А.Н. Абызов
А.А. Туганбаев

КОЛЬЦА И МОДУЛИ

Москва
Издательство «ФЛИНТА»
2017

УДК 512.55
ББК 22.144
А13

Абызов А.Н.
А13 Кольца и модули [Электронный ресурс] : монография / А.Н. Абызов, А.А. Туганбаев. — М. : ФЛИНТА, 2017. — 258 с.

ISBN 978-5-9765-2940-3

Данная монография посвящена изложению теории ассоциативных колец с единицей и модулей над ними в случае не обязательно коммутативных колец. Материал представлен в виде теорем, определений, примеров и задач.

Книга может быть полезна всем алгебраистам, интересующимся кольцами и модулями. Она может служить учебным пособием для студентов и аспирантов, изучающих современную алгебру.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10013).

УДК 512.55
ББК 22.144

ISBN 978-5-9765-2940-3

Оглавление

1 Кольца, алгебры и гомоморфизмы

Абелева группа A со сложением $+$ называется *предкольцом*, если A также является полугруппой относительно дополнительной операции умножения $\cdot$ и

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z \quad \text{и} \quad z\cdot(x+y) = z\cdot x + z\cdot y$$

для всех $x, y, z \in A$. В этом случае группа A со сложением $+$ называется *аддитивной группой* предкольца A. Множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел не является предкольцом относительно обычного сложения и умножения, поскольку не является группой по сложению. Предкольцо A со сложением $+$ и умножением $\cdot$ называется *кольцом*, если A обладает нейтральным элементом относительно $\cdot$. Множество $2\mathbb{Z}$ всех четных целых чисел с обычными сложением и умножением является примером предкольца, не являющегося кольцом.

Если A – предкольцо и B – такое подмножество в A, что $b_1 + b_2 \in B$ и $b_1 b_2 \in B$ для всех $b_1, b_2 \in B$, то B называется *подпредкольцом* в A. Если A – кольцо и B – такое подпредкольцо кольца A, что B – кольцо, то B называется *подкольцом* кольца A. Подпредкольцо $2\mathbb{Z}$ в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ не является подкольцом в $\mathbb{Z}$.

Если B – подкольцо кольца A, содержащее единицу кольца A, то B называется *унитарным подкольцом* в A. Если A – кольцо всех $(n \times n)$-матриц над кольцом A, $n > 1$, и e_{ii} – матричная единица, то $e_{ii}Ae_{ii}$ – подкольцо с единицей e_{ii} в A, не являющееся унитарным подкольцом в кольце A.

Если A – кольцо, содержащее центральное подкольцо R, то A называется *алгеброй* над R или *R-алгеброй*. Тело гамильтоновых кватернионов $\mathbb{H}$ является алгеброй над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, но не алгеброй над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Элемент a кольца A называется *обратимым справа* (соотв., *слева*), если выполнено равенство $ab = 1$ (соотв., $ba = 1$) для некоторого $b \in A$. Элемент обратимый справа и слева называется *обратимым*. Множество всех обратимых элементов кольца A обозначается через $U(A)$. Например, $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$. Если A – кольцо всех линейных преобразований бесконечномерного векторного пространства V с базисом $v_1, v_2, \dots$ и a, b – такие преобразования, что для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем $a(v_i) = v_{i+1}$, $b(v_{i+1}) = v_i$, $b(v_1)$ – нулевой вектор, то ba – тождественное преобразование и a – обратимый слева элемент кольца A. Нетрудно проверить, что a не обратим справа.

Центром кольца A называется подмножество $\{c \in A \mid ac = ca, \forall a \in A\}$, обозначаемое через $C(A)$. Каждое подмножество в $C(A)$ называется *центральным подмножеством* в A. Элемент $e \in A$ называется *идемпотентом*, если $e = e^2$. Идемпотент $e \in A$ называется *центральным*, если $e \in C(A)$.

Элемент $a \in A$ называется *правым* (*левым*) *делителем нуля* в A, если $\ell_A(a) \neq 0$ ($r_A(a) \neq 0$). Элемент $a \in A$ называется *неделителем нуля* в A, если $r_A(a) = \ell_A(a) = 0$. Кольцо называется *областью*, если произведение любых двух его ненулевых элементов не равен нулю.

Пусть A – предкольцо. Элемент $a \in A$ называется *нильпотентным*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множество всех нильпотентных элементов кольца R обозначается через $\mathrm{Nil}(R)$. Кольцо $\mathbb{Z}$ или любое поле не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Подмножество $B \subseteq A$ называется *нильпотентным*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $b_1 \dots b_n = 0$ для любых элементов $b_1, \dots, b_n \in B$ (это означает, что $B^n = 0$). Предкольцо называется *нилькольцом*, если все его элементы нильпотентны. Правый (левый) идеал называется *правым* (*левым*) *ниль-идеалом*, если все его элементы нильпотентны. Кольцо A называется *кольцом индекса* $\leqslant n$, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a^n = 0$ для каждого нильпотентного элемента $a \in A$. Кольцо A называется кольцом *ограниченного индекса*, если A – кольцо индекса $\leqslant n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется *редуцированным* кольцом.

Идеалы, факторкольца и факторалгебры

1.1. Опишите идеалы в следующих кольцах:

1) $\mathbb{Z}$;

2) P – поле;

3) $P_1 \times \ldots \times P_n$, где $P_1, \ldots, P_n$ – поля;

4) $R_1 \times \ldots \times R_n$, где $R_1, \ldots, R_n$ – кольца;

5) $P[x]$, где P – поле;

6) $M_n(P)$, где P – поле;

7) $M_n(R)$, где R – произвольное кольцо;

8) $CFM_I(P)$, где P – поле.

1.2. Постройте факторкольца.

1) $\mathbb{Z}[i]/(2)$;

2) $\mathbb{Z}[i]/(5)$;

3) $\mathbb{Z}[i]/(3)$;

4) $\mathbb{Z}[i]/(7)$;

5) $\mathbb{Z}[i]/(1+i)$;

6) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/(1+\sqrt{3})$;

7) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i]/(1+2\sqrt{3}i)$;

8) $\mathbb{Z}[x]/(x)$;

9) $\mathbb{Z}[x]/(x^2-3)$;

10) $\mathbb{Z}[x]/(x^2-3, 2x+4)$;

11) $\mathbb{Z}[x]/(1-2x)$;

12 $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$;

13) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$;

14) $\mathbb{Z}_2[x]/(x(x+1))$.

1.3. Докажите или опровергните следующие утверждения:

1) если I – минимальный правый идеал кольца R, то $M_n(I)$ – минимальный правый идеал кольца $M_n(R)$;

2) если I – максимальный правый идеал кольца R, то $M_n(I)$ – максимальный правый идеал кольца $M_n(R)$;

3) если I – минимальный идеал кольца R, то $M_n(I)$ – минимальный идеал кольца $M_n(R)$;

4) если I – максимальный идеал кольца R, то $M_n(I)$ – максимальный идеал кольца $M_n(R)$.

1.4. Покажите, что для идеала I кольца R следующие условия равносильны:

1) I – максимальный идеал;

2) R/I – простое кольцо.

1.5. Пусть R – ненулевое кольцо. Тогда

1) всякий собственный идеал кольца R содержится в максимальном идеале;

2) всякий собственный правый идеал кольца R содержится в максимальном правом идеале.

1.6. Кольцо R называется CI-*кольцом*, если для любой пары идеалов A, B кольца R выполнено равенство $AB = BA$.

1) Если R – CI-кольцо, то $M_n(R)$ – CI-кольцо для любого натурального n.

2) Если R – CI-кольцо и $e = e^2 \in R$, то eRe – CI-кольцо для любого натурального.

3) Если R – простое кольцо, то $R[x]$ – CI-кольцо.

4) Выяснить, является ли CI-кольцом кольцо $M_n(R)[x]$, где R – коммутативное кольцо.

5) Выяснить, является ли CI-кольцом кольцо $R[x]$, где R – CI-кольцо.

Основные операции над идеалами

1.7. Пусть A, B, C – идеалы кольца R. Докажите, что

1) $A(B + C) = AB + AC$;

2) $A \cap (B + C) \supseteq A \cap B + A \cap C$;

3) если $B \subseteq A$, то $A \cap (B + C) = B + A \cap C$;

4) если R – коммутативное кольцо и $R = A + B$, то $A \cap B = AB$.

1.8. Пусть A, B, C – идеалы кольца $\mathbb{Z}$. Докажите, что

1) $A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C$;

2) если $A = (a), B = (b)$, то имеют место равенства

$$AB = (ab), A + B = ((a, b)), A \cap B = ([a, b]),$$

где через (a, b) и $[a, b]$ обозначаются соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное элементов a и b.

Семейство идеалов $I_1, \dots, I_n$ кольца R называется *комаксимальным,* если $I_s + I_t = R$ для каждой пары различных индексов s, t.

1.9. Покажите, что если $I_1, \dots, I_n$ – комаксимальное семейство идеалов коммутативного кольца R, то $I_1 \cap \dots \cap I_n = I_1 \dots I_n$.

1.10. Докажите, что следующие условия равносильны для семейства идеалов $I_1, \dots, I_n$ кольца R :

1) $I_1, \dots, I_n$ – комаксимальное семейство;

2) $R = I_1 + I_2 \dots I_n = I_2 + I_1 I_3 \dots I_{n-1} = \dots = I_n + I_1 \dots I_{n-1}$;

3) $R = I_2 \dots I_n + I_1 I_3 \dots I_n + \dots + I_1 I_2 \dots I_{n-1}$;

4) $I_s^{m_s} + I_t^{m_t} = R$, где s, t – различные индексы и $m_s, m_t \in \mathbb{N}$.

Обратимые и нильпотентные элементы

1.11. Пусть R – кольцо. Покажите, что если:

1) $n \in \mathrm{Nil}(R)$, то $1 + n \in U(R)$;

2) $ab \in \mathrm{Nil}(R)$, то $ba \in \mathrm{Nil}(R)$.

1.12 (Лемма Джекобсона). Элемент $1 + ab$ кольца R обратим слева (соотв., справа) в точности тогда, когда элемент $1 + ba$ обратим слева (соотв., справа).

1.13. Пусть a, b, c – элементы кольца R. Покажите, что если $aba = aca$, то имеют место эквивалентности:

1) $1 + ab$ – обратимый справа элемент $\Leftrightarrow$ $1 + ca$ – обратимый справа элемент;

2) ab – обратимый справа элемент $\Leftrightarrow$ ac – обратимый справа элемент;

3) $r(1 + ab) = 0 \Leftrightarrow r(1 + ca) = 0$;

4) $l(ab) = 0 \Leftrightarrow l(ac) = 0$.

Кольцо R называется *конечным по Дедекинду,* если для любых элементов $r, s \in R$ из равенства $rs = 1$ следует $sr = 1$.

1.14. Покажите, что в каждом из следующих случаев кольцо R является конечным по Дедекинду:

1) R – конечное кольцо;

2) R – конечномерная алгебра над полем P;

3) R – кольцо ограниченного индекса;

4) R – редуцированное кольцо;

5) R – кольцо без ненулевых нильпотентных идеалов;

6) в кольце R выполнено условие минимальности (максимальности) для главных правых идеалов порожденных идемпотентами;

7) в кольце R выполнено условие минимальности (максимальности) для правых аннуляторных идеалов.

1.15. Покажите, что если R – кольцо конечное по Дедекинду и $e^2 = e \in R$, то eRe – кольцо конечное по Дедекинду.

1.16. Для произвольного кольца R через $\phi(R)$ обозначим отображение $\phi(R) : \mathrm{Nil}(R) \to U(R)$, действующее по правилу $n \mapsto 1 + n$. Покажите, что:

1) $\phi(\mathbb{Z}_n)$ является биекцией в точности тогда, когда $n = 2^k$ для некоторого натурального числа k;

2) если $\phi(R)$ – биекция, то $\phi(R[x])$ также является биекцией;

3) если $\phi(R)$ – биекция и e – идемпотент кольца R, то $\phi(eRe)$ – биекция;

4) если $n \in \mathbb{Z}$ и $n > 1$, то отображение $\phi(M_n(R))$ не является биекцией.

1.17. Пусть R – коммутативное кольцо и $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$. Покажите, что:

1) $f \in U(R[x_1, \ldots, x_n])$ в точности тогда, когда свободный член многочлена f обратим, а остальные его коэффициенты – нильпотентные элементы;

2) $f \in \mathrm{Nil}(R[x_1, \ldots, x_n])$ в точности тогда, когда все коэффициенты многочлена f – нильпотентные элементы.

