МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГАУ «РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ОЛИМПИАДНЫЙ ЦЕНТР»

А. Е. ЗАЯЦ, Ю. В. СИНЦОВА

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Казань – 2015

УДК 53(076.1)
ББК 74.262.22
З 40

А. Е. Заяц, Ю. В. Синцова.
З 40 Сборник олимпиадных задач по физике. Механика. — Казань: Республиканский олимпиадный центр, 2015. — 72 стр.

Данное учебно-методическое пособие содержит 54 задачи по механике, в том числе задачи районных, городских, республиканских олимпиад Республики Татарстан, межрегиональных олимпиад Казанского федерального университета и олимпиад лагеря «Квант».

Пособие предназначено для учащихся, углублённо изучающих физику в средней школе, учителей физики и студентов научно-педагогических отделений высших учебных заведений.

© Казанский федеральный университет, 2015
© Республиканский олимпиадный центр, 2015
© А. Е. Заяц, Ю. В. Синцова, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметные олимпиады школьников, в том числе и по физике, являются самой известной и, наверное, самой распространённой формой интеллектуальных соревнований и давно используются в образовательном процессе. Считается, что олимпиады позволяют выявить самых талантливых и одарённых учеников, их умение применять свои знания в нестандартных ситуациях и использовать творческий подход при решении заданий.

Однако олимпиады давно превратились в своеобразный интеллектуальный вид спорта — со своими чемпионатами, чемпионами, тренерами и устоявшимися правилами игры. Так, например, в нашей стране существует целая система Всероссийских олимпиад, состоящая из четырёх этапов (школьного, муниципального, регионального и заключительного). Помимо этого, каждый крупный университет проводит свои состязания для будущих абитурентов.

Следовательно, как и в любом другом виде спорта, спортсмен-олимпиадник должен быть не просто талантливым и интеллектуально одарённым школьником, он должен быть соответствующим образом подготовленным: не только уметь применять основные физические законы при решении заданий, но и знать разнообразные хитрые приёмы и «фишки», используемые в них. Более того, существуют задачи, «кочующие» почти без изменений из одной олимпиады в другую, становясь своего рода олимпиадным фольклором (например, задача № 5 о черепахах или задача № 36 о кобре). Сталкиваясь с такой задачей, подготовленный школьник сразу получает определённое преимущество.

Для того, чтобы учащиеся имели возможность готовиться к той или иной олимпиаде, увидеть тип и уровень сложности её заданий, различными авторами издаётся множество разнообразных сборников олимпиадных задач. Профессионалы-олимпиадники по физике хорошо знакомы с литературой, посвящённой Всероссийским олимпиадам, олимпиадам Москвы и Санкт-Петербурга. С этой точки зрения, задачи с соревнований, проводимых в Республике Татарстан вообще и в Казани в частности, представлены не так хорошо. Из изданного за последние двадцать лет можно вспомнить только несколько небольших брошюр, таких как

1. А. Р. Сомов и др., Задачи городских физических олимпиад (1996-1999). — Казань. — 2000. — 58 стр.,
2. Р. В. Даминов, Физическая олимпиада. — Казань: Изд-во КГУ. — 2008. — 26 стр.,
3. А. Е. Заяц и др., Открытая городская олимпиада по физике. Задачи и решения. — Казань. — 2014. — 24 стр.,

причём первые из них найти практически невозможно.

Предлагаемое читателю учебно-методическое пособие включает в себя задачи по различным разделам механики и является первой частью Сборника олимпиадных задач, состоящего из четырёх частей (оставшиеся части будут посвящены термодинамике, электромагнитным явлениям и оптике). Пособие содержит 54 задачи, среди которых задачи, предлагавшиеся на районных (муниципальных), городских, республиканских олимпиадах Республики Татарстан, межрегиональных олимпиадах Казанского федерального университета и олимпиадах лагеря «Квант», тем самым частично компенсируя описанный выше недостаток литературы. Более половины приведённых здесь заданий были предложены авторами настоящего сборника. Остальные задачи заимствованы с небольшими изменениями из разных сборников (в основном, из книги «Задачи по физике» под ред. О. Я. Савченко), но, при этом, снабжены авторскими решениями.

Помимо собственно задач настоящее пособие содержит два приложения, в которых изложен дополнительный математический материал. Авторы надеются, что эти приложения будут полезны читателю при решении олимпиадных заданий по физике.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Первую треть дистанции спортсмен-велосипедист Василий Иванов проехал со скоростью v. Вторая треть пути проходила в горах, поэтому средняя скорость спортсмена на этом участке оказалась на треть меньше. На оставшемся участке Василий совершил финишный рывок и закончил дистанцию первым. Чему была равна скорость велосипедиста на последней трети дистанции, если его средняя скорость на всём пути также равнялась v?

2. В то время, как удав Каа мирно спал на земле, вытянувшись в линию, бандерлоги (шутки ради) схватили его за хвост и стали тянуть с постоянной горизонтальной скоростью v по направлению к голове. Найти скорость центра масс движущейся части удава.

3. Пассажир опоздал к отходу поезда. Когда он вышел к платформе, мимо него проехали два последовательно идущих вагона: первый из них — за время $t_1 = 15$ с, второй — за время $t_2 = 12$ с. Сколько времени прошло с начала движения поезда до момента, когда к нему подошёл пассажир, если поезд двигался с постоянным ускорением? Длина всех вагонов одинаковая.

4. На неподвижном клине, стоящем справа от вертикальной стены, лежит нерастяжимая верёвка. Один из концов верёвки закреплён на стене на одном уровне с верхней вершиной клина, а к нижнему её концу прикреплён небольшой грузик. В некоторый момент времени клин начинает двигаться вправо с постоянным ускорением a. С каким ускорением движется грузик, пока он находится на клине? Плоскость клина образует угол α с горизонтом.

5. Четыре черепахи находятся в вершинах квадрата со стороной L. Они начинают двигаться одновременно с постоянной по модулю скоростью v. Каждая черепаха движется по направлению к своей соседке по часовой стрелке. Где встретятся черепахи и через какое время? Решить аналогичную задачу в случае N черепах, находящихся в вершинах правильного N-угольника со стороной L.

6. Воздухоплавателю необходимо срочно попасть из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии L. Для этого он должен подняться на некоторую высоту h, пролететь по горизонтали до пункта B и опуститься. Скорость подъёма и спуска постоянна и равна v_0. Скорость движения на горизонтальном участке равна $v = kh$ (k — известная постоянная), то есть, чем выше летит шар, тем больше его скорость. За какое минимальное время $t_{\text{мин}}$ воздухоплаватель достигнет пункта B и на какой высоте $h_{\text{мин}}$ он должен при этом лететь?

7. Тяжёлый клин с углом при основании, равным $\alpha = 15^\circ$, движется по горизонтальной плоскости со скоростью u (см. рис. 1). Навстречу ему со скоростью v летит лёгкий шарик. Чему должна равняться скорость v, чтобы шарик после удара о клин отскочил вертикально вверх. Удар считать абсолютно упругим, трение отсутствует.

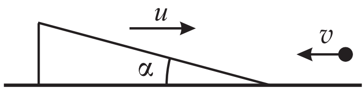


Рис. 1.

8. Автомобиль удаляется со скоростью v от длинной стены, двигаясь под углом α к ней (см. рис. 2). В момент, когда расстояние до стены равно L, шофёр подаёт короткий звуковой сигнал. Какое расстояние x пройдёт автомобиль до момента, когда шофёр услышит эхо? Скорость звука в воздухе равна c.

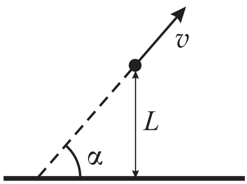


Рис. 2.

9. На корабле имеется флюгер, предназначенный для определения скорости ветра. При скорости корабля, равной $\vec{v}$, флюгер повёрнут вдоль луча AB (см. рис. 3). Если корабль движется в том же направлении, но со скоростью $2\vec{v}$, флюгер ориентирован по лучу AC. Используя циркуль и линейку без делений, построением найдите вектор скорости ветра относительно Земли.

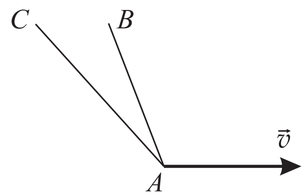


Рис. 3.

10. Тело, подброшенное вверх из точки, находящейся на высоте h над поверхностью земли, падает на землю через время $t_1 = 5$ с. Тело, брошенное вниз из той же точки и с такой же начальной скоростью, падает на землю через время $t_2 = 3$ с. Найти h и начальную скорость тела. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

11. С помощью специальной машины из точки A со скоростью v_0 был запущен теннисный мяч под углом α к полу (рис. 4). Когда он поднялся на максимальную высоту, по нему ударили ракеткой, движущейся со скоростью u относительно пола, после чего мяч упал на пол в точке B. Найти расстояние между точками A и B. Масса ракетки много больше массы мяча.

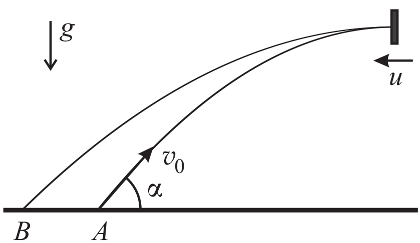


Рис. 4.

12. Легковая машина движется по горизонтальному шоссе за грузовиком. В протекторе заднего колеса грузовика застрял камень. На каком минимальном расстоянии s от грузовика может ехать легковая машина, чтобы камень, вырвавшийся из колеса грузовика, не долетел до неё? Машины движутся со скоростью $v = 72$ км/ч. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

13. Автомобиль с колёсами радиуса r движется со скоростью v по горизонтальной дороге. На какую максимальную высоту $H_{\text{макс}}$ от поверхности дороги может быть заброшена вверх грязь, срывающаяся с колёс автомобиля? Сопротивление воздуха движению выброшенных частиц грязи не учитывать. Ускорение свободного падения равно g.

14. Утка летела по горизонтальной прямой с постоянной скоростью u. В неё бросил камень неопытный «охотник», причём бросок был сделан без упреждения, то есть в момент броска скорость камня v была направлена как раз на утку под углом α к горизонту (см. рис. 5). На какой высоте H летела утка, если камень всё же попал в неё?

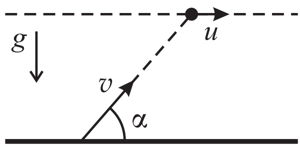


Рис. 5.

15. С какой скоростью v должен в момент старта ракеты вылететь снаряд из пушки, чтобы поразить ракету, стартующую вертикально с ускорением a? Расстояние от пушки до места старта ракеты равно L, пушка стреляет под углом α к горизонту.

16. В аквариуме с вертикальными стенками высота слоя воды $h_1 = 10$ см. Когда мальчик спустил на воду металлическую лодочку, уровень воды стал $h_2 = 13$ см, а когда он перевернул и утопил эту лодочку, уровень воды опустился до $h_3 = 11$ см. Какова плотность ρ сплава, из которого сделана лодочка? Высота стенок аквариума больше, чем h_2. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3.

17. В сосуде с водой (см. рис. 6) имеется толстая вертикальная деревянная перегородка высотой $h = 40$ см, делящая его на две равные части и способная свободно перемещаться вверх-вниз по сделанным на боковых стенках специальным направляющим. В правую часть сосуда медленно наливают керосин. а) Найти максимальную высоту слоя керосина в правой части сосуда, при которой он ещё не начинает перетекать в левую часть. б) На какую высоту относительно своего первоначального положения поднимется перегородка в этом случае? Плотности дерева, керосина и воды равны 600 кг/м^3, 800 кг/м^3 и 1000 кг/м^3 соответственно. Площадь основания перегородки составляет четверть площади дна сосуда.

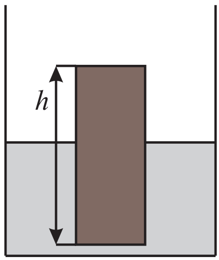


Рис. 6.

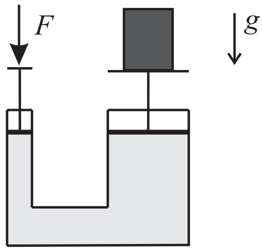


Рис. 7.

18. С помощью гидравлического подъёмника медленно поднимают груз массой $m = 100$ кг (рис. 7). На какую высоту поднялся груз от своего первоначального положения, если сила, приложенная к левому поршню в конце подъёма равна $F = 250$ Н? Площадь сечения правого колена в 20 раз больше площади левого и равна $S = 1$ м^2, плотность масла, заполняющего колена подъёмника, равна $\rho_м = 900$ кг/м^3. Массой поршней пренебречь. В начальном положении поршни располагались на одном уровне. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

19. В ванне, заполненной водой, плавает деревянное кольцо (рис. 8) высотой $H = 5$ см. Внутрь кольца наливают керосин. Оказалось, что максимальная масса керосина, которую можно влить туда так, чтобы он не попал наружу, $m = 750$ г. Найти плотность дерева, из которого сделано кольцо, если площадь поперечного сечения отверстия $S = 300$ см^2. Рассмотреть все случаи.

Рис. 8.

20. Найдите ускорение тел системы, изображенной на рис. 9. Сила F приложена по направлению нити к одному из тел массы m. Участки нити по обе стороны от лёгкого блока, прикреплённого к телу массы M, параллельны.

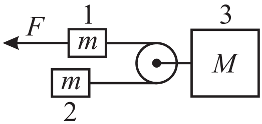


Рис. 9.

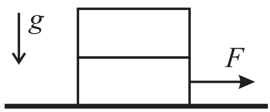


Рис. 10.

21. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоятся два бруска — один на другом (рис. 10). Какую силу, направленную горизонтально, необходимо приложить к нижнему бруску, чтобы выдернуть его из-под верхнего? Коэффициент трения между брусками равен μ_1, между бруском и поверхностью стола — μ_2, масса верхнего бруска — m_1, нижнего — m_2.

22. На плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит шайба массы m (рис. 11). Какую минимальную силу надо приложить к шайбе в горизонтальном направлении вдоль плоскости, чтобы она сдвинулась? Коэффициент трения равен μ.

23. Внутри П-образной рамки закреплена система, состоящая из двух одинаковых пружин и маленького груза массой m между ними. Сначала данную конструкцию поставили вертикально. При этом грузик сместился вниз на величину x_1 (рис. 12а). Затем её расположили горизонтально. В этом случае смещение грузика стало $x_2 = 5x_1$

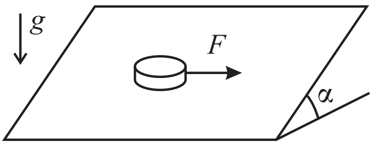


Рис. 11.

