Направление подготовки :

080100.62: «Экономика» (бакалавриат, I курс, 1 семестр; очное обучение)

Дисциплина: «**Математический анализ**»

Учебный план: «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», очное, 2013 г.

Количество часов: 252 ч., в том числе: лекции - 62 ч, практические занятия - 64 ч, самостоятельная работа - 126 ч; форма контроля - экзамен (1-й семестр)

Темы: 1. Множества и операции над множествами. 2. Прямая линия на плоскости. 3. Кривые второго порядка. 4. Элементы аналитической геометрии в пространстве. 5. Функции одной переменной. 6. Предел последовательности. 7. Предел функции. 8. Непрерывность функции. 9. Производная функции. 10. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. 11. Применение дифференциального исчисления для исследования функций. 12. Применение дифференциального исчисления в экономических исследованиях. 13. Функции многих переменных. 14. Экстремумы функций многих переменных. 15. Экономические задачи на условный экстремум функции двух переменных. 16. Неопределенный интеграл. 17. Методы интегрирования. 18. Определенный интеграл. 19. Приближенное вычисление определенного интеграла. 20. Несобственные интегралы. 21. Кратные интегралы. 22. Числовые ряды. 23. Функциональные ряды. 24. Применение рядов. 25. Дифференциальные уравнения. 26. Дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка. 27. Комплексные числа. 28. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Ключевые слова: *функция, предел последовательности, предел функции, производная, дифференциал, интеграл, ряды, дифференциальные уравнения.*

Дата начала использования: **1 сентября 2013 г.**

Авторы - составители:

Опокина Надежда Анатольевна, доцент кафедры математики и экономической информатики, к.ф.-м.н., e-mail**: opnadin@mail.ru**

Воронцова Валерия Леонидовна, доцент кафедры математики и экономической информатики., к.ф.-м.н., e-mail: **milen99@narod.ru**

Романова Елена Михайловна, доцент кафедры математики и экономической информатики, к.ф.-м.н., e-mail: **romanova1elena@rambler.ru**

Министерство образования и науки РФ

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт экономики и финансов

Кафедра математики и экономической информатики

В. Л. Воронцова

(лекции № 2,3,4,5,9,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31)

Н. А. Опокина

(лекции № 6,7,10,11,12,13,14,15,16)

Е. М. Романова

(лекции № 1,8,22)

Математический анализ

Конспект лекций

Казань-2014

Воронцова В.Л., Опокина Н.А., Романова Е.М.

Математический анализ. Конспект лекций / В.Л. Воронцова, Н.А. Опокина, Е.М. Романова. :Каз.федер.ун-т. – Казань, 2014. – 202 с.

Аннотация

В начале обучения в I семестре студенты экономических вузов изучают курс математического анализа, который служит фундаментальной базой экономического образования.

В предлагаемых лекциях изучаются вопросы следующих разделов: элементы аналитической геометрии, математический анализ, дифференциальное исчисление.

В разделе математического анализа как наиболее крупного и достаточно сложного раздела высшей математики рассмотрены понятия предела последовательности и предела функции, понятие производной и дифференциала, интегральное исчисление. Подготовленный материал можно изучать самостоятельно, выполняя предлагаемые задания и проводя самоконтроль усвоения материала.

Для этого курса имеется электронная версия – http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Принято на заседании кафедры математики и экономической информатики

Протокол № 1 от 29.08.2013

Содержание

Лекция 1

Множества и операции над множествами. Элементы комбинаторики.

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия теории множеств и раздела комбинаторики.

Ключевые слова. Множества, точка, окрестность точки, действия над множествами, число перестановок, число размещений, число сочетаний.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается индивидуальные задания по вариантам;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие множества, виды множеств.
2. Операции над множествами.
3. Типы комбинаций объектов.
4. Основные формулы комбинаторики.

Множество может содержать конечное или бесконечное число объектов.

Объекты, составляющие множество, называются его *элементами* или *точками*.

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита ($A, B,\ldots,X, Y,\ldots$), а их элементы – малыми буквами ($a, b,\ldots,x, y,\ldots$).

Элемент x из множества X соответствует записи $x\epsilon X$(x принадлежит X), если же элемент x не входит в множество X, то x не принадлежит X.

Пусть X и Y – два множества. Тогда между ними можно определить следующие соотношения. Если оба множества состоят из одних и тех же элементов, то они совпадают, что соответствует записи $X=Y$. Если все элементы множества X содержатся в множестве Y, то X является подмножеством Y.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается$X=\varnothing$.

Множества, элементами (точками) которых являются числа, называются *числовыми.*

Интервалом называется числовое множество, заключенное между двумя какими-нибудь точками.

Симметричный относительно заданной точки a интервал длины 2ε называется ε-*окрестностью* точки a.

Точки, принадлежащие ε-окрестности точки a, удовлетворяют неравенству $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ или $|x-a|<\varepsilon$, а сам интервал можно записать в виде$x\epsilon\ (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

Суммой или *объединением* множеств X и Y называется совокупность элементов, входящих хотя бы в одно из этих множеств. Обозначение суммы множеств: $X+Y$.

Произведением или *пересечением* множеств X и Y называется совокупность элементов, входящих как в множество X, так и в множество Y. Обозначение произведения: $X\cdot Y$.

Разностью множеств X и Y называется множество, содержащее все элементы Z множества X, не содержащиеся в множестве Y. Обозначение: $X\backslash Y$.

Замечание 1. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Замечание 2. Добавление пустого множества к любому множеству не меняет этого множества, то есть $X+\varnothing=X$.

Например, даны два числовых множества A={1,3,6,8}, B= {2,4,6,8}. Найти их объединение, пересечение и разность. Очевидно, что объединение двух множеств есть A+B={1,2,3,4,6,8}, их пересечение AB={6,8}, а разность A\B={1,3}, но B\A={2,4}.

Во многих задачах теории вероятностей используется раздел математики, в котором изучаются различные комбинации (соединения) элементов конечных множеств. Данный раздел математики называется *комбинаторикой*.

Различают три вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания.*

Комбинации, в каждом из которых входят «n» элементов множестваAи которые отличаются друг от друга порядком элементов, называются *перестановками* из «n» элементов.

Число перестановок из «n» элементов без повторений вычисляется по формуле:

$P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$ (читается «н»-факториал).

Число перестановок из «n» элементов с«k»повторениями вычисляется по формуле:

$$P_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!},\ \text{где } n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Комбинации, каждое из которых содержит «m» различных элементов ($m<n$), взятых из «n» элементов множестваA, отличающихся друг от друга или самими элементами, или их порядком, называются *размещениями* из «n» элементов по «m» в каждом.

Число размещениями из *«n»* элементов по *«m»*вычисляется по формуле: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Комбинации, каждое из которых содержит «m» различных элементов ($m<n$), взятых из «n» элементов множестваA, отличающихся друг от друга, по крайней мере, одним элементом, называются *сочетаниями* из «n» элементов по «m» в каждом.

Число сочетаний из *«n»* элементов по *«m»*вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Связь формул комбинаторики можно показать в виде равенства: $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$.

Правила решения комбинаторных задач:

1) *Правило (принцип) суммы*.

Если некоторый элемент «a» можно выбрать «m» способами, а другой элемент «b» можно выбрать «k» способами, то выбор «a» или «b» можно осуществить «$m+k$» способами.

2) *Правило (принцип) произведения*.

Если некоторый элемент «a» можно выбрать «m» способами и если после каждого такого выбора элемент «b» можно выбрать «k» способами, то выбор пары «a» и «b» в указанном порядке можно осуществить «mk» способами.

Задания для практики:

Выполнить задание: [1], с.83, №4; [2], №№ 72.

Вопросы для самоконтроля:

1. Как дается определение множества? Как определяются его элементы?
2. Какие множества существуют?
3. Как определяется ε-окрестность точки?
4. Какие операции над множествами определены? Объясните, как выполняются эти операции?
5. Что изучает раздел комбинаторики?
6. Какие комбинации называются перестановками? Как вычисляется число перестановок?
7. Что такое сочетание и размещение *«n»* элементов по *«m»*?
8. Как формулируются правила суммы и произведения в комбинаторике?

Глоссарий

Множество можно определить как совокупность объектов, объединённых по определённому признаку.

Комбинаторика – это раздел математики, который изучает различные соединения объектов (элементов).

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
3. Презентация

Лекция 2

Предел последовательности

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия предела последовательности.

Ключевые слова. Последовательность, предел последовательности.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие необходимого и достаточного условий в математике.
2. Понятие числовой последовательности. Ограниченные и монотонные последовательности.
3. Предел последовательности, его геометрический смысл.
4. Свойство пределов последовательности: теорема о единственности предела, необходимый признак сходимости, достаточный признак сходимости. Арифметические действия над пределами (без док)
5. Число е, натуральные логарифмы.

1. Понятия необходимого и достаточного условий в математике.

Необходимым условием выполнения некоторого утверждения называется такое условие, без осуществления которого данное утверждение заведомо неверно.

Достаточным условием выполнения некоторого утверждения называется такое условие, при осуществлении которого данное утверждение заведомо верно.

Например, первое утверждение – чтобы ездить на машине по городу, <u>необходимо</u> наличие прав; и второе - чтобы ездить по городу на машине, <u>достаточно</u> наличие прав; из них верно лишь первое. Второе утверждение неверно, так как кроме прав, нужны навыки вождения машины по городу. Таким образом, наличие прав является необходимым, но не достаточным условием для вождения машины по городу.

Например, делимость числа на 2 —необходимое условие его делимости на 6 (делимость на 6 => делимость на 2), а, скажем, делимость числа на 12 — достаточное условие его делимости на 6 (делимость на 12 => делимость на 6).

Приведем другую формулировку понятий необходимого и достаточного условий.

Пусть *A* и *B* - некоторые условия или свойства. Утверждение - из *A* следует *B (A=>B)*- означает, что *A* является достаточным условием *B,* а *B* является необходимым условием *A*. Причем, из условия *A=>B* еще не следует, что и *B => A*. Если из *A* следует *B,* но из *B* не следует *A*, то говорят, что *B* является **необходимым**, но **не достаточным** условием *A*. При этом *A* является **достаточным** условием, но **не необходимым** условием *B*.

Так, делимость числа ***n*** **на 2** есть необходимое, но не достаточное условие его делимости на **6**. Это условие не является достаточным потому, что при его наличии число ***n*** не обязательно будет делиться на **6**.

Наоборот, делимость числа ***n*** **на 6** будет достаточным, но не необходимым условием его делимости на 2, потому что при его наличии число *n* всегда будет делиться на 2. Это условие не является необходимым, потому что, если число не делится на 6, оно не обязательно не делится на 2.

Если из утверждения А=>В следует, что и В=>А, то В является **необходимым** и вместе с тем **достаточным** условием А. В этом случае А также является необходимым и достаточным условием В. Утверждение, что из А следует В и, наоборот, из В следует А, можно записать так: А $\Leftrightarrow$ В.

Например, для делимости числа на 6 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и 3, ибо делимость на 2 и 3 равносильна делимости на 6.

Оба условия - необходимое и достаточное - являются теоремами, причем, если одно из них назвать прямой теоремой, то другое условие является обратной теоремой.

Поэтому, чтобы утверждать, что В является необходимым и достаточным условием выполнения А, нужно доказать две теоремы (прямую и обратную):

1) из А следует В (необходимость условия В);
2) из В следует А (достаточность условия В).

2. Понятие последовательности. Классы последовательностей.

1. Определение числовой последовательности.

Определение. *Последовательностью* называется числовая функция $a_n = f(n)$, заданная на множестве N натуральных чисел.

Так, например, если $a_n = \frac{n+1}{n}$, то членами последовательности будут $a_1=2$, $a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=\frac{4}{3}$, $a_n = \frac{n+1}{n}$, …; (1)

если $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, то $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{2}{3}, a_3 = -\dfrac{3}{4}, \ldots, \ a_n = \dfrac{n}{n+1}, \ldots;$ (2)

если $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, a_1 = -1, a_2 = \dfrac{1}{2}, a_3 = -\dfrac{1}{3}, a_4 = \dfrac{1}{4}, a_5 = -\dfrac{1}{5}, \ldots, a_n = \dfrac{(-1)^n}{n},$ (3)

Ограниченные последовательности. Последовательность a_n называется **ограниченной,** если для любого $n \in N$ существуют числа m и M (соответственно нижняя и верхняя границы последовательности) такие, что выполняется неравенство $m < a_n < M$.

Так, последовательности (1) и (2) являются ограниченными, так как для любого $n \in N$ члены первой последовательности удовлетворяют неравенству $1 < a_n < 2$, члены второй - неравенству — $\dfrac{1}{2} \le a_n \le 1$.

Монотонные последовательности. Последовательность $a_n = f(n)$ называется ***возрастающей*** (неубывающей), если $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \le a_{n+1}$) для любого $n \in N$ и ***убывающей*** (невозрастающей), если $a_n > a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$) для любого $n \in N$. Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными*** последовательностями.

Например, последовательность (1) является ***убывающей***, последовательность (2) - ***возрастающей***, а последовательность (3)- ***немонотонной*** (колеблющейся) последовательностью.

3. Предел последовательности. Геометрический смысл предела последовательности

Если с увеличением номера n значения $a_n = f(n)$ неограниченно приближаются к некоторому числу a, то это число a будет являться пределом последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, что принято обозначать: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$

Определение. Число ***а*** называется ***пределом последовательности*** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, если для любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такой номер N, что член последовательности с этим номером и все последующие члены отличаются от числа a меньше, чем на ε, то есть для всех $n > N$ значения a_n удовлетворяют неравенству

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (4)$$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***.

Геометрический смысл предела последовательности.

Если последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ имеет предел a, то для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, или $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Это означает, что все члены последовательности, начиная с номера N, оказываются в ε окрестности точки a (какую бы малую окрестность этой точки ни взять) (рис.1). Вне этой окрестности лежит лишь конечное число членов последовательности. На рис.1 приводится графическое изображение не-монотонной числовой последовательности, имеющей предел a.

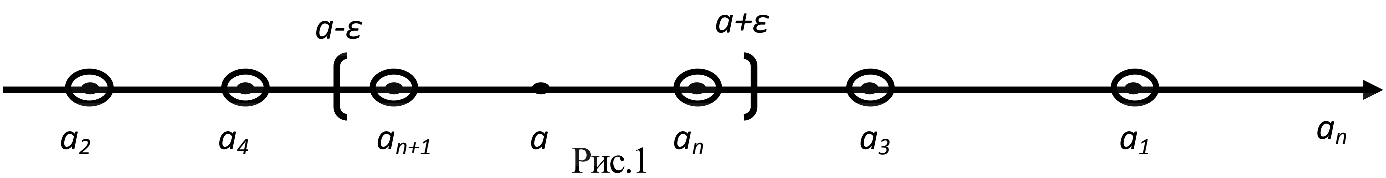


Рис.1

Свойства пределов последовательности

Рассмотрим некоторые свойства пределов последовательностей.

1) Если последовательность (a_n) имеет конечный предел, то он ***единственный***, т.е. последовательность имеет только один конечный предел.

2) Если последовательность (a_n) имеет предел, то она ***ограничена***, то есть при всех $n \in N$ выполняется неравенство $m \le a_n \le M$,

$n = 1,2,3,\ldots$

Данное свойство является только ***необходимым*** условием существования предела последовательности (необходимым признаком сходимости).

3) Если последовательность ***монотонна и ограничена***, то она имеет предел. Это свойство является ***достаточным*** условием существования предела последовательности (достаточным признаком сходимости).

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и для любых $n \in N$ члены последовательностей равны: $a_n = b_n$, то

$a = b.$

5) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и для любых $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \le b_n, \text{то } a \le b$.

6) Если члены последовательностей a_n, b_n, c_n при любых $n \in N$ удовлетворяют неравенствам

$a_n \le b_n \le c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, то и последовательность (b_n) имеет тот же предел a: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a.$

Арифметические операции над пределами

Теорема 1. Если последовательности a_n и b_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

то **сумма их также имеет конечный предел**: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Теорема 2. Если последовательности a_n и b_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$ то **произведение их также имеет конечный предел**: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = ab.$

Теорема 3. Если последовательности a_n и b_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$ причем $b \neq 0$, то **отношение их также имеет конечный предел**: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b.}$

Теорема 4. Если при любых $n \in N$ $a_n = c, mo \lim\limits_{n\to\infty} c = c$, то есть **предел постоянной равен постоянной**.

Теорема 5. Постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Теорема 6. Если последовательность (a_n) имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ то **предел степени равен степени предела**: $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k = a^k.$

Теорема 7. Если последовательности a_n и b_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = a^b.$

Число е, натуральные логарифмы.

Число **е** – иррациональное число, которое играет важную роль в математическом анализе. Приведем его значение с десятью верными знаками после запятой: е=2,7182818284… .

Натуральным логарифмом называется ***log$_e$(x)*** и обозначается *ln(x)*.

Формула перехода от произвольного логарифма к натуральному: $\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется последовательностью?
2. Какая последовательность называется ограниченной, монотонной?
3. Какое из следующих утверждений является верным:

а) Если последовательность сходится, то она ограничена;

б) Если последовательность ограничена, то она сходится?

4. Сформулировать геометрический смысл предела последовательности.

5. Может ли последовательность иметь два предела?

6. В чем состоит достаточный признак сходимости последовательности?

7. Какие виды неопределенностей встречаются при вычислении пределов последовательностей?

Задания для практики

[2], с.145, №№1-3; [3], №№ 2.1-2.5, 2.6-2.8, [4], №№702-725, №№726-731.

Глоссарий

Числовая последовательность. *Последовательностью* называется числовая функция $a_n = f(n)$, заданная на множестве N натуральных чисел.

Ограниченные последовательности. Последовательность a_n называется **ограниченной**, если для любого $n \in N$ существуют числа m и M (соответственно нижняя и верхняя границы последовательности) такие, что выполняется неравенство $m < a_n < M$.

Монотонные последовательности. Последовательность $a_n = f(n)$ называется ***возрастающей*** (неубывающей), если $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$) для любого $n \in N$ и ***убывающей*** (невозрастающей), если $a_n > a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) для любого $n \in N$. Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными*** последовательностями.

Предел последовательности. . Число ***a*** называется ***пределом последовательности*** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, если для любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такой номер N, что член последовательности с этим номером и все последующие члены отличаются от числа a меньше, чем на ε, то есть для всех $n > N$ значения a_n удовлетворяют неравенству $|a_n - a| < \varepsilon$.

Сходящаяся последовательность. Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***.

Число е. Число **е –** иррациональное число**,** которое играет важную роль в математическом анализе. Приведем его значение с десятью верными знаками после запятой: е=2,7182818284… .

Натуральные логарифмы. Натуральным логарифмом называется $\boldsymbol{log_e(x)}$ и обозначается $ln(x)$.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 3

Предел функции (занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия предела функции.

Ключевые слова. Функция одной переменной, предел функции в точке, односторонний предел, бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Функция одной переменной.
2. Предел функции в точке. Односторонние пределы и предел на бесконечности.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними.
4. Теоремы о функциях, имеющих предел в точке: о необходимом и достаточном условиях существования предела; об ограниченности, о сохранении знака, о предельном переходе в неравенствах, о пределе промежуточной функции.

1. Функция одной переменной.

Определение. Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана ***функция y=f(x)*** одной независимой переменной x (f- закон соответствия).

2. Понятие предела функции в точке. Односторонние пределы.

Все свойства и теоремы о пределе последовательности верны и для функции непрерывного аргумента.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ непрерывного аргумента x. Пусть аргумент x неограниченно приближается к числу x_0.

О п р е д е л е н и е . Число a называется пределом функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции *f(x)* как угодно мало отличаются от числа *a*. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ *или* $f(x)\underset{x\to x_0}{\to} a.$

Односторонние пределы. Пусть *x* стремится к x_0, оставаясь все время слева от x_0, то есть будучи меньше x_0. Если при этом условии значения функции *f(x)* стремятся к пределу, то он называется ***левосторонним*** или просто ***левым пределом*** функции *f(x)* в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}} f(x)=f(x_0-0).$

Пусть *x* стремится к x_0, оставаясь все время справа от x_0, то есть будучи больше x_0. Если при этом условии значения функции *f(x)* стремятся к пределу, то он называется ***правосторонним*** или просто ***правым пределом функции*** *f(x)* в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x)=f(x_0+0)$

Если ***левый и правый пределы*** существуют и ***равны*** между собой, то функция имеет тот же ***предел*** при произвольном стремлении *x* к x_0. Обратное тоже справедливо: если функция имеет предел при произвольном стремлении *x* к x_0, то ***существуют ее левый и правый пределы*** и они ***равны*** между собой.

Определение. Число *a* или *b* называется ***пределом функции*** y=f(x) при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, если для всех достаточно больших положительных значений или достаточно малых отрицательных значений x соответствующие значения функции y=f(x) как угодно мало отличаются от числа *a* или *b*. И записывают так: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ *или* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

Если при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ функция стремится к одному и тому же числу *a*, то для всех значений *x*, достаточно больших по абсолютной величине, соответствующие значения *f(x)* как угодно мало отличаются от числа *a*.

И записывают так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$

3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение. Функция, стремящаяся к нулю при $x\to x_0$ называется ***бесконечно малой функцией*** или бесконечно малой величиной при $x\to x_0$ и обозначается α (x): $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0$.

Приведем примеры бесконечно малых величин:

$\alpha(x)$ = cos(x) при $x\to\frac{\pi}{2}$; $\alpha(x)=\frac{3}{2x-7}$ при $x\to\infty$; это бесконечно малые величины, ибо их пределы равны нулю.

<u>Отметим, что нельзя путать постоянное очень малое число с бесконечно малой величиной.</u>

Введем понятие **бесконечно большой величины**. Пусть при $x \to x_0$ функция *y =f(x)* неограниченно возрастает по абсолютной величине. Тогда говорят, что функция *f(x)* при $x \to x_0$ является бесконечно большой величиной и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Рассмотрим несколько примеров бесконечно больших величин.

1) Функция *y=tg(x)* при $x \to \frac{\pi}{2}$ является бесконечно большой величиной, так как $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tg(x) = \infty$

2) Функция $y = \sqrt{5x-7}$ при $x \to \infty$ является бесконечно большой величиной, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{5x-7} = +\infty$.

Нельзя путать постоянное очень большое число с бесконечно большой величиной.

Теорема. Если при $x \to x_0$ функция α(x) – ***бесконечно малая величина***, то $\frac{1}{\alpha(\mathrm{x})}$ ***бесконечно большая величина***; если при $x \to x_0$ функция *f*(*x*) - ***бесконечно большая величина***, то $\frac{1}{f(x)}$ - ***бесконечно малая величина***.

Сравнение бесконечно малых величин. Пусть α(x) и β(x) бесконечно малые величины при $x \to x_0$.

Определение. Сравнить две бесконечно малые величины α (x) и β (x) - это значит найти ***предел их отношения***. При отыскании предела отношения бесконечно малых величин могут возникнуть следующие случаи.

а) Если $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \frac{\alpha(\mathrm{x})}{\beta(\mathrm{x})} = 0$, то α(x) при $x \to x_0$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем β(x) (можно сказать, что α(x) стремится к нулю «быстрее», чем β(x)).

б) Если $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \frac{\alpha(\mathrm{x})}{\beta(\mathrm{x})} = \infty.$, то $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина более низкого порядка, чем β(x), или β(x) - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$.

в) Если $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \frac{\alpha(\mathrm{x})}{\beta(\mathrm{x})} = \mathrm{A} \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми величинами одного порядка.

г) Бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

При $x\to 0$ $\sin ax \sim ax$, $tg\, ax \sim ax$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^{ax}-1 \sim ax$

4. Теоремы о функциях имеющих предел в точке

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ при $x\to x_0$ имеет предел *a*, то в некоторой окрестности этой точки ее можно представить как сумму предела *a* и бесконечно малой величины.

Это теорема является **необходимым условием** существования предела функции.

Теорема 2. Если в окрестности точки x_0 некоторую функцию $f(x)$ можно представить как сумму постоянного числа α и бесконечно малой величины, то постоянное число *a* есть предел этой функции при $x\to x_0$.

Эта теорема является **достаточным условием** существования предела функции.

Следствие. (О сохранении знака)

Если функция имеет предел в точке x_0, то значения функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеют тот же знак, что и $f(x_0)$, то есть они положительны если $f(x_0)>0$ и отрицательны, если $f(x_0)<0$.

Теорема 3. Если функция имеет предел, то она ***ограничена***.

Теорема 4. Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при достаточно больших значениях *x*) функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ *и* $\phi(x)$, имеющими одинаковый предел *A* при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$), то функция $f(x)$ имеет ***тот же предел*** *A*.

Теорема 5. Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при достаточно больших *x*) $f(x)<\varphi(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\varphi(x)$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие виды неопределенностей встречаются при вычислении пределов?
2. Какие пределы называются односторонними пределами функции в точке?
3. Какие функции называются бесконечно малыми, бесконечно большими функциями в точке, как они связаны между собой?

Задания для практики

[2], с. 146, №№4-7; [3], №№ 2.9, 2.11, 2.13, 2.15(1-14), 2.10, 2.12, 2.14, 2.15(15-27), [4], №№734-813, №№836-847

Глоссарий

Функция одной переменной. Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана ***функция y=f(x)*** одной независимой переменной x (f- закон соответствия).

Предел функции в точке. Число a называется пределом функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа a.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ или } f(x) \underset{x \to x_0}{\to} a.$$

Односторонние пределы. Пусть x стремится к x_0, оставаясь все время слева от x_0, то есть будучи меньше x_0. Если при этом условии значения функции $f(x)$ стремятся к пределу, то он называется ***левосторонним*** или просто ***левым пределом*** функции $f(x)$ в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = f(x_0 - 0)$.

Пусть x стремится к x_0, оставаясь все время справа от x_0, то есть будучи больше x_0. Если при этом условии значения функции $f(x)$ стремятся к пределу, то он называется ***правосторонним*** или просто ***правым пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = f(x_0 + 0)$

Предел функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Число a или b называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, если для всех достаточно больших положительных значений или достаточно малых отрицательных значений x соответствующие значения функции $y=f(x)$ как угодно мало отличаются от числа a или b. И записывают так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ *или* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Бесконечно малая величина. Функция, стремящаяся к нулю при $x \to x_0$ называется ***бесконечно малой функцией*** или **бесконечно малой величиной** при $x \to x_0$ и обозначается α (x): $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно большая величина. Пусть при $x \to x_0$ функция $y = f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Тогда говорят, что функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно большой величиной и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 4

Предел функции (занятие 2)

Вопросы для изучения:

Первый и второй замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов

Предел функции $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha\to 0$.

часто называют ***первым замечательным пределом:*** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

С помощью полученного предела находятся многие другие пределы.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}=1$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}$. Пусть arc Sin x = *a*, тогда x=Sin *a и предел запишется:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sin\boldsymbol{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4\cdot x}\cdot\frac{6}{6}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}==\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

Второй замечательный предел.

Определение. Предел последовательности $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ называется числом **e:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$ (1)

Полагая в формуле (1) $\frac{1}{x}=\alpha$ или все равно, что $\alpha=\frac{1}{x}$ и учитывая, что $\alpha\to 0$, получаем еще одну форму записи предела $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ (2)

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}\cdot 3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15}=e^{15}$

2) $\lim\limits_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}} = \lim\limits_{y\to 0}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-3y\cdot\frac{2}{y}} = \lim\limits_{y\to 0}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-6} = e^{-6}$

Неопределенные выражения. Все теоремы о пределах были сформулированы в предположении, что существуют конечные пределы последовательностей a_n и b_n. Однако, на практике часто встречаются случаи, когда в выражениях

$$a_n - b_n,\ a_n \cdot b_n,\ \frac{a_n}{b_n},\ a_n^{\,b_n}. \qquad (3)$$

пределы последовательностей a_n и b_n (один или оба) бесконечны или равны нулю.

1) Рассмотрим выражение a_n - b_n и из всех вариантов поведения последовательностей a_n , b_n предположим особенно интересный: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty.$

В этом случае ничего определенного о поведении выражения a_n - b_n сказать нельзя. Пусть, например, $a_n = 3n,\ b_n = n$,которые при $n\to\infty$ стремятся к ∞. Выражение $a_n - b_n = 2n$ при $n\to\infty$ также стремится к ∞.

Если же $a_n = n,\ b_n = 3n$, которые при $n\to\infty$ также стремятся к ∞, то выражение $a_n - b_n = -2n$ уже стремится к ($-\infty$). А если $a_n = n+a,\ b_n = n$, то выражение $a_n - b_n = a$ при $n\to\infty$ стремится к a. Наконец, если $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = n$, стремящиеся при $n\to\infty$ к ∞, то выражение $a_n - b_n = (-1)^n$, вовсе не имеет предела. Тогда говорят, что выражение a_n - b_n представляет неопределенность вида ($\infty - \infty$). Читается: «бесконечность минус бесконечность».

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty.$

Выражение $a_n * b_n$.представляет неопределенность вида ($0*\infty$).

3) Теперь рассмотрим $\frac{a_n}{b_n}$ и предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$

Тогда выражение $\frac{a_n}{b_n}$ представляет неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

4) В случае, когда одновременно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty.$

Выражение $\frac{a_n}{b_n}$ будет представлять неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

5) Наконец, рассмотрим степень $a_n^{\,b_n}$. Здесь представляется интересным случай, когда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Тогда говорят, что выражение $a_n^{b_n}$. представляет неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$.

В всех этих случаях приходится, учитывая поведение a_n и b_n непосредственно исследовать интересующее нас выражение. Такое исследование получило название раскрытия неопределенностей

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0\cdot\infty), (\infty-\infty), \left(1^{\infty}\right),$$

которые могут иметь место при нахождении пределов выражений типа (3).

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой вид неопределенности раскрывается с помощью
   а) первого замечательного предела; б) второго замечательного предела?
2. Вывести первый замечательный предел.
3. Сформулировать второй замечательный предел.

Задания для практики

[3], 2.11(1-10), 2.13(1-10), 2.14(1-10)

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 5

Непрерывность функции

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия непрерывности функции.

Ключевые слова. Непрерывность функции в точке, непрерывность функции в интервале.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Приращение аргумента и приращение функции, экономический смысл приращения. Теорема о необходимом и достаточном условиях непрерывности функции в точке, непрерывность сложной функции.
2. Непрерывность функции в точке, в интервале, на отрезке.
3. Точки разрыва и их классификация. Асимптоты кривых.
4. Гипербола (дробно-линейная функция). Свойства гиперболы.
5. Неполное исследование функции и построение эскиза графика.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Глобальные свойства непрерывных функций.

С понятием функции тесно связано другое важное понятие математического анализа – непрерывность функции.

1. Понятие приращения функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки, так что в ней функция принимает определенное значение $f(x_0) = y_0$.

Если аргументу x дадим приращение Δx, то $x = x_0 + \Delta x$. Тогда функция $y = f(x)$ тоже получит некоторое приращение Δy. Новое приращенное значение функции будет $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (рис. 1).

Приращение функции Δy в точке x_0 определится формулой: $\Delta y = (y_0 + \Delta y) - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

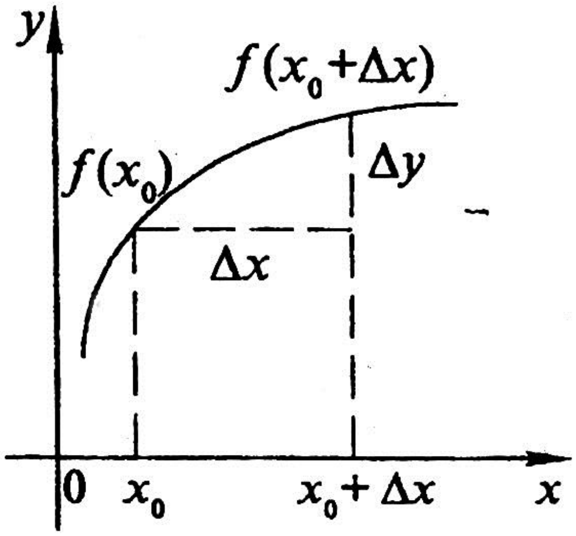


Рис.1

Пример. Функция, определяющая зависимость между издержками (затратами) производства определенного товара и объемом производства, называется **функцией полных издержек (затрат)**, **обозначается K(x)** .

Δx -приращение объема производства.

$\Delta K = K(x_0 + \Delta x) - K(x_0) -$ приращение функции полных издержек (затрат).

То есть увеличение объема производства на Δx приводит к увеличению издержек или затрат на ΔK .

2. Непрерывность функции в точке и в интервале.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если эта функция определена в какой-нибудь окрестности точки x_0 (вместе с самой точкой x_0) и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Теорема о необходимом и достаточном условиях непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

Определение (2) непрерывности функции в точке: функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в какой-нибудь окрестности этой точки и предел функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции при $x = x_0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность сложной функции

Если функция g(x):$Y \to R$ непрерывна в точке $b \in Y$, а функция f:$E \to Y$ непрерывна в точке $a \in E$, и $f(a) = b$, тогда композиция $g \circ f$ также непрерывна в точке a.

О сохранении знака.

Заметим, что если функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна и $f(x_0) \neq 0$, то значения функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 **имеют тот же знак**, что и $f(x_0)$.

Определение. Функция является **непрерывной в интервале**, если она непрерывна в каждой его точке.