1.18. Пусть R – ненулевое кольцо. Покажите, что если:

1) в кольце R множество $R \setminus U(R)$ аддитивно замкнуто, то $R \setminus U(R)$ – идеал кольца R, в котором содержится каждый собственный односторонний идеал кольца R;

2) в кольце R множество $\mathrm{Nil}(R)$ аддитивно замкнуто, то $\mathrm{Nil}(R)$ – подпредкольцо кольца R.

1.19. Покажите, что всякая ненулевая конечномерная алгебра без делителей нуля является алгеброй с делением.

1.20. 1) Пусть R – коммутативное кольцо. Покажите, что матрица $A \in M_n(R)$ обратима в точности тогда, когда $\det(A) \in U(R)$.

2) Пусть R – коммутативное подкольцо кольца S (не обязательно коммутативного). Покажите, что матрица $A \in M_n(R)$ обратима в кольце $M_n(S)$ в точности тогда, когда $\det(A) \in U(S)$.

Идемпотенты

1.21. Покажите, что для идемпотента e кольца R следующие условия равносильны:

1) e – центральный идемпотент;

2) $er = re = ere$ для каждого $r \in R$;

3) $eR(1-e) = (1-e)Re = 0$;

4) Re, eR – идеалы кольца R;

5) e коммутирует со всеми идемпотентами кольца R;

6) e коммутирует со всеми нильпотентными элементами кольца R;

7) e коммутирует со всеми обратимыми элементами кольца R.

Идемпотент e кольца R называется *полуцентральным справа* (соотв., *слева*), если $er = ere$ (соотв., $re = ere$) для каждого $r \in R$.

1.22. Покажите, что для идемпотента e кольца R следующие условия равносильны:

1) e – полуцентральный справа идемпотент;

2) $1-e$ – полуцентральный слева идемпотент;

3) Re – идеал кольца R;

4) $(1-e)R$ – идеал кольца R;

5) $eR(1-e) = 0$.

1.23. Пусть e, f, g – полуцентральные слева идемпотенты кольца R. Покажите, что:

1) $e + f - ef$ – полуцентральный слева идемпотент и $eR + fR = (e + f - ef)R$;

2) ef – полуцентральный слева идемпотент и $eR \cap fR = efR$;

3) $gR \cap (eR + fR) = gR \cap eR + gR \cap fR$.

1.24. Пусть E_1 – множество всех левых единиц предкольца R и E_2 – множество всех правых единиц предкольца R. Покажите, что:

1) если E_1, E_2 – непустые множество, то R – кольцо;

2) если E_1 – непустое множество и $E_2 = \varnothing$, то $| E_1 |> 1$.

1.25. Пусть e – идемпотент простого кольца R. Покажите, что кольцо eRe является простым.

Говорят, что идемпотенты кольца R поднимаются по модулю идеала I, если для каждого идемпотента $r+I \in R/I$ найдется такой идемпотент $e \in R$, что $r + I = e + I$.

1.26. Пусть R – кольцо и $r \in R$. Покажите, что если $r^2 - r$ нильпотент, то существует такой многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, что $f(r)^2 = f(r)$ и $f(r) - r \in R$ – нильпотентый элемент.

1.27. Пусть I – идеал кольца R. Тогда в каждом из следующих случаях идемпотенты поднимаются по модулю идеала I:

1) I – ниль-идеал;

2) I – идеал, который порождается центральными идемпотентами.

1.28. Покажите, что если в кольце R всякий элемент представим в виде суммы идемпотента и обратимого элемента, то идемпотенты кольца R поднимаются по модулю каждого идеала.

1.29. Пусть R – коммутативное кольцо.

1) Покажите, что если I – конечно порожденный идеал кольца R и $I^2 = I$, то для некоторого идемпотента $e \in R$ имеет место равенство $I = eR$.

2) Приведите пример коммутативного кольца R, в котором существует неконечно порожденный идеал I, для которого выполнено равенство $I^2 = I$.

3) Пусть I – конечно порожденный идеал кольца R, J – ниль-идеал кольца R и выполнено равенство $IJ = I$. Покажите, что $I = 0$

1.30 (Лемма Брауэра). Пусть I – минимальный правый идеал кольца R. Тогда либо $I^2 = 0$, либо $I = eR$, где e – идемпотент кольца R.

1.31. Если I – идеал кольца R, который порождается конечным числом центральных идемпотентов, то $I = eR$ для некоторого центрального идемпотента $e \in R$.

1.32. Пусть $I = eR$ – минимальный правый идеал кольца R и e – идемпотент кольца R. Покажите, что:

1) eRe – тело;

2) если левый идеал Re не содержит ненулевых нильпотентных левых идеалов кольца R, то Re – минимальный левый идеал.

1.33. Пусть e, f – идемпотенты кольца R. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $eR = fR$;

2) $R(1-e) = R(1-f)$;

3) $ef = f, fe = e$;

4) для некоторого элемента $r \in R$ имеет место равенство

$$f = e + er(1-e);$$

5) $l(e) = l(f)$.

1.34. Приведите пример кольца R, в котором существуют такие идемпотенты e и f, что $eR = fR, Re \neq Rf$.

1.35. Пусть R – кольцо, $e = e^2, f^2 = f \in R$ и $1 - (f-e)^2 \in U(R)$. Покажите, что для некоторого элемента $u \in U(R)$ выполнено равенство $f = ueu^{-1}$.

Периодические элементы

Пусть $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и R – кольцо. Элемент a из R называется *k-потентом* ($k > 1$), если $a = a^k$. Множество всех k-потентых элементов кольца R обозначается через

$$R^{(k)} = \{a \in R : \ a^k = a\}.$$

Элемент a из кольца R называется *периодическим*, если $a^m = a^n$ для некоторых различных натуральных чисел m и n. Кольцо R называется *периодическим*, если каждый его элемент является периодическим.

1.36. Пусть R – кольцо и $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Покажите, что:
1) $R^{(n)} \bigcap R^{(n+k-1)} \subset R^{(k)}$;
2) $R^{(k)} \cap R^{(n)} = R^{((k-1,n-1)+1)}$;
3) $R^{(k)} \subset R^{(n)}$, если $n-1 = m(k-1)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$;
4) $a^{k-1} \in R^{(2)}$, если $a \in R^{(k)}$;
5) $a^{n(m-n)} \in R^{(2)}$, если $a^m = a^n (m > n)$.

1.37. Покажите, что каждый периодический элемент a из кольца R однозначно представим в виде $a = e + p$, где e – k-потентный элемент для некотрого $k \in \mathbb{N}$, p – нильпотентный элемент и $ep = pe = 0$.

Элемент e кольца R называется *трипотентом* , если выполнено равенство $e^3 = e$.

1.38. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над полем P и $\mathrm{char} P \neq 2$. Тогда каждый трипотент алгебры $\mathcal{A}$ однозначно представим в виде разности двух ортогональных идемпотентов.

1.39. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над полем P, $k \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant 3$. Если $\mathrm{char}\, P \nmid k-1$ и поле P содержит все корни многочлена $x^{k-1}-1$, то всякий k-потентный элемент $a \in \mathcal{A}$ однозначно представим в виде $a = \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_{k-1}^i e_i$, где $e_0, \ldots, e_{k-2}$ ортогональные идемпотенты алгебры $\mathcal{A}$ и ε_{k-1} – примитивный корень степени$(k-1)$ из единицы.

Нильпотетные идеалы и ниль-идеалы

1.40. Покажите, что сумма ниль-идеалов в произвольном кольце является ниль-идеалом.

1.41. Пусть I, J – идеалы кольца R и $I \subset J$. Докажите, что для идеала J следующие условия равносильны:
1) J – ниль-идеал (соотв., нильпотентный идеал);

2) I – ниль-идеал (соотв., нильпотентный идеал) и J/I – ниль-идеал (соотв., нильпотентный идеал) кольца R/I.

1.42. Пусть R – кольцо. Покажите, что:

1) конечная сумма нильпотентных правых идеалов кольца R является нильпотентным правым идеалом;

2) сумма всех нильпотентных правых идеалов кольца R является ниль-идеалом;

3) каждый правый нильпотентный идеал кольца R содержится в нильпотентном идеале.

1.43. Приведите пример кольца, в котором существует ненильпотентный идеал, представимый в виде суммы нильпотентных идеалов.

Сумма всех ниль-идеалов кольца R обозначается $N(R)$ и называется *верхним нильрадикалом* кольца R.

1.44. Пусть R – кольцо. Тогда $N(R)$ – наибольший ниль-идеал и $N(R/N(R)) = 0$.

1.45. Покажите, что если $\mathcal{A}$ – конечномерная алгебра над полем P, то $N(\mathcal{A})$ – наибольший нильпотентный идеал алгебры $\mathcal{A}$.

Разложения колец

Множество идемпотентов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ из кольца R называется *ортогональным,* если $e_i e_j = 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Множество элементов $\{e_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ из кольца R называется *системой матричных единиц,* если $e_{ij} e_{st} = \delta_{js} e_{it}$ для всех $1 \leqslant i, j, s, t \leqslant n$. Система матричных единиц $\{e_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ из кольца R называется *полной в R,* если $e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn} = 1$.

1.46. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – правые идеалы кольца R. Покажите, что $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ в точности тогда, когда для некоторого множества ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ из кольца R, в сумме дающие единицу, выполнены равенства $A_1 = e_1 R, \ldots, A_n = e_n R$.

1.47. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – идеалы кольца R. Покажите, что $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ в точности тогда, когда для некоторого множества ортогональных центральных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ из кольца R, в сумме дающие единицу, выполнены равенства $A_1 = e_1R, \ldots, A_n = e_nR$.

1.48. Покажите, что если кольцо R содержит полную систему матричных единиц $\{e_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, то $R \cong M_n(e_{11}Re_{11})$.

1.49 (Разложение Пирса). Пусть $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ – разложение единицы кольца R. Покажите, что:

1) множество матриц
$$A = \begin{pmatrix} e_1Re_1 & e_1Re_2 & \ldots & e_1Re_n \\ e_2Re_1 & e_2Re_2 & \ldots & e_2Re_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_nRe_1 & e_nRe_2 & \ldots & e_nRe_n \end{pmatrix}.$$
является кольцом относительно обыкновенных матричных операций сложения и умножения;

2) отображение $\phi : R \to A$, действующее по правилу
$$r \mapsto \begin{pmatrix} e_1re_1 & e_1re_2 & \ldots & e_1re_n \\ e_2re_1 & e_2re_2 & \ldots & e_2re_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_nre_1 & e_nre_2 & \ldots & e_nre_n \end{pmatrix},$$
является изоморфизмом колец.

1.50. 1) Пусть A – конечномерная коммутативная алгебра над полем P, которая как векторное пространство обладает базисом состоящим из идемпотентов. Покажите, что алгебра A изоморфна конечному прямому произведению поля P.

2) Покажите, что всякое конечное кольцо, в котором выполнено тождество $x^2 = x$, изоморфно конечному прямому произведению поля F_2.

3) Покажите, что каждая конечная булева алгебра B изоморфна булевой алгебре множества всех подмножеств некоторого конечного множества.

1.51 (**Китайская теорема об остатках**). Пусть $I_1, \ldots, I_n$ – идеалы кольца R, удовлетворяющие равенству $I_s + I_t = R$ для каждой пары различных индексов s, t. Докажите, что

1) отображение $f : R \to R/I_1 \times \ldots \times R/I_n$, действующее по правилу

$$r \mapsto (r + I_1, \ldots, r + I_n),$$

является сюръективным гомоморфизмом колец;

2) имеет место изоморфизм $R/I_1 \cap \ldots \cap I_n \cong R/I_1 \times \ldots \times R/I_n$.

1.52. Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная алгебра над полем P, у которой $N(\mathcal{A}) = 0$. Тогда

1) $1 = e_1 + \ldots + e_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ – ортогональные идемпотенты из алгебры $\mathcal{A}$ и $e_i\mathcal{A}$ – минимальный правый идеал $\mathcal{A}$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$;

2) отношение $\sim$ на множестве $\{e_1, \ldots, e_n\}$, заданное по правилу

$$e_i \sim e_j \Leftrightarrow e_i\mathcal{A}e_j \neq 0,$$

является отношением эквивалентности;

3) если $e_i \sim e_j$, то

$$\dim_P(e_i\mathcal{A}e_j) = \dim_P(e_j\mathcal{A}e_i) = \dim_P(e_i\mathcal{A}e_i) = \dim_P(e_j\mathcal{A}e_j);$$

4) если $C_1, \ldots, C_m$ – все классы эквивалентностей отношения $\sim$, то $I_k = \sum_{e \in C_k} eR$ – идеал алгебры $\mathcal{A}$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant m$ и

$$\mathcal{A} = I_1 \oplus \ldots \oplus I_m;$$

5) если $m = 1$, то $\mathcal{A} \cong M_n(e_1\mathcal{A}e_1)$.

