия (рис. 2, а).

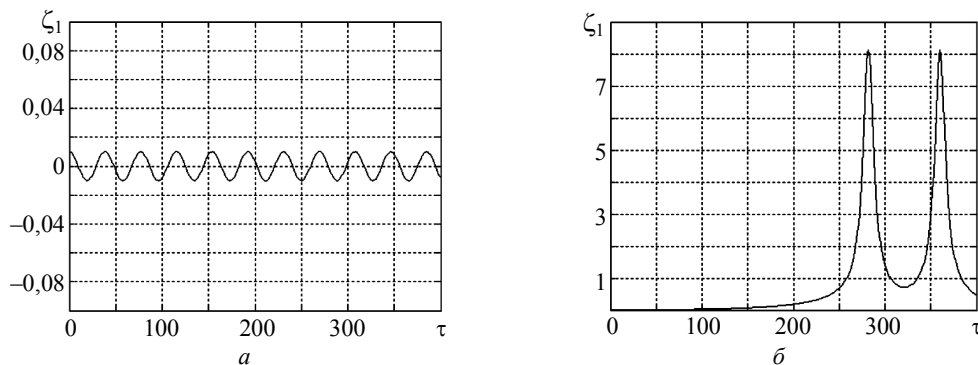


Рис. 2. Амплитуда прогиба при небольших нагрузках (а) и критической нагрузке (б)

При увеличении нагрузки до значения, равного  $\tilde{p}_k$ , наблюдается резкое возрастание амплитуды прогиба, т.е. происходит потеря устойчивости движения по А.М. Ляпунову (рис. 2, б).

Как показывают расчеты, величина критической нагрузки  $\tilde{p}_k$  существенно зависит от выбора начального значения  $\zeta_{10}$ , что затрудняет количественный анализ полученных результатов. Предлагаемый метод решения системы (12) позволяет получить величину  $\tilde{p}_k$  независимо от начального прогиба.

Из статического аналога [3] первого уравнения системы (12) найдем  $\zeta_1^2 = \frac{\tilde{p}b_1 - b_3 - b_6\zeta_2 - b_7\zeta_2^2}{2b_5}$ .

Подставляя найденное значение во второе уравнение системы, получим

$$\frac{d^2\zeta_2}{d\tau^2} = A_0 + A_1\zeta_2 + A_2\zeta_2^2 + A_3\zeta_2^3, \quad (13)$$

где коэффициенты  $A_k$  зависят от нагрузки  $\tilde{p}$  и параметров  $b_i$ .

Полагая  $\zeta_{20} = 0$ , умножим уравнение (13) на  $\frac{d\zeta_2}{d\tau}$  и проинтегрируем обе части уравнения от 0 до  $\tau_k$ :  
 $\zeta_2^2(\tau_k) - \zeta_2^2(0) = 2A_0\zeta_2 + A_1\zeta_2^2 + 2A_2\frac{\zeta_2^3}{3} + A_3\frac{\zeta_2^4}{2}$ .

Согласно условиям (10) – (11) левая часть уравнения равна нулю. Получаем кубическое уравнение для функции  $\zeta_2(\tilde{p})$ . Добавляя к нему условие минимума нагрузки по  $\zeta_2$ , найдем решение задачи при фиксированном значении волнового параметра  $\eta$ . На рис. 3 представлен график зависимости  $\tilde{p}$  от  $\eta$  для оболочки с параметрами  $R/h = 150, L/R = 1, m = 1$ . Минимальная величина  $\tilde{p}_k = 0,26$  достигается при  $\eta = 0,29$ .

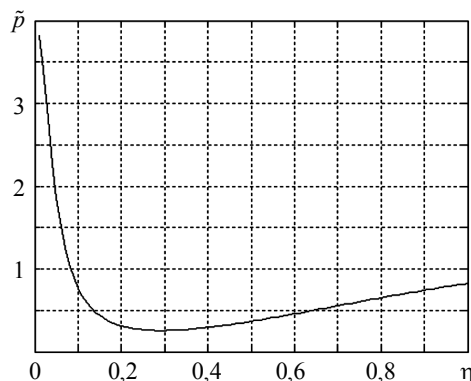


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от волнового параметра

Таким образом, учет динамики хлопка позволяет получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными (по данным экспериментов [2], значение нагрузки  $\tilde{p}_k$  принадлежит интервалу 0,23...0,35). Кроме того, появляется возможность проследить картину потери устойчивости (см. рис. 2).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Коноплев Ю.Г., Тазюков Ф.Х. Устойчивость упругих пластин и оболочек при нестационарных воздействиях. Казань: Изд-во КГУ, 1994. 124 с.
5. Саченков А.В., Бахтиева Л.У. Об одном подходе к решению динамических задач устойчивости тонких оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. 1978. Вып. 13. С. 137–152.

Поступила в редакцию 05.12.13

## Stability of a Cylindrical Shell under Axial Compression

L.U. BAKHTIEVA AND F.KH. TAZYUKOV

*A new approach to solving the task of stability for a circular cylindrical shell under axial compression is presented, taking into account the dynamic buckling. The modification of the algorithm for solving the known problem by the Ritz method is also proposed that allows investigating the effect of geometrical factors on the buckling load.*

**Stability, shell, buckling load, deflection**