Теорема. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Действия над непрерывными функциями. Если над непрерывными функциями произвести конечное число арифметических действий или операций взятия функции, то в результате получится, также непрерывная функция.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** [a,b], если она непрерывна в интервале (a;b) и непрерывна на концах отрезка соответственно слева и справа: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

3. Асимптоты кривой.

Определение. Асимптота кривой - это такая прямая, к которой данная кривая неограниченно приближается при удалении ее точек в бесконечность.

Различают *вертикальную* и *наклонную* асимптоты.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b,$ то кривая $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$.

В частности, если k=0 и $b\neq 0$, то кривая имеет **горизонтальную асимптоту** $y=b$.

Горизонтальную асимптоту можно найти и так: если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, то прямая $y=b$ является **горизонтальной асимптотой**.

Точки разрыва функции.

Определение **непрерывности функции** $f(x)$ в **точке** x_0 предполагает выполнение следующих четырех условий:

1) $f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности точки x_0;

2) должны существовать конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

3) односторонние пределы должны быть одинаковыми:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

4) односторонние пределы должны быть равны $f(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Определение. Если в какой либо точке x_0 функция не является непрерывной, то точка x_0 называется **точкой разрыва функции**, а сама функция – разрывной в этой точке.

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности x_0, в самой же точке x_0 функция может быть как определена, так и не определена.

Существуют **устранимые** и **неустранимые** точки разрыва. Неустранимые точки разрыва, в свою очередь, делятся на точки разрыва первого и второго рода.

Определение. Точка x_0 называется **устранимой** точкой разрыва функции $y=f(x)$, если в ней функция не определена, но существует функция $F(x)$, совпадающая с $f(x)$ при всех $x\neq x_0$ и непрерывная в точке x_0:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq x_0 \\ b = F(x_0), \text{ если } x = x_0 \end{cases}$$

или же в этой точке функция определена, но существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода** (или типа конечного скачка) функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет конечный левый и правый пределы, не равные между собой; причем величина $|f(x_o - 0) - f(x_o + 0)|$ называется скачком функции в точке x_0.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** (или типа бесконечного скачка), если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке не существует или равен бесконечности.

Если функция $f(x)$ имеет точку разрыва x_0, в которой хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, то соответствующая кривая имеет вертикальную асимптоту, уравнение которой $x=x_0$.

4. Гипербола y=1/x.

Зависимость y = 1/x называется обратной пропорциональной зависимостью. Легко проверяются следующие свойства этой функции:

а) область существования: $-\infty < x < 0, 0 < x < +\infty$;

б) область изменения: $-\infty < y < 0, 0 < y < +\infty$;

в) функция не является ограниченной на всей области существования, но ограничена снизу (y>0) на промежутке $0 < x < +\infty$ и ограничена сверху (y<0) на промежутке $-\infty < x < 0$;

г) функция не принимает экстремальных значений;

д) функция не является периодической;

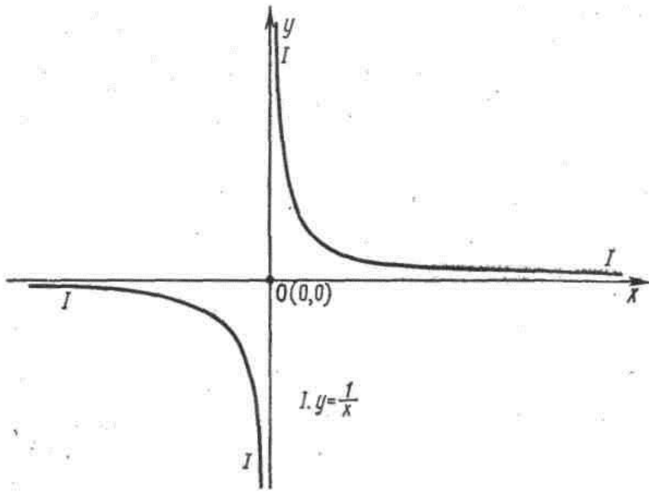


рис. 5

е) функция нечетная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но убывает на промежутке $-\infty < x < 0$, кроме того, она убывает и на промежутке $0 < x < +\infty$;

з) точек пересечения с осями нет.

Графиком функции y=1/x является линия, называемая **гиперболой** (рис. 5).

Функция вида $y = \dfrac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$ называется **дробно-линейной** функцией. График – равносторонняя гипербола с асимптотами, параллельными осям координат: центр $C\left(-\frac{b_2}{a_2}; \frac{a_1}{a_2}\right)$(точка пересечения асимптот). Параметр, соответствующий «k» в уравнении обратной пропорциональности (*y*=*k/x*): $k = -\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_2)^2}$.Разрыв функции происходит при $x = -\dfrac{b_2}{a_2}$.

Если $a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$, то функция убывает от $\frac{a_1}{a_2}$ до $-\infty$ и от $+\infty$ до $\frac{a_1}{a_2}$ (рис.6 *а*)

$y = \dfrac{2x+1}{x-1}$; C(1;1/2); a_1b_2-a_2b_1=-2-1=-3<0; функция убывает от $\dfrac{1}{2}$ до $-\infty$ и от $+\infty$ до $\dfrac{1}{2}$;

если $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$, функция возрастает от $\dfrac{a_1}{a_2}$до $+\infty$и от $-\infty$ до $\frac{a_1}{a_2}$(рис.6 *б*)

$y = \dfrac{x+1}{x+2}$; C(-2;1); a_1b_2-a_2b_1=2-1=1>0; функция возрастает от 1 до $+\infty$ и от $-\infty$ до 1(рис.6 б). Экстремумов нет.

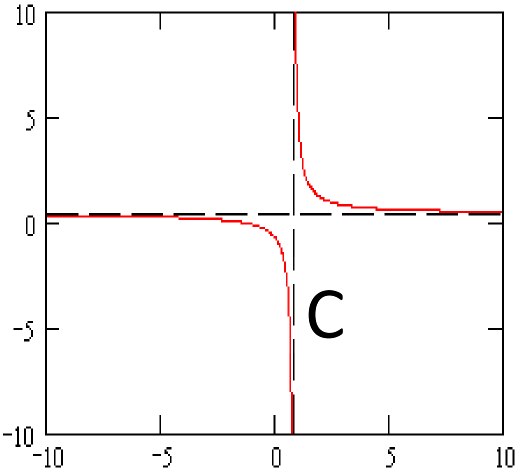


Рис.6*а*)

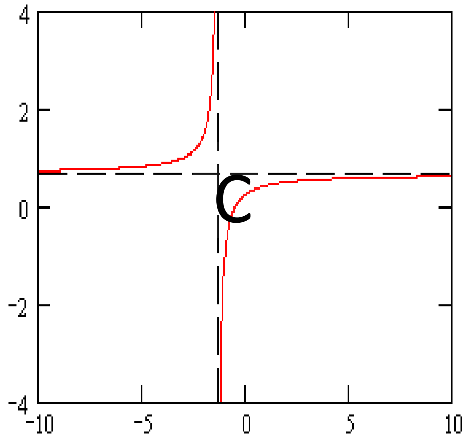


Рис.6 *б*)

5. Схема **неполного исследования функции** и построение эскиза графика:

1) область определения;
2) точки разрыва и интервалы непрерывности;
3) поведение функции в окрестностях точек разрыва; вертикальные асимптоты;
4) точки пресечения графика с осями координат;
5) наклонные асимптоты;
6) график.

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение непрерывности функции в точке.
2. Привести правило предельного перехода для непрерывной функции.
3. Какая точка называется точкой разрыва функции?
4. Дать определение устранимой точки разрыва функции, точки разрыва 1-го и 2-го рода. Привести примеры функций, имеющих эти точки разрыва.
5. При каких условиях существует

а) наклонная асимптота кривой;

б) вертикальная асимптота кривой?

6. Привести схему неполного исследования функции и построения эскиза графика.

Задания для практики

[2], с. 149, №№8-11; [3], №№.2.18(1-6), 2.19(1-8), 2.21(2, 5, 8, 10, 12, 16, 17, 18, 20-22), 2.22(2, 3), 2.23(4, 6, 8, 13, 15, 17), 2.26(7,8, 14, 16, 20, 21).

Глоссарий

Приращение функции Δy в точке x_0 определится формулой: $\Delta y = (y_0 + \Delta y) - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Непрерывность функции в точке. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в какой-нибудь окрестности этой точки и предел функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции при $x = x_0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность функции в интервале. Функция является **непрерывной в интервале**, если она непрерывна в каждой его точке.

Асимптота кривой - это такая прямая, к которой данная кривая неограниченно приближается при удалении ее точек в бесконечность.

Точки разрыва функции. Если в какой либо точке x_0 функция не является непрерывной, то точка x_0 называется **точкой разрыва функции**, а сама функция – разрывной в этой точке.

Устранимая точка разрыва. Точка x_0 называется **устранимой точкой разрыва** функции $y = f(x)$, если в ней функция не определена, но существует функция $F(x)$, совпадающая с $f(x)$ при всех $x \neq x_0$ и непрерывная в точке x_0:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq x_0 \\ b = F(x_0), \text{ если } x = x_0 \end{cases}$$

или же в этой точке функция определена, но существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

Точка разрыва первого рода. Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода** (или типа конечного скачка) функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет конечный левый и правый пределы, не равные между собой; причем величина $|f(x_o - 0) - f(x_o + 0)|$ называется **скачком функции в точке** x_0.

Точка разрыва второго рода. Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** (или типа бесконечного скачка), если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке не существует или равен бесконечности.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция №6

Производная функции

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия предела функции.

Ключевые слова. Производная функции, уравнение касательной, уравнение нормали.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Производная функции, ее механический, экономический, геометрический смысл.
2. Основные правила и формулы дифференцирования.
3. Уравнение касательной и нормали.
4. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Случаи недифференцируемости непрерывных функций: угловая точка графика, точка возврата и точка перегиба с вертикальной касательной.

1 . Производная функции. Механический, экономический, геометрический смысл производной

Пусть функция $S = S(t)$ описывает закон неравномерного движения точки M по прямой, где t – время (рис.1)

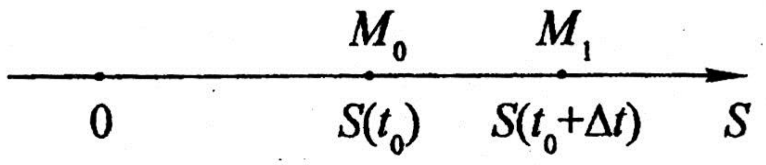


Рис. 1

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = V_{мгн}$$

Мгновенная скорость движения точки в момент времени t_0 есть производная S по времени t.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в точке x_0 и в некоторой ее окрестности.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении $\Delta x \to 0$, то этот предел называется **производной функции в точке** x_0 **и обозначается** $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Механический смысл производной: производная функции в точке x_0, есть скорость изменения функции в точке x_0.

Так как при различных значениях аргумента х скорость изменения функции различна, то производная функции является функцией от х: $y' = f'(x)$.

Введем понятие односторонних производных. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в правой полуокрестности точки x_0, например, в промежутке $[x_0; b)$.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\Delta x > 0$ при $\Delta x \to +0$, то этот предел называется **правосторонней производной функции в точке x_0** и обозначается:

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 + 0).$$

Пусть теперь функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(a; x_0]$. Аргументу x_0 дадим отрицательное приращение $\Delta x < 0$ так, чтобы $x_0 + \Delta x \in (a; x_0]$.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\Delta x < 0$ при $\Delta x \to -0$, то этот предел называется **левосторонней производной функции в точке x_0** и обозначается:

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 - 0).$$

Левосторонняя и правосторонняя производные функции в точке называются **односторонними** производными.

Если односторонние производные функции в точке x_0 конечны и равны между собой, то функция имеет в точке x_0, производную

$$y'(x_0) = f'(x_0)$$

Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется **дифференцируемой** в точке x_0, а операция нахождения производной называется **дифференцированием** функции.

Экономический смысл производной. Экономический смысл производной тесно связан с экономическим смыслом дифференцируемой функции. Если $Q(t)$ - количество продукции, произведенной за время t, то $\frac{Q(t)}{t}$ - средняя производительность труда, а производная функции $Q(t)$ при $t = t_0$: $Q'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ - предельная производительность труда в момент времени t_0.

Пусть $K(x)$ - полные издержки (затраты) производства, где x – объем производства. Тогда $K_{cp}(x) = \frac{K(x)}{x}$ - средние издержки (затраты) производства. Производная функции полных издержек $K^{'}(x)$ называется **функцией предельных издержек (затрат):** $K'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$.

Рассмотрим также **функцию полной выручки** *V(x)*, где x – объем реализованной продукции. Отметим, что полная выручка определяется как произведение цены реализации $p(x)$ на объем реализованной продукции, то есть $V(x) = x \cdot p(x)$. Производная полной выручки $V'(x)$ называется **предельной выручкой:** $V'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$. Таким образом, **экономический смысл производной** формулируется в зависимости от того, какая производственная функция рассматривается.

Геометрический смысл производной. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Производная функции в точке x_0 имеет вполне определенный геометрический смысл: **значение производной функции в точке** x_0 есть **тангенс угла наклона касательной**, поведенной к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

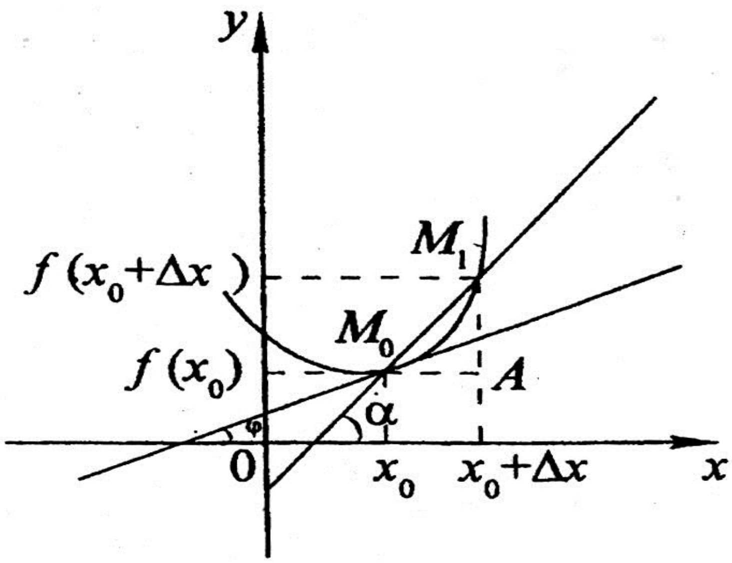


Рис.2

2.Правила и формулы дифференцирования

1.$(C)' = 0$

2.$(x)' = 1$

3.$(u \pm v)' = u' + v'$

4.$(Cu)' = Cu'$

5.$(uv)' = u'v + uv'$

6.$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$

7.$\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2} (v \neq 0)$

1.$c' = 0$,

2.$(x^n)' = nx^{n-1}$,

3.$\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

4.$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

5.$\left(a^x\right) = a^x \ln a$,

6.$\left(e^x\right) = e^x$,

7.$\left(\log_a x\right) = \dfrac{1}{x \ln a}$,

8.$\left(\ln x\right) = \dfrac{1}{x}$,

9.$\left(\sin x\right) = \cos x$,

10.$\left(\cos x\right) = -\sin x$,

11.$\left(tgx\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

12.$\left(ctgx\right) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

$(shx)' = chx$

$(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$;

$(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}.$

$(chx)' = shx$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Уравнение касательной и нормали.

Запишем уравнение касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;f(x_0))$. Как доказано выше, угловой коэффициент этой касательной равен $f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении $y-y_0=k_0(x-x_0)$, получим искомое уравнение касательной.

Уравнение касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке $M_0(x_o; f(x_0))$.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (2)$$

Определение. Нормалью к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_o; f(x_0))$ называется прямая, проходящая через точку $M_0(x_o; f(x_0))$ и перпендикулярная к касательной в той же точке. По условию перпендикулярности двух прямых угловой коэффициент нормали равен $-\frac{1}{f'(x_0)}$, $f'(x_0) \neq 0$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad (3).$$

Пример. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^2-5x+4$ в точке с абсциссой $x_0=-1$.

$y' = 2x - 5; y'(-1) = -2 - 5 = -7$

$y(-1)=10$

Уравнение касательной: $y=(-7)(x+1)+10$ *или*

$y=-7x+3$

Уравнение нормали: $y = \frac{1}{7}(x+1) + 10$

$y = \frac{x}{7} + \frac{1}{7} + 10 = \frac{x}{7} + \frac{71}{7}$

4. Непрерывность дифференцируемой функции

Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть в точке x_0 существует производная

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда по теореме о необходимом и достаточном условиях существования предела

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \ , \qquad (4)$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция в точке x_0, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Умножая обе части равенства (4) на Δx, получим выражение для приращения дифференцируемой функции в виде:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x .$$

Отсюда, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = 0$.

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Доказанная теорема не имеет обратной. Это означает, что непрерывность функции в точке является лишь необходимым условием дифференцируемости ее в этой точке, но не достаточным.

То есть функция может быть непрерывна в точке, но не иметь в ней производную.

Случаи недифференцируемости непрерывных функций.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную в точке x_0 и дифференцируемую в некоторой ее окрестности.

1.Угловая точка графика.

Определение. Если в точке x_0 левосторонняя $y'_{-}(x_0)$ и правосторонняя $y'_{+}(x_0)$ производные функции конечны, но не равны между собой, то точка $A(x_0; f(x_0))$ называется угловой точкой графика $y = f(x)$ (рис.5.3).

Пусть

$$y'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} f'(x) = k_1$$

$$y'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} f'(x) = k_2$$

Причем $k_1 \neq k_2$.

Производная $f'(x)$ в точке x_0 **не существует, так как нарушается условие единственности предела**. В этом случае график функции *y=f(x)* имеет в точке *A*(x_0;*f*(x_0)) две различные касательные

$y=k_1x+b$ и $y=k_2x+b$. (Угловая точка графика) (Рис.3)

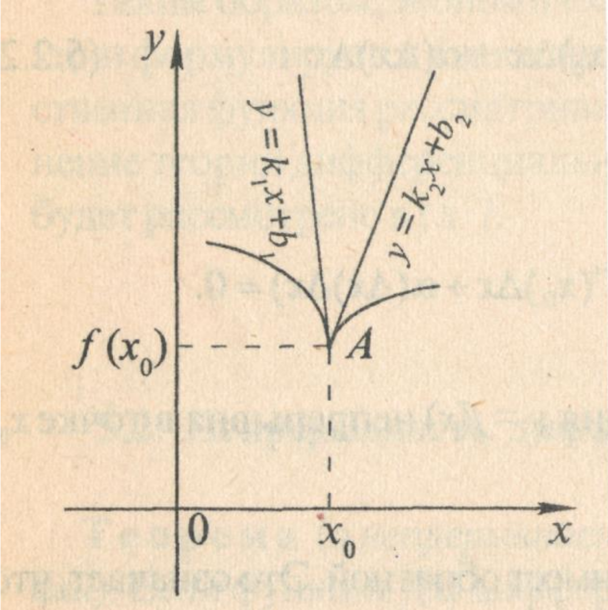


Рис.3

2. **Точка возврата с вертикальной касательной**.

Определение. Если в точке x_0 левосторонняя $y'_-(x_0)$ и правосторонняя $y'_+(x_0)$ производные бесконечны и имеют противоположные знаки, то точка $B(x_0;f(x_0))$ называется точкой возврата с вертикальной касательной.

Если

$$y'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}f'(x)=\pm\infty$$

$$y'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}f'(x)=\mp\infty,$$

то производная $f'(x)$ в точке x_0 не существует, две касательные сливаются в одну, перпендикулярную оси абсцисс. (Рис.4)

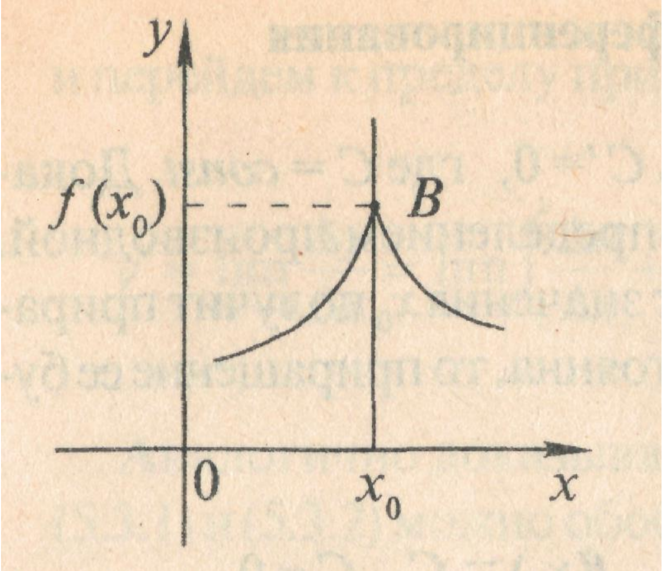


Рис.4

3. Точка перегиба с вертикальной касательной.

Определение. Точкой перегиба называется точка графика, в которой меняется направление выпуклости.

Определение. Если в точке x_0 левосторонняя $y'_-(x_0)$ и правосторонняя $y'_+(x_0)$ производные функции бесконечны и одного знака, то есть

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} f'(x) = \pm\infty$$

$y'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} f'(x) = \pm\infty$, то производная $f'(x)$ в точке x_0 не существует.

Однако, в этом случае говорят, что в точке x_0 функция имеет «бесконечную производную», а точка *C(x₀;f(x₀))* называется точкой перегиба с вертикальной касательной. (Рис.5)

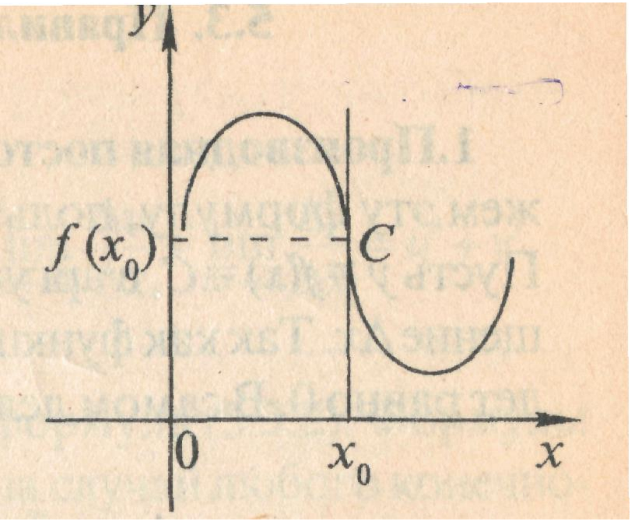


Рис.5

Примеры.

В области определения функции указать точки, в которых она недифференцируема, и определить вид этих точек.

1) $y=3|x|-x^2$

$$\begin{cases} x \ge 0 \quad y = 3x - x^2 \\ x < 0 \quad y = -3x - x^2 \end{cases}$$

$$y'_{-}(0) = \lim_{x \to 0-0} (3 - x) = (3 - (0 - 0)) = 3$$

$$y'_{+}(0) = \lim_{x \to 0+0} (-3 - x) = (-3 - (0 + 0)) = -3$$

Односторонние пределы конечны и не равны между собой, значит производная в точке x=0 не существует. Точка A(0;0) - угловая точка графика.

2) $y = \sqrt[3]{x^2}(x-2)$

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2}(x-2)\right) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(x-2) + x^{2/3} =$$

$$= \frac{2}{3}x^{2/3} - \frac{4}{3}x^{-1/3} + x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{4}{3x^{1/3}}$$

При x=0 производная не существует

$$y'_+(0)=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{4}{3x^{1/3}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{5}{3}(0+0)^{2/3}-\frac{4}{3(0+0)^{1/3}}\right)=0-\frac{4}{3\cdot(0)}=$$

$$=0-\infty=-\infty$$

$$y'_-(0)=\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{4}{3x^{1/3}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{5}{3}(0-0)^{2/3}-\frac{4}{3(0-0)^{1/3}}\right)=0-\frac{4}{3\cdot(-0)}=$$

$$=0+\infty=+\infty$$

Односторонние производные бесконечные и разных знаков, значит точка A(0;0)- точка возврата с вертикальной касательной.

3) $y=\sqrt[3]{x}(3-x)$

$$y'=\left(\sqrt[3]{x}(3-x)\right)=\frac{1}{3}x^{-2/3}(3-x)-x^{1/3}=$$

$$=x^{-2/3}-\frac{1}{3}x^{1/3}-x^{1/3}=x^{-2/3}-\frac{4}{3}x^{1/3}=$$

$$=\frac{1}{x^{2/3}}-\frac{4}{3}x^{1/3}$$

При x=0 производная не существует.

$$y'_-(0)=\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{1}{x^{2/3}}-\frac{4}{3}x^{1/3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{1}{(0-0)^{2/3}}-\frac{4}{3}(0-0)^{1/3}\right)=\frac{1}{+0}-0=+\infty$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x^{2/3}}-\frac{4}{3}x^{1/3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{(0+0)^{2/3}}-\frac{4}{3}(0+0)^{1/3}\right)=\frac{1}{+0}-0=+\infty$$

Односторонние производные бесконечные и одинаковых знаков, значит точка A(0;0)- точка перегиба с вертикальной касательной.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется производной функции, как обозначаются производные?
2. Сформулируйте физический, геометрический и экономический смысл производной функции.
3. Какая функция называется дифференцируемой в точке, в промежутке?
4. Какие точки называются: угловой точкой, точкой возврата с вертикальной касательной, точкой перегиба с вертикальной касательной?
5. Формулы производных постоянной, суммы, произведения, частного.

Задания для практики

[1], с. 252, №№1-134; [2], №№ 3.24(3, 4, 5, 8), 3.25, 3.27, 3.30(3), 3.34(6, 7, 9), 3.35(7,9,10); [3], №№ 848-873, №№ 907-936.

Глоссарий

Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении $\Delta x \to 0$, то этот предел называется **производной функции в точке** x_0 **и обозначается** $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\Delta x > 0$ при $\Delta x \to +0$, то этот предел называется **правосторонней производной функции в точке** $\mathbf{x_0}$ и обозначается:

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 + 0).$$

Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\Delta x < 0$ при $\Delta x \to -0$, то этот предел называется **левосторонней производной функции в точке** $\mathbf{x_0}$ и обозначается:

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 - 0).$$

Левосторонняя и правосторонняя производные функции в точке называются **односторонними** производными.

Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется **дифференцируемой** в точке x_0, а операция нахождения производной называется **дифференцированием** функции.

Если в точке x_0 левосторонняя $y'_-(x_0)$ и правосторонняя $y'_+(x_0)$ производные функции конечны, но не равны между собой, то точка $A(x_0; f(x_0))$ называется **угловой точкой** графика $y = f(x)$

Если в точке x_0 левосторонняя $y'_-(x_0)$ и правосторонняя $y'_+(x_0)$ производные бесконечны и имеют противоположные знаки, то точка *B(x₀;f(x₀))* называется **точкой возврата с вертикальной касательной.**

Точкой перегиба называется точка графика, в которой меняется направление выпуклости.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 152-252
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.55-63.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №7

Производная сложной функции

Аннотация. Данная тема раскрывает правила нахождения производной сложной функции.

Ключевые слова. Производная сложной функции, метод логарифмического дифференцирования, производная обратной функции, производная неявной функции.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Производная показательной и логарифмической функций. Метод логарифмического дифференцирования.
2. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.
3. Производная неявной функции.

1. Производная сложной функции

Теорема. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции своих аргументов, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ является дифференцируемой функцией аргумента x, и производная ее равна

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \quad (1)$$

Пример 1. Найти производную функции $ctg(7x^3)$.

Решение. Здесь промежуточной функцией является $u = 7x^3$, поэтому

$$y' = \left(ctg(7x^3)\right)' = -\frac{1}{\sin^2(7x^3)} \cdot 21x^2.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Здесь промежуточная функция $u = tg(x)$, поэтому

$$y' = \left(tg^5 x\right)' = 5tg^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Производная логарифмической функции.

a) **y=ln(x).**

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} \text{ и } \left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

b) y=log

b) $y=\log_a x$. Найдем

$$y' = \left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Т.е. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ и $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

Производная показательной функции.

а) $y=e^x$**.** Прологарифмируем обе части равенства по основанию *e*, получим *ln(y)=x*. Дифференцируя обе части по переменной *x* и учитывая, что *ln(y)*– сложная функция, получим с учетом (1)

$$\left(\ln y\right)' = x' \text{ или } \frac{y'}{y} = 1 \text{, откуда } y' = y \text{,т.е.}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x \text{ и } \left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$$

b) $y=a^x$.

$y' = \left(a^x\right)' = \left[\left(e^{\ln a}\right)^x\right]' = \left(e^{x \ln a}\right)'$ и по правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \cdot \ln a.$$

Итак, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

Пример 3. Найти производную функции: $y = \log_3(2x^3 + 1)$

$$y' = \left(\log_3(2x^3+1)\right)' = \frac{1}{(2x^3+1)\ln 3}(2x^3+1)' = \frac{6x^2}{(2x^3+1)\ln 3}$$

Пример 4. Найти производную функции: $y = 3^{-x^4}$

$$y' = \left(3^{-x^4}\right)' = 3^{-x^4} \ln 3(-4x^3)$$

Логарифмическое дифференцирование

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е $(\ln f(x))' = f'(x) / f(x)$.

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют **логарифмическим дифференцированием**. В некоторых случаях предварительное логарифмирование упрощает нахождение производной. Например, при нахождении производной показательно-степенной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$, предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'$$

Пример 5. Найти производную функции $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}$

Логарифмируя данную функцию получаем, получаем $\ln y = \dfrac{1}{2}[\ln(x+1) + \ln(x^2-2) - \ln(3-x)]$.

Дифференцируя обе части равенства по х: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x+1}(x+1)' + \dfrac{1}{x^2-2}(x^2-2)' - \dfrac{1}{3-x}(3-x)'\right]$

Или подставив выражение для у:

$$y' = \frac{1}{2} y \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-2} + \frac{1}{3-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}\left(\frac{(x^2-2)(3-x) + 2x(x+1)(3-x) + (x+1)(x^2-2)}{(x+1)(x^2-2)(3-x)}\right)$$

Преобразовав выражение , окончательно получим

$$y' = \frac{\left(-2x^3 + 8x^2 + 6x - 8\right)}{2(3-x)\sqrt{(x+1)(x^2-2)(3-x)}} = -\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 4}{(3-x)\sqrt{(x+1)(x^2-2)(3-x)}}$$

Таблица производных основных элементарных функций:

$1. \left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \ (\alpha \in R)$ $\quad 2. \left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a \cdot u'$

$3. \left(e^{u}\right)' = e^{u} u'$ $\quad 4. \left(\log_{a} u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} u'$

$5. \left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} u'$ $\quad 6. \left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$

$7. \left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$ $\quad 8. \left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} u} u'$

$9. \left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} u} u'$

2. **Производная обратной функции.**

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале $(a;b)$ и имеет в этом интервале обратную функцию $x = g(y)$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$ и производная ее отлична от нуля $f'(x) \neq 0$, то производная обратной функции $x = g(y)$ равна: $x'_{y} = \dfrac{1}{y'_{x}}$.

Доказательство. Из существования непрерывной обратной функции следует: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$

Найдем производную обратной функции:

$$x'_{y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_{x}}$$

Теорема доказана.

Пользуясь теоремой о производной обратной функции, можно получить формулы производных обратных тригонометрических функций

Производные обратных тригонометрических функций:

$$1.(\arcsin u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$$

$$2.(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$$

$$3.(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}u'$$

$$4.(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}u'$$

3. Производная неявной функции

Рассмотрим уравнение, связывающее две переменные x и y:

$$F(x;y)=0 \qquad (2)$$

Определение. Уравнение (2) определяет *y* как неявную функцию $y = f(x)$, если каждому значению *x* из некоторого множества X соответствует вполне определенное значение *y*, такое, что вместе с *x* оно удовлетворяет уравнению (2), то есть

$$F(x; f(x)) = 0.$$

Для нахождения производной функции *y*, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения (2) по аргументу *x*, при этом считая *y* функцией от *x*, и затем из полученного равенства найти производную y'.

Пример 6. Найти производную неявной функции, определяемой уравнением $x^2 - xy + \ln y = 2$ и вычислить ее значение в точке (2;1).

Решение.

Дифференцируя обе части равенства и учитывая, что y есть функция от x, получим $2x - y - xy' + \frac{y'}{y} = 0$, откуда

$$2x - y + y'\left(\frac{1}{y} - x\right) = 0$$

$$y'\left(\frac{1}{y} - x\right) = y - 2x;$$

$$y' = \frac{(y-2x)y}{1-xy} = \frac{y^2-2xy}{1-xy} = \frac{2xy-y^2}{xy-1}$$

$$y' = \frac{2xy-y^2}{xy-1}.$$

Значение производной при x=2, y=1 $y'(2) = \dfrac{2\cdot 2\cdot 1-1^2}{2\cdot 1-1} = 3$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать правило дифференцирования сложной функции.
2. Какая формула связывает производные взаимно обратных функций?
3. Когда применяется метод логарифмического дифференцирования?
4. Какая функция называется неявной функцией? Можно ли утверждать, что всякое уравнение вида $\varphi(x; y) = 0$ определяет неявную функцию?
5. Как отыскивается производная неявной функции?

Задания для практики

[1], с.252, №№14-15; [2], №№. 3.38(2 – 4, 6, 8 – 13), 3.39, 3.40, 3.45(2 – 5, 11 – 13, 17, 19), 3.49(1 – 3, 6, 7, 9 – 12), 3.50(1 – 9, 14 – 17 , 20), 3.51, 3.53(1, 4, 5, 7, 10, 12, 14), 3.62 (2, 4, 5, 7, 9, 11), 3.65, 3.66.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с.166-252

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – 576 с.