1.53 (**Теорема Веддерберна**). Для конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ над полем P следующие условия равносильны:

1) $N(\mathcal{A}) = 0$;

2) $\mathcal{A}$ изоморфно конечному прямому произведению матричных колец над P-алгебрами с делением.

1.54 (**Теорема Молина**). Для конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ над алгебраически замкнутым полем P следующие условия равносильны:

1) $N(\mathcal{A}) = 0$;

2) $\mathcal{A}$ изоморфно конечному прямому произведению матричных алгебр над полем P.

1.55 (Теорема Вейерштрасса-Дедекинда). В конечномерной коммутативной алгебре $\mathcal{A}$ каждый нильпотентный элемент нулевой в точности тогда, когда $\mathcal{A}$ – прямое произведение полей.

1.56. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) в кольце R каждый правый идеал представим в виде eR, где e – идемпотент;

2) кольцо R является прямой суммой минимальных правых идеалов;

3) кольцо R изоморфно конечному прямому произведению матричных колец над телами.

1.57 (Теорема Веддерберна-Артина). Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – кольцо с условием минимальности для правых идеалов и $N(R) = 0$;

2) R – кольцо с условием минимальности для левых идеалов и $N(R) = 0$;

2) R изоморфно конечному прямому произведению матричных колец над телами.

1.58. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) в кольце R каждый идеал представим в виде eR, где e – центральный идемпотент;

2) в кольце R каждый идеал представим в виде eR, где e – идемпотент;

3) кольцо R изоморфно конечному прямому произведению простых колец.

1.59. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над полем P и B – подпространство $\mathcal{A}$, порожденное нильпотентными элементами. Покажите, что если B мультипликативно замкнуто, то $B^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Если $\{A_i\}_{i\in I}$ – такое множество идеалов кольца R, что $\cap_{i\in I}A_i = 0$, то R называется *подпрямым произведением* факторколец R/A_i. Если пересечение всех ненулевых идеалов кольца R не равно нулю, то кольцо R называется *подпрямо неразложимым.* (Это означает, что существует ненулевой идеал, содержащийся в каждом ненулевом идеале).

1.60. Покажите, что каждое кольцо является подпрямым произведением подпрямо неразложимых колец.

Рассмотрим множество $S(R)$ всех собственных идеалов кольца R, порожденных центральными идемпотентами. По лемме Цорна множество $S(R)$ содержит максимальный элемент P. Обозначим через $\mathcal{P}(R)$ – множество всех максимальных элементов из $S(R)$. Если $P \in \mathcal{P}(R)$, то факторкольцо R/P называется *пирсовским слоем* кольца R.

Пусть γ – ординал и $\mathcal{P} = \{P_\alpha | 0 \leqslant \alpha < \gamma\}$ – последовательность идеалов в R.

Множество $\mathcal{P}$ называется *пирсовской цепью*, если

(i) $P_0 = 0$;

(ii) $P_\alpha \subseteq P_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta < \gamma$;

(iii) R/P_β – пирсовский слой кольца $R/P_{\beta-1}$, если $\beta < \gamma$ и β – непредельный ординал;

(iv) $P_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} P_\alpha$, если $0 < \beta < \gamma$ и β – предельный ординал.

Если P – часть пирсовской цепи в R и факторкольцо R/P неразложимо, то R/P называется *максимальным неразложимым фактором* кольца A.

1.61. Пусть $\{R/P_i\}_{i\in I}$ – множество всех пирсовских слоев кольца R. Тогда:

1) если $0 \neq r \in R$, то $r \notin P_i$ для некоторого пирсовского слоя R/P_i;

2) $\cap_{i\in I}P_i = 0$ (в частности, R – подпрямое произведение своих пирсовских слоев).

1.62. Пусть $\mathcal{M}(R)$ – множество всех максимальных неразложимых факторов кольца R. Тогда $\cap_{P\in\mathcal{M}(R)}P = 0$. В частности, R – подпрямое произведение своих максимальных неразложимых факторов.

I-конечные кольца

Пусть R – кольцо и e,f – идемпотенты из R. Положим $e \leqslant f$, если $eRe \subset fRf$ или, что эквивалентно, $ef = fe = e$. Говорят, что кольцо R удовлетворяет *условию минимальности* (соотв., *максимальности*) для идемпотентов, если каждая убывающая (соотв., возрастающая) цепочка идемпотентов из кольца R стабилизируется.

1.63. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) каждая возрастающая цепочка правых идеалов

$$e_1R \subset e_2R \subset \dots e_nR \subset \dots,$$

где $e_i^2 = e_i$ для каждого индекса i, стабилизируется;

2) каждая убывающая цепочка правых идеалов

$$e_1R \supset e_2R \supset \dots e_nR \supset \dots,$$

где $e_i^2 = e_i$ для каждого индекса i, стабилизируется;

3) кольцо R не содержит бесконечного числа ортогональных ненулевых идемпотентов;

4) кольцо R удовлетворяет условию максимальности для идемпотентов;

5) кольцо R удовлетворяет условию минимальности для идемпотентов.

Кольцо называется *I-конечным,* если оно удовлетворяет одному из эквивалентных условий предыдущего упражнения.

Последовательность $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ элементов из кольца R называется *возрастающей регулярной справа (соответственно убывающей регулярной справа),* если для каждого индекса k выполнено равенство $r_k = r_{k+1}r_k$ (соответственно $r_{k+1} = r_kr_{k+1}$). Аналогично определяются возрастающие регулярные слева и убывающие регулярные слева последовательности. Говорят, что возрастающая (соответственно убывающая) регулярная справа последовательность $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ сходится, если стабилизируется возрастающая (соответственно убывающая) цепочка правых идеалов $r_1R \subset r_2R \subset \ldots \subset r_nR \subset \ldots$ (соответственно $r_1R \supset r_2R \supset \ldots \supset r_nR \supset \ldots$). Аналогично определяется сходимость возрастающих регулярных слева и убывающих регулярных слева последовательностей.

1.64. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ – последовательность идемпотентов из кольца R. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ – возрастающая регулярная справа последовательность;

2) имеют место включения

$$e_1R \subset e_2R \subset \ldots e_nR \subset \ldots;$$

3) $1-e_1, 1-e_2, \ldots, 1-e_n, \ldots$ – убывающая регулярная слева последовательность;

4) имеют место включения

$$R(1-e_1) \supset R(1-e_2) \supset \ldots R(1-e_n) \supset \ldots.$$

1.65. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ – возрастающая регулярная справа последовательность элементов из кольца R. Докажите, что

1) если r_i обратимо справа для некоторого i, то $r_k = 1$ для каждого $k > i$;

2) если $k > i$, то $r_k r_i = r_i$;

3) если $r_k \in r_iR$ для некоторого $k > i$, то r_k – идемпотент;

4) последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ сходится в точности тогда, когда существует индекс k такой, что r_i, r_j – идемпотенты и $r_ir_j = r_j, r_jr_i = r_i$ для каждых $i, j > k$;

5) последовательность $1-r_1, 1-r_2, \ldots, 1-r_n, \ldots$ является убывающей регулярной слева;

6) последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ сходится в точности тогда, когда сходится последовательность $1-r_1, 1-r_2, \ldots, 1-r_n, \ldots$;

7) последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ сходится в точности тогда, когда стабилизируется убывающая цепочка левых идеалов

$$l(r_1) \supset l(r_2) \supset \ldots \supset l(r_n) \supset \ldots.$$

1.66. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) в кольце R сходится всякая возрастающая регулярная справа последовательность;

2) в кольце R сходится всякая убывающая регулярная слева последовательность.

Редуцированные и нормальные кольца

Кольцо, в котором каждый правый идеал является идеалом, называется *инвариантным справа*. Если в кольце каждый максимальный правый идеал является идеалом, то такое кольцо называется *квазиинвариантным справа*. Кольцо R называется *нормальным*, если каждый идемпотент кольца R является центральным.

1.67. Покажите, что всякое редуцированное кольцо является нормальным.

1.68. Если кольцо R нормально, то в нем множество всех максимальных неразложимых факторов совпадает с множеством всех пирсовских слоев.

1.69. Для кольца R равносильны условия:

1) R – редуцированное кольцо;

2) все пирсовские слои кольца R – редуцированные кольца;

3) все пирсовские слои кольца R – редуцированные кольца без нетривиальных идемпотентов.

1.70. Покажите, что в квазиинвариантном справа кольце каждый максимальный правый идеал является максимальный левым идеалом.

1.71. Покажите, что для правого идеала A квазиинвариантного справа кольца R следующие условия равносильны:

1) A – максимальный правый идеал;

2) A – максимальный идеал;

3) для некоторого максимального правого идеала B имеет место равенство $A = \{r \in R \mid Rr \subset B\}$ т.е. A – примитивный справа идеал.

1.72. Для кольца R равносильны условия:

1) R – квазиинвариантное справа кольцо;

2) если X – непустое подмножество R и $RX = R$, то $XR = R$;

3) если $a, b \in R$ и $Ra + Rb = R$, то $aR + bR = R$.

1.73. Пусть R – квазиинвариантное справа кольцо. Покажите, что если:

1) пресечение всех максимальных идеалов кольца R является нулевым идеалом, то R – редуцированное кольцо.

2) R – простое кольцо, то R является телом.

1.74. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – коммутативное кольцо;

2) $R[x]$ – инвариантное справа кольцо.

1.75. Для редуцированного кольца R имеют место следующие утверждения:

1) если $r, s \in R$ и $rs = 0$, то $rRs = sRr = 0$;

2) для каждого подмножества X кольца R выполнено равенства

$$r(RXR) = r(X) = l(X) = l(RXR), r(X) \cap RXR = 0;$$

3) если $r_1, \ldots, r_n \in R$, то $r_1 \ldots r_n = 0$ в точно тогда, когда $\cap_{i=1}^{n} Rr_iR = 0$;

4) если $r_1, \ldots, r_n \in R$ и $r_1 \ldots r_n = 0$, то для любого семейства элементов $s_1, \ldots, s_m$, удовлетворяющее условию

$$\{Rr_1R, \ldots, Rr_nR\} = \{Rs_1R, \ldots, Rs_mR\},$$

имеет место равенство $Rs_1R \ldots Rs_mR = 0$.

Кольцо R называется *армендаризовским*, если для любых многочленов $f = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0, g = b_mx^m + \ldots + b_1x + b_0 \in R[x]$ из того, что $fg = 0$, следуют равенства $a_ib_j = 0 (0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m)$.

1.76. Покажите, что всякое редуцированные кольцо является армендаризовским.

1.77. Пусть R – армендаризовское кольцо. Покажите, что:

1) $R[x]$– армендаризовское кольцо;

2) если $f_1, \ldots, f_n \in R[x]$ и $f_1 \ldots f_n = 0$, то $a_1 \ldots a_n = 0$, где a_i – коэффициент многочлена f_i для каждого i.

Пусть R кольцо и $f \in R[x]$. Через $c_r(f)$ будем обозначать правый идеал, порожденный коэффициентами многочлена f. Кольцо R называется *гауссовым справа*, если для любых многочленов $f, g \in R[x]$ выполнено равенство $c_r(fg) = c_r(f)c_r(g)$.

1.78. Покажите, что:

1) гомоморфный образ гауссова справа кольца является гауссовым справа;

2) прямое произведение гауссовых справа колец является гауссовым справа;

3) всякое гауссово справа кольцо является армендаризовским;

4) всякое гауссово справа кольцо является инвариантным справа.

1.79. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – гауссово справа кольцо;

2) R – инвариантное справа кольцо, у которого каждый гомоморфный образ является армендаризовским кольцом.

