КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра астрономии и космической геодезии

М.Г. СОКОЛОВА, В.С. УСАНИН

ПРАКТИКУМ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ
2016

УДК 521.324
ББК 22.62
С59

Принято на заседании кафедры астрономии и космической геодезии
(протокол № 8 от 8 апреля 2016 года)

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры инженерной кибернетики КГЭУ **В.В. Андреев**

Соколова М.Г.
С59 **Практикум по небесной механике:** учебно-методическое пособие / М.Г. Соколова, В.С. Усанин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2016. – 40 с.

В пособии приведены рабочие формулы для вычисления поисковой эфемериды, определения эллиптической орбиты по координатам и скоростям на заданный момент и круговой орбиты по двум наблюдениям. Разобраны соответствующие примеры, даны задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов третьего курса специальности «Астрономия» и направления «Геодезия и дистанционное зондирование».

УДК 521.324
ББК 22.62

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Небесная механика – это раздел астрономии, занимающийся изучением закономерностей в движениях небесных тел под действием различных природных причин, вызывающих или изменяющих эти движения. Небесными телами при этом называются любые реально существующие космические объекты: звёзды, Солнце, большие планеты, астероиды, кометы, метеорные тела, искусственные спутники Земли (ИСЗ) и межпланетные космические аппараты (КА) (исключение составляют те части траекторий полёта, на которых они двигаются под действием ракетных двигателей). Основной задачей небесной механики является определение положения и скорости тела на любой момент времени.

Всю совокупность методов небесной механики можно разделить на два основных раздела: теорию невозмущённого движения и теорию возмущений. Первая часть называется часто также задачей двух тел. Её теория была разработана Иоганном Кеплером (1571–1630) в виде трёх законов, которые называются законами Кеплера:

1) каждое тело движется по коническому сечению, в одном из фокусов которого находится Солнце;

2) площадь сектора, описываемая радиусом-вектором тела, изменяется пропорционально времени;

3) квадраты периодов обращения тел относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Так как расстояния между телами Солнечной системы очень велики по сравнению с размерами самих тел, то все они могут рассматриваться как материальные точки, притягивающие друг друга по закону Ньютона.

В первом приближении движение тела можно рассматривать в предположении, что оно происходит только в поле тяготения центрального тела (Солнца – для планет, астероидов, комет, метеороидов, Земли – для ИСЗ). В этом случае дифференциальные уравнения движения тела можно решить в конечном виде, а постоянные интегрирования имеют астрономический смысл и называются кеплеровскими элементами орбиты.

Размер орбиты определяется элементом a – большой полуосью, а её форма – элементом e – эксцентриситетом. При $a > 0$, $e = 0$ орбита тела – окружность; при $a > 0$, $0 < e < 1$ орбита тела – эллипс; при $a = \infty$, $e = 1$ орбита тела – парабола; при $a < 0$, $e > 1$ орбита тела – гипербола.

Положение орбиты тела в пространстве определяется тремя элементами: i – наклон орбиты к базовой плоскости; Ω – долгота восходящего узла; ω – аргумент перигелия, то есть угловое расстояние перигелия от восходящего узла.

Шестой элемент определяет положение тела на орбите. Это либо T – момент прохождения через перигелий, либо M_0 – средняя аномалия в произвольно выбранный момент времени t_0. Эти два элемента связаны соотношением $M_0 = n(t_0 - T)$, где $n = \sqrt{\mu}/(a\sqrt{a})$ – среднее суточное движение, μ – гравитационный параметр. Поскольку масса Солнца принимается за единицу, а массами других тел Солнечной системы в приближении невозмущённого движения пренебрегают, будем считать для тел, обращающихся вокруг Солнца, $n = k/(a\sqrt{a})$, где k – постоянная Гаусса.

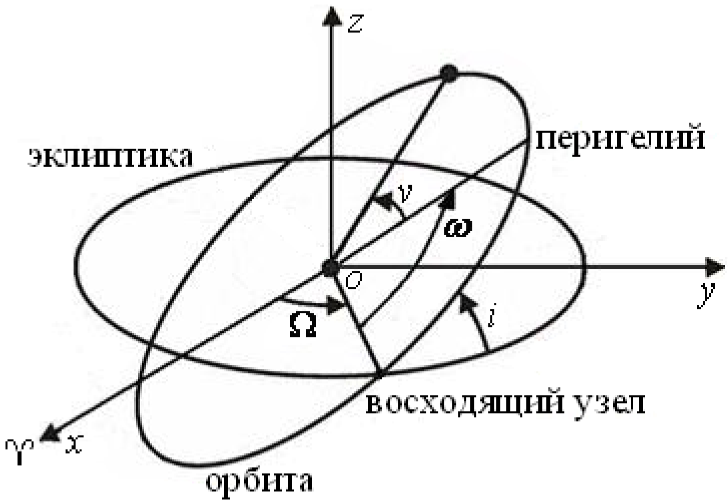

Рис. 1. Кеплеровские элементы орбиты

1. ПОИСКОВАЯ ЭФЕМЕРИДА

Эфемерида – это последовательность геоцентрических или гелиоцентрических положений небесного тела, разделённых равными промежутками времени. Эфемериды вычисляются для обеспечения астрономических и геодезических работ, морских и воздушных навигаций, а также навигаций ИСЗ и КА. Сюда относится и сравнение теоретических положений с наблюдёнными, и поиск тела на небосводе. В случае теоретической эфемериды точность должна полностью соответствовать точности наблюдений (порядка $0'',01$), то есть вычисления должны проводиться с семью значащими цифрами после запятой, и требуется учитывать возмущения. В случае поисковой эфемериды точность должна быть достаточна для наведения телескопа, поэтому вычисления проводятся с пятью значащими цифрами и зачастую можно ограничиться рассмотрением невозмущённого движения.

Исходными данными для вычисления поисковой эфемериды являются элементы орбиты небесного тела: M_0 – средняя аномалия на момент t_0, либо T – момент прохождения через перигелий; i – наклон плоскости орбиты; ω – аргумент перигелия; Ω – долгота восходящего узла; a – большая полуось орбиты; e – эксцентриситет орбиты. (i, ω, Ω отсчитываются обычно от плоскости эклиптики и точки весеннего равноденствия стандартной эпохи, в настоящее время принята эпоха J2000,0).

Требуется найти геоцентрические экваториальные координаты тела на моменты t_i: прямое восхождение α_i, склонение δ_i, расстояние ρ_i.

Схема решения

1. Наклон эклиптики к экватору для эпохи J2000,0 входит в число основных астрономических постоянных, и приводится в современных астрономических справочниках, например, в «Астрономическом ежегоднике»:

$$\varepsilon = 23°26'21'',448 \approx 23{,}43929111° .$$

2. Вычисляем векторные элементы:

$$\alpha_1 = \sin\Omega\sin\omega, \tag{1.1}$$

$$\alpha_2 = \sin\Omega\cos\omega, \tag{1.2}$$

$$\beta_1 = \cos\Omega\sin\omega, \tag{1.3}$$

$$\beta_2 = \cos\Omega\cos\omega, \tag{1.4}$$

$$\gamma_1 = \sin i\sin\omega, \tag{1.5}$$

$$\gamma_2 = \sin i\cos\omega, \tag{1.6}$$

$$P_x = \beta_2 - \alpha_1\cos i, \tag{1.7}$$

$$P_y = (\alpha_2 + \beta_1\cos i)\cos\varepsilon - \gamma_1\sin\varepsilon, \tag{1.8}$$

$$P_z = (\alpha_2 + \beta_1\cos i)\sin\varepsilon + \gamma_1\cos\varepsilon, \tag{1.9}$$

$$Q_x = -\beta_1 - \alpha_2\cos i, \tag{1.10}$$

$$Q_y = (-\alpha_1 + \beta_2\cos i)\cos\varepsilon - \gamma_2\sin\varepsilon, \tag{1.11}$$

$$Q_z = (-\alpha_1 + \beta_2\cos i)\sin\varepsilon + \gamma_2\cos\varepsilon. \tag{1.12}$$