3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №8

Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков.

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия дифференциала функции, производные и дифференциалы высших порядков

Ключевые слова. Дифференциал функции, производные высших порядков, дифференциалы высших порядков

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Производные высших порядков.
2. Дифференциал функции и его геометрический смысл и свойства. Инвариантность формы дифференциала I порядка.
3. Дифференциалы высших порядков.

1. Производные высших порядков

Производной второго порядка или второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т.е $(y')'$.

Обозначается вторая производная одним из следующих символов: $y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$.

Если $s = s(t)$ - закон прямолинейного движения материальной точки, то $s' = \frac{ds}{dt}$ - скорость, а $s'' = \frac{d^2s}{dt^2}$ $s'' = \frac{d^2s}{dt^2}$ - ускорение этой точки.

Производной *n*-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной (*n*-*1*)-го порядка данной функции. Для *n*-й производной употребляются следующие выражения: $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}$. Таким образом, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}$.

Пример 1. Найти производную до *n*–го порядка включительно от функции *y=ln(x).*

Решение:

$$y' = \frac{1}{x}; y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}; y^{(4)} = -\frac{2\cdot 3}{x^4};$$

и т.д.

Очевидно, что производная *n*-го порядка $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

2. Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.

Пусть функция y=f(x) дифференцируема в точке x_0 и непрерывна в некоторой окрестности этой точки. Для приращения дифференцируемой в точке функции справедливо представление: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Определение. Главная линейная часть $f'(x_0)\Delta x$ приращения дифференцируемой функции называется дифференциалом функции и обозначается

$$dy = f'(x_0)\Delta x \qquad (1)$$

Дифференциал *dy* функции равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной: $dy = y'dx = f'(x)dx$, поэтому справедливо равенство $y' = \frac{dy}{dx}$.

Операция нахождения дифференциала функции так же, как и операция нахождения производной, называется дифференцированием функции.

Сформулируем геометрический смысл дифференциала функции.

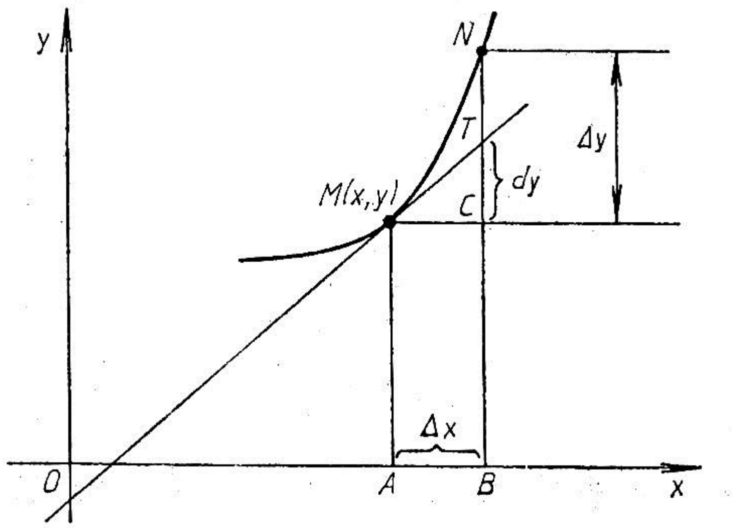


Рис.1

Из рис. 1 видно, что если *MN* – дуга графика функции $y = f(x)$, *MT* – касательная, проведенная к нему в точке $M(x, y)$, и $AB = \Delta x = dx$,то $CT = dy$, а отрезок $CN = \Delta y$. Дифференциал функции dy отличается от ее приращения Δy на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с Δx.

Свойства дифференциала *(u=u(x);v=v(x))*

$1. dC = 0 \; (C = const)$

$2. dx = \Delta x, \textit{ если}$

$(x - \textit{независимая переменная})$

$3. d(u \pm v) = du \pm dv$

$4. d(uv) = vdu + udv$

$5. d(Cu) = Cdu$

$6. d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Теорема (об инвариантности формы). Дифференциал функции $y = f(x)$ сохраняет одну и ту же форму независимо от того, является ли ее аргумент x независимой переменной или же x является функцией от другой переменной.

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = \cos^2 5x$.

Находим производную данной функции $y' = 2\cos 5x \cdot \sin 5x \cdot 5$,

Тогда $dy = 10\cos 5x \cdot \sin 5x \cdot dx$.

3. Дифференциалы высших порядков.

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема в некотором промежутке и производная ее $f'(x)$ в свою очередь, является дифференцируемой функцией.

Определение. Дифференциал от дифференциала функции называется дифференциалом второго порядка и обозначается:

$$d^2y = d(f'(x))dx = ((f'(x))'dx)dx = f''(x)(dx)^2$$

или $d^2y = f''(x)(dx)^2$.

Аналогично,

$$d^3y = f'''(x)(dx)^3; d^{IV}y = f^{IV}(x)(dx)^4;$$

$$...; d^n y = f^n(x)(dx)^n.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется дифференциалом функции? Сформулируйте геометрический смысл дифференциала.
2. Как связаны между собой дифференциал и производная функции? В чем различие между ними?
3. Сформулируйте свойства (арифметические операции) дифференциала.
4. В чем состоит свойство инвариантности дифференциала 1-го порядка?
5. Как определяется производная n-го порядка функции?
6. Запишите формулы дифференциалов 1-го, 2-го, 3-го, …, n-го порядков функции.

Задания для практики

[1], с. 253, №№10-15; [2], №№ 3.77(2, 4, 6, 7, 8, 10), 3.78(1-6), 3.79(1-4), 3.80(2, 6, 8), 3.82, 3, 85, 3.89(2, 5, 8).

Глоссарий

Производной *n*-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной (*n-1*)-го порядка данной функции.

Главная линейная часть $f'(x_0)\Delta x$ приращения дифференцируемой функции называется **дифференциалом функции** и обозначается $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
3. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 9

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Аннотация. Данная тема раскрывает основные теоремы дифференциального исчисления и дает их практические приложения.

Ключевые слова.Производная функции, касательная прямая, секущая, предел функции, точки экстремума.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается индивидуальные задания по вариантам;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Экстремумы функции.
2. Теорема Ферма и ее геометрический смысл.
3. Теорема Ролля и ее геометрический смысл.
4. Правило Лопиталя.

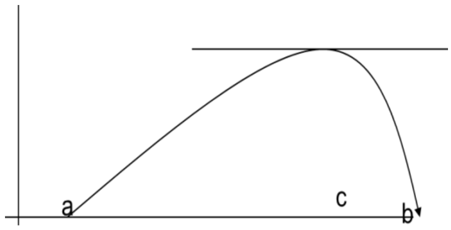
Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в некотором интервале $(a;b)$, x_0- внутренняя точка этого интервала.

Опр.1 **.**Функция $f(x)$ имеет в точкеx_0*максимум (max)*,если для всех x из некоторой окрестности точкиx_0выполняется неравенство$f(x_0) \geq f(x)$.

Опр.2 **.**Функция $f(x)$ имеет в точке x_0*минимум (min)*,если для всех x из некоторой окрестности точки x_0выполняется неравенство$f(x) \geq f(x_0)$.

*Теорема Ферма.*Пусть $f(x)$определена и дифференцируема на некотором интервале (a,b) и в точке $c \in (a,b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда $f'(c)=0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма: Согласно вышеприведенной теореме, касательная прямая, проведенная в точке экстремума к графику функции, параллельна оси абсцисс.

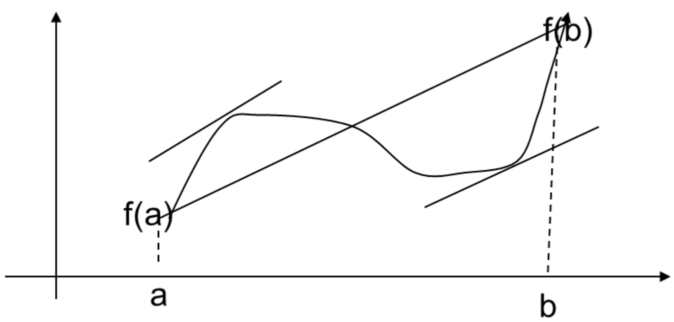


Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и на концах отрезка $[a,b]$ принимает равные значения $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля: На дуге AB графика функции с концами в точках A(*a, f(a))* и B(*b, f(b*)), соответствующих концам отрезка $[a,b]$, найдется точка *C*(*c, f(c))*, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа: Из теоремы Лагранжа вытекает, что найдется точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна секущей, проходящей через точки A(*a, f(a))* и B(*b, f(b*)).



Правило Лопиталя. Если функции *f(x)* и *g(x)* являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими величинами при $x\to a$ и при этом существует предел отношения их производных, то существует и предел отношения самих функций, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Рассмотрим пример: вычислить предел $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$.

Решение: Прологарифмируем это выражение и применим правилоЛопиталя,получим

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cos x}=0.$$

Следовательно, $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}=\lim_{x\to 0} e^{\sin x\ln x}=e^0=1.$

Задания для практики:

Выполнить задания:

[1], с 195-218, [2], №№4.6(2-9), 4.8(1-7), 4.9(1-5), 4.10 (29-38, 44-46, 50-52), 4.11(13, 16, 21),

[1], с. 254, №№16-19; [2], №№ 4.1(2, 3, 6, 9, 10), 4,3(1-4), 4.4(2, 4, 5, 6, 8, 9), 4.5(1-5), 4.10(1, 4-6, 8-10,13, 17, 21, 23, 26), 4.11(1, 5, 6, 10).

Вопросы для самоконтроля:

1. Какими свойствами должна обладать функция в точке x_0 и в ее окрестности для того, чтобы в ней можно было применить теорему Ферма? Как называется точка, если в ней выполняется теорема Ферма для функции *y=f(x)?*

2. Сформулируйте условия, при которых на отрезке [a, b] к функции *y=f(x)* применима теорема Ролля?

3. В чем состоит геометрический смысл теоремы Лагранжа?

4. В каких случаях при вычислении пределов можно применять правило Лопиталя?

5. Выберите верное утверждение:

а) Если в точке дифференцируемая функция имеет экстремум, то в этой точке производная функции равна нулю;

б) Если в точке производная функции равна нулю, то в этой точке функция имеет экстремум.

Глоссарий

Точка графика, в которой достигается наибольшее значение функции, называется ***точкой максимума.***

Точка графика, в которой достигается наименьшее значение функции, называется ***точкой минимума.***

Минимум и максимум функции являются ***экстремумами*** функции.

Касательной к графику функции $f(x)$ называется прямая, проходящая через данную точку $M_0(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$ и имеющая уравнение

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Под касательной понимается предельное положение секущей M_0M при стремлении точки $M \to M_0$ вдоль кривой графика функции.

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
3. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
4. Презентация

Лекция №10

Применение дифференциального исчисления для исследования функций

(Занятие 1)

Аннотация. Данная тема описывает применение дифференциального исчисления для исследования функций

Ключевые слова. Возрастание и убывание функции, экстремум функции.

Методические рекомендации по изучению темы

• Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

• В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

• В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

• Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Экстремум функции. Достаточные условия существования экстремума функции.
2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

1. Экстремум функций. Достаточное условие существования экстремума.

Точка x_1 называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $\Delta x \neq 0$ справедливо неравенство $f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$ $(f(x_1 + \Delta x) < f(x_1))$. Точки максимума и минимума называют **точками экстремума** функции, а максимумы и минимумы функции – ее **экстремальными** значениями.

Необходимое условие существования экстремума функции

Пусть функция *y=f(x)* непрерывна в некотором промежутке *(a;b)*, а x_0– внутренняя точка этого промежутка. Если в точке x_0 функция имеет экстремум, то производная ее в этой точке:

1) $f'(x_0) = 0$

или

2) $f'(x_0)$ *не существует* .

Точки, в которых для функции выполняется необходимое условие существования экстремума, называются ***критическими точками*** на экстремум.

Для отыскания экстремумов функции находят все **критические точки**, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Достаточные условия существования экстремума.

Теорема 1. (первый достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то при $x = x_0$ данная функция имеет **максимум**.

Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то при $x = x_0$ данная функция имеет **минимум**.

Теорема 2 (второй достаточный признак локального экстремума функции). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0) = 0$. Тогда в точке $x = x_0$ функция имеет **локальный максимум**, если $f''(x_0) < 0$ и **локальный минимум**, если $f''(x_0) > 0$.

В случае, когда $f''(x_0) = 0$, точка $x = x_0$ может и не быть экстремальной.

2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Наибольшее и наименьшее значения функции *f(x)* на отрезке совпадают с экстремумами функции, если они достигаются внутри промежутка (a;b) , и не совпадают с экстремумами, если они достигаются на концах отрезка. Отсюда вытекает схема отыскания наибольшего и наименьшего значений функции *f(x)* на отрезке $[a;b]$.

1. Отрезок $[a;b]$ согласовываем с областью определения функции f(x).

2. Находим критические точки функции на экстремум и из них выбираем только те, которые принадлежат данному отрезку. Пусть $x_1, x_2 \in (a;b)$ – критические точки функции на экстремум.
3. Вычисляем значения функции в критических точках x_1, x_2 и на концах отрезка a и b: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(a)$, $f(b)$. Из этих значений выбираем наибольшее и наименьшее значения.

Задачи на отыскание наибольшего (наименьшего) значения функции на промежутке иногда называют **экономическими задачами**. В экономических задачах, как правило, функция, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти, не задана. Ее следует вывести, исходя из условий задачи. Кроме того устанавливается промежуток изменения аргумента, отыскивается наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

Экономическая задача на нахождение наибольшего значений функции

Пример. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр фигуры равен 300 см. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

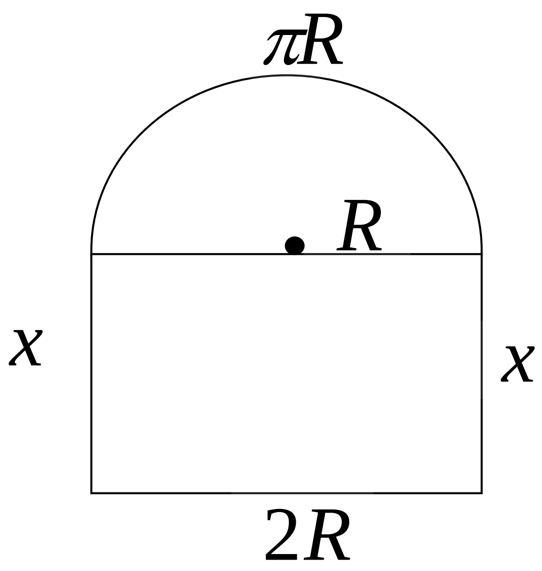
Решение.

Надо найти S_{max}

Запишем периметр

$$P = 300 = 2x + 2R + \pi R = 2x + (2+\pi)R.$$

Выразим отсюда x.



$$x=\frac{1}{2}\left(300-(2+\pi)R\right)$$

$$S=2Rx+\frac{\pi R^2}{2}=R\left(300-(2+\pi)R\right)+\frac{\pi R^2}{2}=300R-(2+\pi)R^2+\frac{\pi}{2}R^2$$

$$S'=300-2\left(2+\pi-\frac{\pi}{2}\right)R$$

Чтобы найти максимум, приравняем производную нулю.

$$300-2\left(2+\pi-\frac{\pi}{2}\right)R=0\Rightarrow R=\frac{300}{2\left(2+\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{300}{4+\pi}$$

При радиусе полукруга

$$R=\frac{300}{4+\pi}$$

окно будет пропускать наибольшее количество света.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие условия должны выполняться для функции f(x), чтобы ее точка была критической?
2. Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции(1-е и 2-е правила).

Задания для практики

[1], с. 254, №№19-21; [2], №№ 4.12(1-8), 4.13(2-7), 4.15, 4.17, 4.18, 4.30(2, 3, 5), 4.31, 4.32, 4.36, 4.38(12, 14, 16), 4.39(1, 3, 7, 9).

Глоссарий

Точка x_1 называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $y=f(x)$, если для любых достаточно малых $\Delta x\neq 0$ справедливо неравенство $f(x_1+\Delta x)>f(x_1)$ $(f(x_1+\Delta x)<f(x_1))$. Точки максимума и минимума называют **точками экстремума** функции, а максимумы и минимумы функции – ее **экстремальными** значениями.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 219-254
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.91-104.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №11

Применение дифференциального исчисления для исследования функций

(Занятие 2)

Аннотация. Данная тема описывает применение дифференциального исчисления для исследования функций

Ключевые слова. Выпуклость и вогнутость кривых, точки перегиба, темпы изменения функций

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Выпуклость и вогнутость кривых. Точки перегиба.
2. Схема полного исследования функции и построение графиков.
3. Темпы изменения функций.

1.Выпуклость, вогнутость кривых, точки перегиба.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется **выпуклой** в интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной в этом интервале, и **вогнутой** в интервале (a,b), если все ее точки лежат выше любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется **точкой перегиба** кривой. Предполагается, что в точке M существует касательная.

Теорема 3 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции

$y = f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то кривая в этом интервале **выпукла** (**вогнута**).

В точке перегиба, отделяющей промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции **изменяет свой знак**, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема 4 (достаточный признак перегиба). Если в точке $x = x_0$ $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ кривой $y = f(x)$ - **точка перегиба**.

Теорема 5 (необходимое условие существования точки перегиба)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в интервале (a,b), x_0- внутренняя точка (a,b). Если точка x_0 является точкой перегиба графика *f(x)*, то в этой точке:

либо 1) $f'(x_0) = \infty$ (точка перегиба с вертикальной касательной);

либо 2) $f''(x_0) = 0$ (точка перегиба с наклонной касательной).

Необходимые условия существования точки перегиба с горизонтальной касательной:

1) $f'(x_0) = 0$;

2) $f''(x_0) = 0$.

2. Схема полного исследования функции и построение ее графика

Для полного исследования функции и построения ее графика можно использовать следующую примерную схему:

I. 1. Область определения функции

2. Четность или нечетность, симметрия графика

3. Точки разрыва функции, интервалы непрерывности.

4. Асимптоты графика: вертикальные, наклонные, горизонтальные.

5. Точки пересечения графика с осями координат.

II. Интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

Ш. Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

IV. Построение графика.

Пример. Провести полное исследование функции $\sqrt[3]{(x+3)x^2}$ и построить ее график.

Воспользуемся рекомендованной схемой.

1. Данная функция определена для всех $x \in R$

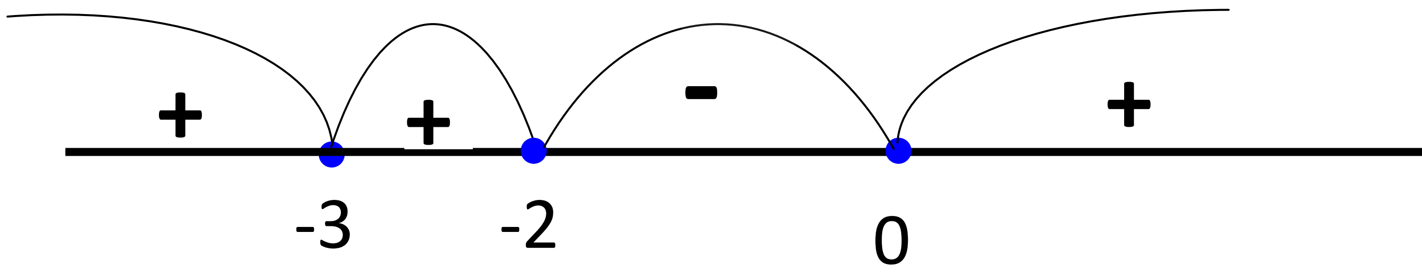
2. Функция не имеет точек разрыва и пересекает ось Ox при $x=-3$ и $x=0$, а ось Oy - при $y=0$.

3. Функция не является четной, нечетной, периодической.

4. Находим производную функции:

$$f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$$

$f'(x)=0$ при $x_1=-2$ и не существует в точках $x_2=-3$, $x_3=0$. Эти точки разбивают всю область определения функции на интервалы $(-\infty;-3),(-3;-2),(-2;0),(0;+\infty)$. Внутри каждого из полученных интервалов сохраняется знак производной, а именно: $f'(x)>0$ в интервалах $(-\infty;-3),(-3;-2),(0;+\infty)$, и $f'(x)<0$ в $(-2;0)$.

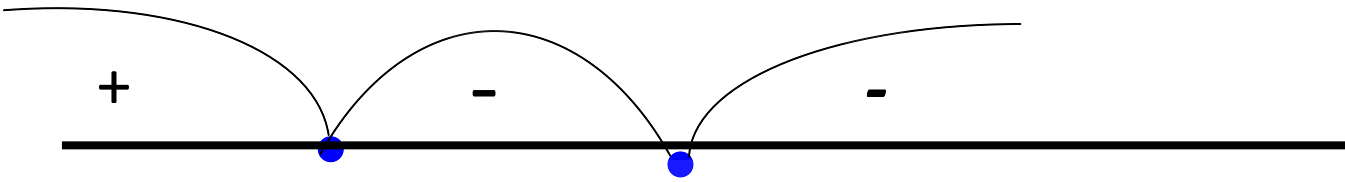


Это означает, что функция возрастает в интервале $(-\infty;-2)$, убывает в интервале $(-2;0)$ и возрастает в интервале $(0;+\infty)$. Так как в окрестности точки $x_1=-2$ знак первой производной при увеличении x изменяется с «+» на «-», то $x_1=-2$ является точкой максимума, $y_{max}=\sqrt[3]{4}$. Для точки $x_3=0$ знак первой производной изменяется с «-» на «+», т.е. $x_3=0$ - точка минимума, $y_{мин}=y(0)=0$. В точке $x_2=-3$ функция не имеет экстремума, так как в ее окрестности $f'(x)$ не меняет знака.

5. Находим вторую производную:

$$f''(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}},$$

которая не равна нулю для любого конечного x. Поэтому точками перегиба могут быть только те точки кривой, в которых вторая производная не существует, т.е. $x_2 = -3, x_3 = 0$.



Определим знак y в каждом их интервалов, на которые найденные точки разбивают область определения функции: $f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3)$, кривая вогнута.

$f''(x) < 0$ при $x \in (-3; 0)$ кривая выпукла, $f''(x) < 0$ при $x \in (0; +\infty)$ кривая выпукла. Так как в окрестности точки $x_2 = -3$ вторая производная меняет знак, то $M(-3; 0)$ является точкой перегиба. Точка $x_3 = 0$ не является точкой перегиба, так как в ее окрестности знак $f''(x)$ не меняется.

6. Вертикальных асимптот нет, так как данная функция не имеет бесконечных разрывов. График функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, если существуют пределы для k и b. Вычислим их для данной функции:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1 + \frac{3}{x}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} = 1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x)\left(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2\right)}=$$

Домножим числитель на соответствующий множитель, чтобы получить разность кубов

(a-c)(a²+ac+c²)=(a³-c³); $a=\sqrt[3]{(x+3)x^2};c=x;$, и разделим знаменатель на такое же выражение

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{\left(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{\left(\sqrt[3]{x^6+6x^5+9x^4}+x\cdot\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=\frac{3}{1+1+1}=1$$

Получили уравнение наклонной асимптоты $y=x+1$.

7. Прежде чем строить график функции, найдем левую и правую производную в точках $x_2=-3$ и $x_3=0$.

$$f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$$

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2x}}=\frac{-3-0+2}{\sqrt[3]{(-3-0+3)^2(-3-0)}}=\frac{-1}{+0\cdot(-3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-3+0}\frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}=\frac{-3+0+2}{\sqrt[3]{(-3+0+3)^2(-3+0)}}=\frac{-1}{+0\cdot(-3)}=+\infty.$$

Точка x=-3 – **точка перегиба** с вертикальной касательной. В такой точке существует вертикальная касательная.

$$\lim_{x \to -0} \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2 x}} = \frac{-0+2}{\sqrt[3]{(-0+3)^2(-0)}} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2 x}} = \frac{+0+2}{\sqrt[3]{(+0+3)^2(+0)}} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

Точка x=0 – **точка возврата** с вертикальной касательной.

8. По результатам строим график (рис. 1)

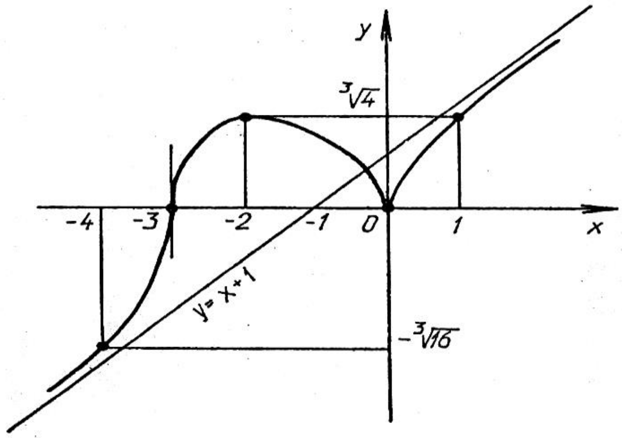


Рис.1

3. Темпы возрастания и убывания функции.

По знакам первой и второй производной функции можно определить темпы возрастания и убывания, то есть возрастает или убывает функция все быстрее или все медленнее.

Определения:

1) Говорят, что функция *y=f(x)* ***возрастает все медленнее*** в некотором интервале, если

$$f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$$

2) Функция *y=f(x)* ***возрастает все быстрее*** в некотором интервале, если

$$f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$$

3) Функция *y=f(x)* ***убывает все медленнее*** в некотором интервале, если

$$f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$$

4) Функция *y=f(x)* ***убывает все быстрее*** в некотором интервале, если

$$f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$$

Теорема 1. Если функция *y=f(x)*, имеющая в некотором интервале первую и вторую производные, возрастает все медленнее, то $f'(x)>0,\ f''(x)<0$.

Теорема 2. Если функция *y=f(x)*, имеющая в некотором интервале первую и вторую производные, возрастает все быстрее, то $f'(x)>0,\ f''(x)>0$.

Теорема 3. Если функция *y=f(x)*, имеющая в некотором интервале первую и вторую производные, убывает все медленнее, то $f'(x)<0,\ f''(x)>0$.

Теорема 4. Если функция *y=f(x)*, имеющая в некотором интервале первую и вторую производные, убывает все быстрее, то $f'(x)<0,\ f''(x)<0$.

Пример. Полные издержки предприятия по месячному объему (*x* тонн) выпуска продукции составляют

$$K(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{9}{2}x^2+150x+100$$

Изучить темпы возрастания и убывания (характер изменения) полных издержек.

Решение. Область определения функции K(x): $x \geq 0$.

Найдем интервалы возрастания и убывания функции *K(x)*. Так как

$$K'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{9}{2}x^2+150x+100\right)'=x^2-9x+150$$

и *K'(x) > 0* при любых $x \geq 0$, то функция K(x) возрастает на всей области определения.

Так как $K''(x)=2x-9$ при $0 \leq x < 4{,}5$ принимает отрицательные значения, а при *x >4,5* – положительные, то в первом интервале полные издержки возрастают все медленнее, а во втором возрастают все быстрее.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая кривая называется выпуклой (вогнутой) в интервале (a, b)?
2. Какая точка графика называется точкой перегиба?
3. Сформулируйте достаточные условия выпуклости, вогнутости кривых, необходимые условия существования точки перегиба.
4. Назовите виды точек перегиба и сформулируйте условия, при которых имеет место тот или иной вид точки перегиба.

Задания для практики

[1], с. 254, №№19-21; [2], №№ 4.12(1-8), 4.13(2-7), 4.15, 4.17, 4.18, 4.30(2, 3, 5), 4.31, 4.32, 4.36, 4.38(12, 14, 16), 4.39(1, 3, 7, 9)

Глоссарий

Точка x_1 называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $\Delta x \neq 0$ справедливо неравенство $f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$ $(f(x_1 + \Delta x) < f(x_1))$. Точки максимума и минимума называют **точками экстремума** функции, а максимумы и минимумы функции – ее **экстремальными** значениями.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется **выпуклой** в интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной в этом интервале, и **вогнутой** в интервале (a,b), если все ее точки лежат выше любой ее касательной в этом интервале.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 219-254
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.91-104.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №12

Функции многих переменных (Занятие 1)

Аннотация. Данная тема дает основные понятия для функций многих переменных.

Ключевые слова. Предел и непрерывность функции нескольких переменных, частные производные I порядка, полный дифференциал I порядка.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Плоские точечные множества.
2. Понятие функции двух переменных и функции нескольких переменных. Область определения, график функции двух переменных.
3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных, функции двух переменных.
4. Частные производные и полный дифференциал I порядка.

1. Плоские точечные множества.

Множество точек называется **плоским**, если все его точки принадлежат одной плоскости.

Пусть на плоскости xOy задано плоское множество E, и точка $M_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит множеству E

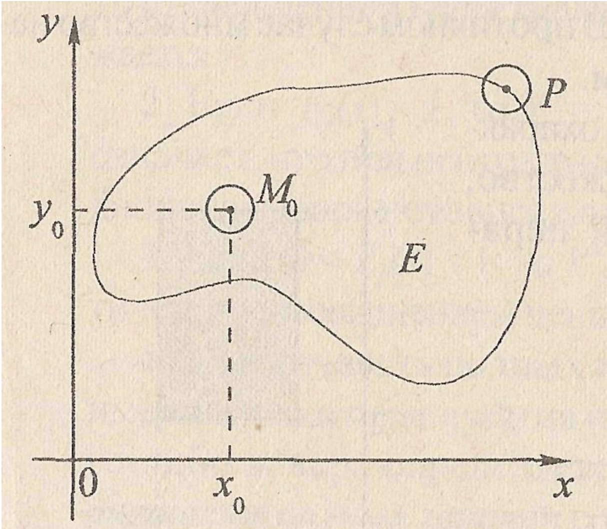


Рис.1

Круг радиуса δ с центром в точке M_0 называется δ **-окрестностью** точки M_0 и обозначается $U(M_0;\delta)$. Точка $M(x;\ y)$ называется **внутренней точкой** множества E, если она входит в это множество вместе со сколь угодно малой окрестностью.

Плоское множество, состоящее только из внутренних точек, называется **открытым** множеством, например, круг без окружности:

$x^2 + y^2 < R^2$ (рис.2).

Точка $P(x;\ y)$ (рис.1) называется **граничной** точкой множества E, если в ее сколь угодно малой окрестности имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству E.

Совокупность всех граничных точек множества (области)называется **границей области**. Открытое множество вместе с границей образует **замкнутую** область.

Плоское множество называется **ограниченным**, если его можно полностью поместить в круг конечного радиуса с центром в начале координат. В противном случае множество называется неограниченным.

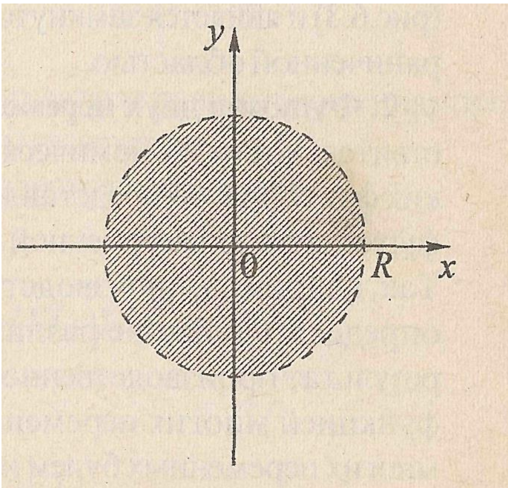


Рис.2

2. Функции двух переменных.

Производственные функции, позволяющие определять влияние различных факторов x_1, x_2,..., x_n на результат производственной деятельности, определяются функцией многих переменных

$y = f(x_1, x_2,..., x_n)$. Функции многих переменных будем изучать на примере функций двух

переменных.

Рассмотрим некоторое плоское множество *E* и подмножество *Z* множества действительных чисел *R*. Каждая точка плоского множества *M(x;y)* имеет две координаты: абсциссу и ординату.

Определение. Если каждой точке *M(x; y)* плоского множества *E* по некоторому закону можно поставить в соответствие вполне определенное число *z* из множества Z, то *z* называется **функцией двух независимых переменных *x* и *y***

$z=f(x;y)$.

Областью определения функции двух переменных называется множество всех допустимых упорядоченных пар чисел *x* и *y*, при которых функция *z* принимает действительные значения.

Графическое изображение функции двух переменных.

Пусть на плоском множестве *E* определена функция двух переменных

$z=f(x;y)$ (1)

Возьмем пространственную систему координат *Oxyz* и в плоскости *xOy* построим плоское множество *E* (рис.3).

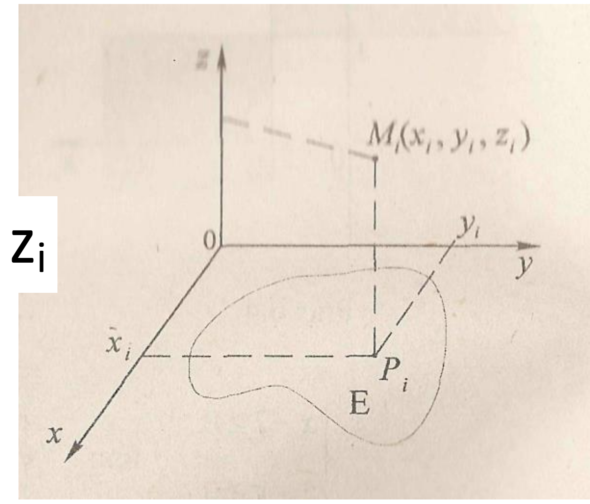


Рис.3.