(рис. 12b). Найти коэффициент жёсткости пружин. В свободном состоянии длина каждой пружины равна L, расстояние между точками крепления пружин к рамке — $2L$.

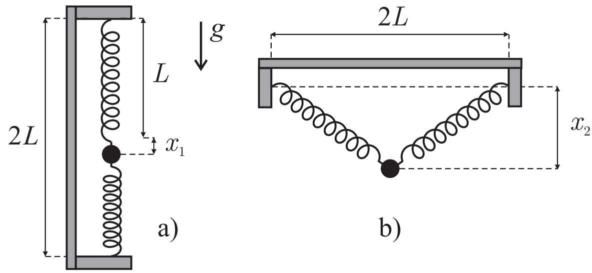


Рис. 12.

24. На плоскости, тангенс угла наклона которой равен коэффициенту трения, лежит монета. В горизонтальном направлении вдоль плоскости монете сообщили скорость v_0. Найти установившуюся скорость монеты.

25. Воздушный шар радиусом 4 м, заполненный водородом (плотность водорода — 0,09 кг/м^3) опускается с постоянной скоростью. Какую массу балласта нужно сбросить, чтобы шар начал подниматься с той же скоростью? Общая масса оболочки шара, корзины с оставшимся балластом и людей равна 250 кг. Плотность воздуха принять равной 1,24 кг/м^3.

26. Пробковый шарик, полностью погруженный в воду, начинает всплывать на поверхность с ускорением 11,2 м/с^2. С каким ускорением начнёт двигаться в воде алюминиевый шарик того же объёма? Плотность пробки равна 200 кг/м^3, плотность алюминия —

2700 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным 9,8 м/с^2.

Примечание. Шарик, погруженный в жидкость, при равноускоренном движении испытывает силу сопротивления, пропорциональную ускорению: $F_{\text{сопр}} \sim a$.

27. В вертикальную стену вбит гвоздь A, к которому с помощью невесомой нерастяжимой нити длиной L прикреплен небольшой массивный шарик (рис. 13). Нить с шариком отклоняют до горизонтального положения и отпускают без толчка. В процессе движения нить цепляется за гвоздь C и начинает частично наматываться на него. Укажите множество точек на вертикальной прямой AD, в которых можно разместить гвоздь C так, чтобы в процессе движения шарик совершил полный оборот вокруг этого гвоздя. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

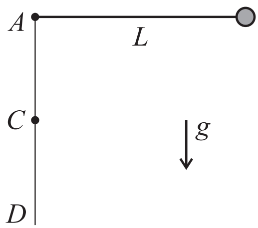


Рис. 13.

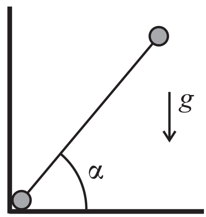


Рис. 14.

28. Курица Ряба качается на качелях длины L, подвешенных на перекладине, находящейся на высоте $3{,}5L$ от пола, каждый раз отклоняясь на максимальный угол, равный 90°. При каком угле отклонения качелей яйцо, отпущенное курицей, упадёт на пол точно под перекладиной?

29. Определите силу, действующую на вертикальную стенку со стороны падающей гантели, когда ось гантели составляет угол α с горизонтом (рис. 14). Гантель начинает движение из вертикального положения без начальной скорости. Масса каждого шарика гантели равна m.

30. На дне сферической полости радиуса R (см. рис. 15) находится маленькая шайба массой m. В некоторый момент времени ей придали в горизонтальном направлении скорость v. Найти зависимость максимальной высоты подъёма шайбы h от её начальной кинетической энергии E и построить её примерный график. Трение между шайбой и стенками отсутствует.

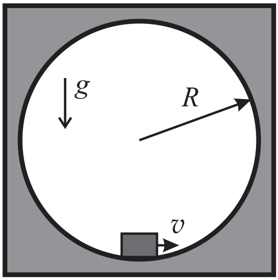


Рис. 15.

31. На горизонтальной поверхности покоятся два бруска, связанные пружиной жёсткости k (см. рис. 16). В начальный момент пружина находится в недеформированном состоянии. Какую наименьшую скорость v следует сообщить правому бруску, чтобы левый брусок также пришёл в движение? Коэффициент трения обоих брусков о поверхность равен μ.

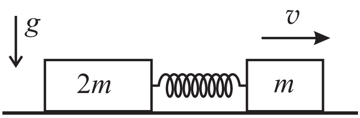


Рис. 16.

32. С какой силой F нужно надавить на верхний груз массы m_1 (см. рис. 17), чтобы нижний груз массы m_2, соединённый с верхним пружиной, оторвался от пола после прекращения действия этой силы?

33. На покоящийся шар налетает шар такой же массы. Найдите угол разлёта шаров после нецентрального упругого удара.

34. На две одинаковые неподвижные гладкие шайбы налетает такая же третья, центр которой движется по средней линии отрезка, соеди-

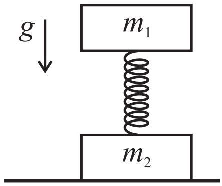


Рис. 17.

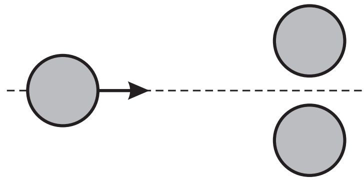


Рис. 18.

няющего центры неподвижных шайб (рис. 18). После упругого удара налетающая шайба останавливается. Каково расстояние d между центрами первоначально неподвижных шайб, если радиус шайб равен R?

35. Тяжёлая частица массы M сталкивается с покоящейся лёгкой частицей массы m ($m < M$). На какой наибольший угол α может отклониться тяжёлая частица в результате упругого удара?

36. С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку поднимается вверх с постоянной скоростью v? Масса змеи равна M, её длина — L.

37. Однородная цепочка одним концом подвешена на нити так, что другим она касается поверхности стола. Нить пережигают. Определите зависимость силы давления цепочки на стол от длины ещё неупавшей её части. Удар звеньев о стол неупругий, масса цепочки равна M, её длина — L.

38. На горизонтальном столе находятся закреплённая стенка и горка массой $2m$, способная свободно скользить по поверхности (см. рис. 19). На вершине горки на высоте h удерживают грузик массой m. Грузик отпускают без начальной скорости, и он съезжает с горки в направлении стенки. На какую максимальную высоту поднимется грузик на горке после того, как он её снова догонит? Удар грузика о стенку считать абсолютно упругим. Трением пренебречь.

39. Подставка массы m_1 с полусферической выемкой радиуса R стоит на гладком столе (рис. 20). Тело массы m_2 кладут на край выемки и отпускают. Найдите скорость тела и подставки в момент, когда

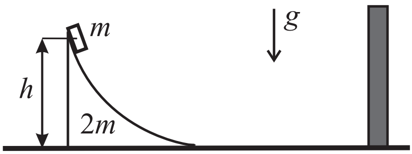


Рис. 19.

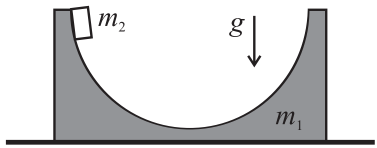


Рис. 20.

тело проходит нижнюю точку полусферы. С какой силой N оно давит на подставку в этой точке? Трением пренебречь.

40. На плоскости, наклонённой под углом α к горизонту, стоит однородный цилиндр радиусом r. Определите наибольшую высоту цилиндра, при которой он ещё не опрокидывается.

41. На концах рычага массой M и длиной $3L$, лежащего на двух опорах как показано на рис. 21, уравновешены два груза. Чему равна масса правого груза, если масса левого совпадает с массой рычага? Рычаг по всей длине можно считать однородным. Размерами грузов по сравнению с длиной рычага пренебречь.

Рис. 21.

42. К концу однородной палочки подвешен на нити алюминиевый шарик радиуса $r = 0{,}5$ см. Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь равновесия при погружении в воду половины шарика. При этом оказывается, что точка опоры делит палочку в отношении 2:3. Найти массу палочки. Плотность алюминия $\rho = 2700$ кг/м^3, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.

43. На верхнем краю очень тяжёлого клина с углом α при основании укреплён двойной блок — два вала с радиусами r и R, насаженные на общую ось и жёстко скеплённые друг с другом (см. рис. 22). К свешивающемуся с бóльшего вала концу нити прикреплён груз массы m_1. К концу нити, намотанной на меньший вал, прикреплён груз массой m_2. При каком отношении масс грузов m_2/m_1 система будет

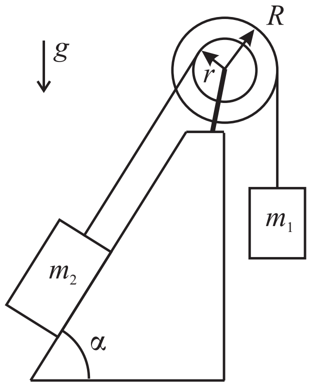


Рис. 22.

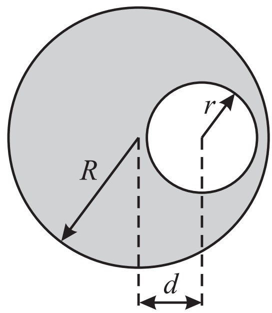


Рис. 23.

находится в равновесии? Массами блоков и нитей, а также трением пренебречь.

44. Где находится центр масс гардеробного номерка в виде диска с круглым отверстием (рис. 23)?

45. Каким должен быть коэффициент трения однородного стержня о пол, чтобы он мог стоять так, как показано на рис. 24? Длина нити AB равна длине стержня.

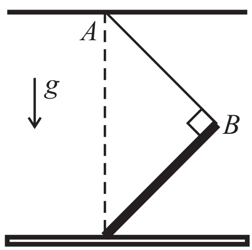


Рис. 24.

46. На горизонтальной поверхности стоит куб массы m. С какой минимальной силой и под каким углом к горизонту надо тянуть куб за верхнее ребро (рис. 25), чтобы он начал опрокидываться без проскальзывания, если коэффициент трения куба о плоскость равен μ?

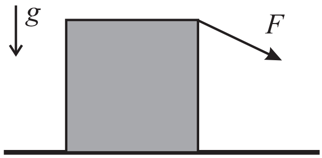


Рис. 25.

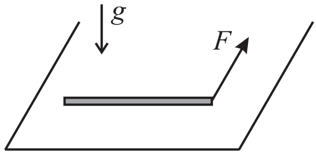


Рис. 26.

47. Однородный тонкий брусок массы m лежит на горизонтальной плоскости (рис. 26). Какой наименьшей горизонтальной силой F, приложенной к концу бруска перпендикулярно ему, его можно сдвинуть с места, если коэффициент трения между бруском и плоскостью равен μ?

48. У экспериментатора Глюка есть велосипед, оснащённый передним и задним тормозами, которые полностью блокируют вращение соответствующего колеса. В результате испытаний Глюк выяснил, что, если он использует только задний тормоз, то его велосипед останавливается через 6 м. Каким окажется тормозной путь велосипеда при блокировании обоих колёс одновременно, если известно, что при использовании только переднего тормоза, заднее колесо начало отрываться от земли. Начальная скорость велосипеда во всех случаях одна и та же. Центр тяжести велосипеда вместе с Глюком находится на одинаковом расстоянии от осей переднего и заднего колеса. Радиус колёс одинаковый.

49. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых бруска, соединённых пружиной жёсткости k и длины L_0 (рис. 27). На левый брусок внезапно начинает действовать постоянная сила F, направленная вдоль пружины. Найдите минимальное $L_{\text{мин}}$ и максимальное $L_{\text{макс}}$ расстояния между брусками.

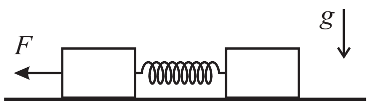


Рис. 27.

50. К ободу колеса с горизонтально расположенной осью прикрепили грузик массой m. Найти массу колеса, предполагая её однородно распределённой по ободу, если частота малых колебаний колеса с грузиком вокруг оси равна ω, а радиус колеса равен R.

51. Вертикальная перегородка в высоком сосуде разделяет его на две сообщающиеся части с разными сечениями. Найти период малых колебаний жидкости, считая, что свободная поверхность её в каждой части сосуда остаётся горизонтальной. Глубина жидкости в состоянии равновесия равна H.

52. Найти частоту колебаний маятника, представляющего собой груз на лёгком стержне длины L, если к середине стержня прикреплена горизонтальная пружина жёсткости k. На рис. 28 изображено состояние равновесия.

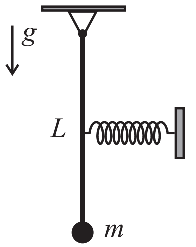


Рис. 28.

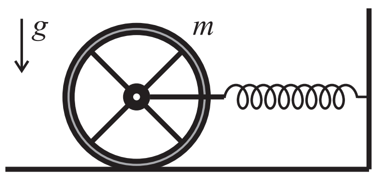


Рис. 29.

53. Пружина жёсткости k одним концом присоединена к оси колеса массы m, которое способно катиться без проскальзывания, а другим прикреплена к стене (рис. 29). Какова частота колебаний системы? Масса колеса однородно распределена по ободу.

54. По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v скользит тонкий однородный брусок длины L. Брусок наезжает на обширный шероховатый участок плоскости. Через какое время t брусок остановится, если коэффициент трения равен μ?

ПРИЛОЖЕНИЕ I

О наибольшем и наименьшем значении функций

В процессе решения олимпиадных заданий по физике часто приходится анализировать полученную зависимость одной физической величины y от другой величины x, определять наибольшее и/или наименьшее возможное значение функции $y(x)$. Подобное исследование может быть легко проведено с помощью вычисления производной, однако этот метод доступен только учащимся, освоившим начала математического анализа, то есть, как правило, ученикам 11 класса.

Тем не менее, в ряде простейших случаев можно обойтись без использования производных, что делает подобные задачи доступными для учащихся 8-10 классов. Рассмотрим эти случаи более подробно (параметры a, b и переменная x во всех примерах считаются положительными).

1. $\mathbf{y(x) = ax - bx^2}$.