Алгебры кватернионов

Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A и i, j, k – формальные символы. Обозначим через $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$ кольцо, образованное всеми формальными суммами $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ $(a_0, a_1, a_2, a_3 \in A)$ с такими сложением и умножением, что

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3) + (a'_0 + a'_1 i + a'_2 j + a'_3) =$$
$$= (a_1 + a'_0) + (a_1 + a'_1)i + (a_2 + a'_2)j + (a_3 + a'_3)k,$$
$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(a'_0 + a'_1 i + a'_2 j + a'_3 k) =$$
$$= (a_0 a'_0 + \alpha a_1 a'_1 + \beta a_2 a'_2 - \alpha\beta a_3 a'_3) + (a_0 a'_1 + a_1 a'_0 + \beta(a_3 a'_2 - a_2 a'_3))i +$$
$$+ (a_0 a'_2 + a_2 a'_0 + \alpha(a_1 a'_3 - a_3 a'_1))j + (a_0 a'_3 + a_3 a'_0 + a_1 a'_2 - a_2 a'_1)k.$$

Непосредственно проверяется, что $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$ – кольцо с единицей $1 \in A$; это кольцо называется (*обобщенной*) *алгеброй кватернионов* над A. Кроме того, $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$ – свободный A-модуль с каноническим базисом $\{1, i, j, k\}$,

$$i^2 = \alpha,\ j^2 = \beta,\ k^2 = -\alpha\beta,\ ij = -ji = k,\ ik = -ki = \alpha j,\ kj = -jk = \beta i.$$

Если $\alpha = \beta = -1$, то алгебра кватернионов $\left(\dfrac{-1, -1}{A}\right)$ называется *алгеброй гамильтоновых кватернионов* над A.

Пусть q – кватернион $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$. Канонические базисные коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3 \in A$ кватерниона q также обозначаются через q_0, q_1, q_2 и q_3 соответственно. Кватернион вида

$$q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \in \left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$$

называется *сопряженным* к q кватернионом, который обозначается через q^*. Элемент $q^* q = q q^* = q_0^2 - \alpha q_1^2 - \beta q_2^2 + \alpha\beta q_3^2 \in A$ называется *нормой* кватерниона q и обозначается через $|q|$.

1.80. Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A, $Q \equiv \left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$ и $q \equiv q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in Q$.

1) $|q| = |q^*| = qq^* = q^* q$, $q^{**} = q$.

2) Для любого кватерниона $t \in Q$ имеем $|qt| = |q||t|$, $(qt)^* = t^* q^*$, и $(q + t)^* = q^* + t^*$. Поэтому кольцо Q имеет инволюцию $t \to t^*$, индуцирующую изоморфизм решетки $\mathrm{Lat}(Q_Q)$ всех правых идеалов кольца Q на решетку $\mathrm{Lat}({}_Q Q)$ всех левых идеалов кольца Q.

3) $(x+yi+zj)(x-yi-zj)=|x+yi+zj|=x^2-\alpha y^2-\beta z^2$ для любого $x,y,z\in A$.

4) Для каждого идеала B кольца A обозначим через $\varphi(B)$ идеал BQ кольца Q. Тогда для любых идеалов B и C кольца A верны соотношения

$$\varphi(B+C)=\varphi(B)+\varphi(C),\quad \varphi(B\cap C)=\varphi(B)\cap\varphi(C),$$
$$\varphi(BC)=\varphi(B)\varphi(C),\quad \varphi(B)=\varphi(C)\Leftrightarrow B=C.$$

Поэтому решетка идеалов кольца A изоморфна подрешетке решетки идеалов кольца Q, образованной всеми идеалами в Q вида BQ для некоторого идеала B кольца A.

5) Если B – собственный идеал кольца A и $h\colon A\to A/B$ – естественный кольцевой эпиморфизм, то кольцо Q/BQ изоморфно алгебре кватернионов $\left(\dfrac{h(\alpha),h(\beta)}{h(A)}\right)$ над кольцом $h(A)$.

7) q обратим в $Q\Leftrightarrow|q|$ обратим в A.

8) q – неделитель нуля в $Q\Leftrightarrow q^*$ – неделитель нуля в $Q\Leftrightarrow|q|$ – неделитель нуля в A.

9) Если $q\in C(Q)$, то $2q=2q_0$.

1.81. Пусть α,β,λ,μ – обратимые элементы коммутативного кольца A. Докажите, что

1) $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{A}\right)\cong\left(\dfrac{\beta,\alpha}{A}\right)$;

2) $\left(\dfrac{\alpha\lambda^2,\beta\mu^2}{A}\right)\cong\left(\dfrac{\alpha,\beta}{A}\right)$;

3) если $2^{-1}\in A$, то $\left(\dfrac{1,\beta}{A}\right)\cong M_2(A)$.

Кольцо A с элементами α и β называется (α,β)-*кольцом*, если $x=y=z=0$ для любых таких $x,y,z\in A$, что $x^2-\alpha y^2-\beta z^2=0$.

1.82. Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A и $Q\equiv\left(\dfrac{\alpha,\beta}{A}\right)$.

1) A – (α,β)-кольцо $\Leftrightarrow|q|\neq0$ для каждого ненулевого $q\in Q$.

2) Если A – (α,β)-кольцо, то Q и A – редуцированные кольца.

3) Q – область $\Leftrightarrow A$ – область и A – (α,β)-кольцо.

4) Q – тело $\Leftrightarrow A$ – поле, A – (α,β)-кольцо.

1.83. Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A, $Q \equiv \left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$ – алгебра кватернионов и $2^{-1} \in A$. Для каждого идеала T кольца Q через C_T обозначается идеал кольца A, порожденный всеми базисными коэффициентами t_0, t_1, t_2 и t_3 всех кватернионов $t \in T$.

1) Центр кольца Q совпадает с A.

2) Для любого кватерниона $q \in Q$ идеал QqQ кольца Q содержит идеал C_{QqQ} кольца A. Поэтому $T = C_T Q$ для каждого идеала T в Q и $C_S C_T = C_T C_S \subseteq ST \cap TS$ для любых идеалов S и T в Q.

Кроме того, отображение $B \to BQ$ – решеточный изоморфизм из решетки идеалов кольца A на решетку идеалов кольца Q и $(BC)Q = (BQ)(CQ)$ для любых идеалов B и C кольца A.

3) Если R и S – ненулевые идеалы кольца Q, то для любого такого идеала T в Q, что $RS \subseteq T$, существуют такие ненулевые идеалы B и D в A, что $BD \subseteq T$, $B \subseteq R$ и $D \subseteq T$ (в частности, если $RS = 0$, то $BD = 0$).

4) Каждый ненулевой нильпотентный идеал кольца Q содержит ненулевой нильпотентный идеал кольца A.

5) Q – простое кольцо $\Leftrightarrow$ A – поле.

6) Q – редуцированное кольцо $\Leftrightarrow$ A – (α, β)-кольцо.

1.84. Пусть T – тело, $P = C(T)$ и F – максимальное подполе тела T, которое является расширением Галуа поля P. Хорошо известно, что при этих условиях существует элемент a из поля F, для которого выполнено равенство $F = P(a)$. Пусть $A \in \mathrm{End}_F(T_F)$ – линейный оператор, действующее по правилу $A(v) = av$. Покажите, что:

1) $T_F = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n}$, где $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ – попарно различные собственные значения A, $V_{\lambda_i} = \{v \in T \mid A(v) = v\lambda_i\}$ и $\dim(V_{\lambda_i}) = 1$;

2) если $f(x)$ – минимальный многочлен элемента a относительно поля P, то $f(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$;

3) $\dim_P(T) = n^2$;

4) если F' – подполе тела T и $\phi : F' \to F$ – изоморфизм полей, который тождественно действует на P, то существует такой ненулевой элемент $t \in T$, что имеет место равенство $\phi(x) = txt^{-1}$ для каждого $x \in T$;

5) имеет место изоморфизм $Gal(F : P) \cong N(F)/U(F)$, где $N(F) =$

$\{t \in T \setminus \{0\} \mid tFt^{-1} = F\}$ – нормализатор подполя F.

1.85. Пусть A – центральная простая алгебра над полем P и $Char(P) \neq 2$. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) A – алгебра с делением и $\dim_P(A) = 4$;

2) существуют ненулевые элементы α и β поля P такие, что P – (α, β) - кольцо и $A \cong \left(\dfrac{\alpha, \beta}{P}\right)$.

1.86. Пусть A – центральная простая алгебра P и $Char(P) \neq 2$. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $\dim_P(A) = 4$;

2) существуют ненулевые элементы α и β поля P такие, что $A \cong \left(\dfrac{\alpha, \beta}{P}\right)$.

1.87. Пусть p – простое число. Докажите, что

1) $\left(\dfrac{-1, p}{\mathbb{Q}}\right)$ – тело $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 4$;

2) $\left(\dfrac{-2, p}{\mathbb{Q}}\right)$ – тело $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 8$ или $p \equiv 3 \pmod 8$.

1.88. Пусть α, β – ненулевые элементы поля P и $Char(P) \neq 2$. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) -1 – квадрат в алгебре $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{P}\right)$;

2) для некоторого ненулевого элемента $\gamma \in P$ имеет место изоморфизм

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{P}\right) \cong \left(\frac{-1, \gamma}{P}\right).$$

1.89. Покажите, что $\left(\dfrac{i, 2+3i}{\mathbb{Q}(i)}\right)$ – алгебра с делением.

1.90 (**Теорема Фробениуса**). Всякая алгебраическая алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$ изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{H}$. В частности, всякая конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$ изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{H}$.

Коммутативность колец

1.91. Пусть A – алгебра над коммутативном кольцом R, $[A, A]$ – подмодуль модуля A_R, порожденный всеми элементами вида $ab - ba$, и p^n – натуральная степень простого числа p. Покажите, что для каждых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ выполнено равенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{p^n} = a_1^{p^n} + a_2^{p^n} + \ldots + a_n^{p^n} + b,$$

где $b \in [A, A] + pA$.

1.92 (Теорема Веддерберна). Всякое конечное тело является полем.

1.93. Пусть R – тело, в котором для каждого элемента r существует такое целое число $n_r (n_r > 1)$, что $r^{n_r} = r$. Покажите, что R – поле.

1.94. Пусть T – тело, для которого выполнено условие $[T, T] \subset C(T)$. Покажите, что T – поле.

1.95. Покажите, что если:

1) кольцо R удовлетворяет тождеству $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$, то R – коммутативное кольцо;

2) кольцо R удовлетворяет тождеству $(x - y)(x + xy + y) = x^3 - y^3$, то R – коммутативное кольцо;

3) кольцо R удовлетворяет тождеству $(xy)^2 = x^2y^2$, то R – коммутативное кольцо.

1.96. Пусть кольцо R удовлетворяет тождеству $x^n = x$, где n – некоторое фиксированное натуральное число. Покажите, что R является коммутативном кольцом в случаях, когда $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2 Первичные и полупервичные идеалы

Первичные идеалы

Собственный идеал I кольца R называется *первичным*, если для каждых идеалов A и B кольца R из включения $AB \subset I$ следует, что либо $A \subset I$, либо $B \subset I$. Кольцо R называется *первичным*, если 0 – первичный идеал кольца R. Если R – коммутативное кольцо, то каждый первичный идеал кольца R, как правило, называется простым. Непустое подмножество S кольца R называется *m-системой,* если для каждых элементов $a, b \in S$ существует такой элемент $c \in S$, что $c \in aRb$.

2.1. Для собственного идеала I кольца R следующие условия равносильны:

1) I – первичный идеал;

2) для любых $a, b \in R$ из включения $(a)(b) \subset I$ следует, что либо $a \subset I$, либо $b \subset I$;

3) для любых $a, b \in R$ из включения $aRb \subset I$ следует, что либо $a \subset I$, либо $b \subset I$;

4) для любых правых идеалов A и B кольца R из включения $AB \subset I$ следует, что либо $A \subset I$, либо $B \subset I$;

5) для любых левых идеалов A и B кольца R из включения $AB \subset I$ следует, что либо $A \subset I$, либо $B \subset I$;

6) $R \setminus I$ – m-система.

2.2. Покажите, что если:

1) S – подполугруппа мультипликативной полугруппы кольца R и A – максимальный идеал среди всех таких идеалов X кольца R, что $X \cap S = \varnothing$, то A – первичный идеал;

2) S – m-система кольца R и A – максимальный идеал среди всех таких идеалов X кольца R, что $X \cap S = \varnothing$, то A – первичный идеал.

Идеал I кольца R называется *минимальным первичным идеалом,* если I – минимальный элемент множества всех первичных идеалов.

2.3. Пусть R – ненулевое кольцо. Покажите, что:

1) всякий максимальный идеал кольца R является первичным;

2) всякий первичный идеал кольца R содержит минимальный первичный идеал.

2.4. Покажите, что кольцо R является областью в точности тогда, когда R – первичное и редуцированное кольцо.