При отладке программы проверяем контрольные соотношения:

$$P_x^{\;2} + P_y^{\;2} + P_z^{\;2} = 1, \tag{1.13}$$

$$Q_x^{\;2} + Q_y^{\;2} + Q_z^{\;2} = 1, \tag{1.14}$$

$$P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z = 0. \tag{1.15}$$

3. Находим среднюю аномалию на моменты t_i:

$$M_i = M_0 + n(t_i - t_0). \tag{1.16}$$

Для вычисления разности моментов t_i и t_0 следует представить их в форме юлианских дат. Если таковые не даны в условии задачи, то нужно воспользоваться «Астрономическим ежегодником» или соответствующими онлайн-сервисами в сети Интернет. Если вместо M_0 и t_0 дан момент T, то заметим, что в перигелии средняя аномалия по определению обращается в ноль, и запишем: $t_0 = T$, $M_0 = 0°$. Среднее суточное движение определяется формулой:

$$n = \sqrt{\mu}/(a\sqrt{a}).$$

Принимая за единицу массы массу Солнца, за единицу длины – астрономическую единицу и пренебрегая массой тела, обращающегося вокруг Солнца, получим среднее суточное движение в радианах в сутки:

$$n = k/(a\sqrt{a}), \tag{1.17}$$

где постоянная Гаусса

$$k = 0{,}01720209895.$$

Отметим необходимость приведения величин M_0 и n к общим угловым единицам измерения (радианам, либо градусам).

4. Из уравнения Кеплера необходимо найти эксцентрическую аномалию E_i на моменты t_i:

$$E_i - e\sin E_i = M_i. \tag{1.18}$$

(В данном уравнении E_i и M_i должны быть выражены в радианах. Если же вычисления ведутся в градусах, то к эксцентриситету e нужно формально применить процедуру перевода из радианов в градусы.) Очевидно, что это уравнение невозможно решить относительно E_i алгебраически, поэтому применяется какой-либо численный метод. Различные методы имеют свои преимущества и недостатки, но должны в конечном итоге приводить к одинаковым результатам. Рассмотрим три из них.

Метод простых итераций наиболее легко программируется. Он применим для вычислений вручную при небольших эксцентриситетах ($e < 0{,}4$), а для компьютерных вычислений – когда процедуру решения уравнения Кеплера не требуется повторять слишком большое число раз. Примем для нулевого приближения:

$$E_{i0} = M_i.$$

В первом приближении:

$$E_{i1} = M_i + e\sin E_{i0},$$

во втором приближении:

$$E_{i2} = M_i + e\sin E_{i1},$$

и так далее, в k-м приближении:

$$E_{ik} = M_i + e\sin E_{ik-1}. \qquad (1.19)$$

Итерации повторяются до тех пор, пока величина $\left|E_{ik} - E_{ik-1}\right|$ не станет пренебрежимо мала в рамках заданной точности. Тогда величину E_{ik} можно принять в качестве искомой E_i.

В итерационном методе Ньютона некоторое усложнение формулы компенсируется более быстрой сходимостью итераций, что сокращает время вычислений. Поэтому его целесообразно применять для вычислений вручную при больших эксцентриситетах, а для компьютерных вычислений – когда решение уравнения Кеплера нужно получить многие тысячи и миллионы раз. Также принимаем в качестве нулевого приближения:

$$E_{i0} = M_i.$$

В первом приближении:

$$E_{i1} = E_{i0} + (M + e\sin E_{i0} - E_{i0})/(1 - e\cos E_{i0}),$$

во втором приближении:

$$E_{i2} = E_{i1} + (M + e\sin E_{i1} - E_{i1})/(1 - e\cos E_{i1}),$$

и так далее, в k-м приближении:

$$E_{ik} = E_{ik-1} + (M + e\sin E_{ik-1} - E_{ik-1})/(1 - e\cos E_{ik-1}). \qquad (1.20)$$

Вычисления опять же повторяются до достижения величиной $\left|E_{ik} - E_{ik-1}\right|$ заданной точности. (Заметим, что если угловые величины выражены в градусах, то эксцентриситет переводится в градусы только в числителе, но не в знаменателе.)

Метод разложения в ряд программируется сложнее, чем итерационные методы, поэтому при наличии современной вычислительной техники применяется редко. Ряды сходятся абсолютно при $e < 0{,}6627434...$ (предел Лапласа):

$$E_i = M_i + e\sin M_i + (e^2/2)\sin(2M_i) + (e^3/(3!\cdot 2^2))(3^2\sin(3M_i) - 3\sin M_i) +$$
$$+ (e^4/(4!\cdot 2^3))(4^3\sin(4M_i) - 4\cdot 2^3\sin(2M_i)) +$$
$$+ (e^5/(5!\cdot 2^4))(5^4\sin(5M_i) - 5\cdot 3^4\sin(3M_i) + 10\sin M_i) + ... \qquad (1.21)$$

5. Пользуясь полученным с помощью одного из численных методов значением E_i, находим:

$$r_i \sin v_i = a\sqrt{1-e^2}\sin E_i, \tag{1.22}$$

$$r_i \cos v_i = a(\cos E_i - e). \tag{1.23}$$

6. Вычисляем гелиоцентрические экваториальные прямоугольные координаты тела:

$$x_i = P_x r_i \cos v_i + Q_x r_i \sin v_i, \tag{1.24}$$

$$y_i = P_y r_i \cos v_i + Q_y r_i \sin v_i, \tag{1.25}$$

$$z_i = P_z r_i \cos v_i + Q_z r_i \sin v_i. \tag{1.26}$$

7. Далее потребуются прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты Солнца X_i, Y_i, Z_i на моменты t_i, отсчитываемые от экватора и точки весеннего равноденствия заданной эпохи. Если таковые не даны в условии задачи, то их следует взять из «Астрономического ежегодника» (при необходимости применить формулы интерполирования) или воспользоваться соответствующими онлайн-сервисами в сети Интернет.

8. Получаем геоцентрические координаты небесного тела:

$$\xi_i = x_i + X_i, \tag{1.27}$$

$$\eta_i = y_i + Y_i, \tag{1.28}$$

$$\zeta_i = z_i + Z_i. \tag{1.29}$$

9. Сферические координаты тела ρ_i, α_i, δ_i определяются соотношениями:

$$\rho_i \cos\alpha_i \cos\delta_i = \xi_i, \tag{1.30}$$

$$\rho_i \sin\alpha_i \cos\delta_i = \eta_i, \tag{1.31}$$

$$\rho_i \sin\delta_i = \zeta_i. \tag{1.32}$$

Заметим, что не случайно из этих соотношений можно выразить две тригонометрические функции прямого восхождения. Прежде чем вычислить значение угла α_i, необходимо определить, к какой четверти он относится. Угловые величины α_i, δ_i традиционно принято представлять в форме соответственно часы, минуты, секунды и градусы, минуты, секунды (в обоих случаях дробная часть секунд в десятичной форме, если требуется). Что касается склонения, то если оно относится к южному полушарию, перед градусами ставится знак «минус», а для выделения минут и секунд величина угла берётся по модулю.

Пример

Оскулирующие гелиоцентрические элементы орбиты кометы Хартли 2 (103P) на эпоху, близкую к прохождению перигелия в 2010 году: $\omega = 181{,}195481°$, $\Omega = 219{,}762661°$, $i = 13{,}617170°$, $e = 0{,}69514530$, $a = 3{,}47276940$ а. е., $T = 28{,}256201$ октября 2010 UT = JD 2455497,756201 UT (элементы ориентации орбиты отсчитываются от эклиптики и равноденствия J2000,0). Вычислите поисковую эфемериду кометы Хартли 2 на момент сближения с ней космического аппарата NASA «EPOXI», $t_i =$ 13:59:47 UT 04 ноября 2010 = JD 2455505,083183 UT, если геоцентрические экваториальные (J2000,0) координаты Солнца на этот момент равны $X_i = -0{,}73824567$ а. е., $Y_i = -0{,}60761830$ а. е., $Z_i = -0{,}26341590$ а. е.