Данный тип зависимости можно назвать простейшим из нетривиальных случаев, встречающихся при решении задач. Функция $y(x)$, очевидно, обращается в нуль при двух значениях аргумента: $x_1 = 0$ и $x_2 = a/b$ (график исследуемой функции — парабола — изображён на рис. 30). Между этими точками $y(x) > 0$ и, следовательно, достигает там некоторого максимального значения (вершина параболы). Чтобы найти его, а также соответствующее значение переменной x, вынесем множитель $(-b)$ за скобки и выделим в полученном выражении полный квадрат

$$y(x) = ax - bx^2 = -b\left(x^2 - \frac{a}{b}x\right) = -b\left[\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2 - \frac{a^2}{4b^2}\right] =$$

$$= \frac{a^2}{4b} - b\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2.$$

Из найденной формулы видно, что величина $y(x)$ тем больше, чем меньше $(x - a/2b)^2$. Квадрат какого-либо выражения не может быть отрицательным числом, поэтому минимальное значение $(x - a/2b)^2$

равно нулю, и это значение достигается при $x = a/2b$. Отсюда следует вывод, что

$$y(x) = ax - bx^2 \leqslant y_{\text{макс}} = \frac{a^2}{4b},$$

причём максимальное значение соответствует

$$x_{\text{макс}} = \frac{a}{2b}.$$

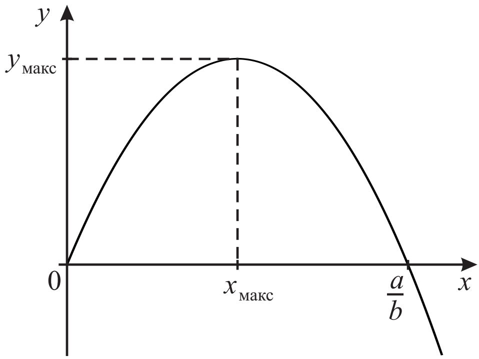


Рис. 30.

Заметим, что учащиеся обычно знают на память формулу для координаты вершины параболы, из которой могут быть легко получены выражения для $x_{\text{макс}}$ и $y_{\text{макс}}$.

2. $\mathbf{y(x) = ax + \frac{b}{x}}$**.**

Рассмотрим теперь следующий тип зависимости, который также достаточно часто встречается, причём именно в задачах олимпиадной направленности (см., например, задачи №№ 6, 35 и 47 настоящего сборника). В этом случае график функции $y(x)$ имеет вид, представленный на рис. 31. Чтобы найти минимальное значение этой функции, воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных величин x_1 и x_2

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 x_2}.$$

Данное неравенство, называемое также неравенством Коши, широко известно среди школьников, занимающихся олимпиадной математикой, и может быть легко доказано с помощью следующих преобразований

$$x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1 x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Из приведённого доказательства также видно, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

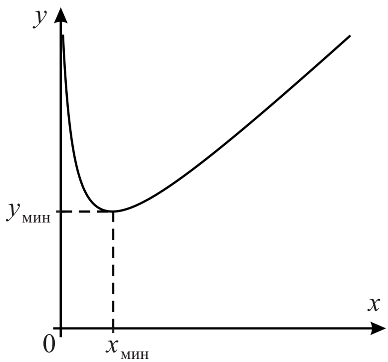


Рис. 31.

Теперь сделаем подстановку

$$x_1 = ax, \qquad x_2 = \frac{b}{x}$$

и получим, что

$$y(x) = ax + \frac{b}{x} \geqslant 2\sqrt{ab},$$

причём минимальное значение $y_{\text{мин}} = 2\sqrt{ab}$ получается, когда

$$ax_{\text{мин}} = \frac{b}{x_{\text{мин}}} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

3. $\mathbf{y(x) = ax^n + \dfrac{nb}{x}}$.

Этот случай является, в известном смысле, обобщением предыдущего и сводится к нему, если натуральное число n положить равным единице. Для нахождения минимального значения функции $y(x)$, опять воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, но уже в случае N положительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N},$$

причём здесь равенство достигается только, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$.

Будем считать, что $N = n+1$, и сделаем следующую подстановку

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{b}{x}, \qquad x_{n+1} = ax^n.$$

Из приведённого неравенства получим, что

$$y(x) = ax^n + \frac{nb}{x} \geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{ab^n},$$

причём минимальное значение $y_{\text{мин}} = (n+1)\sqrt[n+1]{ab^n}$ достигается, когда

$$ax^n_{\text{мин}} = \frac{b}{x_{\text{мин}}} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{мин}} = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

4. $\mathbf{y(x) = \dfrac{x}{ax^2 + b}}$.

В данном случае график функции $y(x)$ имеет вид, представленный на рис. 32. Чтобы найти максимальное значение этой функции, совершим следующее преобразование

$$y(x) = \frac{x}{ax^2 + b} = \frac{1}{ax + b/x}.$$

Согласно пункту 2, знаменатель удовлетворяет неравенству

$$ax + \frac{b}{x} \geqslant 2\sqrt{ab},$$

откуда следует, что

$$y(x) = \frac{x}{ax^2 + b} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

Максимальное значение исследуемой функции, очевидно, достигается в той же точке, что и минимальное значение знаменателя, то есть при

$$x_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

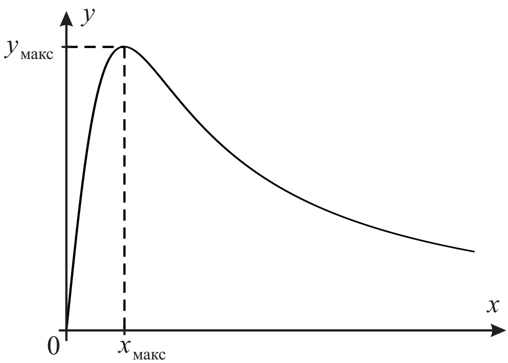


Рис. 32.

5. $\mathbf{y(x) = \dfrac{x}{(ax + b)^2}}$ **.**

Для поиска максимального значение этой функции, поступим аналогично пункту 4

$$y(x) = \frac{x}{(ax + b)^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^2}.$$

Так как выражение в скобках удовлетворяет неравенству

$$a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}} \geqslant 2\sqrt{ab},$$

отсюда следует, что

$$y(x) = \frac{x}{(ax+b)^2} \leqslant \frac{1}{4ab}.$$

Максимальное значение исследуемой функции, очевидно, достигается при

$$\sqrt{x}_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{макс}} = \frac{b}{a}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

О центре масс треугольника

В данном разделе мы рассмотрим задачи о нахождении центра масс различных систем, состоящих из трёх точечных масс, или протяжённых тел, имеющих форму треугольника.

Как известно, положение центра масс системы N материальных точек задаётся следующей формулой:

$$\vec{r}_{\text{ц.м.}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N},$$

где $\vec{r}_{\text{ц.м.}}$ — радиус-вектор центра масс, $\vec{r}_i$ — радиус-вектор i-й точки системы, m_i — масса i-й точки. Из этого определения можно вывести два важнейших следствия:

а) центр масс C двух тел, находящихся в точках A и B и имеющих массы m_A и m_B, лежит на прямой AB и делит отрезок AB в отношении $AC : BC = m_B : m_A$ (правило рычага);

б) если заменить любую подсистему данной системы точечных масс её центром масс, в который помещается масса, равная суммарной массе подсистемы, то новая система имеет тот же центр масс, как и исходная (правило группировки).

Основываясь на них, найдём положение центра для трёх точечных масс m_A, m_B и m_C, расположенных в вершинах A, B и C треугольника ABC в двух частных случаях: равных масс (рис. 33) и масс, пропорциональных длинам противолежащих сторон треугольника (рис. 34), и докажем, что центр масс в первом случае располагается в точке пересечения *медиан*, а во втором — в точке пересечения *биссектрис* треугольника ABC.

1. $\mathbf{m_A = m_B = m_C = m}$.

Найдём сначала центр масс любой пары тел, например расположенных в вершинах A и B (рис. 35). Так как их массы равны, то искомый центр находится в точке D — середине отрезка AB. Согласно правилу группировки, центр масс всей системы (точка O) совпадает

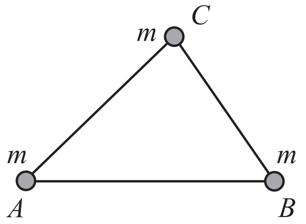


Рис. 33.

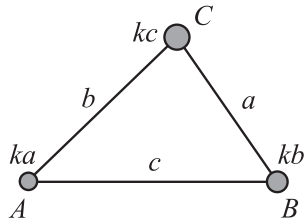


Рис. 34.

с центром масс для двух тел, расположенных в точках C и D и имеющих массы m и $2m$, то есть лежит на медиане CD. Рассуждая аналогично, получаем, что точка O должна лежать на медианах, проведённых ко всем сторонам треугольника ABC и, следовательно, являться точкой их пересечения (*центроидом* треугольника). Кроме того, используя правило рычага, легко найти отношение длин отрезков, на которые разбивается точкой O каждая медиана:

$$\frac{CO}{DO} = \frac{2m}{m} = 2.$$

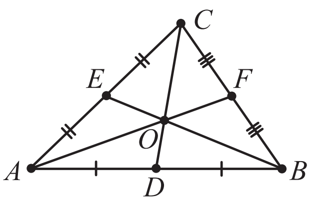


Рис. 35.

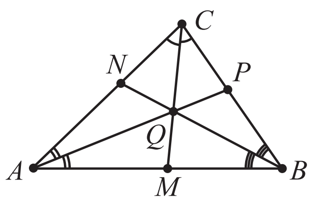


Рис. 36.

2. $\mathbf{\dfrac{m_A}{BC} = \dfrac{m_B}{AC} = \dfrac{m_C}{AB}}$**.**

Также как и предыдущем случае, найдём сначала центр масс любой пары тел, например расположенных в вершинах A и B (рис. 36). По правилу рычага получаем, что искомый центр (точка M) разбивает отрезок AB в следующем отношении

$$\frac{AM}{BM} = \frac{m_B}{m_A} = \frac{AC}{BC}.$$

Рассмотрим треугольники $\triangle\, AMC$ и $\triangle\, BMC$. Из теоремы синусов имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\angle ACM}{AM} = \dfrac{\sin\angle AMC}{AC}, \\ \dfrac{\sin\angle BCM}{BM} = \dfrac{\sin\angle BMC}{BC}. \end{cases}$$

Так как углы $\angle BMC$ и $\angle AMC$ являются смежными, их синусы равны. Используя это, получаем

$$\frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle ACM} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle ACM} = 1.$$

Отсюда следует, что $\angle ACM = \angle BCM$, а прямая CM является биссектрисой угла $\angle C$. Согласно правилу группировки, центр масс всей системы трёх тел (точка Q) совпадает с центром масс для двух тел, расположенных в точках C и M, то есть лежит на биссектрисе CM.

Рассуждая аналогично для остальных пар вершин, получаем, что точка Q должна лежать на биссектрисах всех углов треугольника ABC и, следовательно, являться точкой их пересечения (*инцентром* треугольника).

Перейдём теперь к нахождению положения центра масс тел треугольной формы — каркаса из однородной проволоки постоянного сечения (рис. 37) и однородной пластины постоянной толщины (рис. 38).

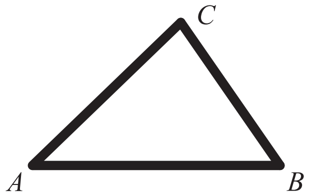


Рис. 37.

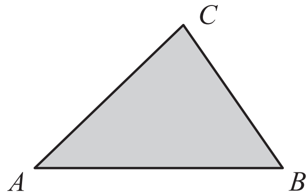


Рис. 38.

3. Центр масс треугольного каркаса.

Используя правило группировки, заменим каждую сторону каркаса материальной точкой, расположенной в её центре (точки D, E

и F на рис. 39) и имеющей массу, равную массе этой стороны. Проволока, из которой сделан каркас, однородна и имеет постоянное сечение, поэтому масса каждой стороны пропорциональна её длине (k — некоторый коэффициент)

$$m_D = m_{AB} = k \cdot AB, \quad m_E = m_{AC} = k \cdot AC, \quad m_F = m_{BC} = k \cdot BC.$$

Стороны $\triangle DEF$ являются средними линиями $\triangle ABC$ и, следовательно,

$$DE = \frac{BC}{2}, \qquad DF = \frac{AC}{2}, \qquad EF = \frac{AB}{2}.$$

В результате, центр масс каркаса совпадает с центром трёх тел, находящихся в точках D, E и F и имеющих массы, пропорциональные длинам противолежащих сторон треугольника $\triangle DEF$. Отсюда, согласно пункту 2, получаем, что искомая точка является инцентром $\triangle DEF$, то есть точкой O на рис. 39.

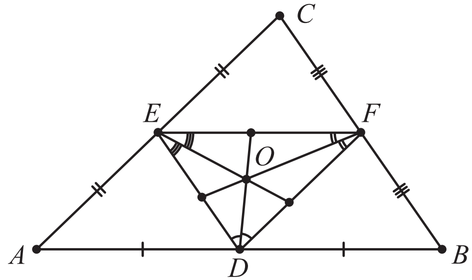


Рис. 39.

4. Центр масс треугольной пластины.

Разделим пластину на тонкие полосы (см. рис. 40), параллельные какой-либо стороне треугольника, например, стороне AB. Центр масс каждой такой полосы (полоса A_1B_1 на рис. 40) находится в её центре (точка D_1), то есть лежит на медиане треугольника, проведённой к AB. Так как центры масс всех полос лежат на этой медиане, то и центр масс всей пластины находится на ней же. Аналогично, можно рассмотреть разбиение пластины на полосы, параллельные другим сторонам — AC и BC, и получить, что центр масс треугольной пластины лежит на медианах треугольника, то есть в точке их пересечения.

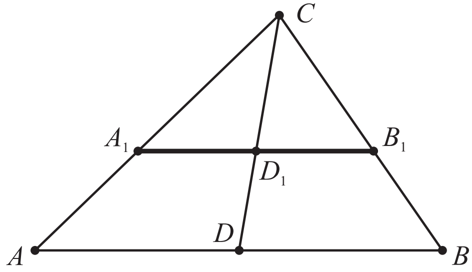


Рис. 40.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Ответ: $2v$.