2.5. Покажите, что:

1) идеал I кольца $\mathbb{Z}[x]$ является максимальным в точности тогда, когда $I = p\mathbb{Z}[x]+f(x)\mathbb{Z}[x]$, где p – простое число и f – многочлен неприводимый по модулю p;

2) идеал I кольца $\mathbb{C}[x, y]$ является максимальным в точности тогда, когда $I = (x - \alpha)\mathbb{C}[x, y] + (y - \beta)\mathbb{C}[x, y]$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

3) идеал I кольца $\mathbb{Z}_{(2)}[x]$ является максимальным точности тогда, когда либо $I = 2\mathbb{Z}_{(2)}[x] + f(x)\mathbb{Z}_{(2)}[x]$, где f – многочлен неприводимый по модулю 2, либо $I = f(x)\mathbb{Z}_{(2)}[x]$, где $f = 1 + 2g$ и $g \in \mathbb{Z}_{(2)}[x]$ – многочлен степени $\geqslant 1$.

2.6. Покажите, что для кольца главных идеалов R следующие условия равносильны:

1) в кольце R множество классов ассоциированных простых элементов бесконечно;

2) всякий максимальный идеал кольца $R[x]$ имеет вид $pR[x] + gR[x]$, где p – простой элемент R, $g \in R[x]$ – неразложимый многочлен по модулю p;

3) всякий максимальный идеал кольца $R[x]$ не является главным.

2.7. Покажите, что для кольца главных идеалов R следующие условия равносильны:

1) в кольце R множество классов ассоциированных простых элементов конечно;

2) в кольце R существует главный максимальный идеал;

3) кольце $R[x]$ существует неразложимый многочлен обратимый по модулю каждого простого элемента кольца R.

4) R – полулокальное кольцо.

Полупервичные идеалы

Идеал A кольца R называется *полупервичным*, если для каждого идеала B кольца R включение $B^2 \subset A$ влечет $B \subset A$. Кольцо R называется *полупервичным*, если 0 – полупервичный идеал кольца R.

2.8. Пусть R – первичное (соотв., полупервичное) кольцо и $e^2 = e \in R$. Покажите, что eRe – первичное (соотв., полупервичное) кольцо.

2.9. Пусть e – идемпотент полупервичного кольца R. Тогда следующие условия равносильны:

1) e – центральный идемпотент;

2) eR – идеал кольца R;

3) Re – идеал кольца R;

4) $(1-e)Re = 0$;

5) $eR(1-e) = 0$;

6) e – полуцентральный справа идемпотент;

7) e – полуцентральный слева идемпотент.

Непустое подмножество S кольца R называется *n-системой,* если для любого элемента $a \in S$ существует такой элемент $b \in S$, что $b \in aRa$. Для идеала A кольца R введем обозначение

$$\sqrt{A} := \{r \in R \mid \text{если } S \text{ – } n\text{-системы и } r \in S, \text{ то } S \cap A \neq \varnothing\}$$

2.10. Покажите, что для произвольного идеала A кольца R имеет место равенство

$$\sqrt{A} = \{r \in R \mid \text{если } S \text{ – } m\text{-системы и } r \in S, \text{ то } S \cap A \neq \varnothing\}.$$

2.11. Покажите, что для произвольного идеала A коммутативного кольца R имеет место равенство

$$\sqrt{A} = \{r \in R \mid r^n \in A \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}.$$

2.12. Пусть A – идеал кольца R. Тогда $\sqrt{A}$ – пересечение всех таких первичных идеалов B кольца R, что $A \subset B$.

2.13. Для идеала I кольца R следующие условия равносильны:

1) I – полупервичный идеал;

2) для любого элемента $a \in R$ включение $(a)^2 \subset I$ влечет $a \in I$;

3) для любого элемента $a \in R$ включение $aRa \subset I$ влечет $a \in I$;

4) $R \setminus I$ – n-система.

5) для любого правого идеала A кольца R включение $A^2 \subset I$ влечет $A \subset I$;

6) для любого левого идеала A кольца R включение $A^2 \subset I$ влечет $A \subset I$;

7) для любых идеалов A, B кольца R из включения$AB \subset I$ следует $A \cap B \subset I$;

8) I – пересечение некоторого множество первичных идеалов кольца R;

9) $\sqrt{I} = I$.

Пересечение всех первичных идеалов кольца R обзначается через $rad(R)$ и называется *первичным радикалом* (или *нижним нильрадикалом радикалом*) кольца R. Элемент $a \in R$ называется *строго нильпотентным* в R, если все члены любой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ с $a_0 = a, a_{n+1} \in a_nRa_n$ $(\forall n)$ равны нулю, начиная с некоторого индекса. Каждый строго нильпотентный элемент нильпотентен.

2.14. Пусть R – кольцо. Покажите, что:

1) $rad(R)$ совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов кольца R;

2) $rad(R)$ совпадает с пересечением все полупервичных идеалов кольца R;

3) $rad(R)$ совпадает с пересечением все минимальных первичных идеалов кольца R.

4) $rad(R)$ – минимальный полупервичный идеал кольца R.

2.15. Покажите, что кольцо R является редуцированным в точности тогда, когда R – подпрямое призведение областей.

2.16. Покажите, что если кольцо R – первичное (соотв., полупервичное) кольцо, то:

1) $R[x_1, \ldots, x_n]$ – первичное (соотв., полупервичное) кольцо;

2) $M_n(R)$ – первичное (соотв., полупервичное) кольцо.

2.17. Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A, $Q \equiv \left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$ – алгебра кватернионов над A и $2^{-1} \in A$.

1) Идеал T кольца Q – первичный (полупервичный, максимальный) идеал $\Leftrightarrow$ существует такой первичный (полупервичный, максимальный) идеал B кольца A, что $T = BQ$.

2) Q – первичное (полупервичное) кольцо $\Leftrightarrow$ A – область (редуцированное кольцо).

3) В кольце Q каждый первичный идеал кольца Q – максимальный идеал $\Leftrightarrow$ в кольце A каждый вполне первичный идеал – максимальный идеал.

4) Q – полупростое кольцо $\Leftrightarrow$ A – конечное прямое произведение полей.

5) Q – простое артиново кольцо $\Leftrightarrow$ A – поле.

3 Радикал Джекобсона

3.1. Покажите, что для элемента r кольца R следующие условия равносильны:

1) для каждого $s \in R$ элемент $1 - rs$ обратим справа;

2) элемент r принадлежит пресечению всех максимальных правых идеалов кольца R;

3) для каждого $s \in R$ элемент $1 - sr$ обратим слева;

4) элемент r принадлежит пресечению всех максимальных левых идеалов кольца R;

5) для каждых элементов s, t из кольца R элемент $1 - trs$ обратим.

Радикалом Джекобсона кольца называется пресечение всех его максимальных правых идеалов. Согласно предыдущему упражнению радикал

Джекобсона совпадает с пересечением всех его максимальных левых идеалов. Радикал Джекобсона кольца R обозначается через $J(R)$.

Бинарная операция $\circ$, определенная на кольце R согласно правилу

$$a \circ b = a + b - ab,$$

называется *круговой композицией.* Элемент r кольца R называется квазирегулярным справа, если для некоторого элемента $r' \in R$ выполнено равенство $r \circ r' = 0$. Аналогично определяется понятие квазирегулярного слева элемента. Элемент r кольца R называется *квазирегулярным*, если он квазирегулярен справа и слева.

3.2. Пусть R – кольцо. Покажите, что $(R, \circ)$ – моноид.

3.3. Покажите, что для правого идеала I кольца R следующие условия равносильны:

1) $(I, \circ)$ – группа;
2) каждый элемент идеала I квазирегулярен справа;
3) каждый элемент идеала I квазирегулярен.

3.4. Покажите, что произвольных элементов $r_1, \ldots, r_n$ кольца R имеет место равенство

$$r_1 \circ \ldots \circ r_n = 1 - (1 - r_1) \ldots (1 - r_n).$$

3.5. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ – последовательность идемпотентов из кольца R, причем $e_i e_j = 0$ как только $i < j$. Покажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеют место утверждения:

1) $e_n \circ \ldots \circ e_1$ – идемпотент;
2) $e_n \circ \ldots \circ e_1 R = e_1 R + \ldots + e_n R$;
3) $e_n \circ \ldots \circ e_1 R = R e_1 + \ldots + R e_n$;
4) если $e_n \circ \ldots \circ e_1 R = e_{n+1} \circ e_n \circ \ldots \circ e_1 R$, то $e_{n+1} = 0$.

3.6. Покажите, что для кольца R имеют место следующие утверждения:

1) $J(R)$ – наибольший квазирегулярный правый идеал;
2) $J(R)$ – наибольший квазирегулярный левый идеал;
3) если I – ниль-идеал кольца R, то $I \subset J(R)$;

3.7. Пусть R – квазиинвариантное справа кольцо. Тогда $J(R)$ – пересечение всех максимальных идеалов кольца R.

3.8. Пусть $f : R \to S$ – гомоморфизм колец. Покажите, что:

1) если $f : R \to S$ – эпиморфизм, то $f(J(R)) \subset J(S)$;

2) если $\mathrm{Ker}(f) \subset J(R)$ и $f : R \to S$ – эпиморфизм, то имеют место равенства

$$f(J(R)) = J(S), f(U(R)) = U(S), f^{-1}(U(S)) = U(R);$$

3) приведите пример гомоморфизма f, для которого $f(J(R)) \not\subseteq J(S)$;

4) если X – такое конечное подмножество из кольца S, что

$$f(R)X = S, f(R) \subset C(X),$$

то $J(f(R)) \subset J(S)$.

3.9. Покажите, что кольцо R конечно по Дедекинду в точности тогда, когда $R/J(R)$ – конечное по Дедекинду кольцо.

Пусть A – алгебра над полем P. Элемент $a \in A$ называется *алгебраическим,* если для некоторого ненулевого многочлена $f(x) \in P[x]$ выполнено равенство $f(a) = 0$. Алгебра A называется *алгебраической,* если каждый ее элемент является алгебраическим.

3.10. Пусть A – алгебра над полем P. Покажите, что:

1) элемент $a \in J(A)$ является нильпотентным в точности тогда, когда a – алгебраический элемент;

2) если A – алгебраическая алгебра, то $J(A) = N(A)$;

3) если A – конечномерная алгебра, то $J(A)$ – наибольший нильпотентный идеал.

3.11. 1) Для семейства колец $(R_i)_{i \in I}$ имеет место равенство

$$J(\prod_{i \in I} R_i) = \prod_{i \in I} J(R_i).$$

2) Для кольца R имеет место равенство

$$J(M_n(R)) = M_n(J(R)).$$

3) Если R – коммутативное кольцо, то

$$J(R[x_1, \dots, x_n]) = \mathrm{Nil}(R)[x_1, \dots, x_n].$$

.

4) Если e – идемпотент кольца R, то $J(eRe) = eJ(R)e$.

3.12. Покажите, что для квазиинвариантного справа кольца R имеет место равенство

$$J(R) = \bigcap_{A-\text{максимальный идеал } R} A.$$

Докажите аналогичное равенство в случае, когда R – конечное кольцо.

3.13. Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A и $Q \equiv \left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$ – алгебра кватернионов над A.

1) Если q_0 – обратимый элемент кольца A и $q_1, q_2, q_3 \in J(A)$, то $q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ – обратимый элемент алгебры Q.

2) Если $q_0, q_1, q_2, q_3 \in J(A)$, то $1 - (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)$ – обратимый элемент в Q.

3) $J(A)Q \subseteq J(Q)$.

3.14. Пусть $e_1, \dots, e_n; f_1, \dots, f_n$ – два семейства ортогональных идемпотентов из кольца R. Покажите, что если $e_i - f_i \in J(R)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$, то для некоторого элемента $u \in U(R)$ выполнены равенства $e_i = u^{-1} f_i u$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

3.15. Пусть A – идеал кольца R, $A \subseteq J(R)$ и все идемпотенты кольца R/A поднимаются до идемпотентов кольца R.

1) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ любое множество ортогональных идемпотентов факторкольца R/A, состоящее из n элементов, поднимается до некоторого множества ортогональных идемпотентов кольца R, состоящего из n элементов.

2) Каждое счетное множество ненулевых ортогональных идемпотентов факторкольца R/A поднимается до счетного множества ненулевых ортогональных идемпотентов кольца R.

3) R ортогонально конечно $\Leftrightarrow$ R/A ортогонально конечно.

4 Групповые кольца

Пусть A – кольцо и G – моноид. Рассмотрим свободный левый A-модуль AG с базисом $\{g \mid g \in G\}$, состоящим из всех конечных формальных сумм $\sum_{g\in G} a_g g$, где $a_g \in A$ и $g \in G$. Определим умножение на AG так, что $(\sum_g a_g g)(\sum_g a'_g g) = \sum_{g\in G}(\sum_{f,h\in G, fh=g} a_f a_h)g$. При таком умножении модуль AG превращается в кольцо, которое называется *моноидным кольцом* моноида G с кольцом коэффициентов A. Если A – коммутативное кольцо, то AG называется также *моноидной A-алгеброй*. Будем писать g вместо $1 \cdot g$. Единицы кольца A и группы G отождествляются и обозначаются одним символом 1. Элементы кольца AG также записываются в виде $\sum a_i g_i$.