Решение

Здесь и далее будем предполагать, что используемые вычислительные средства (калькулятор, электронные таблицы, либо язык программирования) вычисляют тригонометрические функции от углов, выраженных в радианах. Соответственно, переводим в радианы угловую константу

$$\varepsilon = 0{,}40909280$$

и угловые исходные данные (по определению при $t_0 = T$, $M_0 = 0°$):

$$\omega = 3{,}16245773,$$

$$\Omega = 3{,}83558201,$$

$$i = 0{,}23766445,$$

$$M_0 = 0.$$

По формулам (1.1)–(1.12) вычисляем:

$$\alpha_1 = 0{,}01334452,$$

$$\alpha_2 = 0{,}63946966,$$

$$\beta_1 = 0{,}01603783,$$

$$\beta_2 = 0{,}76853319,$$

$$\gamma_1 = -0{,}00491198,$$

$$\gamma_2 = -0{,}23538213,$$

$$P_x = 0{,}75556378,$$

$$P_y = 0{,}60295662,$$

$$P_z = 0{,}25605993,$$

$$Q_x = -0{,}63753232,$$

$$Q_y = 0{,}76668124,$$

$$Q_z = 0{,}07584471.$$

Удостоверяемся, что удовлетворяются соотношения (1.13)–(1.15). Вообще, достаточно и визуального контроля. Но если контроль осуществляется автоматически, то нужно иметь в виду, что точность выполнения соотношений ограничивается разрядностью средства вычислений. Поэтому не следует ожидать полного равенства левой и правой частей, важно лишь, чтобы различия не выходили за пределы заданной точности.

По формулам (1.17) и (1.16), полагая $t_0 = T$, $M_0 = 0$, имеем:

$$n = 0{,}0026580630 \text{ сут.}^{-1},$$

$$M_i = 0{,}01947558.$$

Далее необходимо решить уравнение Кеплера (1.18). Несколько десятков или даже сотен итераций выполняются современной вычислительной техникой практически мгновенно, поэтому вполне достаточен метод простых итераций. Примем

$$E_{i0} = 0{,}01947558.$$

Тогда, по формуле (1.19),

$$E_{i1} = 0{,}03301308,$$

$$E_{i2} = 0{,}04242030$$

и так далее. Наконец, имеем:

$$E_{i40} = E_{i39} = 0{,}06378616.$$

Примем это значение в качестве искомого E_i. Заметим, что итерационный метод Ньютона в данном случае позволил бы обойтись всего 3 итерациями вместо 40 при той же точности.

Получив E_i, продолжаем вычисления по формулам (1.22)–(1.29):

$$r_i \sin v_i = 0{,}15913210 \text{ а. е.},$$

$$r_i \cos v_i = 1{,}05162768 \text{ а. е.},$$

$$x_i = 0{,}69311993 \text{ а. е.},$$

$$y_i = 0{,}75608948 \text{ а. е.},$$

$$z_i = 0{,}28134904 \text{ а. е.},$$

$$\xi_i = -0{,}04512574 \text{ а. е.},$$

$$\eta_i = 0{,}14847118 \text{ а. е.},$$

$$\zeta_i = 0{,}01793314 \text{ а. е.}$$

Физическое расстояние – всегда положительная величина, поэтому из соотношений (1.30)–(1.32) легко находим:

$$\rho_i = 0{,}15621018 \text{ а. е.}$$

Замечая, что область значений склонения совпадает с областью значений арксинуса, воспользуемся для его нахождения соотношением (1.32):

$$\delta_i = 0{,}11505501.$$

Из (1.30) и (1.31) определим вначале, что прямое восхождение попадёт во 2-ю четверть, и затем вычислим его значение:

$$\alpha_i = 1{,}86586026\,.$$

Процедуру вычисления α_i с учётом четверти следует запрограммировать, используя условные операторы.

Осталось представить α_i и δ_i в традиционной форме, переведя их соответственно в часы и градусы и выделив минуты и секунды. Для δ_i следует предусмотреть возможность отрицательных значений: при замене δ_i на $-\delta_i$ должен меняться только знак перед числом градусов, а сами значения градусов, минут, секунд должны оставаться без изменений.

Записываем окончательно ответ: $\rho_i = 0{,}15621018$ а. е., $\alpha_i = 07^{ч}07^{м}37^{с},42$, $\delta_i = +06°35'31'',8$.

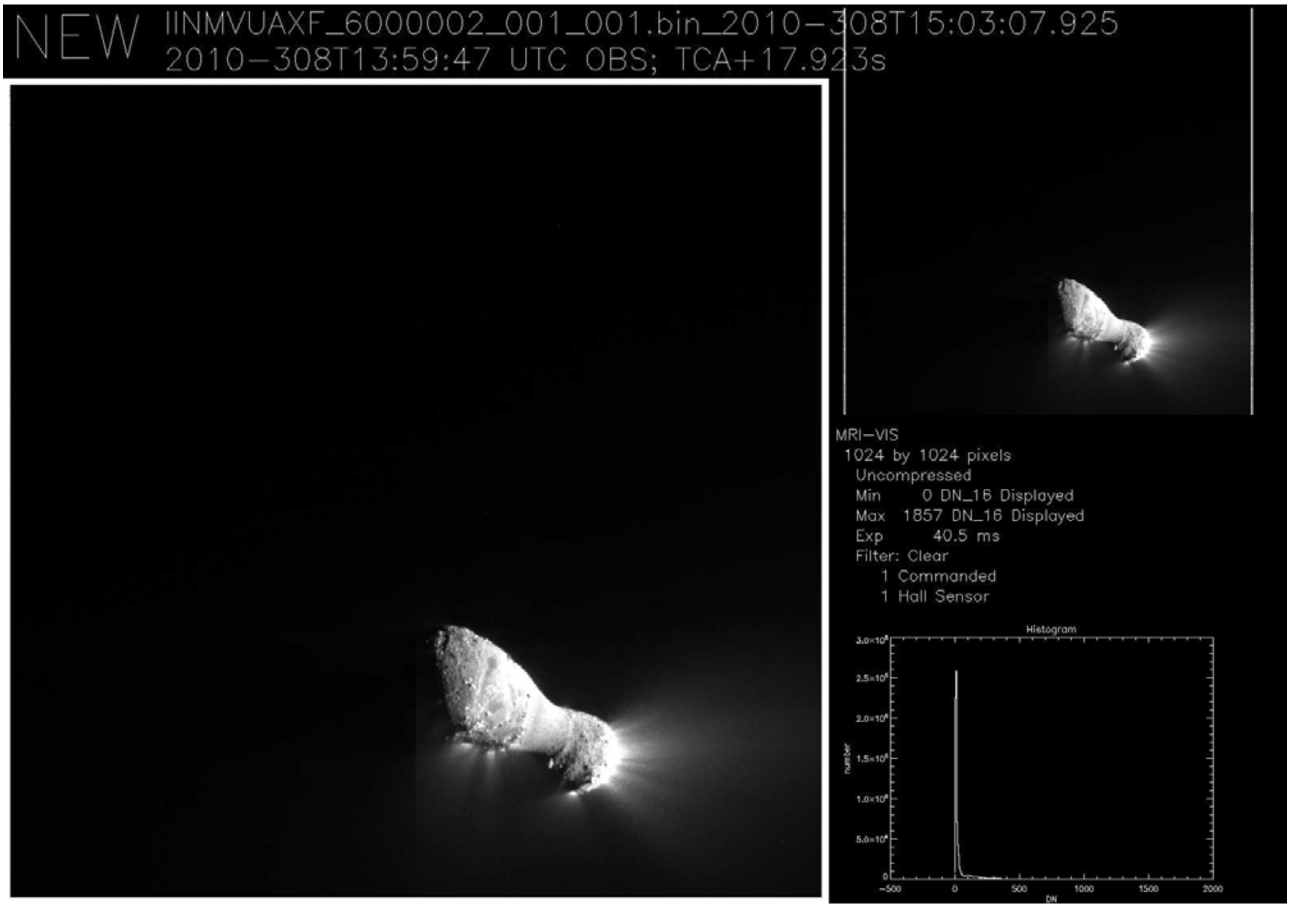

Рис. 2. Изображение ядра кометы Хартли 2, полученное космическим аппаратом «EPOXI» (технический кадр, включающий данные об условиях съёмки)