На перпендикулярах, восстановленных из точек P_i, отложим величины z_i. Получим геометрическое место точек в пространстве, образующее некоторую поверхность. Эта поверхность и является графиком функции двух переменных.

Отметим, что третья координата точки в пространстве z_i называется **аппликатой**.

Чаще применяют **метод сечений**: полагая поочередно в уравнении (1) $x=0$, $y=0$, $z=0$, получают сечения соответственно в плоскостях yOz, xOz, xOy. По этим сечениям строится поверхность - график функции (1).

3. Предел и непрерывность функции двух переменных.

Предел функции двух переменных. Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0\ (x_0;y_0)$, кроме, быть может, самой точки M_0. В окрестности точки $M_0\ (x_0;y_0)$ выберем произвольную последовательность точек $M_1\ (x_1;y_1)$, $M_2\ (x_2;y_2), \ldots$, $M_n\ (x_n;y_n), \ldots$, сходящуюся к точке $M_0\ (x_0;y_0)$. В каждой точке этой последовательности вычислим соответствующие значения функции: $f(x_1;\ y_1)$, $f(x_2;\ y_2), \ldots$, $f(x_n;\ y_n), \ldots$.

Определение. Число А называется **пределом функции** $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;.y_0)$, если для любой последовательности точек $\{M_n(x_n;y_n)\}$, сходящейся к точке $M_0\ (x_0;y_0)$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n;y_n)\}$сходится к числу А.

Предел функции $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначается так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A$$

Замечание. Все теоремы о пределах, сформулированные и доказанные для функции одной переменной, справедливы и для функции двух переменных.

Пример 1. Показать, что предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

Функция определена всюду на плоскости xOy, кроме точки $M_0(0;0)$. Выберем произвольно последовательность точек $\{M_n(x_n;y_n)\}$, сходящуюся к точке $M_0(0;0)$, например, $\left\{M_n\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)\right\}$, и вычислим соответствующие значения функции:

$$f(x_n;y_n)=f\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n^2}{2}=\frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;y_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

Для существования предела должно выполняться условие его единственности. Проверим это условие. Для этого возьмем другую последовательность, также сходящуюся к точке $M_0(0;0)$, например, $\left\{M'_n\left(\frac{2}{n};\frac{1}{n}\right)\right\}$, и вычислим соответствующие значения функции:

$$f(x'_n;y'_n)=f\left(\frac{2}{n};\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{4}{n^2}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{4}{n^3}}{\frac{5}{n^2}}=\frac{4}{n^3}\cdot\frac{n^2}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n;y'_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n};\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{n}=0.$$

Т.е. предел единственный и равен 0.

Непрерывность функции двух переменных. Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в точке

$M_0(x_0;y_0)$ и в ее окрестности.

Определение. Функция $z=f(x;y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если существует предел функции в точке $M_0(x_0;y_0)$, равный ее значению в этой точке:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$$

Если хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке $M_0(x_0;y_0)$ не выполняется, то точка $M_0(x_0;y_0)$ называется **точкой разрыва** функции $f(x;y)$.

Например, функция $z=\frac{1}{(2x^2+y^2)}$ непрерывна в любой точке плоскости xOy, за исключением точки $M(0;0)$, в которой функция терпит бесконечный разрыв.

Замечание. Все теоремы, сформулированные и доказанные для непрерывных функций одной переменной, справедливы и для непрерывных функций двух переменных.

Частные приращения и полное приращение. Рассмотрим функцию $z=f(x;y)$, определенную на плоском множестве E и внутреннюю точку

$M_0(x_0;y_0)$ этого множества. Вычислим значение функции в точке $M_0(x_0;y_0)$. Если аргумент y оставить без изменения, а аргументу x дать приращение Δx, так чтобы новая точка $M_1(x_0+\Delta x;y_0)$ также была внутренней точкой множества E, то функция $z=f(x;y)$ получит **частное приращение по x**:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0).$$

Если, оставив аргумент *x* без изменения, аргументу *y* дать приращение Δy, то функция *z=f(x;y)* получит **частное приращение по y**:

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$

Пусть теперь оба аргумента *x* и *y* получат соответственно приращения Δx и Δy. Тогда функция z получит **полное приращение**:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$

Отметим, что, вообще говоря, полное приращение Δz не равно сумме частных приращений:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Теперь определение **непрерывности функции** двух переменных в точке можно сформулировать так: функция *z=f(x;y)* называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если бесконечно малым приращениям независимых переменных Δx и Δy соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

4. Частные производные и полный дифференциал I порядка функции двух переменных

Частные производные функции двух переменных.

Пусть функция *z=f(x;y)* непрерывна в точке $M_0(x_0;y_0)$, аргументу *x* дадим приращение Δx, а *y* оставим без изменения. Вычислим частное приращение функции

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0).$$

Определение. Если существует конечный предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к приращению Δx, когда последнее стремится к 0, то этот предел называется **частной производной** функции *z=f(x;y)* **по переменной *x*** и обозначается одним из символов z_x', $f_x'(x;y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$:

$$f_x'(x_0; y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}.$$

Из определения вытекает

правило дифференцирования функции двух переменных $z=f(x;y)$ **по переменной** x: чтобы найти частную производную функции двух переменных по переменной x, надо другую переменную y считать постоянной величиной и дифференцировать $f(x;y)$ по x как функцию одной переменной.

Теперь аргумент x оставим без изменения, а аргументу y дадим приращение Δy и вычислим частное приращение функции

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Определение. Если существует конечный предел вида $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то этот предел называется **частной производной** функции $z=f(x;y)$по **переменной** y и обозначается одним из символов z_y', $f_y'(x;y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$:

$$f_y'(x_0; y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}.$$

Правило дифференцирования по переменной y : чтобы найти частную производную функции двух переменных по переменной y, надо другую переменную x считать величиной постоянной и дифференцировать $f(x;y)$ по y как функцию одной переменной.

Сформулированные определения и правила можно распространить и на функции многих переменных.

Замечание. Выражения $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$ - это не отношения, а символы для обозначения частных производных.

Дифференцируемость функции двух переменных.

Теорема. Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ существуют непрерывные частные производные $f_x'(x; y)$ и

$f_y'(x; y)$, то функция $z=f(x;y)$ **дифференцируема** в точке M_0, и полное приращение ее представимо в виде:

$$\Delta z = f_x'(x_0; y_0)\Delta x + f_y'(x_0; y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x)\Delta x + \beta(\Delta y)\Delta y \text{ ,(2)}$$

где $\alpha(\Delta x)$ и $\beta(\Delta y)$ - бесконечно малые функции в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Отметим, что, в отличие от функции одной переменной, для дифференцируемости функции двух переменных **недостаточно** существования в точке $M_0(x_0; y_0)$ конечных частных производных $f_x'(x; y)$ и $f_y'(x; y)$. Эти частные производные должны быть **непрерывны** в точке M_0.

Теорема. Если функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

5.Полный дифференциал функции двух переменных.

Определение. Главная линейная часть полного приращения дифференцируемой функции двух переменных называется ее **полным дифференциалом** и обозначается *dz*.

$$dz = f'_x(x_0;y_0)dx + f'_y(x_0;y_0)dy$$ или $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

Пример 2. Найти частные производные и полный дифференциал функции: $z=x^3+3xy^2-15x-12y;$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \cdot (x)'_x - 15 \cdot (x)'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15;$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x \cdot (y^2)'_y - 12 \cdot (y)'_y = 6xy - 12.$$

$$dz = (3x^2 + 3y^2 - 15) \cdot dx + (6xy - 12) \cdot dy$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции:

a)

$$z = x \cdot \ln y + \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + y\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y - \frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (\ln y)' + \frac{1}{x} \cdot y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x};$$

$$dz = \left(\ln y - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{x}\right)dy.$$

b)

$$z = x^y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Если y является постоянной величиной, имеем степенную функцию от x. Если x является постоянной величиной, функция является показательной относительно y.

$$dz = yx^{y-1} \cdot dx + x^y \ln x \cdot dy.$$

Производная неявной функции. Рассмотрим уравнение, связывающее две переменные:

$F(x;y) = 0.$ (3)

Определение. Если каждому значению x из некоторого множества X соответствует вполне определенное значение y такое, что вместе с x оно обращает уравнение (3) в тождественное равенство, то уравнение (3) определяет y как неявную функцию от x: $y = f(x)$.

Согласно определению неявной функции

$F(x; f(x)) = 0$.

Теорема.

Если:

1) функция $F(x; y)$ определена и непрерывна в области D;

2) $M_0(x_0;y_0)$ - внутренняя точка области D;

3) $F(x_0;y_0) = 0$;

4) существуют непрерывные частные производные $F_x'(x;y)$ и $F_y'(x;y)$ в области D, причем $F_y'(x_0;y_0) \neq 0$, то:

1) в области D уравнение (3) определяет функцию $y = f(x)$ как неявную функцию от x;

2) $y = f(x)$ - непрерывна в области D;

3) $f(x_0) = y_0$;

4) существует непрерывная производная

$$y' = f'(x_0) = -\frac{F_x'}{F_y'}. \qquad (4)$$

Вопросы для контроля

1. Дайте определения открытого и замкнутого, ограниченного и не ограниченного плоских множеств.
2. Дайте определение функции двух переменных.
3. Что представляет собой график функции двух переменных?
4. Как вычисляются пределы функции двух переменных?
5. Сформулируйте правила нахождения частных производных 1-го порядка функции двух переменных.
6. Напишите формулу полного дифференциала 1-го порядка функции двух переменных.

Задания для практики

[1], с. 298 – 301 , №№1 – 7; [2], №№ 6.1(2 – 6, 9, 11), 6.2, 6.4, 6.5, 6.9(1– 4), 6.18, 6.19, 6.21(1-6), 6.23, 6.24, 6.25, 6.35(1-11), 6.38, 6,39, 6.46(2-6).

Глоссарий

Множество точек называется **плоским**, если все его точки принадлежат одной плоскости.

Если каждой точке *M(x; y)* плоского множества *E* по некоторому закону можно поставить в соответствие вполне определенное число *z* из множества Z, то *z* называется **функцией двух независимых переменных *x* и *y*:** *z=f(x;y)*.

Число А называется **пределом функции** *f(x;y)* в точке $M_0(x_0;.y_0)$, если для любой последовательности точек $\{M_n(x_n;y_n)\}$, сходящейся к точке $M_0\ (x_0;y_0)$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n;y_n)\}$сходится к числу А.

Предел функции *f(x;y)* в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначается так: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A$

Функция *z=f(x;y)* называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, если бесконечно малым приращениям независимых переменных Δx и Δy соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$$

Если существует конечный предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к приращению Δx, когда последнее стремится к 0, то этот предел называется **частной производной** функции *z=f(x;y)* **по переменной *x*** и обозначается одним из символов z_x', $f_x'(x;y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$:

$$f_x'(x_0;y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)}{\Delta x}.$$

Если существует конечный предел вида $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то этот предел называется **частной производной** функции *z=f(x;y)*по **переменной *y*** и обозначается одним из символов z_y', $f_y'(x;y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$:

$$f_y'(x_0;y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)}{\Delta y}.$$

Главная линейная часть полного приращения дифференцируемой функции двух переменных называется ее **полным дифференциалом** и обозначается *dz*.

$$dz = f_x'(x_0;y_0)dx + f_y'(x_0;y_0)dy$$

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 257-274, с. 298 - 301.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.114-123.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №13

Функции многих переменных (Занятие 2)

Аннотация. Данная тема дает основные понятия для функций многих переменных.

Ключевые слова. Частные производные II порядка, полный дифференциал II порядка, градиент функции нескольких переменных, производная по направлению, квадратичные формы.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Частные производные и полный дифференциал II порядка.
2. Градиент функции нескольких переменных.
3. Производная по направлению.
4. Квадратичные формы.

1. Частные производные и полный дифференциал II порядка

.

Пусть функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то есть в этой точке существуют непрерывные частные производные $z_x'=f_x'(x;y)$ $z_y'=f_y'(x;y)$.

Определение. Частная производная по x от z'_x и частная производная по y от z'_y называются **частными производными второго порядка** от функции $z=f(x;y)$ и обозначаются:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(f_x{}'(x;y) \right)'_x = f_{xx}{}''(x;y);$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(f_y{}'(x;y) \right)'_y = f_{yy}{}''(x;y).$$

Определение. Частная производная по y от z'_x и частная производная по x от z'_y называются **смешанными производными функции второго порядка** и обозначаются:

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(f_x{}'(x;y)\right)'_y = f_{xy}{}''(x;y),$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(f_y{}'(x;y)\right)'_x = f_{yx}{}''(x;y).$$

Смешанные производные второго порядка z_{xy}'' и z_{yx}'' равны между собой: $z_{xy}''= z_{yx}''$.

Следовательно, функция двух переменных имеет три различных частных производных второго порядка: $z''_{xx}; z''_{yy}; z''_{xy}$.

Производных третьего порядка будет четыре: $z'''_{x^3}; z'''_{y^3}; z'''_{x^2y}; z'''_{y^2x}$.

Определение. Полный дифференциал от полного дифференциала функции двух переменных называется **полным дифференциалом второго порядка** и обозначается

$$d^2z = d(dz) = d\left(z_x{}'dx + z_y{}'dy\right).$$

Или $$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 \qquad (5)$$

Используя другие обозначения, получим:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

.

По аналогии: $$d^{(n)}z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Пример . Найти все частные производные и полный дифференциал второго порядка функции $z = x^3 + y^3 + x^2y^2$;

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2; z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 2yx^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 2x^2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Полный дифференциал второго порядка (5):

$$d^2 z = (6x + 2y^2)dx^2 + 8xydxdy + (6y + 2x^2)dy^2.$$

2. Градиент функции нескольких переменных.

Определение. Градиентом функции $z=f(x;y)$ называется вектор $grad\ z$ с началом в точке $M_0(x_0;y_0)$, координаты которого равны соответствующим частным производным $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, вычисленным в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$grad\ z = \left(z'_x, z'_y\right)$$

$$\left|grad\ z\right| = \sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2}$$

Градиент функции – это вектор скорости наибыстрейшего изменения этого скаляра.

Для функции трех переменных $u=f(x;y;z)$

$$grad\ u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right).$$

Пример. Дана функция $Z = xe^{y-x}$. Найти $\left|grad\ z\right|$ в точке (0;1).

Решение. $z'_x = e^{y-x} - xe^{y-x};\ z'_y = xe^{y-x}$

$$z'_x(M_0) = e;\ z'_y(M_0) = 0$$

$$\left|grad\ z\right| = \sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2} = \sqrt{e^2 + 0^2} = e$$

3. Производная по направлению.

Определение. Если вектор $\overline{l_0} = \left(\cos\alpha, \cos\beta\right)$ – единичный вектор, задающий направление прямой l, проходящей через точку $M(x;y)$, то **производная** функции $z=f(x;y)$ **по направлению** l определяется формулой

$$\frac{dz}{dl} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

Для функции трех переменных $u=f(x;y;z)$ в точке $M(x;y;z)$ производная по направлению l равна

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы единичного вектора $\overline{l_0}$.

Пример. Найти производную функции $Z = \dfrac{xy}{x+y}$ по направлению вектора $\bar{l} = (6;8)$ в точке $M_0(2;2)$.

Решение. $\dfrac{dz}{dl} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$

$$\left|\bar{l}\right| = \sqrt{36+64} = 10;\ \cos\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \cos\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$z'_x = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2}; z'_x(M_0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4};$$

$$z'_y = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2}; z'_y(M_0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{dz}{dl} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

4. Квадратичные формы

Определение. Функция

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

каждое слагаемое которой представляет собой либо квадрат переменной, либо произведение двух различных переменных, называется **квадратичной формой**.

Обозначим $D = B^2 - 4AC$

Квадратичная форма является:

а) положительного определенной, если D<0,A>0;

б) отрицательно определенной, если D<0, A<0;

в) неотрицательно определенной, если D=0, A>0;

г) неположительно определенной, если D=0, A<0;

д) знаконеопределенной, если D>0.

Пример. Определить тип квадратичной формы $-4x^2 - 3xy + 2y^2$

Решение. A=-4;B=-3;C=2.

$$D = B^2 - 4AC = 9 + 32 = 41 > 0$$

Форма является знаконеопределенной.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение градиента функции нескольких переменных.
2. Напишите формулу производной функции двух переменных по направлению.
3. Сколько различных производных 2-го порядка имеет дифференцируемая функция двух переменных? Как они определяются?
4. Напишите формулу полного дифференциала 2-го порядка функций двух переменных.
5. Дайте определение квадратичной формы и назовите типы квадратичных форм.

Задания для практики

[1], с. 301, №8; [2], №№ 6.69(1-5), 6.70, 6.71, 6.73, 6.80(1-6), 6.82, 6.84(1-3), 6.104, 6.105.

Глоссарий

Частная производная по *x* от z'_x и частная производная по *y* от z'_y называются **частными производными второго порядка** от функции $z = f(x; y)$ и обозначаются:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(f'_x(x; y) \right)'_x = f''_{xx}(x; y);$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(f'_y(x; y) \right)'_y = f''_{yy}(x; y).$$

Частная производная по y от z'_x и частная производная по x от z'_y называются **смешанными производными функции второго порядка** и обозначаются:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(f'_x(x; y) \right)'_y = f''_{xy}(x; y),$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(f_y'(x;y)\right)'_x = f_{yx}''(x;y).$$

Полный дифференциал от полного дифференциала функции двух переменных называется **полным дифференциалом второго порядка** и обозначается

$$d^2z = d(dz) = d\left(z_x'dx + z_y'dy\right).$$

Если вектор $\overline{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ – единичный вектор, задающий направление прямой *l*, проходящей через точку *M(x;y)*, то **производная** функции *z=f(x;y)* **по направлению** *l* определяется формулой

$$\frac{dz}{dl} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

Градиентом функции *z=f(x;y)* называется вектор $grad\ z$ с началом в точке $M_0(x_0;y_0)$, координаты которого равны соответствующим частным производным $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, вычисленным в точке $M_0(x_0;y_0)$: $grad\ z = \left(z'_x, z'_y\right)$

Функция

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

каждое слагаемое которой представляет собой либо квадрат переменной, либо произведение двух различных переменных, называется **квадратичной формой**.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 274-277
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.127-136.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция№14

Экстремумы функции двух переменных (Занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия экстремума функций многих переменных и условия их нахождения.

Ключевые слова. Экстремум функции двух переменны, безусловный экстремум функции двух переменных

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест

Вопросы для изучения

1. Понятие экстремума функции двух переменных. Безусловный экстремум функции двух переменных. Необходимое условие существования экстремума.

2. Достаточное условие существования безусловного экстремума.

3. Условный экстремум функции двух переменных. Метод множителей Лагранжа.

1.Понятие экстремума функции двух переменных. Пусть функция $z=f(x;y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0;y_0)$ и в ее δ -окрестности $U(M_0;\delta)$.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **максимум** (сокращенно «max») (рис.1), если для всех точек $M(x;y)$ окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$: $f(x;y) \le f(x_0;y_0)$

или $$\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \le 0 \quad (1)$$

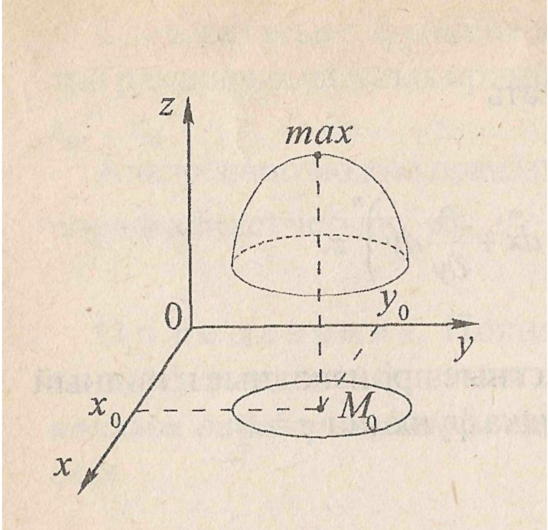


Рис.1.

Определение. Функция $z = f(x;\ y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **минимум** (сокращенно «min») (рис.2), если для всех точек $M(x;y)$ окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$

$$f(x;y) \geq f(x_0;y_0)$$

или $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \geq 0$. (2)

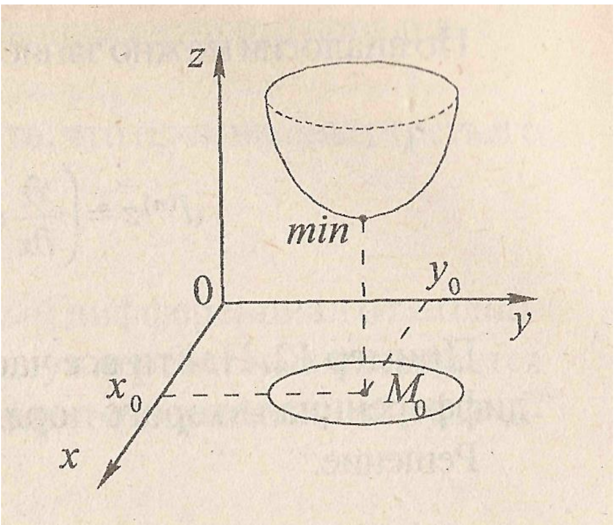


Рис.2.

Максимум и минимум функции двух переменных называются ее **экстремумами** и являются локальными понятиями, то есть связанными с конкретной точкой и ее сколь угодно малой окрестностью.

Таким образом, если в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция $z=f(x;\ y)$ имеет экстремум, то в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ полное приращение Δz имеет постоянный знак, причем

$\Delta z \leq 0$, если в точке M_0 функция имеет **максимум**;

$\Delta z \geq 0$, если в точке M_0 функция имеет **минимум**.

Необходимые условия существования экстремума функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x; y)$ непрерывна в области E и $M_0(x_0;y_0)$ - внутренняя точка области E.

Теорема. Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке экстремум, то обе частные производные ее в точке M_0 равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0;y_0) = 0, \\ f'_y(x_0,y_0) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция $f(x; y)$ имеет экстремум. Если подставить вместо y ординату точки экстремума y_0, то функция $f(x;y_0)$ является функцией от одной переменной x. Согласно необходимому условию существования экстремума дифференцируемой функции одной переменной, производная ее в точке экстремума равна нулю, то есть

$$f'_x(x_0;y_0) = 0.$$

Если же в функцию $f(x;y)$ вместо x подставить абсциссу точки экстремума x_0, то функция $f(x_0;y)$ является функцией от одной переменной y. В силу необходимого условия существования экстремума функции одной переменной

$f_y'(x_0;y_0) = 0$.

Теорема доказана.

Эта теорема дает лишь необходимые, но не достаточные условия существования экстремума функции двух переменных.

Определение. Точки, в которых выполняются условия (3), называются **критическими точками** функции.

Замечание. Отметим, что критическими точками на экстремум функции f(x; y) являются также точки, в которых частные производные $f'_x(x;y)$, $f'_y(x;y)$ не существуют.

Необходимые условия существования экстремума функции двух переменных можно сформулировать так:

если функция $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке частные производные по x и y функции $f(x; y)$ равны нулю или не существуют.

2. **Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных**.

Пусть функция $z = f(x;y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то есть существуют непрерывные частные производные первого порядка

$f'_x(x;y),\ f'_y(x;y)$, и все производные второго порядка $f''_{xx}(x;y),\ f''_{xy}(x;y),\ f''_{yy}(x;y)$, а $M_0(x_0;y_0)$- критическая точка функции, в которой

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}.$$

Если в окрестности критической точки $M_0(x_0;y_0)$ дифференциал второго порядка $d^2f(x_0;y_0)$ имеет постоянный знак, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция имеет экстремум, причем

при $d^2f(x_0;y_0)<0$ – **максимум**;

при $d^2f(x_0;y_0)>0$ – **минимум.**

Так как

$$d^2f(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0;y_0)dx^2+2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy+f''_{yy}(x_0;y_0)dy^2$$

Введем обозначения :

$$f''_{xx}(x_0;y_0)=A;\ f''_{xy}(x_0;y_0)=B;\ f''_{yy}(x_0;y_0)=C,$$

тогда

$$d^2f(x_0,y_0)=Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2=dy^2\left[A\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+2B\left(\frac{dx}{dy}\right)+C\right]=$$

$$=dy^2(A\gamma^2+2B\gamma+C),\ где\ \gamma=\frac{dx}{dy}.$$

Так как $dy^2\ge 0$, то знак $d^2f(x_0;y_0)$ будет полностью определяться знаком квадратного трехчлена $A\gamma^2+2B\gamma+C$. Квадратный трехчлен имеет постоянный знак (совпадает со знаком коэффициента А), если дискриминант его отрицателен, то есть $D = B^2 - AC < 0$

Достаточным условием существования экстремума функции двух переменных будет

$$\left(f''_{xy}(x_0;y_0)\right)^2-f''_{xx}(x_0;y_0)\cdot f''_{yy}(x_0;y_0)<0. \qquad (4)$$

Вычисляем $D=B^2-AC$. (5)

Если $D = B^2 - AC < 0$, то:

при $A<0$ в точке M_0 функция имеет **максимум**,

при $A>0$ в точке M_0 функция имеет **минимум**.

Если $D = B^2 - AC > 0$, то в этом случае экстремума в критической точке $M_0(x_0;y_0)$ не существует.

Если $D = B^2 - AC = 0$, то необходимы дополнительные исследования либо непосредственно по условиям $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \le 0$ (6),

$\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \ge 0$ (7), либо с помощью дифференциала третьего порядка $d^3 f(x_0, y_0)$.

Отметим, что если $D < 0$, то A и C имеют одинаковые знаки, следовательно, характер экстремума можно определять и по знаку C.

Замечание. Если в критической точке $M_0(x_0;\ y_0)$ функция $z = f(x;\ y)$ недифференцируема, то есть частные производные ее $f_x'(x_0;\ y_0)$ и $f_y'(x_0;\ y_0)$ не существуют, то, в этой точке не существует и дифференциал второго порядка $d^2f(x_0;y_0)$. Поэтому для недифференцируемой функции применять достаточные условия существования экстремума нельзя. В этом случае следует воспользоваться непосредственно условиями (6) и (7).

Пример

Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1. Областью определения данной функции является вся координатная плоскость xOy.
2. Находим частные производные

$z_x' = 3x^2 + 3y^2 - 15;$

$z_y' = 6xy - 12.$

Критические точки функции находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0; \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + 3y^2 - 15 = 0; \\ x = \dfrac{2}{y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{12}{y^2} + 3y^2 - 15 = 0; \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases}$$

$12 + 3y^4 - 15y^2 = 0;\ y^2 = v;$

$3v^2 - 15v + 12 = 0;$

$v^2 - 5v + 4 = 0;$

$D = 25 - 16 = 9;\ v_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4;\ v_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1.$

$y_1 = 2;\ y_2 = -2;\ y_3 = -1;\ y_4 = 1;$

$x = \dfrac{2}{y};\ x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = -2;\ x_4 = 2.$

Получаем четыре критические точки: $M_1(1;2)$; $M_2(-1;-2)$; $M_3(-2;-1)$; $M_4(2;1)$.

3. Находим частные производные второго порядка:

$A = z''_{xx} = 6x;$

$B = z''_{xy} = 6y;$

$C = z''_{yy} = 6x.$

$$\Delta = B^2 - A \cdot C = 36y^2 - 36x^2 = 36(y^2 - x^2);$$

В точке M_1 $\Delta = 36(2^2 - 1^2) > 0$, значит локального экстремума нет,

в точке M_2 $\Delta = 36((-2)^2 - (-1)^2) > 0$, значит локального экстремума нет,

в точке M_3 $\Delta = 36((-1)^2 - (-2)^2) < 0$, значит существует локальный экстремум, и т.к. A=-12<0, то в точке M_3 функция имеет **максимум**,

в точке M_4 $\Delta = 36((1)^2 - (2)^2) < 0$, значит существует локальный экстремум, и т.к. A=12>0, то в точке M_4 функция имеет **минимум**.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение безусловных максимума и минимума функции двух переменных.
2. Какие точки называются критическими точками функции двух переменных?
3. Можно ли утверждать, что критические точки – это точки экстремума функции двух переменных?
4. Сформулируйте достаточное условие существования безусловного экстремума функции двух переменных.

Задания для практики

[1], с. 302, №№ 10 – 12; [2], №№ 6.90(1 -5, 9 -11)

Глоссарий

Функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **максимум** (сокращенно «max»), если для всех точек $M(x;y)$ окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$:

$f(x;y) \le f(x_0;y_0)$ или $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \le 0$

Функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **минимум** (сокращенно «min») , если для всех точек $M(x;y)$ окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$

$f(x;y) \ge f(x_0;y_0)$ или $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \ge 0$.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 277 – 302.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.130-132.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция№15

Экстремумы функции двух переменных (Занятие 2)

Аннотация. Данная тема раскрывает понятие условного экстремума функций многих переменных и его метод нахождения.

Ключевые слова. Условный экстремум функции двух переменны.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест

Вопросы для изучения

1. Условный экстремум функции двух переменных.
2. Метод множителей Лагранжа.

1. Условный экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x;\ y)$ определена в области D и в некоторой точке области D имеет экстремум. Если независимые переменные x и y при этом не связаны между собой никакими соотношениями, то этот экстремум называется **безусловным экстремумом**.

Предположим теперь, что в области D дана линия $Г$, уравнение которой

$$\varphi(x;y)=0, \qquad (8)$$

и требуется найти только те экстремумы, которые достигаются в точках, принадлежащих линии Г. Такие экстремумы называются **условными** экстремумами функции $z=f(x;y)$ на линии Г.

Определение. Функция $z=f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ **условный максимум**, если для всех точек $M(x;\ y)$ из окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство

$$f(x;y)\le f(x_0;y_0)$$

при условии, что

$$\varphi(x;y)=0.$$

Определение. Функция $z=f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ ***условный минимум***, если для всех точек $M(x;\ y)$ из окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство

$$f(x;y) \geq f(x_0;y_0)$$

при условии, что

$$\varphi(x;y)=0.$$

Уравнение (8) определяет y как неявную функцию от x и называется **уравнением связи**. Оно показывает, что x и y теперь не являются независимыми переменными, а связаны условием (8).

2.Метод множителей Лагранжа.

Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума. Метод множителей Лагранжа.

Если $M_0(x_0;\ y_0)$ - точка условного экстремума функции $z=f(x;y)$, то, в силу необходимого условия существования экстремума функции, полный дифференциал первого порядка в этой точке равен нулю:

$$dz=f_x'dx+f_y'dy=0. \qquad (9)$$

Дифференцируя обе части уравнения связи (8), имеем

$$d\varphi=\varphi_x'dx+\varphi_y'dy=0 \quad (10)$$

Умножим равенство (10) на неизвестный пока множитель λ и сложим почленно с равенством (9). Тогда

$$(f_x'+\lambda\varphi_x')dx+(f_y'+\lambda\varphi_y')dy=0 \quad (11)$$

Выберем этот множитель λ таким образом, чтобы

$$f_y'+\lambda\varphi_y'=0 \qquad (12)$$

тогда и

$$f_x'+\lambda\varphi_x'=0. \quad (13)$$

Добавляя к равенствам (12) и (13) уравнение связи (8), получим систему трех уравнений с тремя неизвестными x, y, λ, которая выражает **необходимые условия** существования **условного экстремума** функции $z=f(x;\ y)$ при условии $\varphi(x;y)=0$:

$$\begin{cases} f_x'+\lambda\varphi_x'=0, \\ f_y'+\lambda\varphi_y'=0 \\ \varphi(x;y)=0. \end{cases} \quad (14)$$

Условия (14) совпадают с **необходимыми условиями существования безусловного экстремума** функции трех независимых переменных, которая называется **функцией Лагранжа**:

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y), \quad (15)$$

Действительно, необходимыми условиями существования безусловного экстремума функции (15) являются условия:

$$L'_x = 0, L'_y = 0, L'_\lambda = 0..$$

Приравнивая все частные производные функции Лагранжа нулю, получим систему (14).

Таким образом, задача отыскания условного экстремума функции *z=f(x;y)* при условии $\varphi(x;y) = 0$ свелась к отысканию безусловного экстремума функции Лагранжа (15).

Решая систему (14) относительно *x, y* и λ, определяют координаты критической точки на экстремум x_0, y_0 и значение неизвестного множителя Лагранжа λ_0. Подставляя найденное значение λ_0 в функцию (15), получим функцию двух независимых переменных x и y:

$$L(x;y) = f(x;y) + \lambda_0\varphi(x;y) \quad (16)$$

Достаточным условием существования безусловного экстремума функции (16) является постоянство знака дифференциала второго порядка в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$d^2L(x_0;y_0) = L''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + L''_{yy}(x_0;y_0)dy^2 =$$

$$= dx^2\left[L''_{xx}(x_0;y_0) + 2L''_{xy}(x_0;y_0)\frac{dy}{dx} + L''_{yy}(x_0;y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \quad (17)$$

Значение $\frac{dy}{dx} = y'(x_0;y_0)$ вычисляется как значение производной неявной функции, определяемой уравнением связи (8). Так как $dx^2 > 0$, то знак $d^2L(x_0;y_0)$ совпадает со знаком выражения в квадратных скобках.

Если $d^2L(x_0;y_0)<0$, то функция Лагранжа *L(x;y)* имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **максимум**, а функция

z=f(x;y)-условный максимум.