Решение: Пусть s — длина пройденной велосипедистом дистанции, t — полное время в пути. Тогда

$$s = v_{\text{ср}} t = vt\,.$$

Первую треть дистанции Василий проехал за время $t_1 = s/(3v)$. Скорость велосипедиста на второй части дистанции была на треть меньше ($v_2 = 2v/3$), поэтому время, затраченное на её прохождение равно $t_2 = s/(3v_2) = s/(2v)$. Оставшуюся треть пути Василий проехал за время $t_3 = s/(3v_3)$, где v_3 — искомая скорость велосипедиста на финише. Таким образом, полное время в пути равно

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{3v} + \frac{s}{2v} + \frac{s}{3v_3} = \frac{5s}{6v} + \frac{s}{3v_3}\,.$$

Отсюда

$$s = vt = \frac{5s}{6} + \frac{sv}{3v_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{6} = \frac{sv}{3v_3} \quad \Rightarrow \quad v_3 = 2v\,.$$

2. Ответ: $3v/4$.

Решение: Рассмотрим положение частей удава через время t после начала движения головы (рис. 41). Здесь точка A соответствует хвосту Каа, точка B — начальному положению головы, точка C — её текущему положению, а точка D — центр масс движущейся части удава. Расстояние CB равно vt. Так как длина удава остаётся посто-

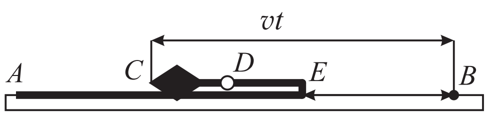


Рис. 41.

янной, $CE = EB = vt/2$. Точка D, как центр масс, является серединой отрезка CE. Отсюда следует, что

$$DB = \frac{CE}{2} + EB = \frac{3vt}{4}.$$

Из полученного соотношения делаем вывод, что центр масс движущейся части Каа, перемещается равномерно со скоростью $3v/4$.

3. Ответ: $t_0 = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} - \dfrac{t_1 + t_2}{2} = 46$ с.

Решение: Пусть a — ускорение поезда, t_0 — время, на которое опоздал пассажир. Тогда скорость поезда в этот момент составляет $v_1 = at_0$, а в момент, когда мимо пассажира начал проходить второй вагон, — $v_2 = a(t_0 + t_1)$. Первый вагон проходит расстояние L, равное своей длине, за время t_1:

$$L = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = a\left(t_0 t_1 + \frac{t_1^2}{2}\right).$$

Второй вагон проходит то же расстояние L за время t_2:

$$L = v_2 t_2 + \frac{at_2^2}{2} = a\left(t_0 t_2 + t_1 t_2 + \frac{t_2^2}{2}\right).$$

Приравнивая правые части этих равенств, получаем

$$t_0 t_1 + \frac{t_1^2}{2} = t_0 t_2 + t_1 t_2 + \frac{t_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} - \frac{t_1 + t_2}{2} = 46 \text{ с}.$$

4. Ответ: $2a\sin(\alpha/2)$.

Решение: Пусть клин за время t сдвинулся на расстояние CB (см. рис. 42). Так как клин движется равноускоренно, $CB = at^2/2$. Длина куска верёвки, лежащего на клине, равна $AB = L - CB = L - at^2/2$, где L — длина всей верёвки. Из этого следует, что грузик (точка A) движется относительно клина с ускорением a, направленным вдоль

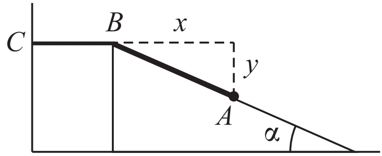


Рис. 42.

поверхности вверх. Проекции ускорения грузика относительно клина на горизонтальную и вертикальную оси равны

$$a_x^{\text{отн}} = -a\cos\alpha, \qquad a_y^{\text{отн}} = a\sin\alpha.$$

В системе отсчёта, связанной со стенкой, выражения для проекций ускорения грузика будут иметь вид

$$a_x = a + a_x^{\text{отн}} = a - a\cos\alpha, \qquad a_y = a_y^{\text{отн}} = a\sin\alpha.$$

Найдём теперь модуль ускорения грузика

$$a_{\text{гр}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 2a\sin\frac{\alpha}{2}.$$

5. Ответ: В центре квадрата через время $t = L/v$; в общем случае — в центре N-угольника через время $t = \dfrac{L}{2v\sin^2(180^\circ/N)}$.

Решение: Разберём общий случай — N черепах, находящихся в вершинах правильного N-угольника со стороной L. Из курса геометрии также известно, что все углы такого многоугольника равны $\alpha = 180^\circ(1 - 2/N)$.

В силу симметрии начального положения черепах и скоростей их движения, очевидно, что встреча произойдёт в центре многоугольника. Первоначально две соседние черепахи разделяет расстояние L. Чтобы найти скорость $v_{\text{сбл}}$, с которой оно уменьшается, рассмотрим проекции v_1 и v_2 скоростей соседних черепах на прямую, проходящую через них:

$$v_1 = v, \qquad v_2 = v\cos(180^\circ - \alpha) = v\cos(360^\circ/N) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_{\text{сбл}} = v_1 - v_2 = v\,(1 - \cos(360°/N)) = 2v\sin^2(180°/N).$$

Отсюда следует, что время, за которое встретятся черепахи, равно

$$t = \frac{L}{v_{\text{сбл}}} = \frac{L}{2v\sin^2(180°/N)}.$$

Если $N = 4$, получаем

$$t = \frac{L}{2v\sin^2(45°)} = \frac{L}{v}.$$

6. Ответ: $t_{\text{мин}} = \sqrt{\dfrac{8L}{kv_0}}$, $h_{\text{мин}} = \sqrt{\dfrac{v_0 L}{2k}}$.

Решение: Время, которое воздухоплаватель тратит на подъём и спуск, одинаковое и равно $t_1 = h/v_0$. Время, необходимое на преодоление горизонтального участка, расположенного на высоте h, находится по формуле $t_2 = L/v = L/(kh)$. Отсюда получаем, что общее время движения из пункта A в пункт B равно

$$t = 2t_1 + t_2 = \frac{2h}{v_0} + \frac{L}{kh}.$$

Минимальное значение этого выражения достигается при

$$h_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{v_0 L}{2k}}$$

и равно

$$t_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{8L}{kv_0}}.$$

Подробно о нахождении минимального значения подобных выражений изложено в Приложении I.

7. Ответ: $v = u\left(\dfrac{1}{\cos 2\alpha} - 1\right) = u\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с клином. В ней шарик летит навстречу клину со скоростью $u + v$. При абсолютно упругом ударе о покоящийся тяжёлый клин скорость шарика останется неизменной по величине, но будет направлена вверх по углом α к поверхности клина (см. рис. 43a) или, что эквивалентно, под углом $2\alpha = 30°$ относительно горизонтальной поверхности. Чтобы полу-

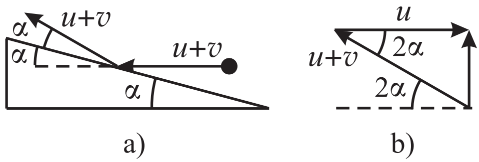


Рис. 43.

чить вектор скорости отскачившего мячика в лабораторной системе отсчёта, необходимо к вектору скорости, найденной в системе, связанной с клином, прибавить вектор $\vec{u}$. Так как, по условию, результат должен быть направлен вертикально, мы получим прямоугольный треугольник (см. рис. 43b) с катетом, равным u, гипотенузой, равной $u + v$, и углом $2\alpha = 30°$ между ними. Из указанного треугольника находим, что

$$(u+v)\cos 2\alpha = u \quad \Rightarrow \quad v = u\left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1\right) = u\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

8. Ответ: $x = \dfrac{2vL}{c^2 - v^2}\left(v\sin\alpha + \sqrt{c^2 - v^2\cos^2\alpha}\right).$

Решение: При решении задачи удобно считать, что есть два автомобиля A и B (см. рис. 44), движущиеся по симметричным относительно стены прямым и обменивающиеся звуковым сигналом. Пусть t — время, за которое автомобиль пройдёт расстояние $x = BC$. Очевидно, что $x = vt$, $AB = ct$, а $\angle ABC = 90° + \alpha$. По теореме косинусов:

$$(ct)^2 = x^2 + (2L)^2 - 2\cdot(2L)\cdot x\cos(90° + \alpha) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c^2x^2}{v^2} = x^2 + 4L^2 + 4Lx\sin\alpha \quad \Rightarrow$$

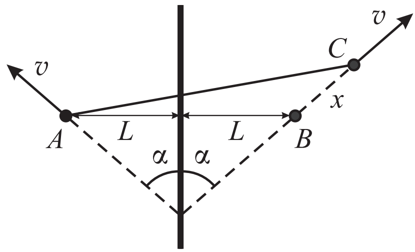


Рис. 44.

$$\Rightarrow \quad (c^2 - v^2)x^2 - 4v^2 Lx \sin\alpha - 4v^2 L^2 = 0.$$

Решая полученное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, находим

$$x = \frac{2vL}{c^2 - v^2}\left(v\sin\alpha + \sqrt{c^2 - v^2\cos^2\alpha}\right).$$

9. Ответ: $\overrightarrow{AD}$ (см. рис. 45).

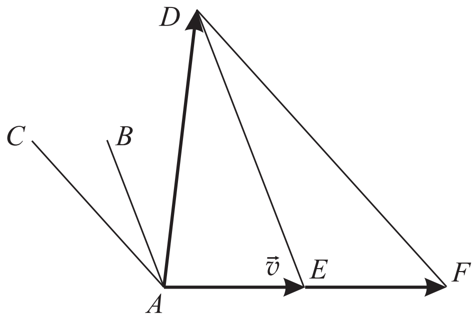


Рис. 45.

Решение: Скорость ветра относительно Земли $\vec{u}_\text{В}$, скорость ветра относительно корабля $\vec{u}'_\text{В}$ и скорость корабля $\vec{v}_\text{К}$ связаны соотношением $\vec{u}'_\text{В} = \vec{u}_\text{В} - \vec{v}_\text{К}$. Подставляя сюда условие задачи, получаем два векторных равенства:

$$\vec{u}'_{\text{В}1} = \vec{u}_\text{В} - \vec{v}, \qquad \vec{u}'_{\text{В}2} = \vec{u}_\text{В} - 2\vec{v},$$

где векторы $\vec{u}'_{\text{В}1}$ и $\vec{u}'_{\text{В}2}$ ориентированы по лучам AB и AC соответственно. Вычитаем одно равенство из другого и приходим к следующему соотношению:

$$\vec{u}'_{\text{В}1} - \vec{u}'_{\text{В}2} = \vec{v}.$$

Длины векторов $\vec{u}'_{\text{В}1}$ и $\vec{u}'_{\text{В}2}$ неизвестны. Чтобы их найти, сделаем построение, изображённое на рис. 45. Здесь вектор $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} = \vec{v}$, прямая DE параллельна прямой AB, прямая DF параллельна прямой AC, а D — точка их пересечения. Очевидно, что $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{ED} = \vec{v}$. Отсюда получаем, что $\overrightarrow{ED} = \vec{u}'_{\text{В}1}$, а $\vec{F}D = \vec{u}'_{\text{В}2}$. Теперь находим вектор скорости ветра относительно Земли $\vec{u}_{\text{В}}$:

$$\vec{u}_{\text{В}} = \vec{u}'_{\text{В}1} + \vec{v} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}.$$

10. Ответ: $h = \dfrac{gt_1t_2}{2} = 75$ м, $v_0 = \dfrac{g(t_1 - t_2)}{2} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение: Пусть v_0 — величина начальной скорости тела в обоих случаях. Используя уравнение движения тела в поле тяготения, запишем

$$0 = h + v_0t_1 - \frac{gt_1^2}{2},$$
$$0 = h - v_0t_2 - \frac{gt_2^2}{2}.$$

Вычитаем эти равенства друг из друга и, после математических преобразований, получаем выражение для v_0:

$$0 = v_0(t_1 + t_2) - \frac{g(t_1^2 - t_2^2)}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{g(t_1 - t_2)}{2} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Подставляя его во второе равенство, находим выражение для начальной высоты h:

$$h = \frac{g(t_1 - t_2)}{2} \cdot t_2 + \frac{gt_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{gt_1t_2}{2} = 75\ \text{м}.$$

11. Ответ: $\dfrac{2uv_0 \sin\alpha}{g}$.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с ракеткой. Для неё значения проекций начальной скорости мяча запишутся в виде

$$v_{0x}^{\text{отн}} = v_0 \cos\alpha + u, \qquad v_{0y}^{\text{отн}} = v_0 \sin\alpha.$$

Так как при отскоке от неподвижной ракетки скорость мяча меняется только по направлению, время полёта мяча в два раза больше времени подъёма

$$t = 2t_{\text{подъёма}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

За время полёта мяча в системе отсчёта, связанной с полом, точка приземления сместилась на расстояние

$$L = ut = \frac{2uv_0 \sin\alpha}{g}.$$

12. Ответ: 40 м.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимися машинами. Относительно неё, камень, застрявший в колесе, вылетает со скоростью $v = 72$ км/ч $= 20$ м/с, равной линейной скорости вращения обода колеса. Вылетевший камень пролетит расстояние $L = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$, где α — угол, под которым направлена его начальная скорость. Так как угол α может быть любым, минимальное безопасное расстояние s равно максимально возможному значению L, которое получается при $\alpha = 45°$, то есть

$$s = \frac{v^2 \sin(2 \cdot 45°)}{g} = \frac{v^2}{g} = 40 \text{ м}.$$

13. Ответ: Если $v \geqslant \sqrt{gr}$, $H_{\text{макс}} = r + \frac{gr^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g}$; если $v < \sqrt{gr}$, $H_{\text{макс}} = 2r$.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, относительно которой ось колеса покоится. Пусть отрыв кусочка грязи происходит в точке A

(рис. 46) и угол между отрезком OA и вертикалью равен α. Тогда расстояние от поверхности дороги до точки отрыва равно

$$h_1 = r(1 - \cos\alpha).$$

Далее кусочек грязи летит по параболе. Высота, на которую он под-

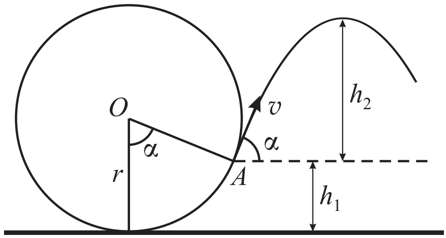


Рис. 46.