Пусть $x \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \in AG$, где все $a_i \neq 0$. Конечное подмножество $\{g_1, \ldots, g_n\}$ в G называется *носителем* элемента x. Объединение носителей всех элементов подмножества X в AG называется *носителем* множества X и обозначается через $\mathrm{supp}(X)$. Для любого подмоноида H в G правый идеал $\sum_{h\in H}(1-h)AG$ в AG обозначается через ωH (или через $\omega_{AG} H$).

Непосредственно проверяется, что равенством $\varphi(\sum a_i g_i) = \sum a_i$, где $a_i \in A$ и $g_i \in G$, корректно задается сюръективный кольцевой эпиморфизм $\varphi\colon AG \to A$, действующий тождественно на A. Поэтому $A \cong AG/\operatorname{Ker}(\varphi)$ и $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq AG$. Идеал $\operatorname{Ker}(\varphi)$ называется *фундаментальным идеалом* кольца AG.

Допустим, что G – группа. Моноидное кольцо AG называется *групповым кольцом* группы G с кольцом коэффициентов A. Подгруппа в G, порожденная подмножеством X, обозначается через $\langle X\rangle$. Если $Y \subseteq G$, то мы пишем $\langle X, Y\rangle$ вместо $\langle\{X \bigcup Y\}\rangle$. Порядок подгруппы H группы G обозначается через $|H|$. (Если $g \in G$, то мы пишем $|g|$ вместо $|\langle g\rangle|$.)

4.1. Пусть H – подгруппа группы G и R – кольцо. Тогда

1) $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \omega H$ – идеал кольца RG;

2) если $H \trianglelefteq G$, то $RG/H \cong RG/\omega H$;

3) если $\mid H \mid < \infty$, то $l(\omega H) = RG\sum_{h\in H} h$;

4) $l(\omega H) \neq 0 \Leftrightarrow \mid H \mid < \infty$.

4.2. Пусть I – идеал кольца R и G – группа. Покажите, что

$$(R/I)G \cong RG/IG.$$

4.3. Пусть R – кольцо и G_1, G_2 – группы. Покажите, что

$$RG_1 \times G_2 \cong (RG_1)G_2.$$

4.4. Пусть $(R)_{i\in I}$ – семейство колец и G – группа. Покажите, что

$$(\prod_{i\in I} R_i)G \cong \prod_{i\in I} R_i G.$$

Разложения групповых алгебр

4.5. Установите изоморфизмы:

1) $\mathbb{C}C_n \cong \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n}$;

2) $\mathbb{C}V_4 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$;

3) $\mathbb{C}Q_8 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C})$;

4) $\mathbb{R}Q_8 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \left(\dfrac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$;

5) $\mathbb{Q}C_p \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\varepsilon_p)$, где p – простое число и ε_p – примитивный корень степени p из единицы.

4.6. Пусть G – конечная циклическая порядка n, P – поле, у которого характеристика не делит n. Тогда имеет место изоморфизм

$$PG \cong \bigoplus_{d|n} P(\varepsilon_d)^{m_d},$$

где $m_d = \frac{n_d}{(P(\varepsilon_d):P)}$, n_d – количество элементов порядка d из группы G и ε_d – примитивный корень степени d из единицы.

4.7. Пусть G – конечная абелева группа порядка n, P – поле, у которого характеристика не делит n. Тогда имеет место изоморфизм

$$PG \cong \bigoplus_{d|n} P(\varepsilon_d)^{m_d},$$

где $m_d = \frac{n_d}{(P(\varepsilon_d):P)}$, n_d – количество элементов порядка d из группы G и ε_d – примитивный корень степени d из единицы.

4.8. Установите изоморфизмы:

1)$\mathbb{C}D_n \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_2\mathbb{C})}_{\frac{n-1}{2}}$, если n нечётно;

2)$\mathbb{C}D_n \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_2\mathbb{C})}_{\frac{n-2}{2}}$, если n чётно.

4.9. Установите изоморфизм:

$$\mathbb{Q}D_n \cong \oplus_{d|n} A_d,$$

где $A_d \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, если $d = 1, 2$, и $A_d = M_2(\mathbb{Q}[\epsilon_d + \epsilon_d^{-1}])$, если $d > 2$, где ϵ_d – примитивный корень степени d из единицы.

Пусть P – поле и $f(x) \in P[x]$. Многочлен $f^*(x) = x^{\deg(f)} f(\frac{1}{x})$ называется *двойственным* к многочлену $f(x)$.

4.10. Пусть P – конечное поле из q элементов, n – натуральное число, которое взаимно просто с q, и разложение многочлена $x^n - 1$ на неразложимые над P многочлены имеет вид

$$x^n - 1 = (x-1) f_1 \dots f_s g_1 g_1' \dots g_t g_t',$$

если n нечетно, и

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1) f_1 \dots f_s g_1 g_1' \dots g_t g_t',$$

если n четно, где $f_1, \dots, f_s$ – самодвойственные многочлены и многочлен g_i двойственен к многочлену g_i' для каждого i. Установите изоморфизмы:

1) $PD_n \cong P \times P \times M_2(F_{q^{deg(f_1)/2}}) \times \cdots \times M_2(F_{q^{deg(f_s)/2}}) \times \cdots \times M_2(F_{q^{deg(g_1)}}) \times \cdots \times M_2(F_{q^{deg(g_t)}})$, если n нечётно;

2) $PD_n \cong P \times P \times P \times P \times M_2(F_{q^{deg(f_1)/2}}) \times \cdots \times M_2(F_{q^{deg(f_s)/2}}) \times \cdots \times M_2(F_{q^{deg(g_1)}}) \times \cdots \times M_2(F_{q^{deg(g_t)}})$, если n чётно.

Особые элементы в групповых алгебрах

Пусть R – кольцо и H – конечная подгруппа группы G. Если порядок подгруппы H обратим в кольце R, то через $\widehat{H}$ обзначается элемент группового кольца RG вида

$$\frac{1}{\mid H \mid}\sum_{h\in H} h.$$

4.11. Пусть R – кольцо и G – группа, H, H' – конечные подгруппы группы G, порядки которых обратимы в R, и $H \subset H'$. Тогда

1) $\widehat{H} - \widehat{H'}, \widehat{H'}$ – ортогональные идемпотенты кольца RG;

2) $\widehat{H} \in C(RG) \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$;

3) если $H \trianglelefteq G$, то $(RG)\widehat{H} \cong R(G/H)$ и $RG(1-\widehat{H}) = \omega(H)$.

4.12. Пусть G – группа, P – поле характеристики $p > 0$. Покажите, что если $e = \sum_{g\in G} \alpha_g g \in PG$ – идемпотентный элемент, то α_1 принадлежит простому подполю поля P.

4.13. Пусть G – конечная группа, P – поле нулевой характеристики. Покажите, что если $e = \sum_{g\in G} \alpha_g g \in PG$ – идемпотентный элемент, то $\alpha_1 \in \mathbb{Q}$ и $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$. При этом $\alpha_1 = 0 \Leftrightarrow e = 0$ и $\alpha_1 = 1 \Leftrightarrow e = 1$.

4.14. Пусть G – конечная группа, P – поле, у которого характеристика не делит порядка группы G и $\{C_i\}_{i\in I}$ – все классы сопряженных элементов группы G. Покажите, что если $\sum_{g\in G} \alpha_g g$ – нильпотентный элемент, то $\sum_{g\in C_i} \alpha_g = 0$ для каждого $i \in I$. В частности, $\alpha_1 = 0$;

Теорема Машке

4.15. Пусть P – поле характеристики $p > 0$ и H – нормальная подгуппа группы G. Покажите, что если p делит порядок группы H, то

$$(PG(\sum_{h\in H} h))^2 = 0.$$

4.16. Пусть P – поле характеристики $p \geqslant 0$ и G – конечная группа. Покажите, что групповая алгебра PG содержит ненулевой нильпотентный идеал в точности тогда, когда $p > 0$ и p делит порядок группы G.

Из предыдущего упражнения и 1.53 следует следующая важная теорема.

Теорема Машке. *Для поля P и группы G равносильны условия:*

1) *алгебра PG изоморфна конечному прямому произведению матричных колец над P-алгебрами с делением;*

2) *G – конечная группа и характеристика поля P не делит порядка группы G.*

4.17. Пусть P – поле характеристики $p > 0$ и G – конечная группа. Покажите, что если силовская p-подгруппа H группы G является нормальной, то $J(PG) = \omega(H)$.

4.18. Пусть P – алгебраически замкнутое поле характеристики $p \geqslant 0$ и G – конечная коммутативная группа порядка n. Покажите, что:

1) если p не делит порядка группы G, то

$$PG \cong \underbrace{P \times \cdots \times P}_{n};$$

2) если G^+ – множество всех гомоморфизмов из группы G в мультипликативную группу P^* поля P, то $\{\frac{1}{n}(\sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}))\}_{\phi \in G^+}$ – множество всех примитивных идемпотентов алгебры PG.

Пусть P – поле и G – группа. Если A – конечное подмножество группы G, то через $\overline{A}$ будем обозначать элемент групповой алгебры PG вида

$$\sum_{g \in A} g.$$

Если $g \in G, q \in \mathbb{N}$ и $(q, |G|) = 1$, то *q-циклотомическим классом* элемента $g \in G$ будем называть множество вида

$$S_g = \{g^{q^j} | 0 \leqslant j \leqslant t_g - 1\},$$

где t_g – наименьшее положительное целое число, для которого выполнено равенство $q^{t_g} \equiv 1 (mod\ (o(g))$.

4.19. Пусть P – конечное поле из q элементов, G – конечная абелева группа и $(q, |G|) = 1$. Покажите, что:

1) любые два q-циклотомических класса либо совпадают, либо пересекаются по пустому множеству;

2) если S_g – q-циклотомический класс, то в групповой алгебре PG выполнено равенство $(\overline{S_g})^q = \overline{S_g}$.

4.20. Пусть F – конечное поле из q элементов, G – конечная абелева группа, у которой экспонента равна n, и $(q, |G|) = 1$. Покажите, что количество циклических подгрупп группы G совпадает с количеством q-циклотомических классов в группе G в точности тогда, когда $o(\overline{q}) = \phi(n)$ в $U(\mathbb{Z}_n)$.

4.21. Пусть P – конечное поле из q элементов, G – конечная абелева группа, для которой выполнено равенство $(q, |G|) = 1$, и $\{e_1, ..., e_n\}$ – все примитивные идемпотенты алгебры PG. В алгебре PG рассмотрим подалгебру

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} Pe_i.$$

Покажите, что $\alpha \in \mathcal{A}$ в точности тогда, когда $\alpha^q = \alpha$.

4.22. Пусть F – конечное поле и $|F| = q$, G – конечная абелева группа такая, что $(q, |G|) = 1$. Тогда количество простых компонент в разложении Веддерберна алгебры PG равно количеству q-циклотомических классов группы G.

4.23. Пусть $n \in \mathbb{N}$, q – положительная степень простого числа и $(n, q) = 1$. Тогда количество неразложимых сомножителей в разложении многочлена $x^n - 1$ над полем F_q совпадает с количеством q-циклотомических классов циклической группы порядка n.

4.24. Пусть P – поле, p – простое число, G – циклическая группа порядка p^n и

$$\{1\} = G_n \subset \ldots \subset G_1 \subset G_0 = G$$

цепь всех подгрупп группы G. Покажите, что:

1) если порядок группы G обратим в поле P, то идемпотенты

$$e_0 = \widehat{G_0}, e_1 = \widehat{G_1} - \widehat{G_0}, \ldots, e_n = \widehat{G_n} - \widehat{G_{n-1}}$$

ортогональны и $e_0 + e_1 + \ldots + e_n = 1$;

2) если $P = \mathbb{Q}$, то e_i – примитивный идемпотент для каждого $0 \leqslant i \leqslant n$;

3) если P – конечное поле из q элементов и $(q, p) = 1$, то $\{e_0, e_1, \ldots e_n\}$ – множество всех примитивных идемпотентов алгебры PG в точности тогда, когда $o(\overline{q}) = \phi(p^n)$ в $U(\mathbb{Z}_{p^n})$.