Если $d^2L(x_0;y_0)>0$, то функция *L(x;y)* имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **минимум**, а функция *f(x;y)* - условный минимум.

Определив точки условного экстремума, вычисляют значения функции в этих точках, то есть $z_{\min\ усл}$ и $z_{\max\ усл}$.

Пример. Найти экстремум функции $z=x+2y$ при $x^2+y^2=5$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа.

$$L(x;y;\lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-5).$$

Находим все частные производные функции $L(x;y;\lambda)$ и приравниваем их нулю.

$$\frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x;\ \frac{\partial L}{\partial y}=2+2\lambda y;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-5.$$

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0;\\ 2+2\lambda y=0;\\ x^2+y^2-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2\lambda};\\ y=-\dfrac{1}{\lambda};\\ x^2+y^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{2x}\\ y=2x;\\ x^2+4x^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{2x}\\ y=2x;\\ 5x^2=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda=\mp\dfrac{1}{2};\\ y_{1,2}=\pm 2;\\ x_{1,2}=\pm 1\end{cases}$$

$$\lambda=-\frac{1}{2x};\ y=-\frac{1}{\lambda}=-1/\left(-\frac{1}{2x}\right)=2x$$

Таким образом, функция Лагранжа имеет две критические точки $M_1(1;2)$ при $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ и

$M_2(-1;-2)$ при $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

Определим знак дифференциала второго порядка в каждой из этих критических точек. Для этого вычислим сначала производную неявной функции, определяемой уравнением связи $x^2+y^2=5$.

$$\left(x^2+y^2\right)'=(5)'\Rightarrow 2x+2y\cdot y'=0\Rightarrow y'=-\frac{x}{y};(y=2x)$$

$$y'=-\frac{x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

.

Найдем производные второго порядка функции $L(x;y;\lambda)$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\left(1+2\lambda x\right)'=2\lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\left(2+2\lambda y\right)'=2\lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0.$$

a) в критической точке $M_1(1;2)$ при $\lambda=-\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=L''_{xx}=-1;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=L''_{xy}=0;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=L''_{yy}=-1\ .$$

$$d^2L(x_0;y_0)=dx^2\left[L''_{xx}(x_0;y_0)+2L''_{xy}(x_0;y_0)\frac{dy}{dx}+L''_{yy}(x_0;y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{1}{2}$$

$$d^2L(1;2)=dx^2\left(-1-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)'=dx^2\left(-1-\frac{1}{4}\right)<0$$

В точке $M_1(1;2)$ функция $L(x;y;\lambda)$ имеет максимум, а функция $z=x+2y$ условный максимум.

$Z_{\max\ усл}=5$.

b) в критической точке $M_2(-1;-2)$ при $\lambda=\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=L''_{xx}=1;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=L''_{yy}=1;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=L''_{xy}=0.$$

$$d^2L(-1;-2)=dx^2\left(1+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)'=dx^2\left(1+\frac{1}{4}\right)>0$$

В точке $M_2(-1;-2)$ функция $L(x;y;\lambda)$ имеет минимум, а функция $z=x+2y$ условный минимум.

$Z_{\min\ усл}=-5$.

Замечание. Метод множителей Лагранжа можно применить и для функций любого числа *n* независимых переменных.

Предположим, что требуется найти условные экстремумы функции $z=f(x_1, x_2,..., x_n)$ при условиях, где $i = 1,2,... ,m$ (m< n).

В этом случае функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f_1(x_1,x_2,...,x_n)+$$
$$+\lambda_1\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)+\lambda_2\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n)+...+\lambda_n\varphi_n(x_1,x_2,...,x_n)$$

Критические точки и неизвестные множители Лагранжа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ определяются из решения n+m уравнений:

$$\begin{cases} L'_{x_1}=f'_{x_1}+\lambda_1\varphi'_{1x_1}+\lambda_2\varphi'_{2x_1}+...+\lambda_m\varphi'_{mx_1}=0, \\ L'_{x_2}=f'_{x_2}+\lambda_1\varphi'_{1x_2}+\lambda_2\varphi'_{2x_2}+...+\lambda_m\varphi'_{mx_2}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L'_{x_n}=f'_{x_n}+\lambda_1\varphi'_{1x_n}+\lambda_2\varphi'_{2x_n}+...+\lambda_m\varphi'_{mx_n}=0 \\ \varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ (i=1,2,...,m). \end{cases}$$

Вопросы для контроля

1. В чем отличие условного экстремума функции двух переменных от безусловного?
2. Какое уравнение называется уравнением связи?
3. Запишите функцию Лагранжа и сформулируйте *а*) необходимое условие существования условного экстремума; *б*) достаточное условие существования условного экстремума.

Задания для практики

[2], 6.92(1 -5).

Глоссарий

Функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ **условный максимум**, если для всех точек $M(x;\ y)$ из окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство

$$f(x;y) \le f(x_0;y_0)$$

при условии, что

$$\varphi(x;y) = 0.$$

Функция $z=f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ **условный минимум**, если для всех точек $M(x;\ y)$ из окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство

$$f(x;y) \ge f(x_0;y_0)$$

при условии, что

$$\varphi(x;y) = 0.$$

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 277 – 302.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.130-132.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №16

Неопределенный интеграл

Аннотация. Данная тема раскрывает понятие неопределенного интеграла и основные методы интегрирования.

Ключевые слова. Первообразная функции, неопределенный интеграл, методы интегрирования.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест

Вопросы для изучения

1. Первообразная функции и ее свойства.

2. Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.

3. Таблица формул интегрирования.

4. Методы интегрирования: метод разложения, подведения под знак дифференциала.

1. Первообразная функции и ее свойства.

Пусть на интервале *(a; b)* задана функция *f(x)*. Если $F'(x) = f(x)\ \text{или}\ dF(x) = f(x)dx$, где $x \in (a;b)$, то функция *F(x)* называется ***первообразной функцией*** для функции *f(x)* на интервале *(a; b)*.

Геометрический смысл: неопределенный интеграл есть семейство интегральных кривых, получаемых при непрерывном параллельном переносе одной из них вдоль оси Оу.

Свойство 1. Если функция *F(x)* является первообразной для функции f(x), то функция *Ф(x)=F(x)+C*, где *C=const*, также является первообразной для функции *f(x)*.

Свойство 2. Если *F(x)* и *Ф(x)* – две различные первообразные к функции *f(x)*, то они отличаются друг от друга лишь постоянной.

Всякая непрерывная функция имеет бесчисленной множество первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную величину С.

2. Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Совокупность первообразных *F(x) + C* (где *C* – произвольная постоянная) функции *f(x)*, $x \in (a;b)$, называется ***неопределенным интегралом*** функции *f(x)*:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Функция *f(x)* называется подынтегральной функцией, *f(x)dx*- подынтегральным выражением

Нахождение неопределенного интеграла называется **интегрированием** функции. Функция *f(x)* называется **интегрируемой** в интервале, если в этом интервале для нее существует $\int f(x)dx$.

Приведем ***основные правила интегрирования*****:**

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\int f(x)dx = d\left(F(x)+C\right) = f(x)dx$

3) $\int dz(x) = z(x) + C;$

Из свойств 2 и 3 следует, что знаки d и $\int$ взаимно уничтожаются, если один из них предшествует другому.

Например,

$$d\left(\int xdx\right) = xdx; \int dx = x + C; \int d\left(tgx\right) = tgx + C; d\int \cos(x)dx = \cos xdx$$

4) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \ (a = const);$

5) $\int\left[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right]dx = \int f_1(x)dx +$

$+\int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т.е. $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$.

Так как интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, то из формул дифференцирования можно получить формулы интегрирования. Левый столбец - формулы дифференциального исчисления, правый - формулы интегрального исчисления.

3.Таблица формул интегрирования

1. $d\,\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = x^n dx$

2. $d(\ln|x|) = \dfrac{1}{x}dx$

3. $d(\sin(x)) = \cos(x)dx$

4. $d(-\cos(x)) = \sin(x)dx$

5. $d(tg(x)) = \dfrac{dx}{\cos^2(x)}$

6. $d(ctg(x)) = -\dfrac{dx}{\sin^2(x)}$

7. $d(\arcsin(x)) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $d(-\arccos(x)) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $d(arctg(x)) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

10. $d(-arcctg(x)) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

11. $d\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right) = a^x dx$

12. $d\left(e^x\right) = e^x dx$

13. $d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right) = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$;

14. $d\left(\dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}\right) = \dfrac{dx}{x^2-a^2}$;

15. $d\left(\dfrac{1}{a}arctg\,\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{dx}{a^2+x^2}$;

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C.$

4. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2(x)} = tg(x) + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2(x)} = -ctg(x) + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x) + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = -arcctg(x) + C.$

11. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

12. $\int e^x dx = e^x + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}arctg\,\dfrac{x}{a} + C.$

16. $d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

Теорема (об инвариантности формул интегрирования)

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, то есть, если

$\int f(x)dx=F(x)+C,$ и $u=\varphi(x)$ - любая дифференцируемая функция, то $\int f(u)du=F(u)+C$

4. Методы интегрирования.

1) **Метод разложения**. Основан на 4 и 5 свойствах неопределенного интеграла.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл .

$$\int\left(4x^3-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+1\right)dx=$$

$$=4\int x^3dx-2\int x^{\frac{2}{3}}dx+2\int x^{-3}dx+\int dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+2\cdot\frac{x^{-2}}{(-2)}+x+c=$$

$$=x^4-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{x^2}+x+C$$

Произвольную постоянную следует прибавлять сразу, как только найден последний из интегралов.

2) **Подведение под знак дифференциала**. Этот метод основан на свойствах дифференциала и инвариантности формул интегрирования. Приведем примеры подведения функции под знак дифференциала. Так, например, для любой дифференцируемой функции *f(x)* имеем

$$1)\int x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} d\left(x^{n+1}\right), n \neq -1;$$

$$2)\ dx = d(x+C) = \frac{1}{a} d(ax) = \frac{1}{a} d(ax+b);$$

$$3)\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln\left|f(x)\right| + C$$

Пример 2. Найти

$$\int \cos(7x-3)dx = \frac{1}{7}\int \cos(7x-3)d(7x-3) = \left|d(7x-3) = 7dx\right| =$$

$$= \frac{1}{7}\sin(7x-3) + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{x - arctgx}{1+x^2} dx$

$$\int \frac{x - arctgx}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int \frac{arctgx}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - \int arctgx\ d(arctgx) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2} arctg^2 x + C$$

Пример 4. Найти $\int tg^3 x dx$

$$\int tg^3 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) tgx dx == \int \frac{1}{\cos^2 x} tgx dx - \int tgx dx =$$

$$= \int tgx d(tgx) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}; d(\cos x) = -\sin x dx \right| =$$

$$= \frac{tg^2 x}{2} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2} tg^2 x + \ln\left|\cos x\right| + C$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+8}=\int \frac{dx}{x^2-4x+4+4}=\int \frac{dx}{(x-2)^2+4}=$$

$$=\int \frac{d(x-2)}{2^2+(x-2)^2}=\left|\int \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}arctg\,\frac{u}{a}\right|=\frac{1}{2}arctg\,\frac{x-2}{2}+C$$

Вопросы для контроля

1. Какая формула связывает функцию и ее первообразную?
2. Сколько первообразных имеет непрерывная функция?
3. Дайте определение неопределенного интеграла и сформулируйте его свойства.
4. В чем состоит свойство инвариантности формул интегрирования?
5. Таблица формул интегрирования.
6. «Неберущиеся» интегралы.

Задания для практики

[1], с.378, № 1(а); [2], №№ 7.1(2, 4, 5, 6, 9, 11, 14, 15, 17 – 23, 25 – 29), 7.3, 7.4(1, 5, 7, 8, 10, 12, 14 – 16, 17 – 19, 21 – 25, 31 – 35), 7.5(1 – 4, 6 – 11, 16 – 18), 7.6(1 – 10).

Глоссарий

Если $F'(x)=f(x)$ *или* $dF(x)=f(x)dx$, где $x\in(a;b)$, то функция *F(x)* называется ***первообразной функцией*** для функции *f(x)* на интервале *(a; b)*.

Совокупность первообразных *F(x) + C* (где *C* – произвольная постоянная) функции *f(x)*, $x\in(a;b)$, называется ***неопределенным интегралом*** функции *f(x)*:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

Нахождение неопределенного интеграла называется **интегрированием** функции.

Функция *f(x)* называется **интегрируемой** в интервале, если в этом интервале для нее существует $\int f(x)dx$.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 331 – 346
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.137-145.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 17

Методы интегрирования (занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования по частям и замены переменной.

Ключевые слова. Интегрирование по частям.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Метод замены переменной.
2. Интегрирование по частям.

1. Метод замены переменной.

Если функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ всегда можно перейти к новой переменной t по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

затем найти интеграл из правой части формулы (если это возможно) и вернуться к исходной переменной x. Такой способ нахождения интеграла называется ***методом замены переменной*** или ***методом подстановки***.

Отметим, что при замене $x = \varphi(t)$ должно осуществляться взаимно однозначное соответствие между областями D_t и D_x определения функций $\varphi(t)$ и $f(x)$, такое, чтобы функция $\varphi(t)$ принимала все значения $x \in D_x$ (оно обозначается $D_t \leftrightarrow D_x$).

Пример 6. Найти $\int x\sqrt{x-1}dx$.

Введем новую переменную t по формуле

$$t=\sqrt{x-1};x=t^2+1;dt=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx\Rightarrow dt=\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}\Rightarrow$$

$$2tdt=dx;D_t:0\le t<\infty,D_x:1\le x<\infty,D_t\leftrightarrow D_x$$

$$\int x\sqrt{x-1}dx=\int(t^2+1)t\cdot 2tdt=2\int(t^4+t^2)dt=$$

$$=2\int t^4dt+2\int t^2dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=$$

$$=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

Пример 7. Найти $\int e^{-x^3}x^2dx$.

Воспользуемся подстановкой $-x^3=t$.

$$-3x^2dx=dt;x^2dx=-\frac{1}{3}dt$$

$$\int e^{-x^3}x^2dx=\int e^t\left(-\frac{1}{3}\right)dt=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$$

Пример 8. Найти $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}$. Применим подстановку $t=\frac{1}{x+1}$.

Тогда $x=\frac{1}{t}-1;dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{t}-1\right)+10}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{t^{-2}+9}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{9t^2+1}}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(3t)}{\sqrt{(3t)^2+1}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|3t+\sqrt{9t^2+1}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x+1}+\sqrt{\frac{9}{(x+1)^2}+1}\right|+C$$

Пример 9.

$$\int\frac{(2x-7)dx}{x^2-7x+8}=\left|\begin{matrix}t=x^2-7x+8;\\dt=(2x-7)dx\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x^2-7x+8\right|+C$$

2.Интегрирование по частям.

Метод интегрирования по частям основан на применении формулы дифференциала произведения двух функций:

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du.$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu \quad (1)$$

где $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Формула (1) называется ***формулой интегрирования по частям***.

Метод интегрирования по частям рекомендуется использовать для нахождения интегралов от функций

$$I. \int x^n \ln(ax)dx; \int x^n \arcsin x dx; \int x^n \arccos x dx;$$

$$\int x^n arctgx dx; \int x^n arcctgx dx$$

В этих интегралах за u нужно взять: $\ln(ax)$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, а за $dv = x^n dx$

$$II. \int x^n \sin ax\, dx; \int x^n \cos ax\, dx; \int x^n e^{ax} dx.$$

В этих интегралах обычно $u = x^n$, тогда $dv = \sin ax\, dx$ $(dv = \cos ax\, dx,\ dv = e^{ax} dx)$.

$$III. \int e^{ax} \sin bx\, dx; \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

В них $u = e^{ax}$, либо $u = \sin bx$ (или $\cos bx$).

В последнем случае приходится дважды интегрировать по частям. Повторное интегрирование по частям приводит к первоначальному интегралу и тогда получается равенство, из которого находят выражение для искомого интеграла.

***Пример*.** Найти $\int x \cdot arctg(x)dx.$ (Интеграл типа I)

$$\int x\cdot arctg(x)dx=\left|\begin{matrix} u=arctg(x), du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx, v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctg(x)+C$$

Пример. Найти $\int xe^{-2x}dx$ (Интеграл типа II). Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u=x, dv=e^{-2x}dx$. Тогда $du=dx, v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$ (всегда можно считать, что *C* = *0*). Следовательно, по формуле (1) имеем

$$\int xe^{-2x}dx=x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

Пример. Найти $\int e^{2x}\sin xdx$ (Интеграл типа III).

$$\int e^{2x}\sin xdx=\left|\begin{matrix} u=\sin x, du=\cos xdx, \\ dv=e^{2x}dx, v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\cos x, du=-\sin xdx \\ dv=e^{2x}dx, v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos x-\int\frac{1}{2}e^{2x}\sin xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}\int e^{2x}\sin xdx$$

Перенеся последний интеграл в левую часть равенства, получим

$$\int e^{2x}\sin xdx-\frac{1}{4}\int e^{2x}\sin xdx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{3}{4}C.$$

$$\frac{3}{4}\int e^{2x}\sin xdx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{3}{4}C.$$

$$\int e^{2x}\sin xdx=\frac{2}{3}e^{2x}\sin x-\frac{1}{3}e^{2x}\cos x+C$$

Вопросы для самоконтроля

1. На каких свойствах неопределенного интеграла основан метод разложения?

2. Какие свойства дифференциала функции применяются при подведении функций под знак дифференциала?

3. Изложите основы метода замены переменной.

4. В каких случаях применяется метод интегрирования по частям?

Задания для практики

[2], с. 378, №1(а-б); [3], №№ 7.11(1-9, 15, 28).

Глоссарий

Метод интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu \quad (1)$$

где *u(x), v(x)* – непрерывно дифференцируемые функции. Формула (1) называется ***формулой интегрирования по частям***.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 18

Методы интегрирования (занятие 2)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования простейших и рациональных дробей.

Ключевые слова. Интегрирование по частям.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Интегрирование простейших дробей.
2. Интегрирование рациональных дробей**.**

Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией R(x) называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m},$$

где m, n – целые положительные числа, $b_i, a_i \in R$; *i=0,…m, j=0,…,n.*

Если n<m, то R(x) называется **правильной** дробью, если n≥m, - **неправильной** дробью.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби:

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M_{n-m}(x)+\frac{P_l(x)}{Q_m(x)}$, где $M_{n-m}(x)$, $P_l(x)$, $Q_m(x)$-многочлены;

$\frac{P_l(x)}{Q_m(x)}-\text{правильная дробь}$; l<m.

Например, $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ *– неправильная дробь*. Разделив ее числитель на знаменатель, получим

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}=x^2-3x+10+\frac{-33x+14}{x^2+3x-1}.$$

Так как всякий многочлен легко интегрируется, то интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функции *R(x)* при условии $n<m$.

Интегрирование правильной дроби.

Пусть $\frac{f(x)}{g(x)}$ *– правильная дробь*. Рассмотрим всевозможные случаи разложения знаменателя.

1) Пусть знаменатель $g(x)=Q_m(x)=(x-\alpha)^m$, *где* α – действительный корень многочлена $Q_m(x)$ кратности m. Тогда множителю вида $(x-\alpha)^m$ в разложении правильной дроби соответствует сумма из m простых дробей:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\frac{A_3}{(x-\alpha)^3}+\ldots+\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}\ ,(2)$$

Где A_1, A_2, …, A_m- действительные числа (неопределенные коэффициенты – так как их нужно найти и их количество должно равняться степени многочлена в знаменателе).

$$\frac{x+5}{(x-1)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}$$

2) Пусть знаменатель дроби $g(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^L$, *где* $k+L=m$.

Тогда
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{B_1}{x-\beta}+$$
$$+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^L}\quad(3)$$

Например,

$$\frac{x+5}{(x^2-3x+2)^3}=\frac{x+5}{(x-1)^3(x-2)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+$$
$$+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B_1}{x-2}+\frac{B_2}{(x-2)^2}+\frac{B_3}{(x-2)^3}$$

3) Пусть знаменатель

$$g(x)=(x^2+px+q)^L, где\, x^2+px+q-$$

квадратный трехчлен, имеющий L-кратную пару сопряженных мнимых корней $\left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$.

Тогда данная дробь может быть представлена следующим образом

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_l x + N_l}{(x^2 + px + q)^L}$$

(4)

Где M_1, M_2, ..., M_L , N_1, N_2, ..., N_L - действительные числа (число неопределенных коэффициентов равно $2L$).

Например, $\frac{2x^2 + 10x - 5}{(x^2 + 2x + 5)^3} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 2x + 5} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + 2x + 5)^2} + \frac{M_l x + N_l}{(x^2 + 2x + 5)^3}$

Дроби вида $\frac{A}{(x - \alpha)^k}$ и $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ при условии, что $\left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$, называются простыми (элементарными) дробями.

Формулы вида (1), (2), (3) указывают форму разложения правильной дроби на простые.

Для определения коэффициентов A_1, A_2, ..., A_k, M_1, M_2, ..., M_L , N_1, N_2, ..., N_L разложения правильной дроби применяют **метод неопределенных коэффициентов**.

Суть метода:

-правую часть разложения правильной дроби приводят к общему знаменателю (он равен знаменателю левой части);

-затем отбрасывают знаменатели обеих частей равенства:

- приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного в этих многочленах (слева и справа), получают систему m уравнений первой степени относительно m коэффициентов A_1, A_2, ..., A_k, M_1, M_2, ..., M_L , N_1, N_2, ..., N_L;

- решая полученную систему, определяют эти коэффициенты.

Пример. Разложить дробь на простые дроби.

$$\frac{2x - 3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2}$$

$$2x - 3 = A_1(x-1)(x-2) + A_2 x(x-2) + A_3 x(x-1)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 \,|\, 0 = A_1 + A_2 + A_3 \\ x^1 \,|\, 2 = -3A_1 - 2A_2 - A_3 \\ x^0 \,|\, -3 = 2A_1 \end{cases}$$

Решение системы: A_1=-3/2; A_2=1; A_3=1/2.

$$\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{-3}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-2)}$$

Если правильная дробь разложена на простые, то интегрировать надо **простые дроби вида**:

I. $\int \frac{dx}{x-a}; \int \frac{dx}{x+a};$ II. $\int \frac{dx}{(x-a)^m}; \int \frac{dx}{(x+a)^m};$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx;$ IV. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$

Рассмотрим интегралы вида I-III.

I. Интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \ln|x+a| + C;$$

Интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m}dx = \int (x-a)^{-m}d(x-a) =$$

$$= \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{(x-a)^{-(m-1)}}{-m+1} + C = \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C$$

II. Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx;$ где $\left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$. Вначале надо выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, а потом ввести новую переменную.

Пример. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}$$

Приведя обе части к общему знаменателю, получим: $x=A_1(x+1)^2+A_2(x^2-1)+A_3(x-1)$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 \left| \ 0 = A_1 + A_2 \right. \\ x^1 \left| \ 1 = 2A_1 + A_3 \right. \\ x^0 \left| \ 0 = A_1 - A_2 - A_3 \right. \end{cases}$$

Решая систему, получим: A_1=1/4; A_2=-1/4; A_3=1/2.

Подставим в интеграл:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \frac{1/4}{x-1}dx - \int \frac{1/4}{x+1}dx + \int \frac{1/2}{(x+1)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{d(x+1)}{x+1} + \frac{1}{2}\int (x+1)^{-2} d(x+1) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + C$$

Пример. Найти $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx$

Разложим дробь на простые дроби.

$$\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2}$$

$$2x-3 = A_1(x-1)(x-2) + A_2 x(x-2) + A_3 x(x-1)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 \left| \ 0 = A_1 + A_2 + A_3 \right. \\ x^1 \left| \ 2 = -3A_1 - 2A_2 - A_3 \right. \\ x^0 \left| -3 = 2A_1 \right. \end{cases}$$

Решение системы: A_1=-3/2; A_2=1; A_3=1/2.

$$\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{-3}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-2)}$$

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-3/2}{x}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1/2}{(x-2)}dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая алгебраическая дробь называется правильной? Неправильной? Приведите примеры.

2. Какие дроби называются простейшими? Приведите примеры.

3. Когда и как производится разложение правильной дроби на простейшие? Приведите примеры.

Задания для практики:

[3], №№ 7.13(1-15, 26, 29, 31).

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 19

Методы интегрирования (занятие 3)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования тригонометрических функций и иррациональных функций.

Ключевые слова. Интегрирование тригонометрических функций, интегрирование иррациональных функций.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Интегрирование тригонометрических функций.
2. Интегрирование простейших иррациональностей.

1. Интегрирование тригонометрических функций

Чаще всего встречаются интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции следующих видов:

I. $\int \sin^n xdx$, $\int \cos^n xdx$;

II. $\int \sin^m x \cos^n xdx$;

III. $\int tg^n xdx$, $\int ctg^n xdx$;

IV. $\int \sin ax \cdot \cos bxdx$; $\int \sin ax \cdot \sin bxdx$; $\int \cos ax \cdot \cos bxdx$

Рассмотрим каждый из этих видов.

I. $\int \sin^n xdx$ *или* $\int \cos^n xdx$

а) Если n- четное число, то удобно воспользоваться формулами понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

б) Если n- нечетное число, то, выделяя sin$x$ (или cos$x$ в первой степени, а затем, представляя $\sin xdx = d(-\cos x)$, либо $\cos xdx = d(\sin x)$, сводят данный интеграл к интегралу от многочлена.

II. При нахождении интегралов вида

$\int \sin^m x \cos^n xdx;$

возможны случаи:

а) оба числа m и n – четные. Тогда решают так же , как I,а)

б) одно из чисел m или n – нечетное, например $m=2k+1$(или оба m и n нечетные).

Тогда решают так же как I,б)

в) Если $m=n$ и четное, то можно применить формулу: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$,и решать по правилу I,а).

г) Если $m=n$ и оба нечетные, то можно применить тот же метод, что и в случае б), или вначале применить формулу: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, а затем решать по правилу I,б).

III. $\int tg^n xdx, \int ctg^n xdx$

Интегралы этого вида обычно решаются путем замены tgx или $ctgx$ новой переменной: $t=tgx$ ($t=ctgx$).

IV. Для отыскания интегралов вида

$\int \sin ax \cdot \cos bxdx; \int \sin ax \cdot \sin bxdx; \int \cos ax \cdot \cos bxdx$

используют следующие формулы:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right];$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right];$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right]$$

Интегралы вида $\int f(\sin x, \cos x)dx$**,** где f обозначает рациональную функцию, приводятся к интегралу от рациональной функции посредством

универсальной подстановки ***t=tg(x/2)***. Выражая sin*x*, cos*x*, tg*x* через *t*, получаем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2tg\,\frac{x}{2}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

x=2arctg*t*, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ (1)

Тогда $\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \varphi(t)dt$,

где $\varphi(t)$ -рациональная функция аргумента t.

2. Интегрирование простейших иррациональностей

Рассмотрим следующие случаи:

I.а) $\int f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx;$

б) $\int f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}\right)dx;$

II. $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx;$

III.а) $\int f\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx;$ б) $\int f\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx;$

в) $\int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx;$

IV. $\int f\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$

где *a, b, c, d,* A, B, C – постоянные, n- целое положительное число.

I. а) Интеграл $\int f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $ax+b=t^n$. Отсюда $x = \frac{t^n-b}{a}, dx = \frac{nt^{n-1}}{a}dt$

Тогда $\int f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \int f\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\cdot\frac{nt^{n-1}}{a}dt = \int \varphi(t)dt$

где $\varphi(t) -$ рациональная функция аргумента t.

б) Интегралы более общего вида $\int f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}\right)dx$ находятся с помощью подстановки: $ax+b=t^k$, где k- наименьшее общее кратное n и m.

II. Интеграл $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+s}}\right)dx;$ приводится к интегралу от рациональной функции с помощью аналогичной подстановки $\frac{ax+b}{cx+s}=t^n$.

$x=\frac{st^n-b}{a-ct^n}, dx=\frac{nt^{n-1}(a\cdot s-c\cdot b)}{\left(a-c\cdot t^n\right)^2}dt$.Получаем

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+s}}\right)dx=\int f\left(\frac{st^n-b}{a-ct^n}, t\right)\cdot\frac{nt^{n-1}(a\cdot s-c\cdot b)}{(a-c\cdot t^n)^2}dt=\int\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$-рациональная функция аргумента t.

III.Интегралы этого вида сводятся к интегралам, рационально зависящим от тригонометрических функций, следующим образом:

1) $\int f\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx;$ подстановкой $x=a\sin t; dx=a\cos tdt.$

2) $\int f\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx;$ подстановкой $x=a\cdot tgt; dx=a\frac{dt}{\cos^2 t}.$

3) $\int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx;$ подстановкой $x=\frac{a}{\sin t}; dx=-a\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}.$

IV. Интегралы вида $\int f\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$ можно привести к интегралам от рационально-тригонометрических функций.

Выделив полный квадрат из квадратного трехчлена Ax^2+Bx+C, находящегося под квадратным корнем, получаем следующие случаи:

$a^2-u^2(x); a^2+u^2(x); u^2(x)-a^2; -u^2(x)-a^2$, где $u^2(x)$-полный квадрат.

Последний случай сразу отпадает, так как подкоренное выражение не может быть отрицательным. Тогда вместо интеграла $\int f\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$ получаем:

$$\int f\left(x, \sqrt{u^2(x)-a^2}\right)dx; \text{ либо } \int f\left(x, \sqrt{a^2+u^2(x)}\right)dx;$$

$$\text{либо } \int f\left(x, \sqrt{a^2-u^2(x)}\right)dx \qquad ,$$

которые уже рассмотрены выше.

Интегралы вида:

$$\int e^{-x^2}dx; \int \sin x^2 dx; \int \cos x^2 dx; \int \frac{\sin x}{x}dx; \int \frac{\cos x}{x}dx; \int \frac{dx}{\ln x}; \int \frac{e^x}{x}dx; \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

не интегрируются в конечном виде, их нельзя выразить через основные элементарные функции с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления. Такого вида интегралы называют «неберущимися».

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая алгебраическая дробь называется правильной? Неправильной? Приведите примеры.
2. Какие дроби называются простейшими? Приведите примеры.
3. Когда и как производится разложение правильной дроби на простейшие? Приведите примеры.

Задания для практики:

[3], №№ 7.13(1-15, 26, 29, 31).

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
4. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 20

Определенный интеграл

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования определенного интеграла.

Ключевые слова. Определенный интеграл, формула Ньютона-Лейбница, метод замены переменной в определенном интеграле.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
2. Свойства определенного интеграла. Классы интегрируемых функций.
3. Теорема о среднем значении определенного интеграла и среднее значение функции на отрезке.
4. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
6. Вычисление площадей криволинейных фигур с помощью определенного интеграла.

1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Предполагаем, что функция $f(x)$ - произвольная, ограниченная на отрезке $[a;b]$ (то есть положительная или отрицательная, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва 1-го рода).

1.Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей (равных или неравных) точками $a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n=b$.

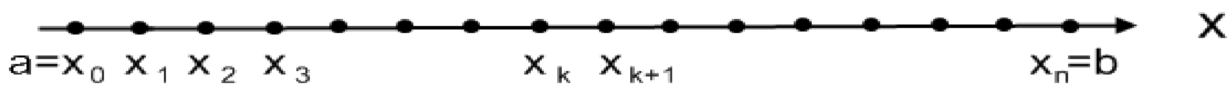


Рис.1

2.Длины отрезков, на которые разбивается отрезок *[a;b]*, обозначим через $\Delta x_k : \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

3.На каждом из полученных отрезков Δx_k возьмем произвольную точку t_k, $x_k \leq t_k \leq x_{k+1}$ и подсчитаем значение функции $f(t_k)$ в этих точках.

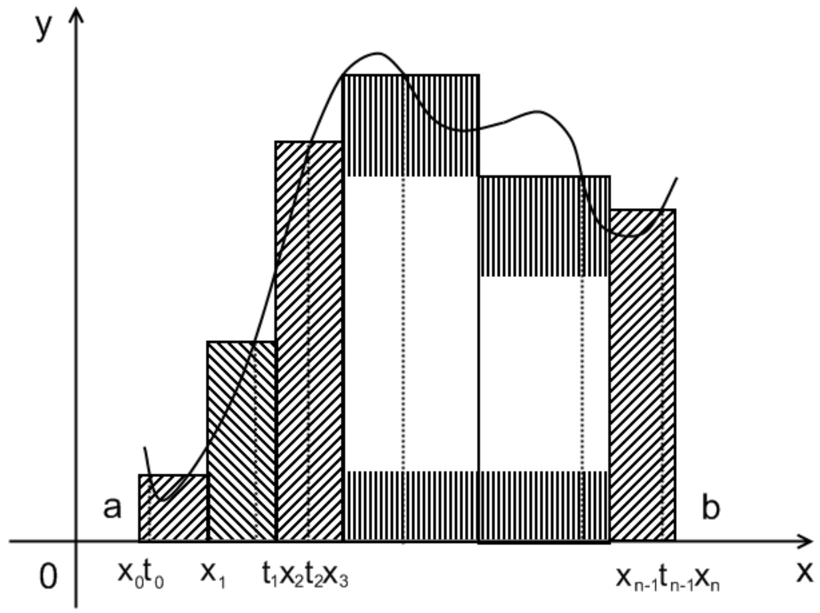


Рис.2

4.Составим сумму произведений значений функции $f(t_k)$ на длины соответствующих частичных отрезков Δx_k. Обозначим ее через

$S_n = f(t_0)\Delta x_0 + f(t_1)\Delta x_1 + \ldots$

$$+f(t_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k \quad (1)$$

Определение. Сумма $\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k$ называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ на отрезке *[a;b]*.