нимется относительно точки A, равна $h_2 = v^2\sin^2\alpha/(2g)$. Очевидно, что данные формулы остаются справедливыми и при $\alpha > 90^\circ$. Таким образом, высота, на которую (относительно дороги) окажется заброшен кусочек грязи, равна

$$H = h_1 + h_2 = r(1 - \cos\alpha) + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} =$$

$$= r + \frac{gr^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\cos\alpha + \frac{gr}{v^2}\right)^2\right].$$

Полученное выражение максимально, когда величина $(\cos\alpha + gr/v^2)^2$ минимальна. Если $gr/v^2 \leqslant 1$, то максимум высоты достигается при $\cos\alpha = -gr/v^2$. В этом случае

$$H_{\text{макс}} = r + \frac{gr^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g}.$$

Если же $gr/v^2 > 1$, то максимум достигается при $\cos\alpha = -1$, то есть $H_{\text{макс}} = 2r$.

14. Ответ: $H = \dfrac{2u\,\mathrm{tg}^2\alpha}{g}(v\cos\alpha - u)$.

Решение: В момент броска утка находилась в точке с координатами $(H \operatorname{ctg}\alpha,\, H)$. Запишем уравнения движения камня и утки:

$$\begin{cases} x(t) = vt\cos\alpha, \\ y(t) = vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \text{(камень)}, \qquad \begin{cases} x(t) = H\operatorname{ctg}\alpha + ut, \\ y(t) = H \end{cases} \text{(утка)}.$$

Они окажутся в одной точке, если

$$vt\cos\alpha = H\operatorname{ctg}\alpha + ut, \qquad vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = H.$$

Из первого равенства находим время встречи

$$t = \frac{H\operatorname{ctg}\alpha}{v\cos\alpha - u}.$$

Очевидно, что полученная формула имеет смысл только в случае, когда $u < v\cos\alpha$, иначе камень не сможет догнать утку.
Подставим теперь выражение для t во второе равенство:

$$\frac{vH\cos\alpha}{v\cos\alpha - u} - \frac{gH^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{2(v\cos\alpha - u)^2} = H,$$

откуда находим, что

$$H = \frac{2u\operatorname{tg}^2\alpha}{g}(v\cos\alpha - u).$$

15. Ответ: $v = \sqrt{L(g+a)/\sin 2\alpha}$.

Решение: Запишем уравнения движения снаряда и ракеты:

$$\begin{cases} x(t) = vt\cos\alpha, \\ y(t) = vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \text{(снаряд)}, \qquad \begin{cases} x(t) = L, \\ y(t) = \frac{at^2}{2} \end{cases} \text{(ракета)}.$$

Они окажутся в одной точке, если

$$vt\cos\alpha = L, \qquad vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = \frac{at^2}{2}.$$

Из второго равенства находим время встречи

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g+a}.$$

Подставив это выражение для в первое, получим

$$\frac{v^2\sin 2\alpha}{g+a} = L \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{L(g+a)}{\sin 2\alpha}}.$$

16. Ответ: $\rho = 3$ г/см^3.

Решение: Пусть S — площадь дна аквариума. Объём воды V_1, вытесняемый лодочкой в первом случае, можно найти из условия плавания

$$F_{\text{т}} = F_{\text{А}} \quad \Rightarrow \quad mg = \rho_{\text{в}} g V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{m}{\rho_{\text{в}}}.$$

В случае, когда лодочка утонула, она вытесняет объём $V_2 = m/\rho$. С другой стороны, $V_1 = S(h_2 - h_1)$ и $V_2 = S(h_3 - h_1)$. Приравнивая различные выражения для объёмов, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{m}{\rho_{\text{в}}} = S(h_2 - h_1), \\ \dfrac{m}{\rho} = S(h_3 - h_1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1} = 3.$$

Отсюда находим, что $\rho = 3\rho_{\text{в}} = 3$ г/см^3.

17. Ответ: а) 30 см; б) 9 см.

Решение: Сначала найдём глубину $h_{\text{в}}$, на которую погружена в воду перегородка (см. рис. 47а). Это можно сделать, приравняв величину выталкивающей силы и величину силы тяжести, действующих на перегородку $F_{\text{т}} = F_{\text{А}}$:

$$m_{\text{п}} g = \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{д}} S_{\text{п}} h = \rho_{\text{в}} S_{\text{п}} h_{\text{в}},$$

где $m_{\text{п}}$ и $S_{\text{п}} = S/4$ — масса и площадь основания перегородки. Выражая $h_{\text{в}}$, получим, что

$$h_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{д}} h}{\rho_{\text{в}}} = 24 \text{ см}.$$

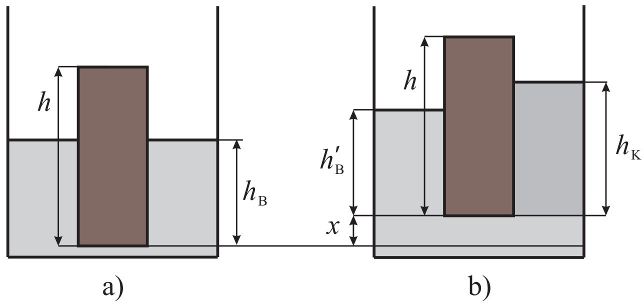


Рис. 47.

Если в правую часть сосуда наливать керосин, то перегородка начнёт двигаться вверх, при этом оставаясь на плаву.
С другой стороны, две части, разделённые перегородкой, представляют собой сообщающиеся сосуды, поэтому давления жидкостей на уровне нижнего края перегородки слева и справа будут одинаковыми и совпадать с давлением, производимым перегородкой на воду (система находится в равновесии). Исходя из этого, найдём максимальную высоту слоя керосина. Пусть керосин полностью заполнил пространство до нижнего края перегородки (см. рис. 47b), тогда

$$\frac{m_{\text{п}}g}{S_{\text{п}}} = \rho_{\text{к}}gh_{\text{к}} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{д}}gh = \rho_{\text{к}}gh_{\text{к}} \quad \Rightarrow \quad h_{\text{к}} = \frac{\rho_{\text{д}}h}{\rho_{\text{к}}} = 30 \text{ см}.$$

Записывая аналогичное равенство для давлений перегородки и воды, получаем

$$\frac{m_{\text{п}}g}{S_{\text{п}}} = \rho_{\text{в}}gh'_{\text{в}} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{д}}gh = \rho_{\text{в}}gh'_{\text{в}} \quad \Rightarrow \quad h'_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{д}}h}{\rho_{\text{в}}} = h_{\text{в}},$$

то есть расстояние между поверхностью воды в левой части сосуда и нижним краем в процессе перемещений перегородки не изменяется.
Чтобы ответить на второй вопрос задачи, найдём объём воды в сосуде до и после доливания керосина и приравняем их, учитывая, что площади поперечного сечения частей сосуда слева и справа от перегородки равны $3S/8$ (S — общая площадь дна сосуда, x — искомая

высота, на которую поднялась перегородка, V_0 — объём воды, первоначально находящейся под перегородкой):

$$V_{\text{до}} = \frac{3}{4}Sh_{\text{в}} + V_0, \qquad V_{\text{после}} = Sx + \frac{3}{8}Sh_{\text{в}} + V_0,$$

$$\frac{3}{4}Sh_{\text{в}} = Sx + \frac{3}{8}Sh_{\text{в}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3h_{\text{в}}}{8} = 9 \text{ см}.$$

18. Ответ: 2,1 см.

Решение: Пусть груз поднялся относительно своего первоначального положения на высоту x. Тогда поршень в левом колене опустился на $20x$, и разность уровней масла в левом и правом колене составляет $21x$. Запишем условие равенства давления в обоих коленах (на уровне левого поршня)

$$\frac{F}{S/20} = \frac{mg}{S} + \rho_{\text{м}} g \cdot 21x.$$

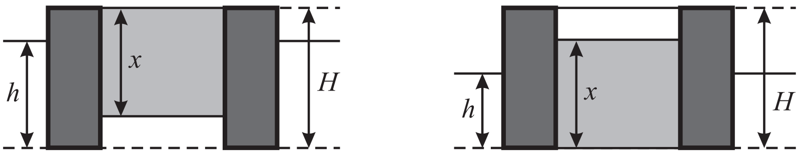
Отсюда

$$x = \frac{20F - mg}{21\rho_{\text{м}} g S} \approx 2{,}1 \text{ см}.$$

19. Ответ: 500 кг/м^3 или 875 кг/м^3.

Решение: Пусть s — площадь горизонтального сечения кольца. Кольцо плавает, значит силу тяжести кольца уравновешивает сила гидростатического давления $m_{\text{д}} g = ps$, где $m_{\text{д}} = \rho_{\text{д}} sH$ — масса кольца, $p = \rho_{\text{в}} gh$ — давление воды на уровне нижнего края кольца, h — глубина его погружения. Отсюда получаем, что $\rho_{\text{д}} H = \rho_{\text{в}} h$. При заполнении внутренней части кольца керосином гидростатическое давление на уровне нижнего края кольца остаётся постоянным. Возможно два случая: 1) $\rho_{\text{д}} > \rho_{\text{к}}$, 2) $\rho_{\text{д}} < \rho_{\text{к}}$.
В первом случае керосин, в конечном счёте, будет выливаться из кольца через верх. Пусть x - максимальная толщина керосина, влитого внутрь кольца. Тогда $m = \rho_{\text{к}} Sx$. Запишем равенство давлений по разные стороны от кольца (см. рис. 48а):

$$\rho_{\text{в}} gh = \rho_{\text{к}} gx + \rho_{\text{в}} g(H - x) \quad \Rightarrow \quad (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}})x = \rho_{\text{в}} H - \rho_{\text{в}} h \quad \Rightarrow$$



a) b)

Рис. 48.

$$\Rightarrow \quad (\rho_\text{в} - \rho_\text{к})x = (\rho_\text{в} - \rho_\text{д})H \quad \Rightarrow \quad \rho_\text{д} = \rho_\text{в} - (\rho_\text{в} - \rho_\text{к})\frac{x}{H}.$$

Выражая x через массу влитого керосина и площадь отверстия S, получаем

$$\rho_\text{д} = \rho_\text{в} - (\rho_\text{в} - \rho_\text{к})\frac{m}{\rho_\text{к} S H} = 875 \text{ кг/м}^3.$$

Во втором случае дерево не тонет в керосине. Поэтому керосин через некоторое время станет подтекать под кольцо. Условие равенства давлений в этом случае примет вид (см. рис. 48b):

$$\rho_\text{в} g h = \rho_\text{к} g x \quad \Rightarrow \quad \rho_\text{в} h = \rho_\text{к} x = \frac{m}{S}.$$

Отсюда находим, что $\rho_\text{д} = \rho_\text{в} h/H = m/(SH) = 500$ кг/м^3.

20. Ответ: $a_1 = \dfrac{F(M+4m)}{2m(M+2m)}$, $a_2 = \dfrac{FM}{2m(M+2m)}$, $a_3 = \dfrac{F}{M+2m}$.

Решение: Пусть T — сила натяжения нити, a_1, a_2 и a_3 — ускорения соответствующих тел. Запишем 2-й закон Ньютона для каждого тела системы, учитывая, что первое и третье тела движутся налево, а второе — направо

$$ma_1 = F - T, \qquad ma_2 = T, \qquad Ma_3 = 2T.$$

Так как в системе отсчёта, связанной с третьим телом, ускорения оставшихся равны по величине, получаем ещё одно условие:

$$a_1 - a_3 = a_2 + a_3 \quad \Rightarrow \quad a_1 - a_2 = 2a_3.$$

Выражая a_1, a_2, a_3 и подставляя в последнюю формулу, находим, что

$$T = \frac{FM}{2(M+2m)}.$$

Отсюда, решая оставшуюся систему, получаем

$$a_2 = \frac{FM}{2m(M+2m)}, \qquad a_3 = \frac{F}{M+2m}, \qquad a_1 = \frac{F(M+4m)}{2m(M+2m)}.$$

21. Ответ: $F > (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g$.

Решение: Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальное направление для каждого из брусков:

$$m_1 a_1 = F_{\text{тр}1}, \qquad m_2 a_2 = F - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2}.$$

Здесь $F_{\text{тр}1}$ — сила трения, возникающая между брусками, $F_{\text{тр}2}$ — сила трения, возникающая между горизонтальной поверхностью и нижним бруском, a_1 и a_2 — ускорения верхнего и нижнего бруска соответственно. Находим величины сил трения:

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 m_1 g, \qquad F_{\text{тр}2} = \mu_2 (m_1 + m_2) g.$$

Отсюда получаем, что

$$a_1 = \mu_1 g, \qquad a_2 = \frac{F - \mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g}{m_2}.$$

Так как, по условию, нижний груз нужно выдернуть из-под верхнего, $a_2 > a_1$. Подставляя в это неравенство выражения для ускорений, находим, что $F > (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g$.

22. Ответ: $F_{\text{мин}} = 0$, если $\mu < \operatorname{tg}\alpha$; $F_{\text{мин}} = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$, если $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$.

Решение: Если коэффициент трения $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, то даже в отсутствии силы $\vec{F}$ шайба будет скатываться с наклонной плоскости. Если $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$, тогда для того, чтобы шайба сдвинулась, необходимо, чтобы величина равнодействующей сил тяжести, реакции опоры и силы $\vec{F}$ была больше, чем максимальная величина силы трения

$$\left|\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}\right| > \left|\vec{F}_{\text{тр}}\right|.$$

Складывая указанные силы, находим, что

$$\left|\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}\right| = \sqrt{F^2 + (mg\sin\alpha)^2}.$$

В то же время, $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Отсюда получаем, что

$$F > F_{\text{мин}} = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

23. Ответ: $k = \dfrac{10mg}{3L}$.

Решение: Рассмотрим систему в положении, изображённом в тексте задачи на рис. 12a. Из условия равновесия получаем, что $mg = 2kx_1$. Для системы, изображённой на рис. 12b, условие равновесия будет иметь вид:

$$mg = 2k\Delta L\cos\alpha,$$

где $\Delta L = \sqrt{x_2^2 + L^2} - L$ — удлинение пружины, α — угол между пружиной и вертикалью. Так как $\cos\alpha = x_2/\sqrt{x_2^2 + L^2}$, мы получим, что

$$mg = 2kx_2\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x_2^2 + L^2}}\right) = 10kx_1\left(1 - \frac{L}{\sqrt{25x_1^2 + L^2}}\right).$$

Из полученных формул следует, что

$$2kx_1 = 10kx_1\left(1 - \frac{L}{\sqrt{25x_1^2 + L^2}}\right) \quad\Rightarrow\quad x_1 = \frac{3L}{20}.$$

Отсюда находим величину k:

$$mg = 2k\cdot\frac{3L}{20} \quad\Rightarrow\quad k = \frac{10mg}{3k}.$$

24. Ответ: $u = v_0/2$.