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Оскулирующие гелиоцентрические элементы орбиты кометы Галлея (1P) на эпоху, близкую к прохождению перигелия в 1986 году: $\omega = 111{,}86574°$, $\Omega = 58{,}86026°$, $i = 162{,}24209°$, $e = 0{,}9672750$, $a = 17{,}94045$ а. е., $T = 09{,}45798$ февраля 1986 UT = JD 2446470,95798 UT (элементы ориентации орбиты отсчитываются от эклиптики и равноденствия J2000,0). Вычислите поисковую эфемериду кометы Галлея на момент сближения с ней космического аппарата «Вега-2» (СССР), t_i = 07:20:00 UT 09 марта 1986 = JD 2446498,80556 UT, если геоцентрические экваториальные (J2000,0) координаты Солнца на этот момент равны $X_i = +0{,}97341574$ а. е., $Y_i = -0{,}17965330$ а. е., $Z_i = -0{,}07789590$ а. е.

Рис. 3. Первое в Мире изображение ядра кометы, полученное космическим аппаратом «Вега-2»

Задача 1.2. Оскулирующие гелиоцентрические элементы орбиты кометы Темпеля 1 (9P) на эпоху $t_0 = 08{,}999257$ июля 2005 UT = JD 2453560,499257 UT: $\omega = 178{,}8390°$, $\Omega = 68{,}9373°$, $i = 10{,}5301°$, $e = 0{,}517491$, $a = 3{,}121530$ а. е., $M = 0{,}65850°$ (элементы ориентации орбиты отсчитываются от эклиптики и равноденствия J2000,0). Вычислите поисковую эфемериду кометы Темпеля 1 на момент столкновения с ней ударника космического аппарата NASA «Deep Impact», $t_i =$ 05:44:34,2 UT 04 июля 2005 = JD 2453555,739285 UT, если геоцентрические экваториальные (J2000,0) координаты Солнца на этот момент равны $X_i = -0{,}21635356$ а. е., $Y_i = +0{,}91147931$ а. е., $Z_i = +0{,}39516372$ а. е.

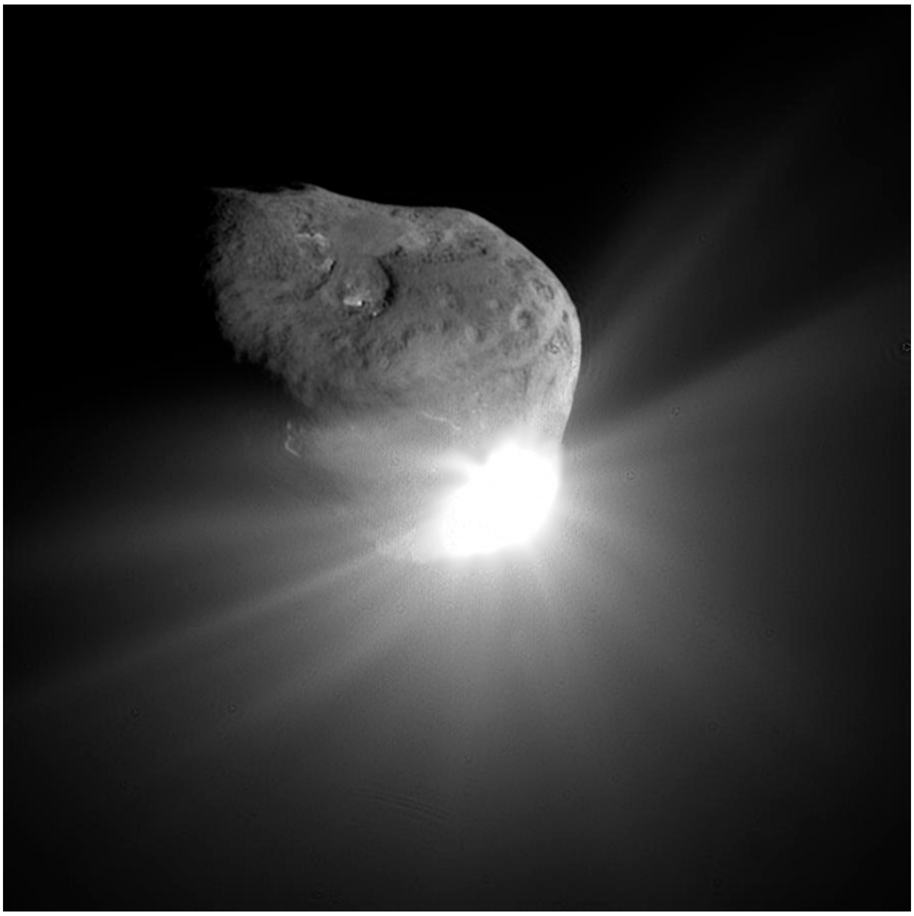

Рис. 4. Взрыв ударника космического аппарата «Deep Impact»

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ ПО КООРДИНАТАМ И СКОРОСТЯМ НА ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ

Исходными данными являются прямоугольные координаты x, y, z и компоненты скорости $V_x = x'$, $V_y = y'$, $V_z = z'$ (штрихом обозначена производная по времени), отнесённые к плоскости стандартного экватора, на некоторый заданный момент t. Требуется вычислить все шесть элементов эллиптической орбиты.

Схема решения

1. Вычисляем расстояние до притягивающего тела (Солнца) и линейную скорость на орбите:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{2.1}$$

$$V^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{2.2}$$

2. Принимая за единицу массы массу Солнца и пренебрегая массой тела, обращающегося вокруг него, заменяем здесь и далее $\sqrt{\mu}$ на постоянную Гаусса:

$$k = 0{,}01720209895.$$

Тогда, большую полуось орбиты определяем из соотношения:

$$1/a = (2/r) - (V^2/k^2). \tag{2.3}$$

3. Находим эксцентриситет орбиты e и эксцентрическую аномалию E:

$$e\cos E = 1 - (r/a), \tag{2.4}$$

$$e\sin E = rr'/(k\sqrt{a}), \tag{2.5}$$

причём

$$rr' = \vec{r}\vec{r}\,' = xx' + yy' + zz'. \tag{2.6}$$

Естественно, перед вычислением значения угла E необходимо определить, к какой четверти он относится, используя его косинус и синус.