Интегральная сумма зависит:

1) от способа разбиения отрезка *[a;b]*;

2) от выбора точек t_k.

5. Рассмотрим множество интегральных сумм S_n для данной функции $f(x)$ на отрезке *[a;b]*.

Обозначим длину наибольшего из отрезков разбиения $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$ через $\lambda = \max \Delta x_k$ и перейдем к пределу при $\lambda \to 0$.

Определение. Если существует такое число J, что при любых способах разбиения и при любом выборе точек t_k величина S_n стремится к числу J при $\lambda \to 0$, то это число называется **определенным интегралом** от функции *f(x)* на отрезке *[a;b]* и обозначается:

$$J = \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

где *a*–нижняя граница (нижний предел) интегрирования; *b*–верхняя граница (верхний предел) интегрирования.

Итак,

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k \qquad (3)$$

Таким образом, **определенный интеграл** есть предел интегральных сумм и его значение зависит от отрезка интегрирования и подынтегральной функции.

Геометрическое истолкование определенного интеграла: определенный интеграл представляет собой **площадь криволинейной трапеции**, то есть $S_{aABb} = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$

Функция интегрируема, если:

1)она непрерывна на отрезке *[a;b]* или

2)ограничена на отрезке *[a;b]* и имеет конечное число точек разрыва 1-го рода.

Свойства определенного интеграла

Так как определенный интеграл есть предел интегральных сумм, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \{(x_1 - x_0) f(t_0) + (x_2 - x_1) f(t_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f(t_{n-1})\}$$

то некоторые свойства определенного интеграла вытекают из этой формулы:

1)значение определенного интеграла не зависит от обозначения аргумента в подынтегральном выражении, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$$

2)если функция интегрируема на отрезке *[a;b]*, то она интегрируема и на *[b;a]*, причем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4)

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$$

5) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)$ где k=const.

6) если функция интегрируема в наибольшем из промежутков *[a;b], [a;c], [c;b]*, то она интегрируема в двух других и имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

каково бы ни было взаимное расположение точек *a,b,c*.

Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами.

7)Если функция *f(x)* интегрируема и неотрицательна на *[a,b],* то есть $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, где $a<b$.

8)Если функции *f(x)* и *g(x)* интегрируемы на отрезке *[a;b]* и $f(x) \leq g(x)$, то

$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, в предположении, что $a<b$.

9)Если функция *f(x)* интегрируема на отрезке *[a;b]*, где $a<b$, и *m,M* – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *f(x)* на отрезке *[a;b]*, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Теорема о среднем значении определенного интеграла и среднее значение функции на отрезке.

Теорема *(о среднем значении определенного интеграла)*. Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a;b]*. Тогда на отрезке *[a; b]*, где $a < b$, существует хотя бы одна точка *t*, такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(t)\cdot(b-a)$ (4)

Доказательство. Так как функция *f(x)* непрерывна на отрезке, то на этом отрезке она достигает как наименьшее, так и наибольшее значения. Обозначив их соответственно через m и M, имеем: $m \le f(x) \le M$. Применяя свойство 9), получаем:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Отсюда, $m \le \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ (5)

Выражение $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ есть некоторое среднее число между m и *M(или среднее значение функции)*. Это число μ есть одно из значений функции *f(x)* на отрезке *[a;b]*, так как она, будучи непрерывной, принимает все значения, заключенные между наименьшим и наибольшим значениями. Поэтому между a и b найдется такая точка *t*, в которой $f(t) = \mu$.

Следовательно,

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(t) \ \text{или} \ \int_a^b f(x)dx = f(t)\cdot(b-a)$$

Геометрический смысл. Пусть $f(x) \ge 0$ на отрезке *[a;b]*. Тогда величина $\int_a^b f(x)dx$ равна площади криволинейной трапеции *αABb*, а величина $f(t)\cdot(b-a)$ - есть площадь прямоугольника *αKDb*.

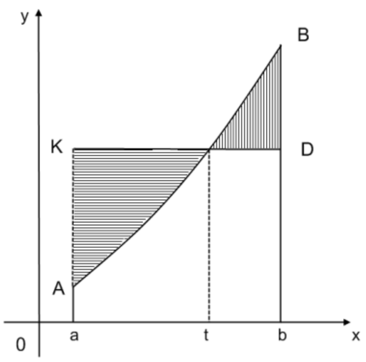


Рис.3

Теорема о среднем значении определенного интеграла утверждает, что площадь криволинейной трапеции равна площади некоторого прямоугольника, одна сторона которого равна длине отрезка *[a;b]*, а другая – значению подынтегральной функции в некоторой точке *t* на отрезке *[a; b]* (рис.3).

Формула Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (6)$$

Эта формула устанавливает связь между неопределенным и определенным интегралами и называется **формулой Ньютона-Лейбница.**

Формула Ньютона-Лейбница является основной формулой интегрального исчисления и читается так: определенный интеграл некоторой функции на отрезке *[a; b]* равен разности значений любой первообразной этой функции при *x=b* и при *x=a*.

Порядок вычисления определенного интеграла принято записывать так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где символ $F(x)\Big|_a^b$ читается: двойная подстановка от a до b в функции *F(x)*.

Пример.

$$\int_1^2 3(x-1)^2 dx = (x-1)^3\Big|_1^2 = (2-1)^3 - (1-1)^3 = 1$$

Методы вычисления определенного интеграла.

1. Интегрирование по частям. Пусть *u(x)* и *v(x)* – функции независимой переменной *x* , непрерывны на отрезке *[a; b]* вместе со своими производными *u′(x)* и *v′(x)*.

Тогда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \quad (7)$$

2. Замена переменной в определенном интеграле.

Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a;b]*, а функция *x = φ(t)* непрерывна вместе со своей производной *x′= φ′(t)* на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем

$\varphi(\alpha)=a;\varphi(\beta)=b$, и при изменении t на отрезке $[\alpha;\beta]$ значения $x = \varphi(t)$ не выходят за пределы промежутка $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \quad (8)$$

Замечание 1. При замене переменной в определенном интеграле к старой переменной возвращаться не надо, так как пределы интегрирования изменены при подстановке и относятся к новой переменной t.

Новые пределы интегрирования α и β являются корнями уравнения $a=\varphi(t)$, $b=\varphi(t)$ относительно неизвестной t.

Замечание 2. Чаще всего замена переменной в определенном интеграле производится не по формуле $x = \varphi(t)$, а по формуле $t = \psi(x)$, выражающей новую переменную через заданную.

Тогда новые пределы α и β определяются по формулам $\alpha=\psi(t),\beta=\psi(t)$.

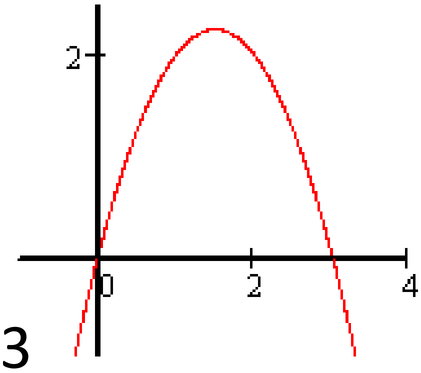
Вычисление площадей криволинейных фигур.

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нем, то определенный интеграл от этой функции на отрезке $[a;b]$ численно равен площади криволинейной трапеции, то есть

$$\int_a^b f(x)dx=S_{крив.тр.}$$

Поэтому при нахождении площади таких фигур можно пользоваться формулой:

$$S=\int_a^b f(x)dx \quad (9)$$



3

Рис.4

2. Если функция f(x) - отрицательная на отрезке *[a;b]* и непрерывная на нем, то значение определенного интеграла $S=\int_a^b f(x)dx$ отрицательно. Поэтому значение определенного интеграла берут по абсолютной величине, то есть

$$S_{крив.тр.}=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \quad (10)$$

3. Пусть функция *f(x)*– знакопеременная на отрезке *[a;b]*. Тогда фигура, ограниченная графиком этой функции и отрезком *[a;b]* оси *O*x, будет расположена по разные стороны от оси *Ox*.

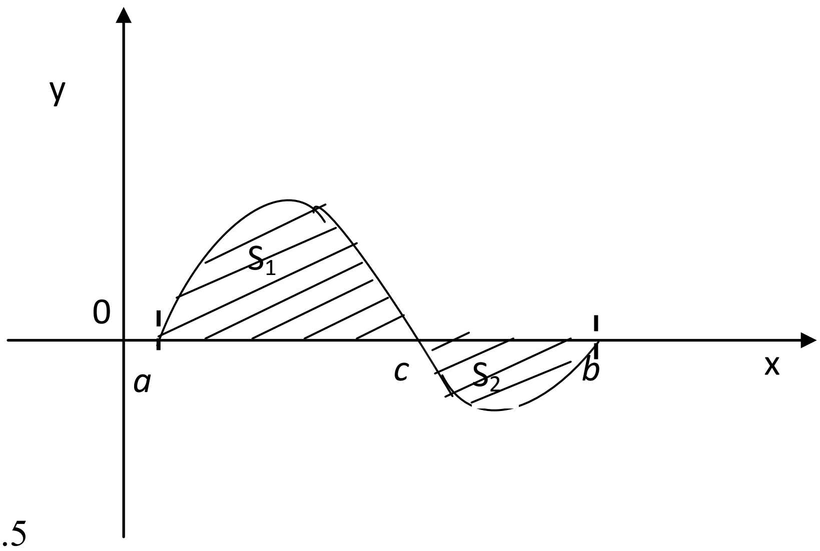


Рис.5

Площадь этой фигуры вычисляется по формуле:

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|. \quad (11)$$

4. Если криволинейная трапеция *ABCD* ограничена и снизу и сверху кривыми, уравнения которых *y=f₁(x), y=f₂(x),* двумя вертикальными прямыми *x=a, x=b*, причем $f_2(x)>f_1(x)$ для всех $x\in[a;b]$, то, рассматривая ее как разность площадей двух фигур *aBCb* и *aADb*, получим площадь фигуры *ABCD* по формуле:

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx \quad (12)$$

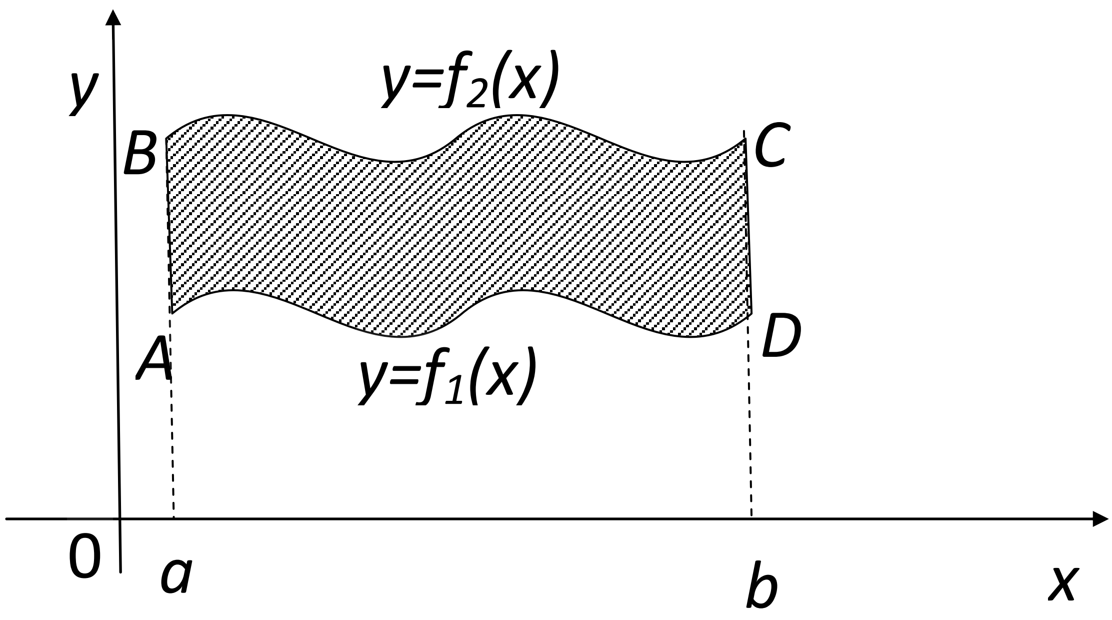


Рис.6

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется интегральной суммой данной функции f(x)на данном отрезке [a;b]?
2. Что называется определенным интегралом от данной функции на данном отрезке?
3. В чем состоит свойство сохранения знака определенного интеграла?
4. В чем состоит свойство аддитивности определенного интеграла?
5. Разъясните смысл формулы Ньютона-Лейбница.
6. В чем состоит метод замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле?

Задания для практики:

[2], с.419, №23; [3], №№ 8.1(3, 5, 8-15), 8.2(1-6, 10-13,17,19), 8.3(4), 8.4(1), 8.9(3, 6, 19, 20).

Глоссарий

Определенный интеграл есть предел интегральных сумм и его значение зависит от отрезка интегрирования и подынтегральной функции.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 21

Несобственные интегралы

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования несобственных интегралов.

Ключевые слова. Несобственный интеграл.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами от непрерывных функций.
2. Понятие сходимости несобственных интегралов I рода.

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами от непрерывных функций.

1.Если функция *y = f(x)* непрерывна на *(a;b]*, а в точке *x=a* неограниченна (разрыв 2-го рода), то есть стремится к бесконечности. Тогда на отрезке $[a+\varepsilon;b]$ функция *f(x)* интегрируема.

Определение. Конечный или бесконечный предел интеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ называют **несобственным интегралом** функции *f(x)* и обозначают:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (1)$$

($a+\varepsilon$ стремится к *a*, оставаясь в данном интервале).

Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**. Если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

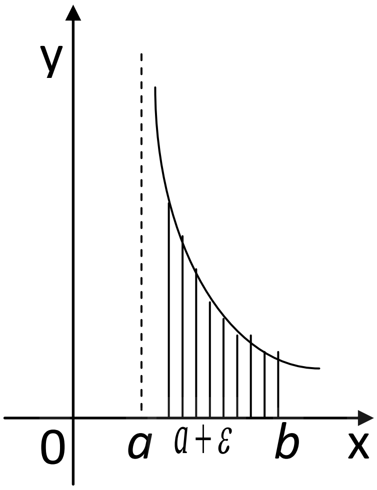


Рис.1

2. Пусть функция *y = f(x)* непрерывна на *[a;b)*, в точке *x=b* неограниченна (разрыв 2-го рода), то есть стремится к бесконечности.

Определение. Конечный или бесконечный предел интеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ называют **несобственным интегралом** функции *f(x)* и обозначают: $\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (2)

($b-\varepsilon$ стремится к *b*, оставаясь в данном интервале).

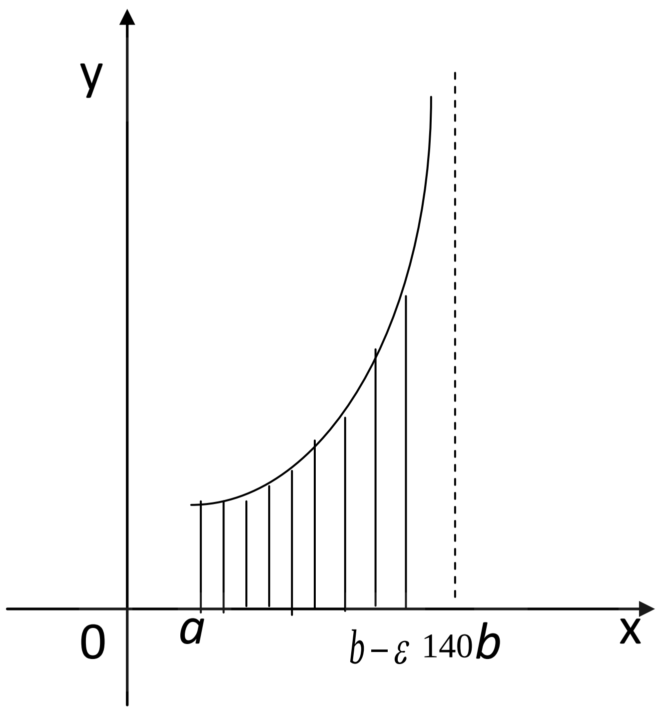


Рис.2

3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a; b]$, за исключением точки $x = c$, где она терпит бесконечный разрыв (рис. 3). Тогда по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \quad (3)$$

где $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 > 0$. Интеграл (3) называется *несобственным интегралом* от *разрывной функции*. Если оба предела, стоящие в правой части равенства (3) сходятся, то несобственный интеграл также *сходится*, а если хотя бы один из них не существует, - *расходится*. В случае, когда $c = a$ или $c = b$, в правой части равенства (3) будет только один предел.

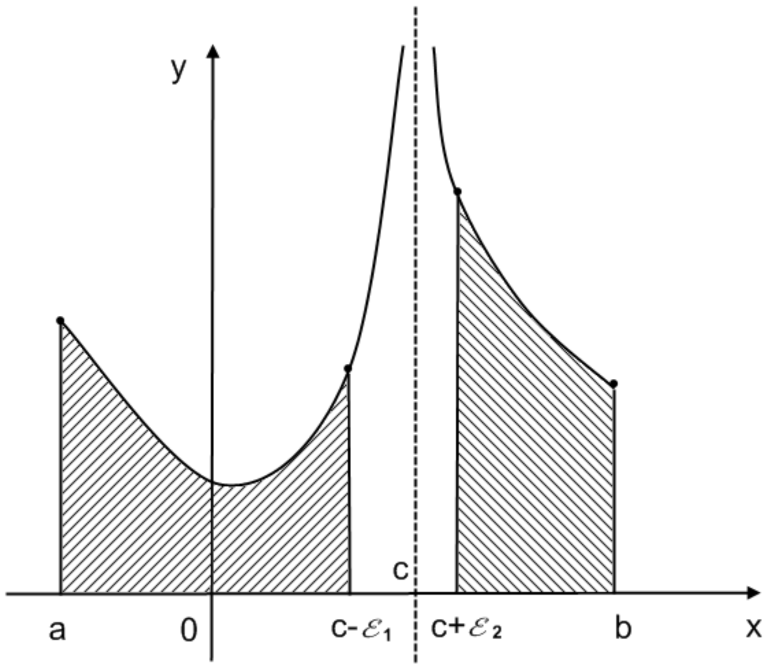


Рис. 3

4. Если функция $f(x)$ неограниченна при $x=a$ и при $x=b$, непрерывна в интервале $(a;b)$, то несобственный интеграл функции $f(x)$ от a до b определяется равенством:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx \quad (4)$$

2. Интегралы по бесконечному промежутку

1. Пусть функция *f(x)* определена, непрерывна на [*a*;+∞). Тогда она будет интегрируема в любой ее конечной части *[a;M]*, то есть существует интеграл $\int_a^M f(x)dx$.

Определение. Конечный или бесконечный предел интеграла $\int_a^M f(x)dx$ при М→∞ называют **несобственным интегралом функции *f(x)* с бесконечным верхним пределом** в промежутке от *a* до +∞ и обозначают:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx \quad (5)$$

Если предел (5) конечен, то **несобственный интеграл сходится**, а функция *f(x)*называется **интегрируемой на бесконечном промежутке**.

Если предел (5) бесконечен или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

2. Аналогично определяют **несобственный интеграл функции *f(x)* с бесконечным нижним пределом** в промежутке от -∞ до *b* и обозначают:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^b f(x)dx$$

3. И аналогично **несобственный интеграл функции *f(x)* с обоими бесконечными пределами** в промежутке от -∞ до +∞ и обозначают:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^a f(x)dx + \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$$

Где -∞<*a*<+∞. Если сходятся интегралы, расположенные в правой части равенства, то несобственный интеграл сходится. Если хотя бы один из интегралов, расположенных в правой части расходится, то расходится и несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

***Пример*.** Дан интеграл

$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}dx$, где *a>0.*

Установить, при каких значениях *p* этот интеграл сходится, а при каких – расходится.

Рассмотрим случаи: p>1, p<1, p=1.

1. Пусть p>1, то есть p-1>0. Тогда

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Bigg|_a^{+\infty} = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)\Bigg|_a^{+\infty} = \frac{1}{1-p}\left(0 - \frac{1}{a^{p-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{a^{p-1}}$$

Так как получили конечное значение, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}dx$ сходится.

2. p=1.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}dx = \ln|x|\Big|_a^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln a = +\infty$$

Несобственный интеграл расходится.

3. p<1, то есть p-1<0

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Bigg|_a^{+\infty} = \frac{1}{1-p}(+\infty - a^{1-p}) = +\infty.$$

Несобственный интеграл в этом случае расходится.

Таким образом, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}dx$ сходится при значениях p>1 и расходится при значениях $p \le 1$.

Теорема 1. Если сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится также интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)dx$, где $A>a$. При этом $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{A} f(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема 2. Из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$, где $c=const$.

Теорема 3. Если сходятся оба интеграла : $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty}\big(f(x) \pm g(x)\big)dx$.

Теорема 4. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big)dx$ также расходится.

Признаки сходимости несобственных интегралов по бесконечному промежутку

Пусть *f(x)*>0. Тогда интеграл $\int\limits_a^{M} f(x)dx = \varPhi(M)$, рассматриваемый как функция своего верхнего предела, есть монотонно возрастающая функция переменной М. Используя **теорему о пределе монотонной функции** (если функция монотонна и ограничена, то она имеет предел - достаточное условие существования предела), имеем: для сходимости несобственного интеграла от положительной функции необходимо и достаточно, чтобы при возрастании М интегралы $\int\limits_a^{M} f(x)dx$ были ограничены сверху, то есть $\int\limits_a^{M} f(x)dx \le l$, где *l=const*.

Признак сравнения.

Если неравенство $0 < f(x) \le \varphi(x)$ выполняется при $x \in (a;+\infty)$, то из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Признак сравнения в предельной форме.

Если существует предел отношения двух положительных функций *f(x)* и $\varphi(x)$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k \ne 0$, то интегралы от этих функций $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Сходимость несобственного интеграла по бесконечному промежутку интегрирования от функции произвольного знака.

Если подынтегральная функция произвольного знака, то удобно пользоваться следующим утверждением: из сходимости интеграла $\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right|$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пример .Доказать, что интеграл сходится

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)e^x}.$$

Так как $\dfrac{1}{(x^2+1)e^x}\le\dfrac{1}{x^2+1}$ при $x \ge 1$, то

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)e^x}=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{M\to\infty} arctgx\Big|_1^M=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(arctgM-arctg1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

сходится, то исходный интеграл также сходится.

Замечание. При вычислении несобственных интегралов с бесконечным промежутком интегрирования часто пользуются символическим равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty},где\, F'(x)=f(x)$$

$$и\ F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение несобственного интеграла от непрерывной функции по бесконечному промежутку, приведите примеры.
2. Какие интегралы относятся к несобственным интегралам I рода?
3. Какие несобственные интегралы называются сходящимися; расходящимися?

Задания для практики:

[2], с. 436, №№ 6, 7, 8(в); [3], №№ 8.27(1-15), 8.28(1-11).

Глоссарий

Несобственный интеграл. Конечный или бесконечный предел интеграла $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ называют **несобственным интегралом** функции *f(x)* и обозначают: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ (1)

($a+\varepsilon$ стремится к *a*, оставаясь в данном интервале).

Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**. Если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

Конечный или бесконечный предел интеграла $\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ называют **несобственным интегралом** функции *f(x)* и обозначают: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (2)

($b-\varepsilon$ стремится к *b*, оставаясь в данном интервале).

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 22

Кратные интегралы.

Аннотация. Данная тема раскрывает понятие двойного интеграла и дает его применение.

Ключевые слова. Область на плоскости, функция двух переменных, интегральная сумма, двойной интеграл.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие двойного интеграла.
2. Изменение порядка интегрирования.
3. Геометрический смысл и применение двойного интеграла.

Рассмотрим некоторую область D на плоскости. Разобьем ее на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние $\Delta_i x$, а по оси y – на $\Delta_i y$.Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δi, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка Si стремится к нулю.

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения ($n\to\infty$) области D интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется *двойным интегралом от функции f(x, y)* по области D

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_D f(x, y)dxdy .$$

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла:

Теорема 1. Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области D, то двойной интеграл существует.

Замечание1. Двойной интеграл может существовать не только для непрерывных функций.

Замечание2. Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой в области *D* функции предел интегральных сумм существует и не зависит от способа разбиения области.

Свойства линейности двойного интеграла:

1)

$$\iint_D [f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]dydx =$$
$$= \iint_D f_1(x,y)dydx + \iint_D f_2(x,y)dydx - \iint_D f_3(x,y)dydx$$

2)

$$\iint_D kf(x,y)dydx = k\iint_D f(x,y)dydx.$$

Свойство аддитивности двойного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)dydx = \iint_{D_1} f(x,y)dydx + \iint_{D_2} f(x,y)dydx.$$

Область D, определяемая неравенствами $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, где $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ - непрерывные функции на отрезке $[a,b]$, называется *правильной относительно оси Oy* (рис. 1 а).

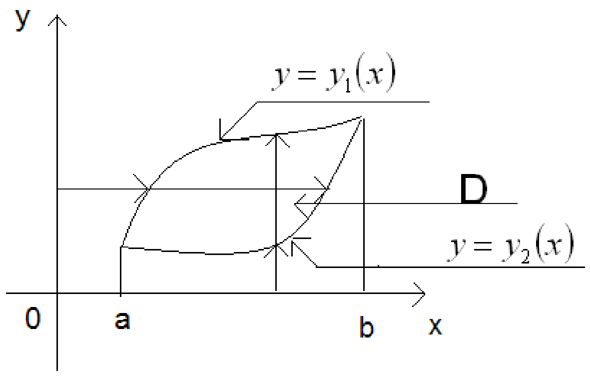


Рис. 1. а)

Аналогично определяется правильная область относительно оси Ох (рис. 1. б).

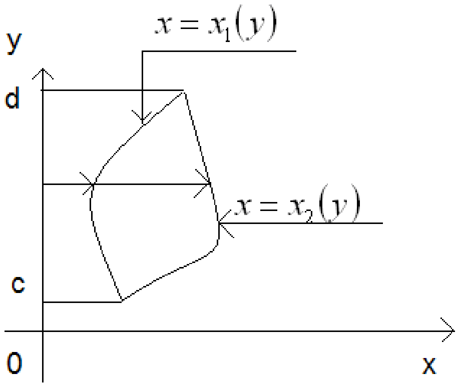


Рис. 1. б)

Если D – область интегрирования, правильная относительно оси Оу (рис. 1. а), тогда *двойной интеграл* вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1)$$

Правую часть формулы (1) называют *повторным интегралом*, интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ называют *внутренним интегралом*, $\int\limits_a^b dx$ - *внешним*.

Вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего, в котором переменная x принимается при интегрировании за постоянную величину. В результате интегрирования получается некоторая функция от x, которая интегрируется затем по отрезку $[a,b]$. Полученное число – значение интеграла (1).

Если область D является правильной относительно оси Ох (рис. 1.б), то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2)$$

Процесс расстановки пределов интегрирования для внутреннего и внешнего интегралов называется *приведением двойного интеграла к повторному*, а переход от формулы (1) к формуле (2) или наоборот – *изменением порядка интегрирования*.

Если область D не является правильной ни относительно оси Оу, ни относительно оси Ох, её разбивают на конечное число областей $D_1, D_2, ..., D_m$, правильных относительно осей Оу или Ох, и при вычислении двойного интеграла по области D используют свойство аддитивности.

*Пример 1***.** Расставить пределы в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, изменить порядок интегрирования, если границы области D: $y=4-x^2$, $y=5x-2$.

Решение: Построим область D. Первая линия – парабола с вершиной в точке (0, 4), симметричная относительно оси OY. Вторая линия – прямая.

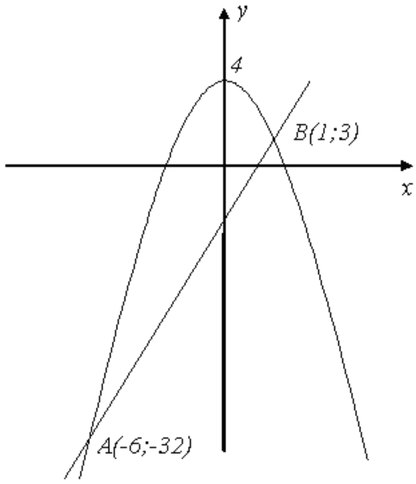


Рис. 2.

Решая систему уравнений $\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=5x-2 \end{cases}$, найдём координаты точек пересечения данных параболы и прямой: A (-6, -32), B (1, 3) (см. рис. 2.).

Область D – правильная в направлении оси OY. Получаем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-6}^{1} dx \int\limits_{5x-2}^{4-x^2} f(x,y)dy\,.$$

Изменим порядок интегрирования. Для этого область D представим в виде двух областей (правильных в направлении оси Ox): D_1 - ограниченная дугой параболы $x^2=4-y,\ 3\le y\le 4$, и D_2 - ограниченная слева дугой параболы $x=-\sqrt{4-y}$ и справа прямой $x=\dfrac{1}{5}(y+2)$, $-32\le y\le 3$ (рис. 2.2). Тогда

$$\int\limits_{-6}^{1} dx \int\limits_{5x-2}^{4-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_{3}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-32}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{5}(y+2)} f(x,y)dx.$$

*Пример 2***.** Вычислить $\iint\limits_D (3x+2y)dxdy$, если область D ограничена прямымиу $= x$, $y = -x$, $x = 2$, $x = 3$.

Решение: Построим область D (рис. 3). Область интегрирования – правильная в направлении оси OY.

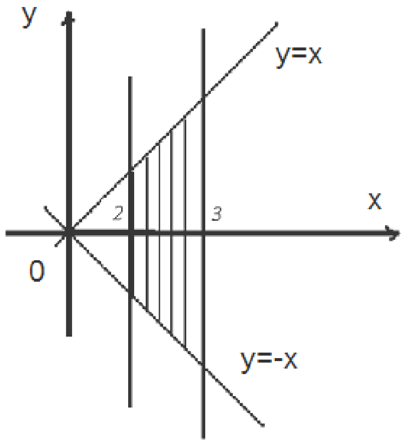


Рис. 3.

Получаем

$$\iint\limits_D (3x+2y)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_{-x}^{x} (3x+2y)dy = \int\limits_2^3 \left[3xy + y^2\right]\Big|_{-x}^{x} dx =$$

$$\int\limits_2^3 (3x^2 + x^2 + 3x^2 - x^2)dx = 6\int\limits_2^3 x^2 dx = 6\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 38.$$

Геометрический смысл и применение двойного интеграла заключается в следующем:

Если функция $f(x,y) \geq 0$ в области D плоскости XOY, то двойной интеграл численно равен *объёму цилиндрического тела*Q с основанием D и образующей, параллельной оси OZ, которое ограничено сверху поверхностью $z = f(x,y)$ (рис.4.)

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (4)$$

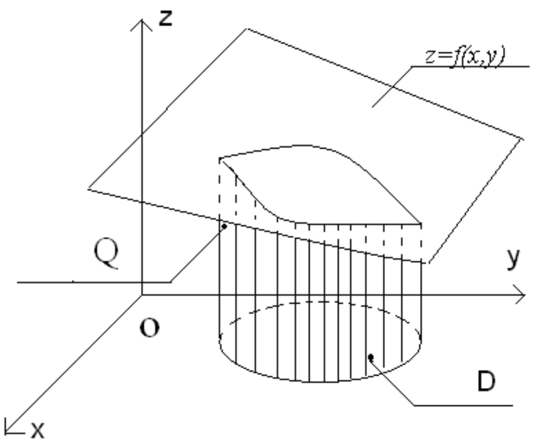


Рис.4 .

В частности, когда $f(x,y)$ = 1, двойной интеграл численно равен *площади*S области D

$$S = \iint\limits_D dxdy\,. \qquad (5)$$

*Пример 2.3***.** Найти объём тела, ограниченного поверхностями: параболическим цилиндром $y = x^2$, плоскостями $y = 1$, $z = 0$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$.

Решение: Изобразим область D на плоскости xOy:

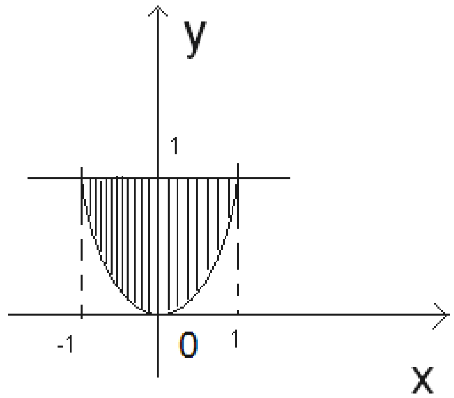


Рис. 6.

Согласно геометрическому смыслу двойного интеграла объём цилиндрического тела равен

$$V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx \int\limits_{x^2}^{1} dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} y^2 dy = \int\limits_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{3}(1 - x^6)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^2 - x^4)dx + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1 - x^6)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x}{3} - \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{88}{105}.$$

Задания для практики:

[1], с. 316-328; [2], №№ 2304-2311, 2348-2354, 2365-2368.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. Сформулируйте свойства двойного интеграла.
3. Как свести двойной интеграл к повторному?
4. Каков геометрический смысл двойного интеграла?
5. Какие приложения двойного интеграла вы знаете?