Решение: На монету массой m, двигающуюся по наклонной плоскости с углом наклона β, действуют три силы: сила тяжести $F_{\text{т}} = mg$, сила реакции опоры $N = mg\cos\beta$ и сила трения. Так как, по условию, $\mu = \operatorname{tg}\beta$, сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \operatorname{tg}\beta \cdot mg\cos\beta = mg\sin\beta.$$

С другой стороны, равнодействующая $\vec{F}_{\text{т}}$ и $\vec{N}$ направлена вдоль наклонной плоскости вниз и по модулю равна

$$F = \left|\vec{F}_{\text{т}} + \vec{N}\right| = mg\sin\beta.$$

Таким образом, движение монеты происходит под действием двух сил, равных по модулю F. Одна из них всегда направлена вдоль плоскости вниз, вторая — противоположна по направлению вектору скорости монеты (рис. 49).

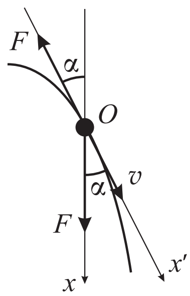


Рис. 49.

Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на две оси — ось Ox, направленную вдоль наклонной плоскости вниз, и ось Ox', направленную вдоль вектора скорости монеты (см. рис. 49):

$$\begin{cases} ma_x = F - F\cos\alpha, \\ ma_{x'} = F\cos\alpha - F. \end{cases}$$

Заметим, что $a_{x'}$ — тангенсальное ускорение монеты. Складывая почленно эти равенства, получаем, что

$$m(a_x + a_{x'}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x + v = \text{const},$$

где v_x — проекция скорости монеты на ось Ox, а v — модуль этой скорости.

Так как в начальный момент времени монета двигалась горизонтально, $v_x(0) = 0$ и $v(0) = v_0$. Отсюда следует, что $v_x + v = v_0$.

Установившееся равномерное движение возможно тогда, когда равнодействующая всех сил, действующих на тело равна нулю, то есть при движении вдоль оси Ox. В этом случае

$$v_x = v = u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{v_0}{2}.$$

25. Ответ: 117 кг.

Решение: Сила сопротивления воздуха $F_{сопр}$ зависит от скорости. Так как скорость подъёма и спуска воздушного шара совпадает, то величина $F_{сопр}$ в обоих случая будет одинаковой. Запишем второй закон Ньютона, учитывая, что ускорение оба раза равно нулю

$$0 = F_A - F_т + F_{сопр} - (M + m)g \qquad \text{(спуск)},$$

$$0 = F_A - F_т - F_{сопр} - Mg \qquad \text{(подъём)}.$$

Здесь $M = 250$ кг — общая масса оболочки шара, корзины с оставшимся балластом и людей, m — масса скинутого балласта, F_A и $F_т$ — сила Архимеда и сила тяжести, действующие на шар. Складывая эти равенства, получим

$$2F_A - 2F_т - (2M + m)g = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(\rho_{возд} - \rho_{вод})Vg = (2M + m)g.$$

Подставляя теперь сюда формулу для объёма шара $V = 4\pi R^3/3$, выразим массу балласта

$$m = 2(\rho_{возд} - \rho_{вод}) \cdot \frac{4\pi R^3}{3} - 2M \approx 117 \text{ кг}.$$

26. Ответ: 5,2 м/с^2.

Решение: Так как, по условию, сила сопротивления пропорциональна ускорению, будет считать, что $F_{сопр} = ka$, где k — неизвестный коэффициент. На шарик, всплывающий к поверхности (ускорение a_1 направлено вверх), действуют сила Архимеда, сила тяжести и сила сопротивления, направленная вниз. Запишем второй закон Ньютона:

$$ma_1 = F_A - F_т - ka_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_{пр}Va_1 = \rho_в Vg - \rho_{пр}Vg - ka_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{пр}a_1 = \rho_в g - \rho_{пр}g - \frac{ka_1}{V},$$

где V — объём шарика. Отсюда, подставив числовые данные, найдём значение величины k/V:

$$\frac{k}{V} = \frac{(\rho_в - \rho_{пр})g}{a_1} - \rho_{пр} = \frac{800 \text{ кг/м}^3 \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2}{11{,}2 \text{ м/с}^2} - 200 \text{ кг/м}^3 = 500 \text{ кг/м}^3.$$

Во втором случае сила сопротивления, действующая на опускающийся шарик (ускорение a_2 направлено вниз), направлена вверх:

$$-ma_2 = F_{\text{А}} - F_{\text{т}} + ka_2 \quad \Rightarrow \quad -\rho_{\text{ал}} V a_2 = \rho_{\text{в}} V g - \rho_{\text{ал}} V g + ka_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\rho_{\text{ал}} + \frac{k}{V}\right) a_2 = (\rho_{\text{ал}} - \rho_{\text{в}})g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{(\rho_{\text{ал}} - \rho_{\text{в}})g}{\rho_{\text{ал}} + k/V} = \frac{1700 \text{ кг/м}^3 \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2}{2700 \text{ кг/м}^3 + 500 \text{ кг/м}^3} \approx 5{,}2 \text{ м/с}^2.$$

27. Ответ: $\dfrac{3L}{5} \leqslant AC < L$.

Решение: Шарик совершит полный оборот вокруг гвоздя C, если в верхней точке его траектории величина центробежная сила, действующей на шарик, будет удовлетворять условию

$$F_{\text{ц.б.}} \geqslant mg \quad \Rightarrow \quad v^2 \geqslant gR,$$

где R — расстояние от шарика до точки C, v — скорость шарика в верхней точке. По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mg(AC - R).$$

Отсюда, учитывая, что $R = L - AC$, имеем

$$v^2 = 2g(2AC - L) \quad \Rightarrow \quad 2g(2AC - L) \geqslant g(L - AC) \quad \Rightarrow \quad AC \geqslant \frac{3L}{5}.$$

С другой стороны, гвоздь C должен находиться от точки A на расстоянии меньшем, чем L, иначе нить не сможет за него зацепиться. Таким образом, получаем, что $3L/5 \leqslant AC < L$.

28. Ответ: 60°.

Решение: Пусть яйцо отпущено при угле отклонения, равном α. По закону сохранения энергии его скорость в этот момент будет равна

$$\frac{mv^2}{2} = mgL\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gL\cos\alpha}.$$

Далее яйцо летит по параболе, горизонтальная и вертикальная проекции начальной скорости, соответственно, равны $v\cos\alpha$ и $-v\sin\alpha$. Для того, чтобы попасть на пол точно под перекладиной, оно должно сместиться по горизонтали на $L\sin\alpha$, а по вертикали на $3{,}5L-L\cos\alpha$ вниз.

Пусть t — время полёта яйца. Тогда

$$\begin{cases} L\sin\alpha = vt\cos\alpha, \\ -(3{,}5L - L\cos\alpha) = -vt\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Выразив из первого равенства t и подставив во второе, получим

$$\frac{7L}{2} - L\cos\alpha = \frac{L\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{gL^2}{2v^2\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7L}{2} - L\cos\alpha = \frac{L\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{L}{4\cos^3\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{2} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{4\cos^3\alpha}.$$

Решая данное уравнение, находим, что единственное решение имеет вид $\cos\alpha = 1/2$. Отсюда получаем, что $\alpha = 60^\circ$.

29. Ответ: $F = mg\cos\alpha(3\sin\alpha - 2)$, если $\sin\alpha \geqslant 2/3$; $F = 0$, если $\sin\alpha < 2/3$.

Решение: Найдём скорость верхнего шара гантели, когда её ось составляет угол α с горизонтом. По закону сохранения энергии (L — длина гантели)

$$mgL = \frac{mv^2}{2} + mgL\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gL(1-\sin\alpha)}.$$

Рассмотрим теперь силы, действующие в этот момент на верхний шарик. В проекции на ось, направленную вдоль гантели, получаем

$$ma_{\text{ц.с.}} = mg\sin\alpha - T,$$

где $a_{\text{ц.с.}} = v^2/L$ — центростремительное ускорение шарика, T — сила реакции стержня гантели. Подставляя сюда выражение для скорости шарика, находим, что

$$T = mg\,(3\sin\alpha - 2)\,.$$

На нижний шарик гантели действует сила реакции стержня, равная по величине силе $\vec{T}$, но направленная в противоположную сторону, и сила тяжести. Таким образом, если $T > 0$ ($\sin\alpha > 2/3$), сила, с которой гантель давит на вертикальную стенку, равна

$$F = T\cos\alpha = mg\cos\alpha\,(3\sin\alpha - 2)\,.$$

В случае, когда $\sin\alpha \leqslant 2/3$ и, соответственно, $T \leqslant 0$, получаем, что гантель на вертикальную стенку не давит.

30. Ответ: $h = \dfrac{E}{mg}$, если $E < mgR$; $h = \dfrac{E}{mg} - \dfrac{4R}{27}\left(\dfrac{E}{mgR} - 1\right)^3$, если $mgR < E < 2{,}5mgR$; $h = 2R$, если $E > 2{,}5mgR$. График изображён на рис. 50.

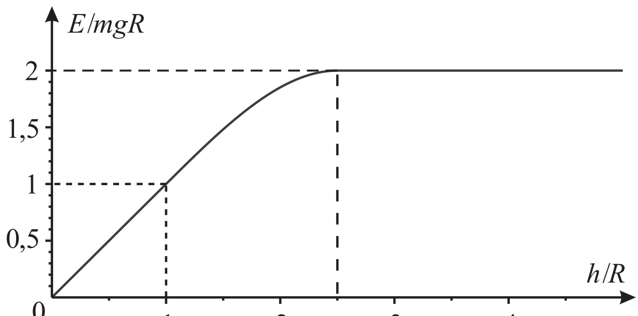


Рис. 50.

Решение: Необходимо рассмотреть три случая: 1) шайба движется только по поверхности, поднимается на высоту h и соскальзывает вниз; 2) шайба сначала движется по поверхности, потом отрывается от неё и дальше летит по параболе; 3) шайба делает «мёртвую петлю».

1) В первом случае максимальную высоту подъёма можно найти, используя закон сохранения энергии:

$$E = \frac{mv^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{E}{mg}.$$

2) Рассмотрим второй случай. Пусть отрыв шайбы от стенки происходит в точке A (рис. 51). Скорость шайбы v_A в этой точке можно найти из закона сохранения энергии:

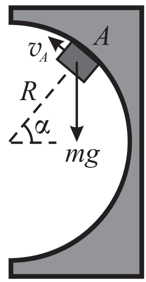


Рис. 51.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgR(1 + \sin\alpha).$$

Отрыв произойдёт, когда сила реакции опоры станет равной нулю, то есть когда

$$a_{\text{ц.с.}} = \frac{mv_A^2}{R} = mgR\sin\alpha.$$

Используя найденные соотношения, получаем

$$E = mgR\left(1 + \frac{3}{2}\sin\alpha\right) \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \frac{2}{3}\left(\frac{E}{mgR} - 1\right).$$

Очевидно также, что $\alpha \geqslant 0$. Следовательно, первый случай переходит во второй при $E > mgR$. Высота относительно точки A, на которую поднимется шайба, равна

$$\Delta h = \frac{v_A^2\cos^2\alpha}{2g} = \frac{R}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Отсюда

$$h = R(1 + \sin\alpha) + \Delta h = R\left(1 + \frac{3}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin^3\alpha\right) =$$

$$= \frac{E}{mg} - \frac{4R}{27}\left(\frac{E}{mgR} - 1\right)^3.$$

3) Шайба сделает «мёртвую петлю», если $\alpha = 90^\circ$, что соответствует минимальной кинетической энергии $E = 2{,}5mgR$. В этом случае $h = 2R$. На рис. 50 изображён график зависимости h/R от $E/(mgR)$.

31. Ответ: $v = \mu g\sqrt{\dfrac{8m}{k}}$.

Решение: Пусть x — расстояние, пройденное правым бруском до остановки. Кинетическая энергия, сообщённая ему, тратится на работу против силы трения и изменение потенциальной энергии деформированной пружины:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{против тр}} + \frac{kx^2}{2} = \mu mgx + \frac{kx^2}{2}.$$

Левый брусок сдвинется с места, если величина силы упругости, возникшей в этом случае, превысит величину действующей на него силы трения покоя. В предельном случае можно записать, что

$$kx = \mu \cdot 2mg \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\mu mg}{k}.$$

Подставляя найденное значение x, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mg \cdot \frac{2\mu mg}{k} + \frac{k}{2}\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)^2 = \frac{4\mu^2 m^2 g^2}{k}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{8\mu^2 mg^2}{k} \quad \Rightarrow \quad v = \mu g\sqrt{\frac{8m}{k}}.$$

32. Ответ: $(m_1 + m_2)g$.

Решение: Пусть в начальный момент под действием силы F пружина сжалась на величину x_1, а в момент отрыва нижнего груза она оказалась растянута на x_2. В первом случае

$$F + m_1 g = kx_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{F + m_1 g}{k}.$$

Во втором случае нижний груз перестанет давить на пол, если сила упругости сравняется с силой тяжести, действующей на него

$$kx_2 = m_2 g \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{m_2 g}{k}.$$

Чтобы получить связь между x_1 и x_2, запишем закон сохранения энергии

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} + m_1g(x_1 + x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 = \frac{2m_1g}{k}(x_1 + x_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 - x_2 = \frac{2m_1g}{k}.$$

Подставляя теперь выражения для x_1 и x_2, получаем

$$\frac{F + m_1g}{k} - \frac{m_2g}{k} = \frac{2m_1g}{k} \quad \Rightarrow \quad F = (m_1 + m_2)g.$$

33. Ответ: $\alpha = 90°$.

Решение: Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{u}, \qquad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mu^2}{2}.$$

Здесь $\vec{v}$ — начальная скорость первого шара, $\vec{v}_1$ — его скорость после удара, $\vec{u}$ — скорость, с которой отлетает второй шар. Выразим из первого равенства $\vec{v}$ и подставим во второе

$$v^2 = v_1^2 + u^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 + 2\vec{v}_1\vec{u} + u^2 = v_1^2 + u^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1\vec{u} = 0.$$

Так как при нецентральном ударе $v_1 \neq 0$ и $u \neq 0$, из полученного условия следует, что угол между $\vec{v}_1$ и $\vec{u}$ равен 90°.

34. Ответ: $d = 2\sqrt{2}R$.