4. Можно вычислить среднюю аномалию M на момент t, на который заданы исходные данные, из уравнения Кеплера:

$$E - e\sin E = M\,, \tag{2.7}$$

либо момент прохождения через перигелий T:

$$M = n(t - T)\,, \tag{2.8}$$

$$n = k/(a\sqrt{a})\,. \tag{2.9}$$

5. Направляющие косинусы орбиты:

$$P_x = (x/r)\cos E - (x'\sqrt{a}/k)\sin E\,, \tag{2.10}$$

$$P_y = (y/r)\cos E - (y'\sqrt{a}/k)\sin E\,, \tag{2.11}$$

$$P_z = (z/r)\cos E - (z'\sqrt{a}/k)\sin E\,, \tag{2.12}$$

$$Q_x = x\sin E/(r\sqrt{1-e^2}) + x'\sqrt{a}(\cos E - e)/(k\sqrt{1-e^2})\,, \tag{2.13}$$

$$Q_y = y\sin E/(r\sqrt{1-e^2}) + y'\sqrt{a}(\cos E - e)/(k\sqrt{1-e^2})\,, \tag{2.14}$$

$$Q_z = z\sin E/(r\sqrt{1-e^2}) + z'\sqrt{a}(\cos E - e)/(k\sqrt{1-e^2})\,. \tag{2.15}$$

При отладке программы проверяем контрольные соотношения:

$$P_x{}^2 + P_y{}^2 + P_z{}^2 = 1\,, \tag{2.16}$$

$$Q_x{}^2 + Q_y{}^2 + Q_z{}^2 = 1\,, \tag{2.17}$$

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0\,. \tag{2.18}$$

6. Элементы ориентации орбиты относительно эклиптики могут быть найдены из соотношений:

$$\sin i \sin\omega = P_z \cos\varepsilon - P_y \sin\varepsilon\,, \tag{2.19}$$

$$\sin i \cos\omega = Q_z \cos\varepsilon - Q_y \sin\varepsilon\,, \tag{2.20}$$

$$\sin\Omega = (P_y \cos\omega - Q_y \sin\omega)\sec\varepsilon\,, \tag{2.21}$$

$$\cos\Omega = P_x \cos\omega - Q_x \sin\omega\,, \tag{2.22}$$

$$\cos i = -(P_x \sin\omega + Q_x \cos\omega)\operatorname{cosec}\Omega\,, \tag{2.23}$$

где ε – наклон эклиптики, от которой отсчитываются элементы, к экватору, к которому отнесены исходные данные. Для эпохи J2000,0

$$\varepsilon = 23°26'21'',448 \approx 23{,}43929111° .$$

(Заметим, что если бы исходные данные были отнесены к той же системе отсчёта, что и искомые элементы, то в этих формулах следовало бы заменить ε на ноль.) Прежде, чем вычислять значения углов ω и Ω, необходимо определить, к каким четвертям они относятся.

7. В качестве ответа выписываем полученные шесть элементов орбиты: ω, Ω, i, e, a, M (или T). Угловые величины ω, Ω, i, M традиционно представляются в градусах с дробной частью в десятичной форме.

Пример

Вычислите гелиоцентрические эклиптические элементы орбиты космического аппарата ESA и NASA «Ulysses», если в момент последнего выхода на связь ($t =$ 20:20 UT 30 июня 2009 = JD 2455013,347222 UT) он имел следующие гелиоцентрические экваториальные (J2000,0) координаты и компоненты скорости: $x = -3{,}80835830$ а. е., $y = +0{,}99927528$ а. е., $z = +2{,}66120420$ а. е., $V_x = -0{,}0048875066$ а. е. / сут., $V_y = +0{,}0025021414$ а. е. / сут., $V_z = -0{,}0027228543$ а. е. / сут.

Решение

В соответствии с формулами (2.1)–(2.6) находим:

$$r = 4{,}75227859 \text{ а. е.},$$

$$V^2 = 0{,}000037562368 \text{ (а. е. / сут.)}^2,$$

$$a = 3{,}40236496 \text{ а. е.},$$

$$rr' = 0{,}0138676331 \text{ а. е.}^2 \text{ / сут.},$$

$$e\cos E = -0{,}39675744,$$

$$e\sin E = 0{,}43704932.$$

Эксцентриситет всегда положителен, поэтому из (2.4) и (2.5) получаем:

$$e = 0{,}59027839.$$

Из этих же двух соотношений видно, что эксцентрическая аномалия в данном случае относится ко 2-й четверти, следовательно её значение будет:

$$E = 2{,}30790925.$$

Для общего случая программируем определение величины E с помощью условных операторов.

Из (2.7) вычисляем:

$$M = 1{,}87085993.$$

По формулам (2.10)–(2.15) находим:

$$P_x = 0{,}92668096,$$

$$P_y = -0{,}33998824,$$

$$P_z = -0{,}16021982,$$

$$Q_x = 0{,}08457044,$$

$$Q_y = -0{,}22673683,$$

$$Q_z = 0{,}97027741.$$

Проверяем выполнение контрольных соотношений (2.16)–(2.18) в пределах заданной точности.

Переведя наклон эклиптики к экватору в радианы, вычисляем согласно (2.19) и (2.20):

$$\sin i \sin \omega = -0{,}01175926,$$

$$\sin i \cos \omega = 0{,}98040285.$$

Учитывая, что наклон орбиты всегда относится только к 1-й или 2-й четверти, получаем отсюда, что

$$\sin i = 0{,}98047337,$$

а аргумент перигелия в данном случае следует искать в 4-й четверти:

$$\omega = 6{,}27119157.$$

По формулам (2.21) и (2.22),

$$\sin\Omega = -0{,}37350392,$$

$$\cos\Omega = 0{,}92762860,$$

откуда видно, что долгота восходящего узла также попадает в 4-ю четверть:

$$\Omega = 5{,}90040186.$$

Не забываем, как обычно, определение углов ω и Ω реализовать программно, применяя условные операторы.

Наконец, из (2.23) находим:

$$\cos i = 0{,}19665191$$

и, учитывая, что область значений наклона орбиты совпадает с областью значений арккосинуса, сразу имеем:

$$i = 1{,}37285435.$$

Переведя угловые величины в градусную меру, запишем ответ: $\omega = 359{,}312810°$, $\Omega = 338{,}068124°$, $i = 78{,}658760°$, $e = 0{,}59027839$, $a = 3{,}40236496$ а. е., $M = 107{,}192378°$.

Объясним, почему аргумент перигелия в данном случае оказался близок к 360°. Космический аппарат «Ulysses» предназначался для исследования полярных областей Солнца. На гелиоцентрическую орбиту с высоким наклоном он был выведен из плоскости эклиптики с помощью гравитационного манёвра около Юпитера. Чтобы аппарат возвращался к Солнцу как можно чаще, а также из соображений экономии топлива удалять его дальше Юпитера не следовало. То есть вблизи Юпитера оказался как один из узлов (нисходящий), так и афелий орбиты. Соответственно, перигелий был близок к восходящему узлу.

Рис. 5. Космический аппарат «Ulysses» на проверке в технологическом центре

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Вычислите гелиоцентрические эклиптические элементы орбиты космического аппарата NASA «Deep Space 1», если в момент отключения ионных двигателей ($t =$ 20:00 UT 18 декабря 2001 = JD 2452262,333333 UT) он имел следующие гелиоцентрические экваториальные (J2000,0) координаты и компоненты скорости: $x = -0{,}84593626$ а. е., $y = +1{,}07050950$ а. е., $z = +0{,}46314689$ а. е., $V_x = -0{,}0115618111$ а. е. / сут., $V_y = -0{,}0069182985$ а. е. / сут., $V_z = -0{,}0029840167$ а. е. / сут.

Рис. 6. Космический аппарат «Deep Space 1»,
полностью собранный за месяц до запуска

Задача 2.2. В 00:38:46,6 UTC 11 августа 2013 = JD 2456515,526928 UTC количество десятых долей секунды, прошедших с 1 января 2000 года достигло 2^{32}. В результате, счётчик времени космического аппарата NASA «EPOXI» переполнился, и аппарат вышел из строя. Вычислите гелиоцентрические эклиптические элементы орбиты «EPOXI», если в момент выхода из строя он имел следующие гелиоцентрические экваториальные (J2000,0) координаты и компоненты скорости: $x = -1{,}19579521$ а. е., $y = +0{,}01871291$ а. е., $z = +0{,}08045392$ а. е., $V_x = +0{,}0002754157$ а. е. / сут., $V_y = -0{,}0137456892$ а. е. / сут., $V_z = -0{,}0058946608$ а. е. / сут.