4.25. Пусть P – поле, p – простое число, G – конечная абелева p-группа, у которой экспонента равна p^n. Если H – собственная подгруппа группы G и G/H – циклическая группа, то через H' обозначим такую однозначно определенную подгруппу группы G, содержащую H, что $\mid H'/H \mid = p$. Покажите, что:

1) если порядок группы G обратим в поле P, то множество идемпотентов

$$E = \{\widehat{G}\} \cup \{\widehat{H} - \widehat{H'} \mid H \in \mathrm{Lat}(G), H \neq G, G/H - \text{циклическая группа}\}$$

является ортогональным и $\sum_{e \in E} e = 1$;

2) если $P = \mathbb{Q}$, то E – множество всех примитивных идемпотентов алгебры $\mathbb{Q}G$;

3) если P – конечное поле из q элементов и $(q, p) = 1$, то E – множество всех примитивных идемпотентов алгебры PG в точности тогда, когда $o(\overline{q}) = \phi(p^n)$ в $U(\mathbb{Z}_{p^n})$.

5 Модули, подмодули и гомоморфизмы

Пусть R – кольцо. Абелева группа M со сложением $+$ называется *правым R-модулем*, если для любых элементов $m \in M$ и $a \in R$ существует такой единственный элемент $ma \in M$, что:

1) $m(ab) = (ma)b$ для любых элементов $a, b \in R$ и $m \in M$;

2) $m1 = m$ для любого элемента $m \in M$;

3) $(m + n)a = ma + na$ для любых $m, n \in M$ и $a \in R$.

Будем писать M_R для обозначения того, что M – правый R-модуль.

Абелева группа M со сложением $+$ называется *левым R-модулем*, если для любых $m \in M$ и $a \in R$ существует такой единственный элемент $am \in M$, что:

1) $(ab)m = a(bm)$ для любых $a, b \in R$ и $m \in M$;

2) $1m = m$ для любого $m \in M$;

3) $a(m + n) = am + an$ для любых $m, n \in M$ и $a \in R$.

Будем писать ${}_RM$ для обозначения того, что M – левый R-модуль. Если M – правый (левый) R-модуль и N – такая подгруппа аддитивной группы M, что $na \in N$ ($an \in N$) для любых $n \in N$ и $a \in R$, то N называется *подмодулем* в M. Подмодуль N модуля M называется *собственным*, если $M \neq N$. Кольцо R – правый и левый R-модуль. Подмодуль правого (левого) R-модуля R называется *правым* (*левым*) идеалом кольца R.

Каждый правый и левый идеал кольца R называется *идеалом* (или *двусторонним идеалом*) в R. Правые или левые идеалы называются *односторонними идеалами*.

Пусть R и S – кольца. Абелева группа M называется *S-R-бимодулем*, если M – левый S-модуль и правый R-модуль и $(bm)a = b(ma)$ для любых $a \in R$, $b \in S$ и $m \in M$. Обозначение ${}_SM_R$ означает, что M – S-R-бимодуль.

Отображение $f\colon X \to Y$ правых (левых) модулей над кольцом R называется *модульным гомоморфизмом*, если f – гомоморфизм аддитивных групп и $f(xa) = f(x)a$ $\;(f(ax) = af(x))$ для любых $x \in X$ и $a \in R$. Для каждого правого R-модуля Z и любого модульного гомоморфизма $g\colon Y \to Z$ мы обозначаем через gf такой гомоморфизм $X \to Z$, что $gf(x) = g(f(x))$.

Сюръективный и инъективный гомоморфизм называется *изоморфизмом*.

Пусть Y' – подмодуль модуля Y. Если $f\colon X \to Y$ – модульный гомоморфизм, то $f^{-1}(Y')$ обозначает подмодуль $\{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$ в X. Подмодуль $f^{-1}(0)$ в X называется *ядром* гомоморфизма f и обозначается через $\mathrm{Ker}(f)$.

Пусть X и Y – R-модули и $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ – множество всех модульных гомоморфизмов $X \to Y$. Непосредственно проверяется, что $\mathrm{Hom}(X, Y)$ –

аддитивная абелева группа с таким сложением, что $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ для всех $f, g \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ и $x \in X$. В случае $X = Y$ группа $\mathrm{Hom}_R(X, X)$ – кольцо с таким умножением, что $fg(x) = f(g(x))$; это кольцо обозначается через $\mathrm{End}_R(X)$ и называется *кольцом эндоморфизмов модуля* M. Единица кольца $\mathrm{End}_R(X)$ – тождественное отображение 1_X, задаваемое равенством $1_X(x) = x$. Если X – S-R-бимодуль и Y – T-R-бимодуль, то $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ является левым T-модулем и правым S - модулем относительно операций умножения $fa(x) = f(ax), bf(x) = b(f(x))$ для всех $a \in S, b \in T$, $f \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ и $x \in X$. При этом для любого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ и элементов $a \in S, b \in T$ имеет место равенство $a(fb) = (af)b$. Поэтому $\mathrm{Hom}(X, Y)$ – S-T-бимодуль. Подмодуль N модуля M называется *вполне инвариантным в* M, если $f(N) \subseteq N$ для каждого $f \in \mathrm{End}(M)$).

Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ – некоторое множество правых модулей над кольцом R. Обозначим через $\prod_{i\in I} X_i$ *прямое произведение* модулей X_i, состоящее из всех таких “последовательностей” $(x_i)_{i\in I}$, что $x_i \in X_i$. Прямое произведение $\prod_{i\in I} X_i$ – правый A-модуль, причем $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$ и $(x_i)a = (x_i a)$ для всех $x_i, y_i \in X_i$ и $a \in A$. Для модуля M прямое произведение I изоморфных копий модуля M обозначается через M^I. Для любого $j \in I$ сюръективное отображение $\pi_j \colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, задаваемого равенством $\pi_j((x_i)) = x_j$, – R-модульный эпиморфизм с ядром $\prod_{i\neq j} X_i$, который называется *естественной проекцией* из $\prod_{i\in I} X_i$ на X_j. Для данного $j \in I$ инъективное отображение $u_j \colon X_j \to \prod_{i\in I} X_i$, определяемое равенствами $\pi_j(\varepsilon_j(x_j)) = x_j$ и $\pi_i(\varepsilon_j(x_j)) = 0$ для всех $i \neq j$, является A-модульным мономорфизмом с ядром $\prod_{i\neq j} X_i$ и называется *естественным вложением* из X_j в $\prod_{i\in I} X_i$. Обычно каждый модуль X_i отождествляется с подмодулем $u_i(X_i)$ в $\prod_{i\in I} X_i$. Для каждого модуля M и любого множества $\{f_i \colon M \to X_i\}_{i\in I}$ гомоморфизмов из M в X_i гомоморфизм $f \colon M \to \prod_{i\in I} X_i$ корректно задается равенством $f(m) = (f_i(m))_{i\in I}$.

Пусть M – правый модуль над кольцом R и $\{X_i\}_{i\in I}$ – некоторое множество подмодулей в M. Множество всех конечных сумм вида $\sum x_i$ $(x_i \in X_i)$ называется *суммой* модулей X_i, которая обозначается через $\sum_{i\in I} X_i$. Сумма $\sum_{i\in I} X_i$ – наименьший подмодуль в M, содержащий все X_i. Подмножество $\{x_i\}_{i\in I}\subseteq M$ называется *системой образующих* модуля M, если $M=\sum_{i\in I}x_iR$. Сумма $\sum_{i\in I}X_i$ называется *внутренней прямой суммой* модулей X_i, если $X_i\cap(\sum_{j\neq i}X_j)=0$ для каждого $i\in I$. В этом случае мы пишем $\sum_{i\in I}X_i=\oplus_{i\in I}X_i$ для обозначения того, что $\sum_{i\in I}X_i$ – прямая сумма. Если $M=\oplus_{i\in I}X_i$ – прямая сумма, то каждое слагаемое X_i называется *прямым слагаемым* в M. Сумма $\sum_{i\in I}\varepsilon_i(X_i)$ подмодулей $\varepsilon_i(X_i)$ в $\prod_{i\in I}X_i$ является внутренней прямой суммой модулей $\varepsilon_i(X_i)$, называется *внешней прямой суммой* модулей X_i и обозначается через $\oplus_{i\in I}X_i$. Обычно каждый модуль X_i отождествляется с подмодулем $\varepsilon_i(X_i)$ в $\oplus_{i\in I}X_i$. Поэтому мы пишем “прямая сумма” вместо “внешняя прямая сумма” или “внутренняя прямая сумма”. Прямая сумма $\oplus_{i\in I}X_i$ совпадает со множеством всех таких элементов $(x_i)\in\prod_{i\in I}X_i$, что $\pi_j((x_i))\neq 0$ для почти всех индексов j; прямая сумма может рассматриваться как множество всех конечных формальных сумм вида $\sum x_i$, где $x_i\in X_i$. Прямая сумма $\oplus_{i\in I}X_i$ – подмодуль в $\prod_{i\in I}X_i$. Для модуля M прямая сумма I изоморфных копий модуля M обозначается через $M^{(I)}$. Для каждого модуля M и любого множества $\{f_i\colon X_i\to M\}_{i\in I}$ гомоморфизмов из X_i в M равенством $f(\sum x_i)=\sum f_i(x_i)$ корректно задается гомоморфизм $f\colon \oplus_{i\in I}X_i\to M$. Этот гмоморфизм также обознчается через $\oplus_{i\in I}f_i$.

Модули и их подмодули

5.1. Опишите все $\mathbb{Z}$-модули M, у которых $\mid \mathrm{Lat}(M)\mid\leqslant 5$.

5.2. Пусть A – алгебра над полем F и M – правый A-модуль, у которого $\dim_F(M)=2$. Покажите, что если $\mid \mathrm{Lat}(M)\mid\geqslant 5$, то каждое векторное подпространство векторного пространства M_F является подмодулем модуля M.

5.3. Пусть R – кольцо и M – правый R-модуль.

1) Покажите, что если $\mid \mathrm{Lat}(M)\mid\leqslant 4$, то M – циклический модуль.

2) Приведите пример нециклического правого R – модуля M, у которого $\mid \mathrm{Lat}(M)\mid= 5$.

5.4. Пусть M – правый R-модуль и $n\in\mathbb{N}$. Модуль M^n имеет естественную структуру правого $M_n(R)$-модуля. Покажите, что имеет место изоморфизм решеток

$$\mathrm{Lat}(M_R) \cong \mathrm{Lat}(M^n_{M_n(R)}).$$

5.5. Пусть M_1 и M_2 – подмодули модуля M и $M = M_1 \cup M_2$. Покажите, что любого для подмодуля N модуля M выполнено одно из включений: $N \subset M_1$, $N \subset M_2$.

5.6. Пусть e – ненулевой идемпотент кольца R и M – правый R-модуль.

1) Если N – подмодуль модуля M, то имеет место изоморфизм правых eRe-модулей $(M/N)e \cong Me/Ne$.

2) Если $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ – семейство подмодулей модуля M, то $\bigcap_{\alpha \in A}(M_\alpha e) = (\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha)e$ и $\sum_{\alpha \in A}(M_\alpha e) = (\sum_{\alpha \in A} M_\alpha)e$.

3) Если $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$, то $Me = \bigoplus_{\alpha \in A}(M_\alpha e)$.

4) Правило $\varphi(N) = Ne$ определяет сюръективное отображение решеток $\varphi\colon \mathrm{Lat}(M_R) \to \mathrm{Lat}(Me_{eRe})$.

5) Если R-модуль M полупрост, то и eRe-модуль Me полупрост.

6) Если $ReR = R$, то φ – изоморфизм решеток.

7) Если $ReR = R$, то M полупрост в точности тогда, когда полупрост eRe-модуль Me.

Модуль M называется *дистрибутивным*, если $(X+Y)\cap Z = X\cap Z + Y \cap Z$ для любых подмодулей X, Y и Z в M, т.е. решетка подмодулей $\mathrm{Lat}(M)$ дистрибутивна.

5.7. Для правого модуля M над кольцом R равносильны условия:

1) M – дистрибутивный модуль;

2) $(X+Z)\cap(Y+Z) = X\cap Y + Z$ для любых подмодулей X, Y, Z в M;

3) $(m+n)R = mR\cap(m+n)R + nR\cap(m+n)R$ для любых $m, n \in M$;

4) для любых $m, n \in M$ существует такое $a \in R$, что $maR + n(1-a)R \subseteq mR \cap nR$;

5) для любых $m, n \in M$ существуют такие $a, b, c, d \in R$, что $1 = a + b$, $ma = nc$, $nb = md$;

6) $R = (m : nR) + (n : mR)$ для любых $m, n \in M$;

7) M не имеет подфакторов, являющихся прямыми суммами двух изоморфных ненулевых модулей;

8) M не имеет подфакторов, являющихся прямыми суммами двух изоморфных простых модулей.