Решение: Пусть v — начальная скорость налетающей шайбы, u — скорость отлетающих шайб, α — их угол разлёта (рис. 52). Из законов сохранения импульса и энергии получаем

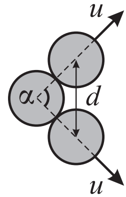


Рис. 52.

$$\begin{cases} mv = 2mu\cos\dfrac{\alpha}{2}, \\ \dfrac{mv^2}{2} = 2\dfrac{mu^2}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v = 2u\cos\dfrac{\alpha}{2}, \\ v = u\sqrt{2}. \end{cases}$$

Отсюда находим угол разлёта шайб:

$$u\sqrt{2} = 2u\cos\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ.$$

Сила упругости, возникающая при столкновении двух шайб, направлена по линии, соединяющей их центры. Поэтому шайба, изначально покоившаяся, приобретает скорость, направленную вдоль этой линии. Так как шайбы разлетаются под углом $\alpha = 90^\circ$, треугольник, вершины которого находятся в центрах сталкивающийся шайб, является прямоугольным. По теореме Пифагора расстояние между центрами первоначально неподвижных шайб равно

$$d = \sqrt{(2R)^2 + (2R)^2} = 2\sqrt{2}R.$$

35. Ответ: $\alpha = \arcsin(m/M)$.

Решение: Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$M\vec{v} = M\vec{v}_1 + m\vec{u}, \qquad \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mu^2}{2}.$$

Здесь $\vec{v}$ — начальная скорость тяжёлой частицы, $\vec{v}_1$ — её скорость после удара, $\vec{u}$ — скорость, с которой отлетает лёгкая частица. Выразим из первого равенства $\vec{u}$ ($\mu = m/M$)

$$\vec{u} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_1}{\mu}$$

и подставим во второе

$$v^2 = v_1^2 + \mu u^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 - v_1^2 = \frac{1}{\mu}\left(v^2 - 2\vec{v}\vec{v}_1 + v_1^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\vec{v}\vec{v}_1 = 2vv_1\cos\alpha = (1-\mu)v^2 + (1+\mu)v_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{(1-\mu)v^2 + (1+\mu)v_1^2}{2vv_1} = \frac{(1-\mu)}{2}\frac{v}{v_1} + \frac{(1+\mu)}{2}\frac{v_1}{v}.$$

Минимальное значение этого выражения равно

$$(\cos\alpha)_{\text{мин}} = \sqrt{1-\mu^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$(\sin\alpha)_{\text{макс}} = \mu \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{макс}} = \arcsin\mu = \arcsin\frac{m}{M}.$$

36. Ответ: $Mg + Mv^2/L$.

Решение: Пусть в некоторый момент времени длина вертикальной части змеи равна x, а её масса, соответственно, $m(x) = Mx/L$. Вертикальная составляющая импульса кобры равна

$$p_y = m(x)v = \frac{Mvx}{L}.$$

По 2-му закону Ньютона

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = F - Mg,$$

где F — сила, с которой змея давит на землю. Подставляя выражение для p_y, получаем

$$F = Mg + \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = Mg + \frac{Mv}{L}\frac{\Delta x}{\Delta t} = Mg + \frac{Mv^2}{L}.$$

37. Ответ: $F = 3Mg(1 - x/L)$.

Решение: Пусть в некоторый момент времени t длина неупавшей части цепочки равна x. Её масса, соответственно, равна $m(t) = Mx/L$, а скорость падения в этот момент составляет $v(t)$. Во время свободного падения звеньев цепочки их ускорение равно ускорению свободного падения g. Следовательно,

$$v(t) = gt, \qquad x = L - \frac{gt^2}{2}.$$

Вертикальная составляющая импульса цепочки равна

$$p_y = -m(t)v(t) = -\frac{Mv(t)x}{L} = -\frac{Mg}{L}\left(Lt - \frac{gt^3}{2}\right).$$

По 2-му закону Ньютона

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = F - Mg,$$

где F — сила, с которой цепочка давит на поверхность. Подставляя выражение для p_y, получаем

$$F = Mg + \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = Mg - \frac{Mg}{L}\left(Lt - \frac{gt^3}{2}\right)' =$$

$$= \frac{3Mg}{L} \cdot \frac{gt^2}{2} = \frac{3Mg(L-x)}{L}.$$

38. Ответ: $h/9$.

Решение: Запишем законы сохранения импульса и энергии для системы «горка-грузик»:

$$0 = mu - 2mv, \quad mgh = \frac{mu^2}{2} + \frac{2mv^2}{2}.$$

Здесь u — скорость грузика при движении по столу, v — скорость горки. Получим, что

$$v = \frac{u}{2}, \quad u^2 = \frac{4}{3}gh.$$

После удара груза о стенку его скорость меняет своё направление, и грузик начинает догонять горку.

Запишем ещё раз законы сохранения импульса и энергии для системы «горка-грузик», учитывая, что при подъёме грузика на максимальную высоту h', у него остаётся скорость u', направленная горизонтально и равная скорости горки:

$$mu + 2mv = (m+2m)u', \quad \frac{mu^2}{2} + \frac{2mv^2}{2} = mgh' + \frac{(m+2m)(u')^2}{2}.$$

Так как $v = u/2$, из первого условия получаем, что $u' = 2u/3$. Подставляем во второе условие, принимая во внимание, что его левая часть равна mgh:

$$mgh = mgh' + \frac{2}{3}mu^2 = mgh' + \frac{8}{9}mgh \quad \Rightarrow \quad h' = \frac{h}{9}.$$

39. Ответ: $v_1 = \dfrac{m_2}{m_1}\sqrt{2gRm_1/(m_1+m_2)}$, $v_2 = \sqrt{2gRm_1/(m_1+m_2)}$, $N = m_2g(3+2m_2/m_1)$.

Решение: Пусть v_1 и v_2 — скорости подставки и тела в том момент, когда последнее проходит нижнюю точку полусферической выемки. Из законов сохранения импульса и энергии получаем

$$0 = m_1v_1 - m_2v_2, \qquad m_2gR = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Решая эту систему, получаем

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{2gRm_1}{m_1+m_2}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2gRm_1}{m_1+m_2}}.$$

Чтобы найти силу N, с которой тело массы m_2 давит на подставку, перейдём в систему отсчёта, связаную с подставкой. В ней скорость движения тела равна

$$v_{\text{отн}} = v_1 + v_2 = \sqrt{2gR\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}.$$

Запишем теперь 2-й закон Ньютона в проекции на вертикальную ось $m_2a_{\text{ц.с.}} = N - m_2g$. Так как тело в рассматриваемой системе отсчёта движется по дуге окружности радиуса R, центростремительное ускорение равно $a_{\text{ц.с.}} = v_{\text{отн}}^2/R$. Отсюда получаем, что

$$N = m_2\left(a_{\text{ц.с.}} + g\right) = m_2\left(\frac{v_{\text{отн}}^2}{R} + g\right) = m_2g\left(3 + \frac{2m_2}{m_1}\right).$$

40. Ответ: $2r\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение: На цилиндр действуют сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}}$, приложенная в его геометрическом центре (точка A), сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$, препятствующая скольжению цилиндра вниз по плоскости (рис. 53). Так как цилиндр находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно точки O должна быть равна нулю.

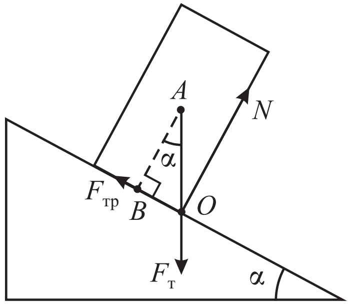


Рис. 53.

В предельном случае, когда угол α максимален, сила реакции и сила трения оказываются приложенными в точке O. Поэтому плечо силы тяжести должно быть нулевым, то есть сила тяжести должна быть направлена вдоль прямой AO (см. рис. 53). Так как $\angle OAB = \alpha$, $OB = r$, $AB = H/2$, находим, что в предельном случае

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{2r}{H},$$

откуда $H = 2r \operatorname{ctg}\alpha$.

41. Ответ: От $M/4$ до $5M/2$.

Решение: Пусть m — масса правого груза. Рассмотрим предельные случаи, в которых рычаг не давит на какую-либо из опор. Пусть в первом случае масса правого груза настолько мала, что рычаг не давит на правую опору. Запишем правило моментов относительно левой точки опоры:

$$MgL = mg\,2L + Mg\frac{L}{2}.$$

Отсюда получаем, что $m = M/4$. Во втором случае масса правого груза настолько велика, что рычаг не давит на левую опору. Опять запишем правило моментов, на этот раз, относительно правой точки опоры:

$$Mg\,2L + Mg\frac{L}{2} = mgL.$$

Отсюда получаем, что $m = 5M/2$. Так как речь выше шла о предельных случаях, находим, что рычаг будет находиться в равновесии, если $M/4 \leqslant m \leqslant 5M/2$.

42. Ответ: 4,6 г.

Решение: На шарик, погруженный в воду, действуют сила тяжести

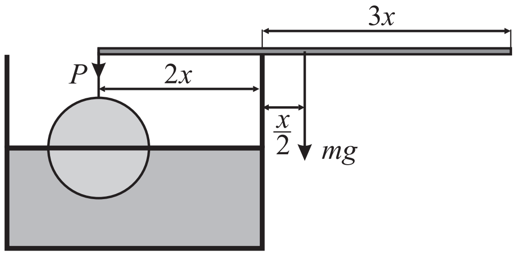


Рис. 54.

$F_\text{т} = \rho V g$ и сила Архимеда, равная $F_\text{А} = \rho_0 \dfrac{V}{2} g$, где $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ — объём шарика. Отсюда получаем, что вес шарика равен

$$P = F_\text{т} - F_\text{А} = \left(\rho - \frac{\rho_0}{2}\right) Vg.$$

Запишем теперь условие равенства моментов сил, действующих на палочку, учитывая, что точка опоры делит палочку в отношении 2:3 (см. рис. 54):

$$P \cdot 2x = mg \cdot \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(2\rho - \rho_0\right) Vgx = \frac{mgx}{2}.$$

Из полученного равенства выразим массу палочки

$$m = (4\rho - 2\rho_0)V = (4\rho - 2\rho_0) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4{,}6 \text{ г.}$$

43. Ответ: $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{R}{r \sin\alpha}$.

Решение: Система будет находится в равновесии, когда моменты сил натяжения нитей относительно оси блока будут равны. Пусть T_1 —

сила натяжения нити, на которой висит груз массой m_1, а T_2 — сила натяжения нити, к которой прикреплён груз массой m_2. Очевидно, что $T_1 = m_1 g$. С другой стороны, $T_2 = m_2 g \sin\alpha$. Записываем теперь условие равенства моментов:

$$m_1 g R = m_2 g \sin\alpha \cdot r \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{R}{r\sin\alpha}.$$

44. Ответ: На прямой, соединяющей центры диска и отверстия, на расстоянии $r^2 d/(R^2 - r^2)$ от центра диска.

Решение: В силу симметрии номерка, его центр масс находится на прямой, соединяющей центры диска и отверстия. Чтобы определить его положение, рассмотрим сплошной диск радиуса R, составленный из двух частей: диска радиуса r, находящегося на месте отверстия, и гардеробного номерка. Масса диска радиуса r равна $m_1 = \rho\pi r^2$, где ρ — поверхностная плотность материала (масса на единицу площади), масса номерка — $m_2 = \rho\pi(R^2 - r^2)$. Центр масс большого диска (радиуса R) поместим в начало координат, тогда координата центра масс малого диска (радиуса r) равна $x_1 = d$. Отсюда получаем, что

$$0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 = \rho\pi r^2 d + \rho\pi(R^2 - r^2) x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{r^2 d}{R^2 - r^2}.$$

45. Ответ: $\mu \geqslant 1/3$.

Решение: Пусть L — длина стержня, m — его масса, а T — сила натяжения нити (рис. 55). Запишем условие равенства нулю суммы сил, действующих на стержень, в проекции на горизонтальную и вертикальную оси

$$F_{\text{тр}} - \frac{T}{\sqrt{2}} = 0, \qquad N - mg + \frac{T}{\sqrt{2}} = 0,$$

а также правило моментов относительно точки O

$$TL = \frac{mgL}{2\sqrt{2}}.$$

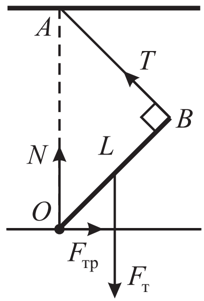


Рис. 55.

Из последнего равенства находим силу натяжения $T = mg/2\sqrt{2}$ и, подставляя её в первое и второе, получаем

$$F_{тр} = \frac{mg}{4}, \qquad N = \frac{3mg}{4}.$$

Сила трения и сила реакции со стороны пола связаны неравенством $F_{тр} \leqslant \mu N$. Отсюда

$$\frac{mg}{4} \leqslant \frac{3\mu mg}{4} \quad \Rightarrow \quad \mu \geqslant \frac{1}{3}.$$

46. Ответ: $F = mg/2$, $\alpha = 0^\circ$ при $\mu \geqslant 1/2$; $F = \dfrac{mg}{2\mu}\sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/\mu - 2)$ при $\mu < 1/2$.

Решение: Пусть L — длина ребра куба (рис. 56). Запишем условие равенства суммы сил, действующих на куб, нулю в проекции на горизонтальную и вертикальную оси

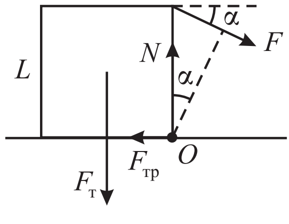


Рис. 56.

$$F\cos\alpha = F_{\text{тр}}, \qquad N = F\sin\alpha + mg,$$

а также правило моментов относительно точки O

$$FL\cos\alpha = \frac{mgL}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{mg}{2F}.$$

Сила трения и сила реакции со стороны пола связаны неравенством $F_{\text{тр}} \leqslant \mu N$. Отсюда, подставляя выражение для $\cos\alpha$, получаем

$$F\cos\alpha \leqslant \mu(F\sin\alpha + mg) \quad \Rightarrow \quad mg\left(\frac{1}{2} - \mu\right) \leqslant \mu\sqrt{F^2 - \left(\frac{mg}{2}\right)^2}.$$

С другой стороны,

$$\cos\alpha \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{2F} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad F \geqslant \frac{mg}{2}.$$

При $\mu \geqslant 1/2$ первое неравенство верно всегда, поэтому минимальная сила F, необходимая для начала опрокидывания куба равна $mg/2$ и направлена горизонтально ($\alpha = 0^\circ$).
Если $\mu < 1/2$, то из первого неравенства имеем

$$F \geqslant F_{\text{мин}} = mg\sqrt{\left(\frac{1}{2\mu} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{mg}{2\mu}\sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}.$$

Чтобы найти угол, под которым направлена сила F, подставим выражение для неё в формулу для $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{mg}{2F_{\text{мин}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mu} - 2\right)^2 + 1}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu} - 2.$$

47. Ответ: $\mu mg(\sqrt{2} - 1)$.