Рис. 7. Космический аппарат «Deep Impact – EPOXI» в чистом помещении

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ ПО ДВУМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Для определения шести элементов орбиты любого тела необходимо иметь не менее трёх наблюдений. Между тем, иногда бывает целесообразно получить результат уже по двум наблюдениям, особенно если по каким-то причинам наблюдения тела были прекращены. При этом, так как по двум наблюдениям определить все шесть элементов невозможно, приходится заранее делать предположение о характере движения тела. Часто для этого можно использовать гипотезу о круговой орбите.

Допуская, что орбита тела есть окружность, мы принимаем, что эксцентриситет $e = 0$. Средняя аномалия M_0 на момент t_0 и аргумент перигелия ω не определяются, так как само понятие прохождения через перигелий теряет смысл. Эти два элемента можно заменить одним – аргументом широты u_0 на избранный момент t_0. Определить ещё три элемента a, i, Ω не представляет труда.

Наблюдения, проведённые в моменты t_1 и t_2, дают два направления на светило. Если тело двигается по окружности, то гелиоцентрические расстояния r_1 и r_2 должны быть равны радиусу орбиты a. При этом дуга, пройденная телом по орбите от t_1 до t_2, должна соответствовать законам Кеплера. Наиболее простой способ удовлетворить эти условия – это подобрать радиус орбиты.

Исходными данными являются наблюдаемые прямое восхождение α_i и склонение δ_i тела на два момента t_i. Требуется, полагая $e = 0$, найти остальные четыре элемента орбиты: a, i, Ω, u_0.

Схема решения

1. Нам понадобятся прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты Солнца X_i, Y_i, Z_i на два момента t_i, отсчитываемые от экватора и точки весеннего равноденствия той же эпохи, что и наблюдённые экваториаль-

ные координаты тела. Если таковые не даны в условии задачи, то их следует взять из «Астрономического ежегодника» (при необходимости применить формулы интерполирования) или воспользоваться соответствующими онлайн-сервисами в сети Интернет.

2. Получим величины:

$$A_i = \cos\alpha_i \cos\delta_i, \tag{3.1}$$

$$B_i = \sin\alpha_i \cos\delta_i, \tag{3.2}$$

$$C_i = \sin\delta_i. \tag{3.3}$$

При отладке программы следует сделать контроль:

$$A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 = 1. \tag{3.4}$$

3. Вычислим:

$$R_i \cos\theta_i = -(A_i X_i + B_i Y_i + C_i Z_i), \tag{3.5}$$

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2, \tag{3.6}$$

$$(R_i \sin\theta_i)^2 = R_i^2 - (R_i \cos\theta_i)^2, \tag{3.7}$$

где θ_i – угол между направлениями от Солнца на Землю и от Земли на тело.

4. Далее необходимо определить радиус орбиты a. Для этого из каких-либо соображений попытаемся «угадать» приблизительное значение этой величины a_1. Чтобы выяснить, как зависят от a другие величины, добавим к a_1 произвольное небольшое приращение и обозначим это значение a_2. Вычислим с этими двумя значениями a_j:

$$\rho_{ij} = \sqrt{a_j^2 - R_i^2 \sin^2\theta_i} - R_i \cos\theta_i, \tag{3.8}$$

$$x_{ij} = A_i \rho_{ij} - X_i, \tag{3.9}$$

$$y_{ij} = B_i \rho_{ij} - Y_i, \tag{3.10}$$

$$z_{ij} = C_i \rho_{ij} - Z_i, \tag{3.11}$$

$$\sin^2 f_{g\,j} = (1/(4a_j^{\,2}))((x_{1j}-x_{2j})^2+(y_{1j}-y_{2j})^2+(z_{1j}-z_{2j})^2), \qquad (3.12)$$

$$f_{d\,j} = k(t_2-t_1)/(2a_j\sqrt{a_j}), \qquad (3.13)$$

где

$$k = 0{,}01720209895$$

(масса Солнца принята за единицу).

Здесь введено обозначение гелиоцентрического угла, пройденного телом от момента t_1 до t_2, $2f = u_2 - u_1$. Через f_g обозначено геометрическое значение угла f, через f_d – динамическое. Процесс последовательных приближений (подбора значения радиуса орбиты) продолжается до тех пор, пока не будет в пределах заданной точности выполнено условие $f_g = f_d$. В данный момент нами получено значение

$$\Delta_1 = f_{g_1} - f_{d1} \qquad (3.14)$$

по заданному значению a_1 и

$$\Delta_2 = f_{g_2} - f_{d2} \qquad (3.15)$$

по значению a_2. Считая, что Δ зависит от a линейно, вычислим новое значение a, которое должно дать $\Delta \approx 0$:

$$a_3 = a_2 - \Delta_2(a_2-a_1)/(\Delta_2-\Delta_1). \qquad (3.16)$$

В действительности Δ зависит от a не линейно, поэтому вместо a_1 и a_2 следует взять новую пару значений a_2 и a_3 и повторить вычисления, чтобы получить более точное a_4. Так продолжать до тех пор, пока не будет достигнуто в пределах заданной точности $|a_k - a_{k-1}| = 0$. Тогда это a_k можно принять в качестве искомого значения радиуса орбиты a.

5. Пользуясь полученным с помощью итераций значением a, продолжим вычисления:

$$f = (f_g + f_d)/2, \qquad (3.17)$$

$$aP_x = (x_1+x_2)/(2\cos f), \qquad (3.18)$$

$$aP_y = (y_1 + y_2)/(2\cos f), \tag{3.19}$$

$$aP_z = (z_1 + z_2)/(2\cos f), \tag{3.20}$$

$$aQ_x = (x_2 - x_1)/(2\sin f), \tag{3.21}$$

$$aQ_y = (y_2 - y_1)/(2\sin f), \tag{3.22}$$

$$aQ_z = (z_2 - z_1)/(2\sin f). \tag{3.23}$$

При отладке программы проверяем контрольные соотношения:

$$P_x^{\ 2} + P_y^{\ 2} + P_z^{\ 2} = 1, \tag{3.24}$$

$$Q_x^{\ 2} + Q_y^{\ 2} + Q_z^{\ 2} = 1, \tag{3.25}$$

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0. \tag{3.26}$$

В соотношения для элементов ориентации орбиты вместо ω войдёт u_0 на момент

$$t_0 = (t_2 + t_1)/2: \tag{3.27}$$

$$\sin i \sin u_0 = P_z \cos\varepsilon - P_y \sin\varepsilon, \tag{3.28}$$

$$\sin i \cos u_0 = Q_z \cos\varepsilon - Q_y \sin\varepsilon, \tag{3.29}$$

$$\sin\Omega = (P_y \cos u_0 - Q_y \sin u_0)/\cos\varepsilon, \tag{3.30}$$

$$\cos\Omega = P_x \cos u_0 - Q_x \sin u_0, \tag{3.31}$$

$$\cos i = -(P_x \sin u_0 + Q_x \cos u_0)/\sin\Omega, \tag{3.32}$$

где ε – наклон эклиптики, от которой отсчитываются элементы, к экватору, к которому отнесены исходные данные. Для эпохи J2000,0

$$\varepsilon = 23°26'21'',448 \approx 23{,}43929111°.$$

Прежде, чем вычислять значения углов u_0 и Ω, необходимо определить, к каким четвертям они относятся.

6. В качестве ответа выписываем элементы орбиты: $e = 0$, a, i, Ω, u_0 на момент t_0. Угловые величины i, Ω, u_0 традиционно представляются в градусах с дробной частью в десятичной форме.