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
3. Презентация

Лекция 23

Числовые ряды (занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия числового ряда, сходимости ряда, признаки сходимости рядов.

Ключевые слова. Числовой ряд, сходимость ряда, сумма ряда, признаки сходимости рядов.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие числового ряда.
2. Понятие сходимости и суммы ряда.
3. Свойства сходящихся числовых рядов.
4. Необходимый признак сходимости числовых рядов.
5. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами : признак сравнения.

При решении ряда математических задач, в том числе и в приложениях математики в экономике, приходится рассматривать суммы, составленные из бесконечного множества слагаемых. Задача суммирования бесконечного множества слагаемых решается в теории рядов.

Понятие числового ряда.

Определение. Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ соединенных знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (1)$$

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются **членами ряда**, а член u_n - **общим** или **n-м членом** ряда.

Ряд (1) считается заданным, если известен его общий член $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \ldots$), т.е. задана функция $f(n)$ натурального аргумента. Например, ряд с общим членом $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}$ имеет вид

$$\frac{1}{1^2\cdot 2}-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 4}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}+\ldots.$$

Более сложной является обратная задача: по нескольким первым членам ряда написать общий член ряда.

Пример. Найти общий член ряда:

а) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{6}{13}+\ldots$; б) $\dfrac{3}{5}-\dfrac{8}{10}+\dfrac{15}{17}-\dfrac{24}{26}+\ldots$.

Решение. Нетрудно убедиться, что для ряда

а) общий член $u_n = \dfrac{2n}{4n+1}$, а для ряда

б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\left[(n+1)^2-1\right]}{(n+1)^2+1}$.

Сходимость и сумма ряда.

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$,…, $S_n = u_1 + u_2 \ldots + u_n$.

Сумма первых членов ряда S_n называется **n-й частичной суммой ряда**.

Определение. Ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\ . \qquad (2)$$

Число S называется **суммой** ряда. В этом смысле можно записать

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n = S \qquad (3)$$

если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется **расходящимся**.

Пример. Исследовать сходимость геометрического ряда, т.е. ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$a+aq+aq^2\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1} \qquad (4)$$

Решение. Сумма n членов геометрической прогрессии, т.е. n-я частичная сумма ряда при $q\neq 1$ равна

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (5)$$

Возможно несколько случаев:

1. если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, следовательно,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}\right) = \frac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его сумма $S = \frac{a}{1-q}$;

2. если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд расходится;

3. если $q=1$, то ряд (4) примет вид $a+a+...+a+...$, его n-я частичная сумма $S_n = \underbrace{a + a + ... + a}_{n\ раз} = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, т.е. ряд расходится;

4. если $q=-1$, то ряд (4) примет вид $a-a+a-a+...+(-1)^{n-1}a+...$ и $S_n=0$ при n четном и $S_n = a$ – при n нечетном, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, и ряд расходится.

Таким образом, геометрический ряд сходится к сумме $S = \frac{a}{1-q}$ при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

Свойства сходящихся числовых рядов.

1. Если ряд $u_1+u_2+...+u_n+...$ сходится и имеет сумму S, то и ряд $\lambda u_1+\lambda u_2+...+\lambda u_n+...$

(полученный умножением данного ряда на число λ) также сходится и имеет сумму λS.

2. Если ряды $u_1+u_2+...+u_n+...$ и $v_1+v_2+...+v_n+...$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то ряд $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+...+(u_n+v_n)+$ ... (представляющий сумму данных рядов) также сходится, и его сумма равна $S_1 + S_2$.

Свойства 1 и 2 непосредственно вытекают из свойств пределов числовых последовательностей.

3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.

Пусть в сходящемся ряде (1) отброшены n членов (в принципе можно отбрасывать члены с любыми номерами, лишь бы их было конечное число). Покажем, что полученный ряд

$u_{n+1}+ u_{n+2}+\ldots+ u_{n+m}+\ldots,$ (7)

имеющий частичную сумму

$\sigma_m= u_{n+1}+ u_{n+2}+\ldots+ u_{n+m}$, также сходится.

Очевидно, что $S_{n+m} = S_n+ \sigma_m$. Отсюда следует, что при фиксированном n конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+m}$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m$. А это и означает, что ряд (7) сходится.

Ряд (7), полученный из данного отбрасыванием его первых *n* членов, называется *n*-м **остатком ряда**.

Если сумму n-го остатка ряда обозначить через r_n, т.е.

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots = \lim_{m\to\infty} \sigma_m \qquad (8)$$

То сумму ряда (1) можно представить в виде

$S = S_n+ r_n$. (9)

В результате мы подошли к свойству 4.

4. Для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы при n →∞ остаток ряда стремился к нулю, т.е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Это свойство вытекает из теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций .

Необходимый признак сходимости.

Гармонический ряд

Теорема (необходимый признак сходимости). Если ряд сходится, то предел его общего члена u_n при n→∞ равен нулю, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Выразим n-й член ряда через сумму его n и (n-1) членов, т.е. $u_n= S_n - S_{n-1}$. Так как ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 .$$

<u>Следствие.</u> Если предел общего члена ряда (1) при n→∞ не равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Замечание. Следует подчеркнуть, что рассмотренная теорема выражает лишь необходимый, но недостаточный признак сходимости ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то из этого еще не следует, то ряд сходится.

В качестве **примера** рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \quad (10)$$

называемый **гармоническим**.

Необходимый признак сходимости выполнен:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Докажем, что несмотря на это, гармонический ряд расходится.

Вначале получим вспомогательное неравенство. С этой целью запишем сумму первых 2n и n членов ряда:

$$S_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Найдем разность

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Заменяя в сумме каждое слагаемое наименьшим, равным $\frac{1}{2n}$, придем к вспомогательному неравенству

$$S_{2n}-S_n > \underbrace{\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n\ \text{раз}} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ \text{или}\ \ S_{2n}-S_n > \frac{1}{2}.$$

Предположим противное, т.е. что гармонический ряд сходится, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ и, переходя к пределу в неравенстве , получим, что S-S ≥1/2 или 0 ≥1/2 .

Мы пришли к противоречию, следовательно, наше предположение о сходимости гармонического ряда неверно, т.е. гармонический ряд расходится.

Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости.

Теорема (признак сравнения). Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (1)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n (2)$, причем члены первого ряда не превосходят членов второго, т.е. при любом n

$u_n \le v_n$ (11)

Тогда:

а) если сходится ряд 2, то сходится и ряд 1;

б) если расходится ряд 1, то расходится и ряд 2.

Замечание. Так как сходимость ряда не изменяется при отбрасывании конечного числа членов ряда, то условие (11) не обязательно должно выполняться с первых членов рядов и только для членов с одинаковыми номерами n. Достаточно, чтобы оно выполнялось начиная с некоторого номера $n=k$, или чтобы имело место неравенство $u_n \le v_{m+n}$, где m – некоторое целое число.

Отметим **«эталонные»** ряда, часто используемые для сравнения:

1. геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ - сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| \ge 1$;
2. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится;
3. обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots \qquad (12)$$

сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le1$

при $\alpha<1$ расходимость ряда (12) следует из признака сравнения, так как в этом случае члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ больше соответствующих членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а в частном случае при $\alpha = 2$ сходимость ряда (12) может быть доказана сравнением этого ряда со сходящимся (6).

Теорема (предельный признак сравнения). Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \ne 0$, то ряды одновременно сходятся, либо расходятся.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение числового ряда.

2. Какой ряд называется сходящимся; расходящимся? Дайте определение частичной суммы, суммы ряда.

3. В чем отличие конечного суммирования от бесконечного?

1. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
2. Можно ли утверждать, что ряд сходится, если общий член ряда стремится к нулю при n→∞? Приведите пример.
3. Можно ли утверждать, что ряд расходится, если предел общего члена ряда не равен нулю при n→∞? Приведите пример.
4. Сформулируйте достаточный признак расходимости ряда.
5. Перечислите свойства сходящихся рядов.

Задания для практики:

[2], с. 479, №№ 9, 10, 17(1,10), [3], №№ 9.1, 9.2, 9.4(1-5, 9, 15).

Глоссарий

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел u_1, u_2, ..., u_n, … соединенных знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. **Суммой** ряда называется число S.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 24

Числовые ряды (занятие 2)

Аннотация. Данная тема содержит признаки сходимости рядов, понятие знакочередующегося ряда и признак сходимости знакочередующегося ряда, понятие абсолютной и условной сходимости рядов.

Ключевые слова. Знакочередующийся ряд, абсолютная и условная сходимость ряда.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Признак Даламбера, алгебраический признак Коши, интегральный признак Коши.
2. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
3. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов с произвольными членами.

1. Признак Даламбера, алгебраический признак Коши, интегральный признак Коши.

Теорема (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения (n + 1) –го члена к n-му члену $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \boldsymbol{l}$. Тогда, если l<1, то ряд **сходится**; если l>1, то ряд **расходится**; если l=1, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Замечание 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$, то ряд расходится.

Замечание 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то как отмечалось выше, признак Даламбера ответа о сходимости ряда не дает, и рекомендуется перейти к другим признакам сходимости.

Радикальный(алгебраический) признак Коши

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, члены которого положительны, такой что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если $l<1$; расходится, если $l>1$. При $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Теорема (интегральный признак сходимости). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, члены которого положительны и не возрастают,

т.е. $u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n \geq \dots$, а функция $f(x)$, определенная при $x \geq 1$, непрерывная и невозрастающая и

$f(1) = u_1, f(2)=u_2, ..., f(n)=u_n, \dots$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n) \quad (1)$$

Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$. Если расходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$, то расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Пример. Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Функция $f(x)$ при $x > 0$ (а значит и при $x \geq 1$) положительная и невозрастающая (точнее убывающая). Поэтому сходимость ряда равносильна сходимости несобственного интеграла $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Имеем I = $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$.

Если $\alpha=1$, то I = $\lim_{b\to\infty}(\ln|x|\Big|_1^b) = \lim_{b\to\infty}(\ln|b| - \ln 1) = \infty$.

Если $\alpha\neq 1$,то I= $\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b\right) = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}(b^{1-\alpha}-1) = \begin{cases} 1/(\alpha-1) & при\ \alpha>1 \\ \infty & при\ \alpha<1 \end{cases}$

Итак, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

2. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Под **знакочередующимся рядом** понимается ряд, в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны:

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$, *где* $u_n > 0$.

Теорема (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине : $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ и предел его общего члена при $n \to\infty$ равен нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена: $S \leq u_1$.

Следствие. Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

$$|r_n| \leq u_{n+1}\ . \qquad (2)$$

Пример. Какое число членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ надо взять, чтобы вычислить его с точностью до 0,001?

Решение. По условию $|r_n| < 0{,}001$. Учитывая следствие теоремы Лейбница (2), запишем более сильное неравенство $|u_{n+1}| \leq 0{,}001$ или $\frac{1}{(n+1)^2} \leq 0{,}001$, откуда $(n+1)^2 \geq 1000$ и $n \geq \sqrt{1000}-1$, или $n \geq 30{,}6$, т.е. необходимо взять не менее 31 члена ряда.

3. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов с произвольными членами.

Пусть $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$(3) **знакопеременный ряд** , в котором любой его член u_n может быть как положительным, так и отрицательным.

Определение 1. Ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Определение 2. Ряд называется **условно сходящимся**, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов :

1) Если абсолютно сходящийся ряд (3) имеет своей суммой S, а ряд (17.4) имеет своей суммой $\bar{S}$, то $\bar{S} \geq |S|$.

2) В абсолютно сходящемся ряде (3) можно переставлять члены, причем вновь полученный ряд также сходится и его сумма будет равна сумме исходного ряда.

3) Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать, причем сумма вновь полученного ряда будет равна произведению их сумм.

4) Теорема (**достаточный признак сходимости знакопеременного ряда**). Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (4)$$

сходится, то сходится и данный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (3).$$

Следует отметить, что обратное утверждение неверно. Ряд (4) может расходиться, а ряд (3) сходиться. Например, ряд

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$ сходится по признаку Лейбница, а ряд из абсолютных величин его членов $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ (гармонический ряд) расходится.

Таким образом, рассмотренный выше ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ - абсолютно сходящийся, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ - условно сходящийся.

Различие между абсолютно сходящимися и условно сходящимися рядами заключается в следующем: абсолютно сходящиеся ряды сходятся в основном в силу того, что их члены быстро убывают, а условно сходящиеся - в результате того, что положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга.

Пример. Исследовать сходимость ряда:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$

Решение. Очевидно, что задан ряд с положительными членами, так как $\sin\frac{\pi}{2^n}>0$, ибо аргумент синуса $0<\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2}$ при любом n. Так как члены данного ряда меньше членов сходящегося геометрического ряда со знаменателем q =1\2 < 1, т.е. $\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}$

(ибо при $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\sin x<x$), то данный ряд сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

Решение. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+2)}\div\frac{1}{\ln(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}=1,$$ т.е.

вопрос о сходимости ряда остается открытым. Проверим выполнение необходимого признака: $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$, т.е. необходимый признак выполнен, но вопрос о сходимости ряда по-прежнему не решен.

Применим признак сравнения в более простой предельной форме. Сравним данный ряд, например, с гармоническим.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\div\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}=\infty,$$ т.е. ответа о сходимости ряда нет.

Применим, наконец, признак сравнения в обычной форме. Сравним данный ряд с тем же гармоническим рядом, у которого отброшен первый член:

1\2 + 1\3+...+1\n+1+... . Так как члены рассматриваемого ряда больше членов расходящегося гармонического ряда ($\frac{1}{\ln 2} \rangle \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\ln 3} \rangle \frac{1}{3}$ и вообще $\frac{1}{\ln(n+1)} \rangle \frac{1}{(n+1)}$, что вытекает из очевидного неравенства ln x <x), то данный ряд расходится.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами Вы знаете? Сформулируйте их.
2. Какой ряд называется знакочередующимся? Каким признаком пользуются для выяснения сходимости таких рядов? Сформулируйте его.
3. Дайте понятие абсолютной и условной сходимости числовых рядов?
4. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

Задания для практики:

[2], с. 480, №17(2-15); [3], №№ 9.3(1-12), 9.5(1-6), 9.6, 9.7(1-10).

Глоссарий

Знакочередующийся ряд - ряд, в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны:

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ...$, *где* $u_n > 0$.

Абсолютно сходящийся рял. Ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Условно сходящийся ряд. Ряд называется **условно сходящимся**, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 25

Функциональные ряды

Аннотация. Данная тема содержит понятия функционального ряда, степенного ряда, области сходимости степенного ряда, интервала и радиуса сходимости степенного ряда.

Ключевые слова. Функциональный ряд, степенной ряд, область сходимости степенного ряда, интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие функционального ряда. Степенной ряд.
2. Область сходимости степенного ряда.
3. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенных рядов.
4. Свойства сходящихся степенных рядов.

Понятие функционального ряда

Определение. Ряд называется функциональным, если его членами являются функции некоторого аргумента x

1**. Понятие степенного ряда**

Мы рассматривали ряды, членами которых были числа, т.е. числовые ряды.

Определение. Ряды, членами которых являются степенные функции

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 +\ldots+c_nx^n+ \ldots \qquad (1)$$

называются **степенными**, а числа c_0, c_1, $\ldots c_n$ - **коэффициентами** степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда

Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд (1) сходится, называется **областью сходимости степенного ряда.**

Пример Найти область сходимости степенного ряда

$1+x+x^2 + x^n + \dots$.

<u>Решение</u>. Данный ряд можно рассматривать как геометрический ряд со знаменателем q=x, который сходится при $|q|= |x|<1$. Отсюда $-1<x<1$, т.е. **областью сходимости** является интервал (-1;1).

2. **Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости.**

Теорема Абеля.

1) Если степенной ряд сходится при значении $x=x_0\neq 0$ (отличном от нуля), то он сходится и, притом абсолютно, при всех значениях x таких, что $|x|<|x_0|$.

2) Если степенный ряд расходится при $x=x_1$, то он расходится при всех значениях x таких, что $|x| >|x_1|$.

Доказательство:

1) По условию ряд (23.1) сходится при $x=x_0\neq 0$, следовательно, выполняется необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0$.

Отсюда следует, что последовательность $\left|c_n x_0{}^n\right|$ ограничена, т.е. существует такое число M>0, что для всех n выполняется неравенство

$$\left|c_n x_0{}^n\right| < M \qquad (2)$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \left|c_n x_0^n\right|$, который представим в виде

$$\left|c_0\right| + \left|c_1 x_0\right|\left|\frac{x}{x_0}\right| + \dots + \left|c_n x_0^n\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \qquad (3)$$

Члены ряда (3) согласно неравенству (2) меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + \dots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots,$$

Представляющего геометрический ряд, который сходится, когда его знаменатель $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$, т.е. $|x| < |x_0|$, следовательно, на основании признака сравнения ряд (1) сходится.

2) По условию ряд (1) расходится при $x=x_1$. Покажем, что он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$ ряд (1) сходится. Тогда по доказанному выше он должен сходиться и в точке x_1 (ибо $|x_1| < |x|$), что противоречит условию. Таким образом, для всех x таких, что $|x| > |x_1|$ ряд (1) расходится.

Из теоремы Абеля (см.рис.1) следует, что существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится.

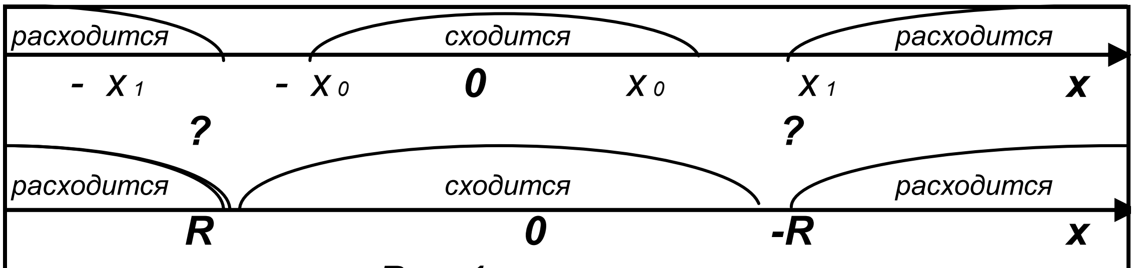


Рис. 1.

Число R получило название **радиуса сходимости**, а интервал (-R;R) – **интервала сходимости** степенного ряда.

На концах интервала сходимости, т.е. при x=-R, и x=R, ряд может как сходиться, так и расходиться (см.рис.1)

Выражение радиуса сходимости степенного ряда (1) через его коэффициенты:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \tag{4}$$

<u>Замечание.</u> Следует отметить, что у некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку (R=0), у других охватывает всю ось Ox ($R=\infty$).

<u>Замечание.</u> При исследовании сходимости на концах интервала сходимости для получающегося ряда с положительными членами применять признак Даламбера не имеет смысла, так как в этом случае всегда будем получать $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$ с нерешенным вопросом о сходимости ряда; в этом случае рекомендуется рассматривать другие признаки сходимости (например, признак сравнения, необходимый признак и т.д.).

3.Свойства сходящихся степенных рядов.

Теорема 1. В каждой точке интервала сходимости степенного ряда его сумма является непрерывной функцией аргумента х.

Теорема 2. Степенной ряд f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ в интервале сходимости можно почленно дифференцировать:

$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots$.

При этом после интегрирования или дифференцирования полученные ряды имеют тот же радиус сходимости R.

Пусть функция f(x) является суммой степенного ряда, т.е. f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$.

Теорема 3. Если пределы интегрирования a и b лежат внутри интервала (-R;R) сходимости степенного ряда, то на отрезке [a;b], степенной ряд можно интегрировать:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \ldots + \int_a^b c_n x^n dx + \ldots .$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой ряд называется функциональным? Что называется областью сходимости функционального ряда. Приведите примеры.
2. Какой ряд называется степенным?
3. Что называется интервалом сходимости степенного ряда? Приведите примеры.
4. Можно ли утверждать, что область сходимости степенного ряда совпадает с интервалом сходимости?
5. Сформулируйте теорему Абеля. Что называется радиусом сходимости степенного ряда?
6. Как проводится дифференцирование и интегрирование степенных рядов?

Задания для практики:

[2], с. 522, №№1; [3], №№ 9.11(1-5), 9.12, 9.16(1-10).

Глоссарий

Функциональный ряд. Ряд называется **функциональным**, если его членами являются функции некоторого аргумента х.

Степенной ряд. Ряды, членами которых являются степенные функции

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

называются **степенными**, а числа c_0 , c_1, …c_n - **коэффициентами** степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда. Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется **областью сходимости степенного ряда.**

Радиус сходимости степенного ряда. Существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится.

Интервал сходимости степенного ряда - интервал (-R;R).

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
5. Презентация

Лекция 26

Применение рядов

Аннотация. Данная тема содержит понятия рядов Тейлора и Маклорена.

Ключевые слова. Функция разложимая в степенной ряд. Ряд Тейлора, ряд Маклорена.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Ряды Тейлора и Маклорена.
2. Примеры разложения функций в ряды Маклорена.
3. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Ряды Тейлора и Маклорена

Предположим, что функция $f(x)$, определенная и n раз дифференцируемая в окрестности точки x=0, может быть представлена в виде суммы степенного ряда или, другими словами, может быть разложена в степенной ряд.

Определение. Функция $f(x)$ называется **разложимой в степенной ряд** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ в интервале $(-R;R)$, если в каждой точке этого интервала степенной ряд сходится, и его сумма будет являться именно функцией $f(x)$, то есть будет выполняться равенство:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n .$$

Теорема (о единственности разложения функции в степенной ряд).

Если функция $f(x)$ разложима в степенной ряд в некотором интервале(-R;R), содержащем фиксированную точку x_0, то этот ряд единственен и называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$.

Доказательство. $f(x)$ разложима в степенной ряд в окрестности точки x_0.

$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^3+c_4(x-x_0)^4+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots$

Выразим коэффициенты ряда через $f(x)$. Найдем производные функции $f(x)$, почленно дифференцируя ряд n раз:

$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^3+c_4(x-x_0)^4+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots$

$f'(x)=c_1+2c_2(x-x_0)+3c_3(x-x_0)^2+4c_4(x-x_0)^3\ldots+nc_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots,$

$f''(x)=2c_2+3\cdot2\cdot1c_3(x-x_0)+4\cdot3\cdot2\cdot1c_4(x-x_0)^2\ldots+n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots,$

$f'''(x)=3\cdot2\cdot1c_3+4\cdot3\cdot2\cdot1c_4(x-x_0)\ldots+n(n-1)(n-2)c_n(x-x_0)^{n-3}+\ldots,$

……………………………………………………

$f^n(x)=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1c_n+(n+1)n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1c_{n+1}(x-x_0)+\ldots$

Полагая в полученных равенствах $x=x_0$, получим

$f(x_0)=c_0,$

$f'(x_0)=c_1,$

$f''(x_0)=2\cdot1\cdot c_2=2!c_2,$

$f'''(x_0)=3\cdot2\cdot c_3=3!c_3,$

…,

$f^n(x_0)=n!c_n$, откуда

$c_0=f(x_0), c_1=f'(x_0),, c_2=\frac{f''(x_0)}{2!}, c_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots c_n=\frac{f^n(x_0)}{n!},$

найденные значения коэффициентов подставим в степенной ряд, суммой которого является функция $f(x)$:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots(1)$$

Коэффициенты ряда вычисляются однозначно с помощью формулы:

$$c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Если функция разложима в степенной ряд , то этот ряд единственный и называется рядом Тейлора.

Ряд Тейлора тесно связан с **формулой Тейлора**:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots R_n(x), \text{где}$$

$R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора:

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1},$$

Где $f^{n+1}(\xi)$-это значение производной в некоторой точке ξ, лежащей между x_0 и x.

Теорема (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора).

Для того чтобы ряд Тейлора сходился к функции f(x), **необходимо и достаточно**, чтобы при n →∞ остаток ряда стремился к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (2)$$

для всех значений x из интервала сходимости ряда.

Если в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

подставить $x_0 = 0$, то получим **ряд Маклорена** (3)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + \ldots \quad (3)$$

Так же как и для числовых рядов, сумму *f*(*x*) ряда Маклорена можно представить в виде

$f(x) = S_n(x) + r_n(x)$,

где $S_n(x)$ – n-я частичная сумма ряда; $r_n(x)$– *n*-й остаток ряда.

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)}(x)^{n+1}, \qquad (4)$$

где $f^{n+1}(\xi)$-это значение производной в некоторой точке ξ, лежащей между нулем и x.

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций.

1. $y=e^x$.

имеем $f(x)= f'(x)= f''(x)=\ldots f^{(n)}(x)=e^x$;

$f(0)= f'(0)= f''(0)=\ldots f^{(n)}(0)=e^0 =1$.

По формуле (3)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (5)$$

радиус сходимости ряда

R = $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$, т.е. область сходимости ряда (-∞; +∞).

2. $y=\sin x$.

Имеем $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)= -\sin x$,

$f'''(x)= -\cos x$; $f^{(4)}(x)= \sin x$, *откуда*

$f(0)=0$; $f'(0)=1$; $f''(0)=0$;

$f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$ и т.д.

Очевидно, производные четного порядка

$f^{(2n)}(0)=0$, а нечетного порядка

$f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$, $n=1,2, \ldots$. По формуле (3)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (6)$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$.

3. $y=\cos x$. Рассматривая аналогично, получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (7)$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$.

4. $y=(1+x)^m$, где m - любое действительное число.

Имеем $f(x)=(1+x)^m$,

$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$,

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$,

$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-2}$,

$\ldots$,

$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n.}$

При $x=0$

$f(0)=1$;

$f'(0)=m$,

$f''(0)=m(m-1)$;

$f'''(0)=m(m-1)(m-2); \ldots$

$f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1)$. По формуле (3)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-n-1)}{n!} + \ldots \qquad (8)$$

Интервал сходимости ряда (-1;1) (на концах интервала при $x=\pm 1$ сходимость ряда зависит от конкретных значений m).

Ряд (8) называется **биномиальным**. Если m – целое положительное число, то биномиальный ряд представляет формулу **бинома Ньютона**, так как при $n=m+1$ $m-n+1=0$, n-й член ряда и все последующие равны нулю, т.е. обрывается, и вместо бесконечного разложения получается конечная сумма.

5. $y=\ln(1+x)$

Получить разложение для этой функции можно проще, не вычисляя непосредственно коэффициенты ряда Маклорена (3) с помощью производных.

Рассмотрим геометрический ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \qquad (9)$$

со знаменателем $q=-x$, который сходится при $|q|=|-x|<1$, т.е. при $-1 < x < 1$, к функции $f(x)=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1+x}$.

Интегрируя почленно равенство (9) в интервале (0;x), где $|x| < 1$, с учетом того, что $\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big|_0^x = \ln(1+x)$, получим

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\ldots \qquad (10)$$

Область сходимости ряда (после выяснения сходимости на концах интервала сходимости) есть(-1;1].

При разложении более сложных функций используют непосредственно формулу (3) либо таблицу простейших разложений.

Применение рядов в приближенных вычислениях

Степенные ряды имеют самые разнообразные приложения. С их помощью вычисляют с заданной степенью точности значения функций, определенных интегралов, которые являются «неберущимися» или слишком сложными для вычислений, интегрируются дифференциальные уравнения.

Пример. Вычислить приближенно с точностью до 0,0001:

а) $\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$;

Решение. А) для вычисления $\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-\frac{3}{5}}$ запишем ряд (5) при x=-3\5, принадлежащем области сходимости $(-\infty; +\infty)$:

$$e^{-\frac{3}{5}} = 1-\frac{3}{5}+\frac{3^2}{5^2\cdot 2!}-\frac{3^3}{5^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 3^n}{5^n\cdot n!}+\ldots=$$

$=1-0,6+0,18-0,036+0,0054-0,000648+0,0000648-\ldots$

Взяв первые шесть членов разложения, на основании следствия из теоремы Лейбница для сходящегося знакочередующегося ряда мы допустим погрешность $|r_n|$, не превышающую первого отброшенного члена (по абсолютной величине), т.е. $|r_n| \leq 0,0000648<0,0001$.

Итак,

$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$ *≈1-0,6+0,18-0,036+0,0054-0,000648=0,548752≈ ≈0,5488*.

Б) Вычислить приближенно с точностью до 0,0001:ln 0,8;

для вычисления ln 0,8 запишем ряд (10) при x=-0,2, входящем в область сходимость ряда

(-1;1]:

$\ln 0{,}8 = -0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} - \frac{0{,}2^3}{3} - \ldots - \frac{0{,}2^n}{n} - \ldots = -(0{,}2+0{,}02+0{,}00266+0{,}0004+\ldots)$.

Если в качестве ln 0,8 взять первые четыре члена, мы допустим погрешность

$$|r_n| = \frac{0{,}2^5}{5} + \frac{0{,}2^6}{6} + \ldots + \frac{0{,}2^n}{n} + \ldots < \frac{0{,}2^5}{5} + \frac{0{,}2^6}{5} + \ldots + \frac{0{,}2^n}{5} + \ldots =$$

$$\frac{0{,}2^5}{5}(1+0{,}2+\ldots+0{,}2^{n-5}+\ldots) = \frac{0{,}2^5}{5}\cdot\frac{1}{(1-0{,}2)} = 0{,}00008 < 0{,}0001.$$

(Мы учли, что сумма сходящегося геометрического ряда в скобках равна $\frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-0{,}2}$).

Итак, ln0,8≈-(0,2+0,02+0,00266+0,0004)=-0,22306≈-0,2231.

Следует отметить, что для вычисления логарифмов более удобным является ряд (11), который сходится быстрее ряда (10). Действительно, пусть $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln 0{,}8$, тогда x=-1\9 и согласно (11)

$$\ln 0{,}8 = 2\left(-\frac{1}{9} - \frac{1}{9^3\cdot 3} - \ldots - \frac{(-1)^{2n-1}}{9^{2n-1}(2n-1)} + ..\right) = \quad (0{,}22222+0{,}00091+0{,}000007+\ldots), \text{ т.е.}$$

для вычисления ln 0,8 с точностью до 0,0001 потребуется всего два члена. С помощью ряда (11) можно вычислять логарифмы любых чисел, в то время как с помощью ряда (10) – лишь логарифмы чисел, расположенных на промежутке (0;2].

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию y=sin^2 x.

<u>Решение.</u> **Первый способ.** Применим метод непосредственного разложения по формуле (3).

Вначале найдем производные до n-го порядка и вычислим их значения при x=0:

$f(x)=\sin^2 x$,

$f'(x)= 2\sin x\ \cos x= \sin 2x$,

$f''(x)= 2\cos 2x$,

$f'''(x)=-2^2\ \sin 2x$;

$f^{(4)}(x)= -2^3 \cos 2x$,

$f^{(5)}(x) = 2^4 \sin 2x$ и т.д.,

При x=0 значения функции f(x) и ее производных:

$f(0)=0;\ \ f''(0)=2;\ \ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=-2^3,\ f^{(5)}(0)=0$ и т.д.

Теперь по формуле (3) запишем ряд

$$Sin^2\ x=0+0+\frac{2}{2!}x^2+0+-\frac{2^3}{4!}x^4+0+\frac{2^5}{6!}x^6+...$$

Или

$$Sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - ... + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{(2n)!}x^{2n} + ... \qquad (12)$$

Второй способ. Учитывая, что $\sin^2 x = 1\backslash 2 - 1\backslash 2 \cos 2x$, используем готовое разложение (7) для функции cos x (в котором вместо x берем 2x), умножаем обе части полученного равенства на (-1\2),

А затем прибавляем к ним 1\2. Получим

$$-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^n (2x)^{2g}}{(2n)!} + ...\right) \quad \text{и}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} + ...$$

или

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + ... + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + ...,$$

т.е. то же разложение (12).

Третий способ. Разложение функции $y = \sin^2 x$ может быть осуществлено с помощью правила перемножения рядов. Если в некоторой окрестности точки x=0 имеются разложения

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...,$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ...,$$

то произведение функций разлагается в той же окрестности в степенной ряд

$$f(x)\,\varphi(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + ... +$$
$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0)x^n + ...$$

В частности, при $f(x) = \varphi(x)$ получаем следующее правило возведения в квадрат степенного ряда:

$$f^2(x) = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2)x^2 +$$
$$+ (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)x^3 + (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2)x^4 \ .... (*)$$

Для функции $f(x) = \sin x$, имеющей разложение в ряд (6), т.е.

$$Sin\,x = 0+x+x-\frac{1}{3!}x^3 + 0+\frac{1}{5}x^5 +0-\frac{1}{7}x^7+\ldots,$$

Находим по формуле (*)

$$Sin^2 x = 2\cdot 0^2 + 2\cdot 0^2\cdot 1x +(2\cdot 0\cdot 0 + 1^2)x^2 + (2\cdot 0\,(-\frac{1}{3!}) +2\cdot 1\cdot 0)\,x^3 +$$

$$+(2\cdot 0\cdot 0 +2\cdot 1(-\frac{1}{3!})+ 0^2)x^4 +\ldots = x^{2-}\frac{1}{3}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

т.е. получили то же разложение (12).

Область сходимости ряда, как нетрудно убедиться, есть$(-\infty; +\infty)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой ряд называется рядом Тейлора?

1. Сформулируйте условия разложимости функций в ряд Тейлора.
2. Какой ряд называется рядом Маклорена?
3. Разложите в ряд Маклорена функции: e^x, *sin x*, *cos x*,$(1+x)^m$, *ln(1+x)*, *arctg x*.