Решение: Пусть брусок вращается вокруг точки O (см. рис. 57), находящейся на расстоянии x от точки приложения силы F (точки A). Так как брусок является однородным, массы участков OA и OB, соответственно, равны mx/L и $m(1 - x/L)$. Запишем правило моментов

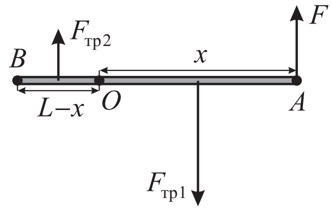


Рис. 57.

$$Fx = F_{тр1}\frac{x}{2} + F_{тр2}\frac{L-x}{2},$$

где $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ силы трения, действующие на участки OA и OB. Найдём выражения для них

$$F_{тр1} = \frac{\mu mgx}{L}, \qquad F_{тр2} = \frac{\mu mg(L-x)}{L}$$

и получим

$$Fx = \frac{\mu mgx^2}{2L} + \frac{\mu mg(L-x)^2}{2L} = \frac{\mu mg}{2L}\left(2x^2 - 2xL + L^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{\mu mg}{L}\left(x + \frac{L^2}{2x} - 2L\right).$$

Минимальное значение этого выражения, достигаемое при $x = L/\sqrt{2}$ равно

$$F_{мин} = \mu mg\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

48. Ответ: 2 м.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, относительно которой велосипед с Глюком покоится. Пусть L — расстояние между осями колёс, а h — высота, на которой находится центр тяжести системы (точка O). Рассмотрим условия равновесия системы, когда Глюк тормозит велосипед задним тормозом (рис. 58а). Для этого запишем уравнение для моментов сил относительно некоторой точки (например, точки A):

$$\frac{mgL}{2} = F_{тр}h + N_1 L, \qquad F_{тр} = \mu N_1.$$

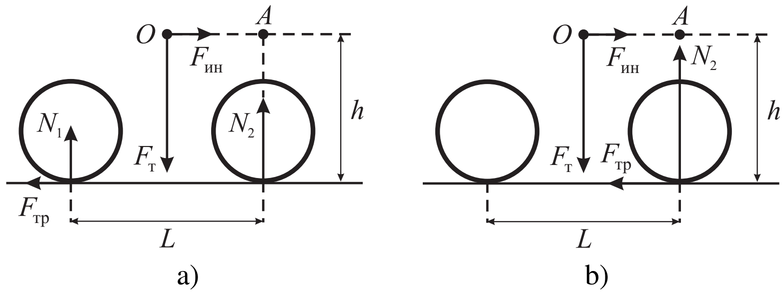


Рис. 58.

где m — масса велосипеда вместе с Глюком, N_1 — сила реакции опоры, действующая на заднее колесо, μ — коэффициент трения. Поступаем аналогично для случая торможения передним тормозом и учитывая при этом, что $N_1 = 0$ (см. рис. 58b):

$$\frac{mgL}{2} = \mu N_2 h, \qquad N_2 = mg.$$

Заметим, что поскольку сила реакции опоры, действующая на заднее колесо во втором случае равна нулю, не имеет значения, заблокировано ли это колесо или свободно вращается.

Из последнего равенства следует, что $L = 2\mu h$. Подставляя это выражение, получаем, что в первом случае $N_1 = mg/3$ и, следовательно, $F_{тр} = \mu mg/3$. Во втором случае сила трения, действующая на колёса велосипеда, равна μmg. Так как начальная скорость v во всех случаях одна и та же, можно записать, что

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\mu mg s_1}{3} = \mu mg s_2,$$

где s_1 и s_2 — пути, которые проезжает велосипед до полной остановки в первом и втором случаях. Отсюда получаем, что $s_2 = s_1/3 = 2$ м.

49. Ответ: $L_{мин} = L_0$, $L_{макс} = L_0 + F/k$.

Решение: Пусть левый брусок движется с ускорением a_1, правый — с ускорением a_2, m — масса каждого бруска, а L — расстояние между ними. Запишем 2-й закон Ньютона для каждого из брусков

$$ma_1 = F - k(L - L_0), \qquad ma_2 = k(L - L_0).$$

Вычитая эти равенства друг из друга, получаем, что

$$ma_{\text{отн}} = F - 2k(L - L_0) \quad \Rightarrow \quad a_{\text{отн}} + \frac{2kL}{m} = \frac{F + 2kL_0}{m},$$

где $a_{\text{отн}} = a_1 - a_2$ — относительное ускорение грузов.
Из найденного уравнения видно, что бруски совершают гармонические колебания относительно друг друга, причём в стационарном режиме (когда амплитуда колебаний нулевая) расстояние между брусками равно $L_{\text{равн}} = L_0 + F/2k$. Так как в начальный момент относительная скорость брусков равнялась нулю, расстояние $L_0 = L_{\text{равн}} - F/2k$, которое было между ними является минимальным. Поэтому максимально возможное расстояние равно

$$L_{\text{макс}} = L_{\text{равн}} + \frac{F}{2k} = L_0 + \frac{F}{k}.$$

50. Ответ: $M = m\left(\dfrac{g}{\omega^2 R} - 1\right)$.

Решение: Пусть M — масса колеса, v — мгновенное значение линейной скорости его вращения, x — величина отклонения от положения равновесия. Запишем выражение для полной энергии системы «колесо-грузик»

$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos(x/R)).$$

Воспользуемся тем, что при малых углах $\sin\alpha \approx \alpha$ и, следовательно, $1 - \cos\alpha \approx \alpha^2/2$, и перепишем это выражение в виде

$$E = \frac{(m+M)v^2}{2} + \frac{mgx^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{2E}{m+M} = v^2 + \frac{mgx^2}{(m+M)R}.$$

Сопоставляя полученную формулу с уравнением, связывающим скорость и отклонение тела, совершающего гармонические колебания $v^2 + \omega^2 x^2 = \text{const}$, получаем, что квадрат частоты малых колебаний системы «колесо-грузик» равен

$$\omega^2 = \frac{mg}{(m+M)R}.$$

Отсюда находим массу колеса

$$M = m\left(\frac{g}{\omega^2 R} - 1\right).$$

Очевидно, что данное выражение имеет смысл только при $\omega^2 < gR$.

51. Ответ: $2\pi\sqrt{H/g}$.

Решение: Пусть S_1 и S_2 — площади сечения частей сосуда, x_1 — величина малого отклонения уровня жидкости в левом сосуде от равновесного положения. Тогда в правом сосуде уровень отклонится от равновесного положения в противоположную сторону на $x_2 = S_1x_1/S_2$. Разность между уровнями слева и справа составит $x_1 + x_2 = x_1(1 + S_1/S_2)$, откуда следует, что разность давлений между частями сосуда равна

$$p = \rho g(x_1 + x_2) = \rho g x_1\left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right),$$

где ρ — плотность жидкости. Так как давление и, соответственно, сила $F_1 = pS_1$, которую необходимо приложить, чтобы удержать жидкость в рассматриваемом состоянии, пропорциональна отклонению x_1, потенциальная энергия системы равна

$$E_{\text{п}} = \frac{pS_1x_1}{2} = \frac{\rho g S_1 x_1^2}{2}\left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right).$$

Чтобы найти выражение для кинетической энергии жидкости в сосуде, обозначим v_1 и v_2 скорости движения в левой и правой частях сосуда. Эти скорости связаны соотношением $v_2 = v_1S_1/S_2$. Массы жидкости в обеих частях равны $m_1 = \rho S_1(H + x_1) \approx \rho S_1 H$ и $m_2 = \rho S_2(H - x_2) \approx \rho S_2 H$ (из условия следует, что $x_1, x_2 \ll H$). Отсюда получаем, что

$$E_{\text{к}} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{\rho S_1 H v_1^2}{2}\left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right).$$

Из закона сохранения энергии $E_к + E_п = \mathrm{const}$ получаем уравнение, связывающее отклонение x_1 и скорость v_1:

$$\frac{\rho S_1 H v_1^2}{2}\left(1+\frac{S_1}{S_2}\right)+\frac{\rho g S_1 x_1^2}{2}\left(1+\frac{S_1}{S_2}\right)=\mathrm{const} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_1^2+\frac{g x_1^2}{H}=\mathrm{const}.$$

Сопоставляя его с уравнением $v^2+\omega^2 x^2=\mathrm{const}$ для тела, совершающего гармонические колебания, находим

$$\omega^2=\frac{g}{H} \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

52. Ответ: $\omega=\sqrt{g/L+k/4m}$.

Решение: Пусть маятник отклонён от вертикали на малое расстояние x. Пружина при этом изменит свою длину на $x/2$. Запишем полную энергию системы

$$E=\frac{mv^2}{2}+\frac{mgx^2}{2L}+\frac{k}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{mv^2}{2}+\left(\frac{mg}{L}+\frac{k}{4}\right)\frac{x^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии получаем уравнение, связывающее отклонение x и скорость v груза:

$$v^2+\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{4m}\right)x^2=\mathrm{const}.$$

Сопоставляя его с уравнением $v^2+\omega^2 x^2=\mathrm{const}$ для тела, совершающего гармонические колебания, находим

$$\omega^2=\frac{g}{L}+\frac{k}{4m} \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{g}{L}+\frac{k}{4m}}.$$

53. Ответ: $\omega=\sqrt{k/2m}$.

Решение: Пусть ось колеса отклонена от положения равновесия на расстояние x. Пружина при этом изменит свою длину также на x. Учитывая, что кинетическая энергия колеса складывается из энергии движения центра масс $E_{\text{пост}} = mv^2/2$ и энергии вращательного движения $E_{\text{вращ}} = mv^2/2$, запишем энергию системы

$$E = E_{\text{пост}} + E_{\text{вращ}} + \frac{kx^2}{2} = mv^2 + \frac{kx^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии получаем уравнение, связывающее отклонение x и скорость v колеса:

$$v^2 + \frac{kx^2}{2m} = \text{const}.$$

Сопоставляя его с уравнением $v^2 + \omega^2 x^2 = \text{const}$ для тела, совершающего гармонические колебания, находим

$$\omega^2 = \frac{k}{2m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

54. Ответ: $t = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{L}{\mu g}}$, если $v \leqslant \sqrt{\mu g L}$; $t = \dfrac{\sqrt{v^2 - \mu g L}}{\mu g} + \sqrt{\dfrac{L}{\mu g}} \arcsin \dfrac{\sqrt{\mu g L}}{v}$, если $v > \sqrt{\mu g L}$.

Решение: Сначала найдём минимальную скорость v_0, при которой брусок полностью заедет на шероховатую поверхность. Пусть x — длина заехавшей на данный момент части бруска ($x \leqslant L$), u — его текущая скорость. Сила трения, действующая на неё, равна $F_{\text{тр}} = \mu m(x)g$, где $m(x) = mx/L$ — масса находящейся на шероховатой поверхности части бруска, m — масса всего бруска. Кинетическая энергия, которой обладал брусок, тратится на работу против силы трения $mv^2/2 - mu^2/2 = A_{\text{тр}}$. Так как сила трения зависит от пройденного бруском пути x по линейному закону,

$$A_{\text{тр}} = (F_{\text{тр}})_{\text{сред}} x = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\mu m g x}{L}\right) x = \frac{\mu m g x^2}{2L}.$$

Подставляя найденное выражение, получаем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = \frac{\mu m g x^2}{2L} \quad \Rightarrow \quad v^2 = u^2 + \frac{\mu g x^2}{L}.$$

Если брусок останавливается ($u = 0$), когда $x = L$, то $v_0 = \sqrt{\mu g L}$.
В результате, для решения задачи необходимо рассмотреть два случая: 1) $v \leqslant v_0$ (брусок останавливается, лишь частично заехав на шероховатую поверхность); 2) $v > v_0$ (брусок заезжает полностью и продолжает двигаться до остановки).
В первом случае скорость бруска u и пройденное им расстояние x, как уже было получено ранее, связаны соотношением

$$u^2 + \frac{\mu g x^2}{L} = v^2 = \text{const}.$$

Сопоставляя его с уравнением $u^2 + \omega^2 x^2 = \text{const}$ для тела, совершающего гармонические колебания, находим, что движение бруска до остановки описывается теми же законами, что и колебания с частотой $\omega = \sqrt{\mu g/L}$. Учитывая, что в начальный момент времени $x = 0$, получаем следующие уравнения

$$x(t) = x_0 \sin \omega t, \qquad u(t) = v \cos \omega t,$$

где $x_0 = v/\omega$ — максимальное расстояние, на которое заедет брусок. Время до остановки равно времени, за которое x достигает своего максимального значения x_0, то есть

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

Рассмотрим теперь второй случай. Скорость, которую будет иметь брусок, когда полностью заедет на шероховатую поверхность, равна

$$u = \sqrt{v^2 - \mu g L} = \sqrt{v^2 - v_0^2}.$$

Время заезда определяем из уравнения движения бруска для предыдущего случая:

$$x(t_1) = L \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega L}{v} = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{v_0}{v}.$$

После того, как брусок заехал полностью, на него действует постоянная сила трения, равная $F_{\text{тр}} = \mu m g$. Поэтому движение бруска является равнозамедленным с ускорением, равным по модулю $a = \mu g$. Время до полной остановки равно

$$t_2 = \frac{u}{a} = \frac{\sqrt{v^2 - v_0^2}}{\mu g}.$$

Складывая полученные значения t_1 и t_2, находим время движения бруска во втором случае

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{v_0}{v} + \frac{\sqrt{v^2 - v_0^2}}{\mu g} =$$

$$= \sqrt{\frac{L}{\mu g}} \arcsin \frac{\sqrt{\mu g L}}{v} + \frac{\sqrt{v^2 - \mu g L}}{\mu g}.$$

Заяц Алексей Евгеньевич
Синцова Юлия Валерьевна

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Подписано в печать 15.02.2016.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Гарнитура XITS. Усл. печ. л. 4,19.
Уч.-изд. л. 4,5. Тираж 100 экз. Заказ 3.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ГАУ «Республиканский олимпиадный центр»
Министерства образования и науки Республики Татарстан
420036, г. Казань, ул. Социалистическая, 5
Тел. (843) 590-32-42