Пример

По двум первым астрометрическим наблюдениям (К. Томбо) Плутона и геоцентрическим экваториальным (J2000,0) координатам Солнца на эти моменты определите предварительную круговую орбиту планеты. Получите решения, используя ожидаемые по правилу Тициуса-Боде большие полуоси орбит 8-й и 9-й планет: 38,8 а. е. и 77,2 а. е.

i	1	2
t_i	23,22743 января 1930 UT = = JD 2425999,72743 UT	23,19444 февраля 1930 UT = = JD 2426030,69444 UT
α_i	$07^{ч}23^{м}06^{с},83$	$07^{ч}20^{м}47^{с},18$
δ_i	$+21°49'34'',3$	$+21°56'14'',4$
X_i	+0,54305087 а. е.	+0,89564991 а. е.
Y_i	−0,75321583 а. е.	−0,38611428 а. е.
Z_i	−0,32669137 а. е.	−0,16746119 а. е.

Решение

Переведём угловые исходные данные в радианы:

$$\alpha_1 = 1{,}93344884,$$

$$\delta_1 = 0{,}38093896,$$

$$\alpha_2 = 1{,}92329320,$$

$$\delta_2 = 0{,}38287870.$$

Относительно δ_i следует учесть, что для южного полушария знак «минус» традиционно ставится только перед числом градусов. То есть при смене знака перед числом градусов должен меняться только знак перед результатом в радианах, а его модуль должен оставаться без изменений.

По формулам (3.1)–(3.3) вычислим:

$$A_1 = -0{,}32932516,$$

$$B_1 = 0{,}86793746,$$

$$C_1 = 0{,}37179228,$$

$$A_2 = -0{,}32024429,$$

$$B_2 = 0{,}87055868,$$

$$C_2 = 0{,}37359227.$$

Для обоих наблюдений проверим выполнение в пределах заданной точности контрольного соотношения (3.4).

Продолжим вычисления по формулам (3.5)–(3.7):

$$R_1 \cos\theta_1 = 0{,}95404588 \text{ а. е.},$$

$$R_1^{\ 2} = 0{,}96896559 \text{ а. е.}^2,$$

$$(R_1 \sin\theta_1)^2 = 0{,}05876204 \text{ а. е.}^2,$$

$$R_2 \cos\theta_2 = 0{,}68552411 \text{ а. е.},$$

$$R_2^{\ 2} = 0{,}97931625 \text{ а. е.}^2,$$

$$(R_2 \sin\theta_2)^2 = 0{,}50937294 \text{ а. е.}^2.$$

Теперь нам нужно задать некоторое предполагаемое значение радиуса орбиты a. Как предложено в условии задачи, возьмём

$$a_1 = 38{,}8 \text{ а. е.}$$

и проведём с этой величиной вычисления в соответствии с (3.8)–(3.15):

$$\rho_{11} = 37{,}8451969 \text{ а. е.},$$

$$x_{11} = -13{,}0064263 \text{ а. е.},$$

$$y_{11} = 33{,}6004800 \text{ а. е.},$$

$$z_{11} = 14{,}3972434 \text{ а. е.},$$

$$\rho_{21} = 38{,}1079112 \text{ а. е.},$$

$$x_{21} = -13{,}0994908 \text{ а. е.},$$

$$y_{21} = 33{,}5612871 \text{ а. е.},$$

$$z_{21} = 14{,}4042823 \text{ а. е.},$$

$$\sin^2 f_{g_1} = 0{,}00000170160,$$

$$f_{g_1} = 0{,}00130445,$$

$$f_{d1} = 0{,}00110205,$$

$$\Delta_1 = 0{,}00020240.$$

Далее зададим произвольно некоторое небольшое приращение к a_1, например, 0,1 а. е., получим:

$$a_2 = 38{,}9 \text{ а. е.}$$

и повторим с этой величиной вычисления по формулам (3.8)–(3.15):

$$\rho_{12} = 37{,}9451988 \text{ а. е.},$$

$$x_{12} = -13{,}0393595 \text{ а. е.},$$

$$y_{12} = 33{,}6872754 \text{ а. е.},$$

$$z_{12} = 14{,}4344234 \text{ а. е.},$$

$$\rho_{22} = 38{,}2079281 \text{ а. е.},$$

$$x_{22} = -13{,}1315206 \text{ а. е.},$$

$$y_{22} = 33{,}6483577 \text{ а. е.},$$

$$z_{22} = 14{,}4416479 \text{ а. е.},$$

$$\sin^2 f_{g2} = 0{,}00000166211,$$

$$f_{g2} = 0{,}00128923,$$

$$f_{d2} = 0{,}00109780,$$

$$\Delta_2 = 0{,}00019142.$$

Имея Δ_1 и Δ_2, найдём по формуле (3.16):

$$a_3 = 40{,}6433971 \text{ а. е.}$$

С этим уточнённым значением снова проведём вычисления (3.8)–(3.15), которые дают

$$\Delta_3 = 0{,}00000958,$$

откуда в соответствии с (3.16)

$$a_4 = 40{,}7352849 \text{ а. е.},$$

и так далее. Наконец, получим:

$$a_7 = a_6 = 40{,}7403537 \text{ а. е.}$$

и примем это значение в качестве искомого a.

Получив a, продолжим вычисления в соответствии с формулами (3.17)–(3.23):

$$f = 0{,}00102426,$$

$$P_x = -0{,}33586402,$$

$$P_y = 0{,}86567001,$$

$$P_z = 0{,}37122875,$$

$$Q_x = -0{,}90504153,$$

$$Q_y = -0{,}40578529,$$

$$Q_z = 0{,}12742891.$$

Проверяем выполнение контрольных соотношений (3.24)–(3.26) в пределах заданной точности.

Переведя наклон эклиптики к экватору в радианы, имеем по формулам (3.27)–(3.29):

$$t_0 = \text{JD } 2426015{,}210935 \text{ UT},$$

$$\sin i \sin u_0 = -0{,}00374803,$$

$$\sin i \cos u_0 = 0{,}27832585.$$

Учитывая, что наклон орбиты всегда относится только к 1-й или 2-й четверти, получаем отсюда, что

$$\sin i = 0{,}27835109,$$

а аргумент широты в данном случае попадёт в 4-ю четверть:

$$u_0 = 6{,}26971978.$$

По формулам (3.30) и (3.31),

$$\sin\Omega = 0{,}93748708,$$

$$\cos\Omega = -0{,}34802007,$$

откуда видно, что долгота восходящего узла будет во 2-й четверти:

$$\Omega = 1{,}92625464.$$

Выбор четвертей углов u_0 и Ω следует сделать автоматическим, применяя условные операторы.

Наконец, из (3.32) получаем:

$$\cos i = 0{,}96047940$$

и

$$i = 0{,}28207692.$$

Переведя угловые величины в градусы, запишем ответ: $e = 0$, $a = 40{,}7403537$ а. е., $i = 16{,}161817°$, $\Omega = 110{,}366261°$, $u_0 = 359{,}228482°$ на момент $t_0 =$ JD 2426015,210935 UT.

Заметим, что если взять другое рекомендованное в условии задачи исходное значение $a_1 = 77{,}2$ а. е., то сойдутся значения a_8 и a_9, и ответ в итоге будет: $e = 0$, $a = 55{,}7123087$ а. е., $i = 153{,}054958°$, $\Omega = 109{,}019625°$, $u_0 = 359{,}523339°$ на тот же момент. То есть решение математически неоднозначно, зависимость Δ от a имеет более одного нуля. Как показали дальнейшие наблюдения, первый вариант ближе к действительности: Плутон движется в прямом направлении и имеет большую полуось орбиты около 39,4 а. е.

Не случайно аргумент широты в данном случае оказался близок к 360°. Плутон был открыт в результате систематических поисков «девятой планеты». Известные к тому времени восемь планет двигались вблизи плоскости эклиптики, поэтому там же проводился и поиск новой планеты. Приближаясь к эклиптике, то есть узлу своей орбиты, Плутон и оказался замечен.