Задания для практики:

[2], с. 523, №№ 2, 3; [3], №№ 9.18(1, 2, 4, 6, 8, 9), 9.19(1-4), 9.20(2, 4, 5), 9.21(1-5), 9.29(4, 6, 8), 9.30, 9.31(2, 4), 9.33.

Глоссарий

Функция разложимая в степенной ряд. Функция $f(x)$ называется **разложимой в степенной ряд** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ в интервале $(-R;R)$, если в каждой точке этого интервала степенной ряд сходится, и его сумма будет являться именно функцией $f(x)$, то есть будет выполняться равенство: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$.

Ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ разложима в степенной ряд в некотором интервале(-R;R), содержащем фиксированную точку x_0, то этот ряд единственен и называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$.

Формула Тейлора. Ряд Тейлора тесно связан с **формулой Тейлора**:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots R_n(x),$$

Ряд Маклорена получается из ряда Тейлора при $x_0 = 0$.

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 27

Дифференциальные уравнения

Аннотация. Данная тема содержит понятия общего и частного решения дифференциального уравнения, понятие особого решения, понятие уравнения с разделяющимися переменными.

Ключевые слова. Общее решение дифференциального уравнения. Частное решение дифференциального уравнения. Особое решение дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Основные понятия и определения.
2. Понятие общего и частного решений, геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения.
3. Теорема существования и единственности частного решения. Понятие особого решения.
4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

1.Основные понятия

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков данной функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если от нескольких — то ***уравнением в частных производных***. Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения (и по этой причине само слово "обыкновенные" будет опускаться).

Простейший пример дифференциального уравнения дает задача о нахождении первообразной *F(x)* для заданной функции *f(x)*, поскольку ее можно рассматривать как задачу о нахождении функции *F(x)*, удовлетворяющей уравнению $F'(x) = f(x)$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где Φ — некоторая функция от $n+2$ переменных, $n \geq 1$, при этом порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется *порядком* дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение n - го порядка называется *разрешенным относительно старшей производной,* если оно имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

Где f — некоторая функция от $n+1$ переменной.

Решением дифференциального уравнения (1) называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество. Например, функция $y=\sin x$ является решением уравнения $y''+y=0$, так как

$(\sin x)''+ \sin x=0$ для любых x.

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется *задачей интегрирования* данного *дифференциального уравнения.* График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения (1) или (2)* называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ или короче $y = \varphi(x, C_i)$, где C_i (i=1,…,n)— произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1)она является решением дифференциального уравнения (1) или (2) при любых значениях C_i;

2)для любых начальных данных x_o, y_o, $y'_o, \ldots, y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i = C_{io}$, такие, что будут выполнены начальные условия

$$\varphi(x_0, C_{i0}) = y_0, \varphi'(x_0, C_{i0}) = y_0', \ldots,$$
$$\varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0}) = y_0^{(n-1)}$$

Определение. Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x, y, C_i) = 0$, называется *общим интегралом дифференциального уравнения.*

Определение. Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i, называется соответственно *частным решением* или *частным интегралом дифференциального уравнения.*

Геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет следующую формулировку. Найти решение $y = \varphi(x)$ (интеграл *Ф(x,y)*=0) дифференциального уравнения (5) или (6), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$ ($Ф(x_0, y_0)$=0).

С геометрической точки зрения это означает, что среди всех, интегральных линий данного уравнения необходимо найти ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения (6) состоит в том, что оно в каждой точке *M(x, y),* принадлежащей области *D,* в которой выполняются все условия теоремы 2 (Коши),

задает направление $y' = tg\,\alpha = k$ касательной к единственной интегральной линии уравнения (6), проходящей через точку *M(x, y),* т. е. *поле направлений* в области *D* (рис. 1).

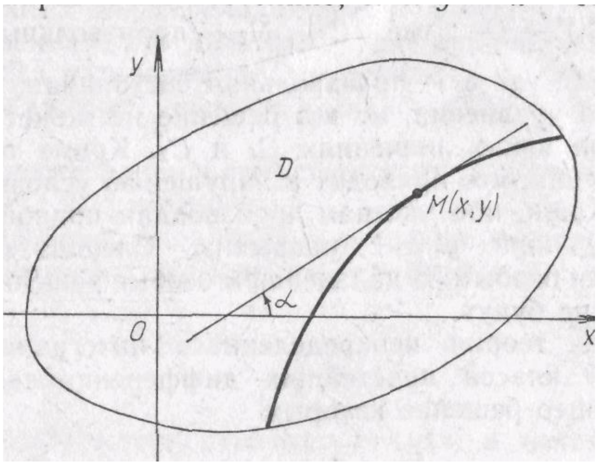


Рис.1

В области *D* для уравнения (6) можно выделить однопараметрическое семейство линий *f(x, y) = k =* const, каждая из которых называется *изоклиной.* Как следует из определения, вдоль каждой изоклины поле направлений постоянно, т. е. $y' = k$ = const.

Нахождение изоклин и направлений вдоль них позволяет упорядочить поле направлений и приближенно построить интегральные линии данного дифференциального уравнения, т. е. графически проинтегрировать это уравнение.

Пример . Методом изоклин приближенно построить интегральные линии дифференциального уравнения $y' = -2y/x$.

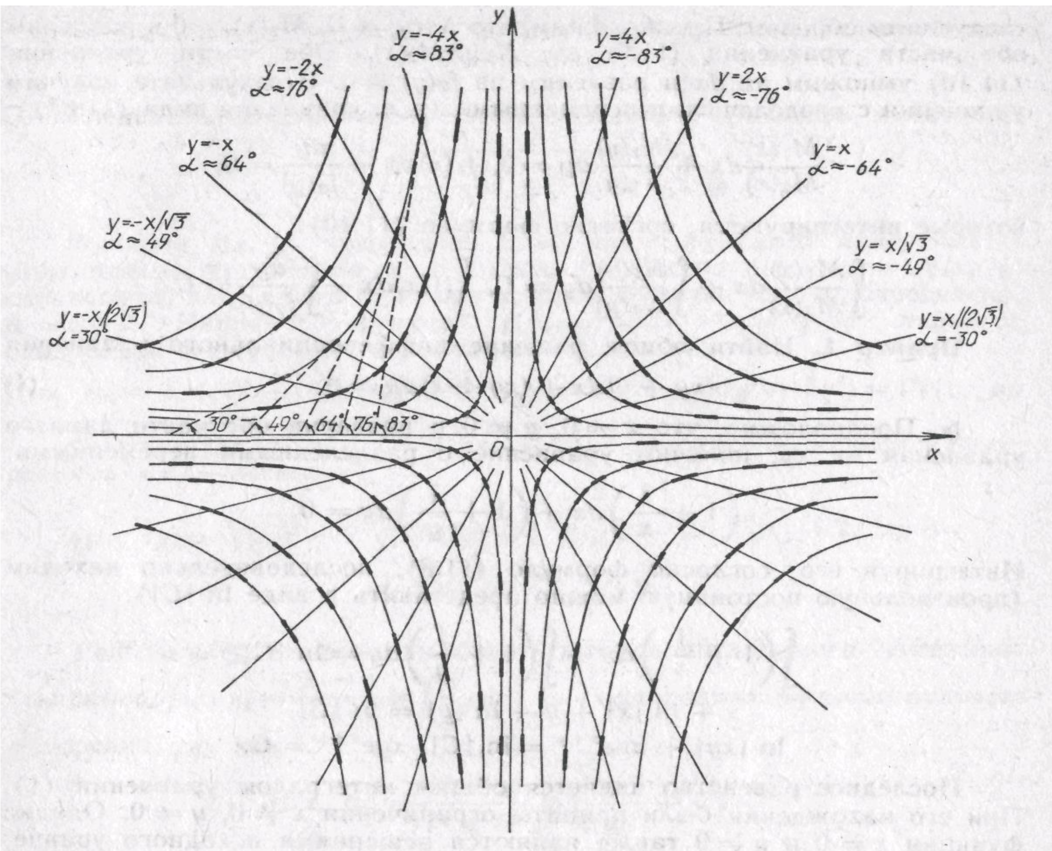
Полагая $-2y/x=k$ (k = const), находим изоклины данного уравнения. Они представляют собой проходящие через начало координат прямые линии, вдоль которых поле направлений определяется равенством $y' = k = \mathrm{tg}\ \alpha$. Придавая k

различные значения, находим соответствующие изоклины, вдоль которых направление поля характеризуется углом α наклона к оси Ox касательной к интегральной линии. Необходимые вычисления запишем в виде таблицы (табл.1).

По данным этой таблицы строим поле направлений (рис. 2) и затем приближенно вычерчиваем интегральные линии. Положительное или отрицательное значение угла α указывает на то, что он отсчитывается от оси Ox против хода или по ходу часовой стрелки соответственно.

Табл.1

k	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	± 2	± 3	$\pm\infty$
α	0	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\approx\pm 60°$	$\pm 64°$	$\approx\pm 72°$	$\pm 90°$
$y = -\frac{k}{2}x$	$y=0$	$y = \pm\frac{x}{2\sqrt{3}}$	$y = \mp\frac{1}{2}x$	$y = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}x$	$y = \mp x$	$y = \mp\frac{3}{2}x$	$x=0$



Теорема существования и единственности частного решения. Понятие особого решения.

Вопрос о существовании и единственности решения дифференциального уравнения разрешает

Теорема 1 (Коши). *Если правая часть уравнения (2) является непрерывной функцией в окрестности значений*

$$x_0,\ y_0,\ y_1',\ \ldots\ y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

то уравнение (2) имеет решение $y = y(x)$ в некотором интервале $(a;\ b)$, содержащем x_o, такое, что

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (4)$$

Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам y, y', ..., $y^{(n-1)}$, то решение $y = y(x)$ — единственное.

Числа из совокупности (3) называются *начальными данными,* а равенства (4) —*начальными условиями.*

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка формулируется следующим образом. Найти решение $y=y(x)$ дифференциального уравнения (1) или (2), удовлетворяющее начальным данным (3), т. е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия (4).

Замечание. У дифференциального уравнения может существовать решение (интеграл), которое невозможно получить из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных C_i. Такое решение (интеграл) может оказаться ***особым*** в том смысле, что в любой его точке нарушаются какие-либо условия теоремы Коши.

Пример. Дифференциальное уравнение $y'' = 3\sqrt[3]{(y'-1)^2}$ имеет общее решение $y = x + 1/4\,(x + C_1)^4 + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Функция $y=x+C$, где C— произвольная постоянная, также является решением данного уравнения, но это решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C_1 и C_2. Кроме того, $y'=1$ для любой точки решения, что приводит к нарушению условия единственности из теоремы Коши, ибо частная производная правой части данного уравнения по y' при $y'=1$ разрывна. Следовательно, решение $y=x+C$ является особым. В дальнейшем особые решения, как правило, рассматриваться не будут.

В общем случае *дифференциальное уравнение первого порядка* может быть записано в виде

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (5)$$

или, если разрешить его относительно y', в нормальной форме

$$y'=f(x,y) \qquad (6)$$

Справедлива

Теорема 2 (Коши). *Если функция f(x, y) непрерывна в точке $M_o(x_o, y_o)$ и в ее окрестности, то существует решение y = y(x) уравнения (6), такое, что $y(x_o)=y_o$. Если непрерывна также частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *данной функции, то это решение единственно.*

Отметим, что иногда дифференциальное уравнение первого порядка удобно, записывать в так называемой *дифференциальной форме:*

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$ (7)

Пример . Решить уравнение $y''= x$.

Решение. Поскольку $y'' = \frac{dy'}{dx}$, то исходное уравнение равносильно следующему равенству дифференциалов: $dy' = xdx$. Выполняя почленное интегрирование, получаем $y' = \frac{x^2}{2} + C_1$, где C_1 - произвольная постоянная. Вновь записывая производную как отношение двух дифференциалов, приходим к равенству $dy = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx$. Интегрируя почленно, окончательно получаем $y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$, где C_2 — произвольная постоянная.

Если известно, что $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$, то приходим к решению $y = x^3/6 + 2x + 1$.

Здесь $y = x^3/6 + C_1x + C_2$ — общее решение, $y = x^3/6 + 2x + 1$ — частное решение дифференциального уравнения $y'' = x$.

4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x) \quad \textbf{(8)}$$

или в виде

$$M(x)N(x)dx + P(x)Q(x)dy = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

где *f(x), M(x), P(x)* - некоторые функции переменной *x*, *g(y), N(y), Q(y)* - функции переменной *y*.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной *x* окажутся в одной части равенства, а переменной y - в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Например, из (8) следует, что

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Выполняя интегрирование, приходим к решению уравнения (8).

Пример . Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$

Решение. Разделив левую и правую части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$. Интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} \quad \textbf{(10)}$$

или $\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C_1$ **(11)**

(так как интеграл в левой части (10) табличный, а интеграл в правой части может быть найден, например, заменой $\sqrt{y^2+1} = t$, $y^2+1 = t^2$, $2ydy = 2tdt$ и $\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t + C_1 = \sqrt{y^2+1} + C_1$

Решение (11) перепишем в виде $x = \pm e^{C_1} e^{\sqrt{y^2+1}}$ или $x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, где $C = \pm e^{C_1}$.

Уравнения вида

$$y' = f(ax+by) \quad \textbf{(12)}$$

где a и b — некоторые числа, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z = ax+by+c$, где c — некоторое число)

Пример . Решить уравнение

$$(x+2y)y' = 1 \quad \textbf{(13)}$$

Решение. Положим $z = x + 2y$. Тогда $z' = 1+2y'$, откуда $y' = \frac{1}{2}(z'-1)$ и исходное уравнение приводится к виду $\frac{1}{2}z(z'-1) = 1$ который допускает разделение переменных. Действительно, выражая из последнего равенства z', получаем $z' = \frac{z+2}{z}$ и, следовательно, $\frac{zdz}{z+2} = dx$

Выполним почленное интегрирование данного равенства: $\int dx = \int \frac{zdz}{z+2}$

$$\int\frac{zdz}{z+2}=\int\left(1-\frac{2}{z+2}\right)dz=\int dz-2\int\frac{dz}{z+2}=$$
$$=z-2\ln|z+2|+C_1$$

Поэтому $x=z-2\ln|z+2|+C_1$

Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем $x=x+2y-2\ln|x+2y+2|+C_1$

Или $\quad y-\ln|x+2y+2|=C \qquad$ **(14)**

где $\quad C=-\frac{1}{2}C_1$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие уравнения называются дифференциальными?

2. Дайте определение и геометрическую интерпретацию общего и частного решений дифференциального уравнения.

3. Какое решение дифференциального уравнения называется особым?

4. Сформулируйте задачу Коши, теорему Коши о существовании и единственности частного решения дифференциального уравнения 1-го порядка.

5. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Задания для практики:

[3], с. 194-198; №№ 10.1(1-6), 10.2(2, 3, 5, 7), 10.3(107), 10.4(1, 3, 4, 6), 10.5, 10.6.

Глоссарий

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков данной функции.

Решением дифференциального уравнения (1) называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

Общим решением дифференциального уравнения

Φ(x,y,y′, ..., $y^{(n)}$) = 0 (1) или $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ *(2)* называется функция вида $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ или короче $y=\varphi(x,C_i)$, где C_i (i=1,…,n)— произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) она является решением дифференциального уравнения *Φ(x,y,y′, ...,* $y^{(n)}$) = 0 (1) или $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ (2) при любых значениях C_i;

2) для любых начальных данных x_o, y_o, $y'_o,...,y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i = C_{io}$, такие, что будут выполнены начальные условия

$$\varphi(x_0,C_{i0})=y_0,\varphi'(x_0,C_{i0})=y_0{}',...,$$
$$\varphi^{(n-1)}(x_0,C_{i0})=y_0{}^{(n-1)}$$

Частное решение. Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i, называется соответственно *частным решением* или *частным интегралом дифференциального уравнения.*

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет следующую формулировку. Найти решение $y=\varphi(x)$ (интеграл *Φ(x,y)*=0) дифференциального уравнения (5) или (6), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0)=y_0$ ($Φ(x_0, y_0)$=0).

Дифференциальное уравнение первого порядка называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если оно может быть представлено в виде $\frac{dy}{dx}=f(x)g(x)$

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 28

Дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка.

Аннотация. Данная тема содержит понятия однородных, линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли.

Ключевые слова. Однородное дифференциальное уравнение. Линейное дифференциальное уравнение. Уравнение Бернулли.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Однородные уравнения
2. Линейные уравнения
3. Уравнения Бернулли
4. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями. Функция *y = f(x, y)* называется *однородной степени k* (по переменным *x* и *y*), если для произвольного числа *a* выполняется равенство

$$f(ax, ay) = a^k f(x, y) \qquad \textbf{(1)}$$

Пример . Выяснить, являются ли однородными следующие функции:

а) $f(x,y) = x^2$;

б) $f(x,y) = \dfrac{2x+3y}{x-y}$;

в) $f(x,y) = xy+1$

Решение. *а*) Так как $f(ax,ay)=(ax)^2-(ax)(ay)$ $=a^2(x^2-xy)=a^2 f(x,y)$, то данная функция однородная степени 2.

б) Так как $f(ax,ay)=\frac{2(ax)+3(ay)}{ax-ay}=\frac{2x+3y}{x-y}=a^0 f(x,y)$, то данная функция однородная степени 0.

в) Так как $f(ax,ay)=a^2xy+1\neq a^k$ $(xy+1)$ ни для какого k, то данная функция неоднородная.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если *f(x,y)* есть однородная функция своих аргументов нулевого порядка.

Например, уравнение $y'=\frac{y}{x}\cos\ln\frac{y}{x}$ - однородное.

Любое однородное уравнение может быть представлено в виде

$y'=\varphi(y/x)$, **(2)**

где φ — некоторая функция (одной переменной).

Действительно, положим $a=1/x$. Тогда в силу (1) при $k=0$

$f(x,y)=f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y\right)=$ $f(1,y/x)$. Полагая, что $u(y/x)=f(1,y/x)$, приводим уравнение (2) к виду

$y'=f(x,y)$ (3)

Введение в рассмотрение вспомогательной функции u от переменной x (замена переменной $u=y/x$) позволяет свести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, так как

$y=ux$, то $y'=u'x+u$, поэтому уравнение (2) приобретает следующий вид

$u'x=\varphi(u)-u$

откуда получим, что $\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$ (4)

***Пример*.** Решите уравнение

$y'=\frac{x+2y}{x}$ (5)

Решение. Так как $\frac{x+2y}{x}=1+2\,y/x$, то уравнение положим $u=y/x$. Тогда $u'x+u=1+2u$ и, согласно (5), имеем

$$\frac{du}{1+u}=\frac{dx}{x}$$

Интегрируя почленно последнее равенство, получаем

$\ln|1+u| = \ln|x| + C_1$

откуда $|1+u| = e^{C_1}|x|$ или $1 + u = Cx$, где $C = \pm e^{C_1}$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получим $1 + \frac{y}{x} = Cx$, откуда $y = (Cx - 1)x$.

2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (6)$$

где *f(x)* и *g(x)* - некоторые (непрерывные) функции переменной *x*. В случае, когда функция *g(x)* тождественно равна нулю, уравнение называется однородным, в противном случае - неоднородным. Рассмотрим один из возможных способов решения уравнения (6): будем искать решение в виде *y=u(x)v(x)* (подстановка **Бернулли**)(тем самым искомыми становятся функции *u(x)* и *v(x)*, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая — должна определяться из уравнения (6).

Так как $y' = u'v + uv'$, то из (7) следует $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$ или

$$vu' + u\left(v' + f(x)v\right) = g(x). \qquad (7)$$

Найдем сначала какое-либо частное решение $v = v(x)$ уравнения

$$v' + f(x)v = 0. \qquad (8)$$

Тогда (см.(8)) функция $u = u(x)$ – решение уравнения

$$vu' = g(x). \qquad (9)$$

Тем самым решение исходного уравнения (7) сводится к решению двух уравнений с разделяющимися переменными (см. (9) и (10)).

3. Уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение

$$y' + P\{x)y = Q(x)y^a \qquad (10)$$

где a = const $\in$ R, $a \neq 0, a \neq 1$, а также любое уравнение, с помощью алгебраических преобразований приводящееся к уравнению (10), называется *уравнением Бернулли.*

Путем введения новой функции z*(x)* по формуле $z = y^{1-a}$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению относительно этой функции:

$$z' + (1-a)P(x)z = (1-a)Q(x) \qquad (11)$$

Решив уравнение (11) одним из описанных выше методов, найдем $z = z(x, C)$, а затем и $y = z^{1/(1-a)}$

Уравнение Бернулли, как и линейное уравнение, можно решить *с помощью подстановки Бернулли y = u(x)u(x)*.

4. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка (тогда говорят, что данное дифференциальное уравнение *допускает понижение порядка*).

1)Если дифференциальное уравнение имеет вид

$y" = f(x)$,то оно решается последовательным интегрированием.

2)Если в запись уравнения не входит искомая функция *y(x)*, т.е. оно имеет вид

$$F(x, y', y") = 0$$

то такое уравнение можно решить, найдя сначала вспомогательную функцию $z = y'$;$z' = y''$

3)Если в уравнение не входит переменная *x*, т.е. оно имеет вид

$$F(x, y', y") = 0$$

то порядок уравнения можно понизить, если за независимую переменную взять *y*, а за неизвестную функцию $p = p\,(y) = y'; y'' = \left(y'\right)' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая функция называется однородной функцией k-го порядка; 0-го порядка?

2. Дайте определение однородного дифференциального уравнения.

3. К какому виду можно преобразовать однородные дифференциальные уравнения?

4. Какая подстановка позволяет преобразовать однородное дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными?

5. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями; уравнениями Бернулли?

6. Каким методом решаются линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли?

7. Какие дифференциальные уравнения 2-го порядка допускают понижение порядка?

8. Приведите примеры приложений дифференциальных уравнений в экономике.

Задания для практики:

[3], с. 200-203, 210; №№ 10.12(1-5, 7-12), 10.13(4-6), 10.16(2-8), 10.17(1-7), 10.18(1-3, 5-9), 10.21-10.23, 10.34(1-3), 10.35(1-2, 9-11, 15-18).

Глоссарий

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если $f(x,y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется **линейным**, если оно имеет вид

$$y' + f(x)y = g(x)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - некоторые (непрерывные) функции переменной x.

Дифференциальное уравнение

$$y' + P\{x)y = Q(x)y^a$$

где a = const ∈ R, $a \neq 0, a \neq 1$, а также любое уравнение, с помощью алгебраических преобразований приводящееся к такому уравнению, называется **уравнением Бернулли**

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 29

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Аннотация. Данная тема содержит понятия характеристического уравнения, линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Линейные однородные дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Характеристическое уравнение.
3. Формулы общих решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.
4. Линейные неоднородные дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
5. Общее и частное решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

1. Линейные однородные дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x) \qquad \textbf{(1)}$$

где *p, q* — некоторые действительные числа, *r(x)* - некоторая функция. Если *r(x)=0*, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

называется *однородным*; в противном случае при $r(x) \neq 0$ уравнение (1) называется *неоднородным*.

Можно доказать, что существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y'(x_0) = z_2$, где x_0, z_1, z_2 - некоторые (действительные) числа. Рассмотрим сначала решение ***линейного однородного уравнения*** (2) с постоянными коэффициентами.

Теорема 1. *Если* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *- линейно независимые частные решения уравнения (2), то общее решение этого уравнения является линейной комбинацией этих частных решений, т.е. имеет вид* $y = C_1y_1 + C_2y_2$ *для некоторых действительных чисел* C_1 *и* C_2.

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (2), надо знать два его частных решения y_1 и y_2.

2. **Характеристическое уравнение**.

Будем искать решение уравнения (2) в форме

$$y = e^{\lambda x} \qquad \textbf{(3)}$$

где λ — некоторое (действительное) число, (если такое существует). Так как $\left(e^{\lambda x}\right)'' + p\left(e^{\lambda x}\right)' + qe^{\lambda x} = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x}$, то функция (3) является решением уравнения (2), если число λ есть корень уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q \qquad \textbf{(4)}$$

которое называется *характеристическим уравнением* исходного уравнения (2).

3. Формулы общих решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема 2. *Пусть характеристическое уравнение* (4) *уравнения* (2) *имеет действительные корни* λ_1 и λ_2, *причем* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Тогда общее решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} \qquad \textbf{(5)}$$

где C_1 и C_2 *- некоторые числа*.

2. *Если характеристическое уравнение* (4) *имеет один корень* λ (*кратности* 2), *то общее решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \qquad \textbf{(6)}$$

где C_1 и C_2 - *некоторые числа*.

3. *Если характеристическое уравнение* (5) *не имеет действительных корней, то общее решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{ax} \sin\beta x + C_2 e^{ax} \cos\beta x \qquad \textbf{(7)}$$

где $a = -p/2, \beta = \sqrt{q - p^2/4}$, C_1, C_2 — *некоторые числа*.

Пример 1. Найти частное решение следующих уравнений при указанных начальных условиях:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$;

б) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

Решение: а) Решая характеристическое уравнение

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, находим его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Найдем такие значения постоянных C_1 и C_2, при которых выполняются заданные начальные условия. Так как $y(0) = C_1 + C_2$ и $y'(0) = C_1 + 2C_2$, то постоянные C_1 и C_2 находим, решая систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + 2C_2 = 4 \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

По теореме о существовании и единственности решения уравнения вида (1) найденное частное решение $y = 2e^x + e^{2x}$ - искомое.

б) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Согласно п.2 теоремы 2 общее решение дифференциального уравнения (2) имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^x$. Так как $y(0) = 1$, то $C_1 = 1$ и, поскольку $y' = y + C_2 e^x$ и $y'(0) = 0$, то $C_2 = -1$. Таким образом, окончательно получаем частное решение $y = (1 - x)e^x$.

4. Линейные неоднородные дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Перейдем теперь к ***решению линейного неоднородного уравнения*** (1) с постоянными коэффициентами. Это уравнение может быть в частности решено *методом вариации произвольных постоянных*, который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ однородного уравнения

(2), имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение (1). Затем решение уравнения (1) находится в виде $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, т.е. предполагается, постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной x. При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решения системы

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = r \end{cases} \qquad \textbf{(8)}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \qquad \textbf{(9)}$$

Решение. Решая соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

(см. пример **1.** а), находим

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

Полагая теперь, что C_1 и C_2 - функции переменной x, найдем первые производные этих функций, решая систему (9)

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^{2x} + C_2'2e^{2x} = e^x \end{cases}$$

Найдем $C_1' = -1$, $C_2' = e^{-x}$. Полученные дифференциальные уравнения - с разделяющимися переменными. Решая эти уравнения, получаем $C_1 = -x + C_3$, $C_2 = -e^{-x} + C_4$, где C_3, C_4 - некоторые постоянные. Таким образом, окончательно решение уравнения имеет вид

$$y = (-x + C_3)e^x + (-e^{-x} + C_4)e^{2x} = C_3e^x + C_4e^{2x} + (-x - 1)e^x$$

5. **Общее и частное решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка**.

Теорема 3. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* (1) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (2) *и частного решения исходного неоднородного уравнения* (1).

Следует отметить, что метод вариации произвольных постоянных достаточно сложен, поэтому в ряде случаев целесообразно использовать другие методы решения, основанные на теореме. Сначала, как и при методе вариации произвольных постоянных находится общее решение однородного дифференциального уравнения (2), а затем отыскивается частное решение неоднородного уравнения (1). При этом вид частного решения устанавливается по виду правой части уравнения (1), и задача сводится к отысканию коэффициентов этого частного решения.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть правая часть уравнения (1) является многочленом степени m, т.е. имеет вид

$r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$,

Где $a_0, a_1, \ldots, a_m$ - действительные числа и $a_m \neq 0$. Тогда частное решение уравнения (1) следует искать в виде

$u(x) = (C_0 + C_1x + \cdots + C_mx^m)x^s$

т.е. в виде произведения многочлена той же степени m на x^s где $s = 0$, если $q \neq 0$,

$s = 1$, если $q = 0$ и $p \neq 0$ и $s = 2$, если $q = p = 0$. (Другими словами, показатель степени s равен *кратности* значения $x = 0$ как корня характеристического многочлена (4)).

2. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$r(x) = Ae^{ax}$

где a и A — некоторые действительные числа.

Тогда частное решение уравнения (1) следует искать в виде

$u(x) = C_0x^se^{ax}$, **(11)**

где показатель степени s равен кратности значения $x = a$ корня характеристического многочлена (4).

Пример 3. Найти частные решения уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$

б) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

Решение: *а*) В данном случае $a = 3$ и поскольку такого значения нет среди корней $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2)$ характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, то $s = 0$. Таким образом, частное решение уравнения (*а*) будем искать в виде $u = C_0e^{3x}$

Тогда $u' = 3C_0e^{3x}$, и $u'' = 9C_0e^{3x}$

Подставляя выражения u'', u', u в уравнение (*а*), приходим к равенству

$9C_0e^{3x} - 9C_0e^{3x} + 2C_0e^{3x} = 2e^{3x}$

Или $2C_0e^{3x} = 2e^{3x}$

Которое должно удовлетворяться тождественно. Поэтому $C_0 = 1$ и искомое частное решение $u = e^{3x}$.

б) Здесь $a = 2$ и это значение совпадает с одним из двух различных корней $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2)$ соответствующего характеристического уравнения.

Поэтому *s*= 1, и частное решение уравнение (б) будем искать в виде $u = C_0 x e^{3x}$.

Подставляя выражения *u* и ее производных в уравнение (б) получим (после преобразований) $u = xe^{3x}$

3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид $r(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$,

Где некоторые действительные числа и $\beta \neq 0$

Тогда частное решение уравнения (1) следуешь искать в виде

$u(x) = x^s\,(C_0\cos\beta x + C_1\sin\beta x)$

где *s* = *1*, если одновременно выполнены условия $p = 0$ (см 4), $q > 0,\ \beta = \sqrt{q}$, и $s = 0$ в остальных случаях. (Условия случая $s = 1$ равносильны требованию, чтобы значение β в выражении $r(x)$ было таково, что комплексное число *iβ* было одним из корней характеристического уравнения (1)).

Пример 4. Найти частное решение уравнения

$y'' - 3y' + 2y = \sin x$ **(12)**

Решение. По сформированному правилу частное решение в данном случае следует искать в виде $u = C_0\cos x + C_1\sin x$

Найдем $u' = -C_0\cos x + C_1\sin x, u'' = -C_0\cos x - C_1\sin x$

Подставляя выражения u'', u', u в уравнение (12), приходим к равенству

$(-3C_1 + C_0)\cos x + (-C_1 + 3C_0 + 2C_1)\sin x = \sin x$

которое должно удовлетворяться тождественно. Учитывая, что $\sin x = 0\cdot\cos x + 1\cdot\sin x$, получим систему

$$\begin{cases} -3C_1 + C_0 = 0 \\ C_1 + 3C_0 = 1 \end{cases}$$

Откуда $C_0 = 0{,}3,\ C_1 = 0{,}1$ и, следовательно, искомое выражение имеет вид

$u = 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x$

Рассмотренные случаи различных выражений правой части уравнения (1) являются частными случаями функции вида

$r(x) = e^{ax}(f(x)\cos\beta x + g(x)\sin\beta x)$, **(13)**

где $f(x),\ g(x)$ - многочлены (с действительными коэффициентами);*α, β* – некоторые (действительные) числа.

Можно показать, что частное решение уравнения (1) с правой частью (13) следует искать в виде

$u = x^s e^{ax}(v(x)\cos\beta x + w(x)\sin\beta x)$ **(14)**

где s равно кратности корня $\alpha+i\beta$ характеристического многочлена (4); $v(x)$, $w(x)$ - многочлены, степень которых равна наибольшей из степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в выражении (13). Коэффициенты многочленов $v(x)$ и $w(x)$ находятся из системы линейных уравнений, получаемой после подстановки решения (14) и его производных в уравнение (1).

Замечание. Если правая часть $r(x)$ уравнения (1) является суммой некоторых функций, т.е.

$r(x) = r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_k(x)$,

то для нахождения частного решения такого уравнения достаточно сложить частные решения $u_i(x)$ уравнений |

$y'' + py' + qy = r_1(x)$, где $i = 1,2,\ldots,\kappa$, т.е.

$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x)$.

Пример 5. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x} + e^{2x} + \sin x \qquad \textbf{(15)}$$

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Получим (см. пример **2**) $\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Учитывая замечание, частное решение u дифференциального уравнения (14) будет равно сумме частных решений уравнений

$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$, $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$, $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

найденных в примерах **3**(*а*, б), **4**, т.е.

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_2(x) = e^{3x} + xe^{2x} + 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x$$

На основании теоремы 3 общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y = \tilde{y} + u = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x} + xe^{2x} + 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение однородного и неоднородного линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

2. Какое уравнение называется характеристическим?

3. Запишите формулы общих решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами для различных случаев решений характеристического уравнения.

4. В каких случаях частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами может быть определено по виду правой части уравнения?

5. Какой метод используется для отыскания частного решения по виду правой части уравнения?

Задания для практики:

[2] №№ 10.38(2-6, 9-11), 10.39(1-3), 10.42(1-6), 10.43(1-3, 5-7, 11, 15, 18, 29, 30).

Глоссарий

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

где *p, q* — некоторые действительные числа, *r(x)* - некоторая функция. Если *r(x)=0*, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0$$

называется *однородным*; в противном случае при $r(x) \neq 0$ уравнение (1) называется *неоднородным*.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения исходного неоднородного уравнения .

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.