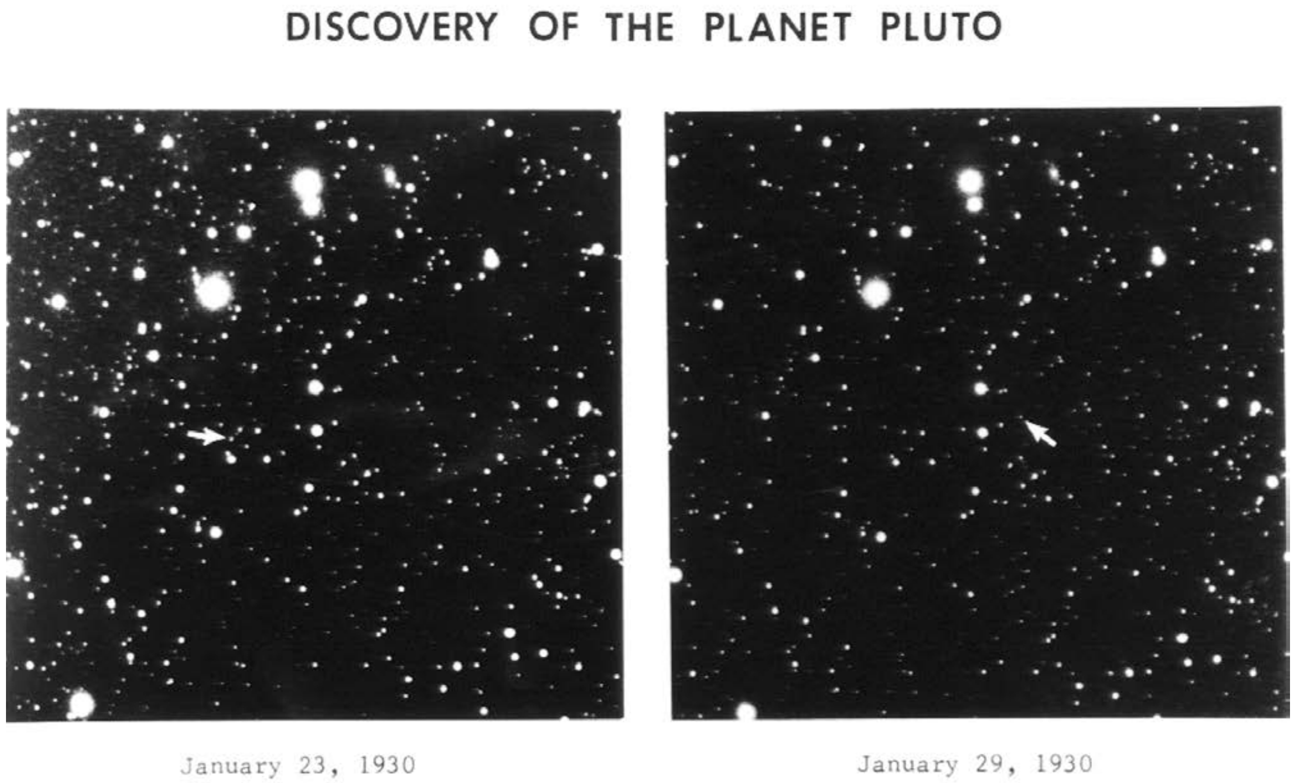

Рис. 8. Первые изображения Плутона

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1. По двум первым астрометрическим наблюдениям астероида Штейнс (получены Н.С. Черных в Крыму) и геоцентрическим экваториальным (J2000,0) координатам Солнца на эти моменты определите предварительную круговую орбиту астероида. (Для начального приближения воспользуйтесь гелиоцентрическим расстоянием пояса астероидов по правилу Тициуса-Боде: 2,8 а. е.)

i	1	2
t_i	04,86684 ноября 1969 UT = = JD 2440530,36684 UT	11,81063 ноября 1969 UT = = JD 2440537,31063 UT
α_i	$01^{ч}45^{м}25^{с},36$	$01^{ч}39^{м}10^{с},70$
δ_i	$+03°41'24'',2$	$+03°50'56'',8$
X_i	−0,72872875 а. е.	−0,64061901 а. е.
Y_i	−0,61678059 а. е.	−0,69225620 а. е.
Z_i	−0,26745970 а. е.	−0,30019124 а. е.

Рис. 9. Изображение астероида Штейнс,
полученное космическим аппаратом ESA «Rosetta»

Задача 3.2. По двум первым астрометрическим наблюдениям астероида Гаспра (получены Г.Н. Неуйминым в Крыму) и геоцентрическим экваториальным (J2000,0) координатам Солнца на эти моменты определите предварительную круговую орбиту астероида. (Для начального приближения воспользуйтесь гелиоцентрическим расстоянием пояса астероидов по правилу Тициуса-Боде: 2,8 а. е.)

i	1	2
t_i	30,99472 июля 1916 UT = = JD 2421075,49472 UT	23,88569 августа 1916 UT = = JD 2421099,38569 UT
α_i	$22^{ч}11^{м}43^{с},25$	$21^{ч}51^{м}18^{с},14$
δ_i	$-03°18'52'',5$	$-04°13'28'',3$
X_i	−0,63321667 а. е.	−0,88865227 а. е.
Y_i	+0,72781615 а. е.	+0,44207047 а. е.
Z_i	+0,31569874 а. е.	+0,19174632 а. е.

Рис. 10. Изображение астероида Гаспра,
полученное космическим аппаратом NASA «Galileo»

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1. $\rho_i = 1{,}07812154$ а. е., $\alpha_i = 20^{\text{ч}}13^{\text{м}}59^{\text{с}}{,}02$, $\delta_i = -19°29'53'',2$.

1.2. $\rho_i = 0{,}89397979$ а. е., $\alpha_i = 13^{\text{ч}}37^{\text{м}}51^{\text{с}}{,}52$, $\delta_i = -09°33'46'',4$.

2.1. $\omega = 181{,}231233°$, $\Omega = 156{,}367606°$, $i = 0{,}070317°$, $e = 0{,}08809853$, $a = 1{,}34323242$ а. е., $M = 142{,}744002°$.

2.2. $\omega = 233{,}573773°$, $\Omega = 95{,}131201°$, $i = 3{,}201440°$, $e = 0{,}11058573$, $a = 1{,}09606129$ а. е., $M = 215{,}559439°$.

3.1. $a = 2{,}58431566$ а. е., $i = 13{,}438939°$, $\Omega = 50{,}201453°$, $u_0 = 342{,}360919°$, $t_0 =$ JD 2440533,838735 UT.

3.2. $a = 2{,}56097856$ а. е., $i = 6{,}308360°$, $\Omega = 277{,}262502°$, $u_0 = 49{,}755948°$, $t_0 =$ JD 2421087,440205 UT.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.

2. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.

3. *Кондратьева Е.Д., Ишмухаметова М.Г.* Методы астродинамики. Методическое пособие для студентов третьего курса специальностей астрономия и астрономогеодезия, часть 1. Казань: Физический факультет Казанского государственного университета, 2001. 40 с.

4. *Холшевников К.В., Титов В.Б.* Задача двух тел: учебное пособие. СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2007. 180 с.

5. *Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И.* Лекции по небесной механике: учебное пособие для вузов. Алматы: Эверо, 2009. 277 с.

6. *Быков О.П., Холшевников К.В.* Прямые методы определения орбит небесных тел: учебное пособие. СПб.: Издательский дом Санкт-Петербургского государственного университета, 2013. 156 с.

Учебное издание

Соколова Марина Геннадьевна
Усанин Владимир Сергеевич

ПРАКТИКУМ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Подписано в печать 25.04.2016.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 2,33.
Уч.-изд. 0,11. Тираж 40 экз. Заказ 246/4

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28