Модуль называется *модулем Безу*, если все его конечно порожденные подмодули цикличны.

5.8. Пусть R – квазиинвариантное справа кольцо и M – правый R-модуль, который является модулем Безу. Покажите, что M – дистрибутивный модуль.

5.9. Пусть R – кольцо и M – дистрибутивный правый R-модуль.

1) Если $m, n \in M$ и $mR \cap nR = 0$, то $ma = n(1-a) = 0$ для некоторого $a \in R$.

2) $\mathrm{Hom}(G, H) = 0$ для любых таких подмодулей G и H в M, что $G \cap H = 0$.

3) Каждое прямое слагаемое модуля M вполне инвариантно в M.

4) $\mathrm{End}(M)$ – нормальное кольцо. Поэтому каждое дистрибутивное справа или слева кольцо нормально.

5) Для каждого ненулевого идемпотента $e \in R$ правый eRe-модуль Me дистрибутивен.

Гомоморфизмы и изоморфизмы модулей

5.10. Пусть $f : B \to C, g : A \to B$ – гомоморфизмы модулей. Покажите, что:

1) $\mathrm{Ker}(fg) = g^{-1}(\mathrm{Ker}(f)$;

2) $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g) = f^{-1}(\mathrm{Im}(fg))$;

3) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = g((\mathrm{Ker}(fg)))$;

4) $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g) = B \Leftrightarrow \mathrm{Im}(fg) = \mathrm{Im}(f)$;

5) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(fg) = \mathrm{Ker}(g)$;

6) fg – эпиморфизм $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g) = B$ и

f – эпиморфизм;

7) fg – мономорфизм $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = 0$ и g – мономорфизм;

8) fg – изоморфизм $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = B$, f – эпиморфизм и g – мономорфизм.

5.11. Пусть $f : A \to B, g : B \to A$ – гомоморфизмы модулей. Покажите, что:

1) $\mathrm{Ker}(f - fgf) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(1_A - gf)$;

2) $\mathrm{Im}(f - fgf) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(1_B - fg)$.

5.12. Пусть M – правый R-модуль и $A, B \in \mathrm{Lat}(M)$. Покажите, что:

1) если $f : A \to C, g : B \to C$ – гомоморфизмы правых R-модулей и $f_{|A\cap B} = g_{|A\cap B}$, то существует гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}_R(A + B, C)$, для которого выполнено равенства $h_{|A} = f, h_{|B} = g$;

2) если $f : C \to M/A, g : C \to M/B$ – гомоморфизмы правых R-модулей и $\pi_1 f = \pi_2 g$, где $\pi_1 : M/A \to M/(A + B), \pi_2' : M/B \to M/(A + B)$ – естественные гомоморфизмы, то существует гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}_R(C, M/A\cap B)$, для которого выполнены равенства $\pi_1' h = f, \pi_2' h = g$, где $\pi_1' : M/A \cap B \to M/A, \pi_2' : M/A \cap B \to M/B$ – естественные гомоморфизмы.

Пусть M – S-R-бимодуль и N – T-R-бимодуль. На абелевой группе $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ определим умножения по правилу

$$tfs(x) := tf(sx),$$

где $s \in S, f \in \mathrm{Hom}_R(M, N), t \in T$. Тогда $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ превращается в T-S-бимодуль.

5.13. Пусть M – правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Покажите, что имеют место изоморфизмы бимодулей:

1) $\mathrm{Hom}_R({}_RR_R,\ {}_SM_R) \cong {}_SM_R$;

2) $\mathrm{Hom}_R({}_{R/I}R/I_R,\ {}_{R/J}R/J_R) \cong (J :_R I)/J$, где J, I – идеалы кольца R,

$$(J :_R I) = \{r \in R \mid rI \subset J\};$$

и абелева группа $(J :_R I)/J$ имеет естественную структуру R/J-R/I-бимодуля;

3) $\mathrm{Hom}_R({}_{R/I}R/I_R, {}_SM_R) \cong (0 :_M I)$, где

$$(0 :_M I) = \{m \in R \mid mI = 0\}$$

имеет естественную структуру S-R/I-бимодуля.

5.14. Если $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ и $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, то $1_M - gf$ обратим в $\mathrm{End}_R(M)$ тогда и только тогда, когда $1_N - fg$ обратим в $\mathrm{End}_R(N)$.

5.15. Пусть e, f – идемпотенты из кольца R. Тогда следующие условия равносильны:

1) $eR \cong fR$;

2) $Re \cong Rf$;

3) $e = ab$, $f = ba$, где $a, b \in R$;

4) $e = ab$, $f = ba$, где $a \in eRf$, $b \in fRe$;

5) $eR = aR$, $Rf = Ra$, где $a \in R$.

Идемпотентны e, f из кольца R, удовлетворяющие одному из эквивалентных условий предыдущего упражнения, называются *изоморфными*.

5.16. Пусть R – кольцо. Покажите, что:

1) если e, f – изоморфные идемпотенты из кольца R и e – центральный идемпотент, то $e = f$;

2) кольцо R конечно по Дедекинду в точности тогда, когда в кольце R всякий идемпотент изоморфный полуцентральному справа идемпотенту является полуцентральным справа.

5.17. Пусть e, f – идемпотенты из кольца R. Тогда следующие условия равносильны:

1) $eR \cong fR, (1 - e)R \cong (1 - f)R$;

2) для некоторого обратимого элемента u из кольца R выполнено равенство $f = ueu^{-1}$;

3) $Re \cong Rf, R(1-e) \cong R(1-f)$.

5.18. Пусть M – правый R-модуль и e, f – идемпотенты из кольца $S = \mathrm{End}_R(M)$. Тогда имеют место изоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}_R(eM, fM) \cong fSe$ и изоморфизм колец $\mathrm{End}_R(eM, eM) \cong eSe$.

5.19. Пусть M, N – правые R-модули и $e^2 = e \in S = \mathrm{End}_R(M)$, $f = f^2 \in T = \mathrm{End}_R(N)$. Тогда следующие условия равносильны:

1) $eM \cong fN$;

2) для некоторых гомоморфизмов $a \in \mathrm{Hom}(eM, fN), b \in \mathrm{Hom}(fN, eM)$ имеют место равенства $e = ab, f = ba, ea = af = a, fb = be = b$;

3) для некоторых гомоморфизмов $a \in \mathrm{Hom}(eM, fN), b \in \mathrm{Hom}(fN, eM)$ имеют место равенства $e = ab$, $f = ba$.

5.20. Верно ли для произвольных правых R – модулей A и B следующее утверждение:

если модуль A изоморфен подмодулю модуля B и модуль B изоморфен подмодулю модуля A, то $A \cong B$.

Рассмотрите следующие случаи:

1) R – тело;

2) $R = F[x]$, где F – поле;

3) $R = F[x]/(x^2)$, где F – поле.

5.21. Пусть

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "h'"] \\ \mathrm{C} \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

– коммутативная диаграмма правых R-модулей. Покажите, что:

1) существует однозначно определенный гомоморфизм $f' : \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Ker}(h')$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(h) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & \mathrm{Ker}(h') \arrow[d, "\varepsilon_2"] \\ A \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – канонические вложения;

2) существует однозначно определенный гомоморфизм $g' : \mathrm{Coker}(h) \to \mathrm{Coker}(h')$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_1"] & D \arrow[d, "p_2"] \\
\mathrm{Coker}(h) \arrow[r, "g'"] & \mathrm{Coker}(h'),
\end{tikzcd}$$

где p_1, p_2 – канонические гомоморфизмы.

5.22. Пусть $f : A \to B$ – гомоморфизм модулей. Покажите, что существует однозначно определенный гомоморфизм $\overline{f} : A/\operatorname{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \\
A/\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{Im}(f), \arrow[u, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}$$

где g – естественный гомоморфизм и ε – естественное вложение. Кроме того, $\overline{f}$ является изоморфизмом.

5.23 (Вторая теорема об изоморфизме или теорема о параллелограмме)**.** Пусть A, B – подмодули модуля M. Покажите, что имеет место изоморфизм

$$(A + B)/B \cong A/A \cap B$$

Предыдущий изоморфизм можно проиллюстрировать с помощью следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& A + B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A \arrow[dr, dash] & & B \arrow[dl, dash] \\
& A \cap B &
\end{tikzcd}$$

5.24 (Лемма о бабочке)**.** Пусть A', A'', B', B'' – подмодули модуля M и $A' \subset A'', B' \subset B''$. С помощью диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
A'' \arrow[d, dash] & & B'' \arrow[d, dash] \\
(A' + B'') \cap A'' \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & & (B' + A'') \cap B'' \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
& A'' \cap B'' \arrow[dd, dash] & \\
(A' + B') \cap A'' \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & & (B' + A') \cap B'' \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
& (A' \cap B'') + (B' \cap A'') \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
B' \cap A'' & & A' \cap B''
\end{tikzcd}
$$

покажите, что имеет место изоморфизм
$(A' + B'') \cap A''/(A' + B') \cap A'' \cong (B' + A'') \cap B''/(B' + A') \cap B''$

5.25 (Третья теорема об изоморфизме)**.** Пусть A, B, C – подмодули модуля M и $A \subset B \subset C$. Покажите, что имеет место изоморфизм

$$(A/C)/(B/C) \cong A/C$$

Прямые суммы и прямые произведения модулей

Множество ненулевых подмодулей $\{M_i\}_I$ модуля M называется *независимым,* если для каждого $i \in I$ выполнено равенство

$$M_i \bigcap \sum_{i \in I \setminus \{i\}} M_i = 0.$$

Множество собственных подмодулей $\{M_i\}_I$ модуля M называется *конезависимым,* если для каждого $i \in I$ и каждого конечного подножества $I' \subset I \setminus \{i\}$ выполнено равенство

$$M_i + \bigcap_{i \in I \setminus \{i\}} M_i = M.$$

5.26. Пусть $\{M_i\}_I$ – множество ненулевых подмодулей модуля M и $\{\varepsilon_i : M_i \to M\}_I$ – множество естественных вложений. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $\{M_i\}_I$ – независимое множество подмодулей модуля M;

2) $\oplus_{i \in I} \varepsilon_i : \bigoplus_{i \in I} M_i \to M$ – мономорфизм.

5.27 (**Китайская теорема об остатках для модулей).** Пусть $\{M_i\}_I$ – множество собственных подмодулей модуля M и $\{\pi_i : M \to M/M_i\}_I$ – множество естественных гомоморфизмов. Покажите, что если $| I | < \infty$, то следующие условия равносильны:

1) $\{M_i\}_I$ – конезависимое множество подмодулей модуля M;

2) $\prod_{i \in I} \pi_i : M \to \bigoplus_{i \in I} M/M_i$ – эпиморфзим.

5.28. 1) Пусть

$$M = \bigoplus_{j=1}^{n} M_j$$

прямая сумма модулей. Для каждого j через

$$\varepsilon_{M_j} : M_j \to M$$

обозначим каноническое вложение и через

$$\pi_{M_j} : M \to M_j$$

обозначим коническую проекцию. Тогди имеют место равенства

$$\pi_{M_j} \circ \varepsilon_{M_j} = 1_{M_j},$$
$$\pi_{M_i} \circ \varepsilon_{M_j} = 0 \quad \text{если } i \neq j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{M_j} \circ \pi_{M_j} = 1_M.$$

2) Пусть

$$E = \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_R(M_1, M_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_R(M_n, M_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Hom}_R(M_1, M_n) & \cdots & \mathrm{Hom}_R(M_n, M_n) \end{bmatrix}$$

Множество E относительно обыкновенных матричных операций сложения и умножения образует кольцо. Покажите, что отображение ψ : $\mathrm{End}_R(M) \to E$, действующее оп правилу

$$f \mapsto \begin{bmatrix} \pi_1 f \varepsilon_1 & \cdots & \pi_1 f \varepsilon_n \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_n f \varepsilon_1 & \cdots & \pi_n f \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

является изоморфизмом колец.

5.29. Пусть M – правый R-модуль. Покажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеют место изоморфизмы колец

1) $\mathrm{End}_R(M^n) \cong M_n(\mathrm{End}_R(M))$;

2) $\mathrm{BiEnd}(M^n) \cong \mathrm{BiEnd}(M)$.

5.30. Покажите, что имеют место изоморфизмы абелевых групп

1) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^m}, \mathbb{Z}_{p^n}) \cong \mathbb{Z}_{p^{\min(m,n)}}$, где p – простое число;

2) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$.

5.31. Пусть F – поле. Покажите, что имеют место равенства

1) $\dim_F(\mathrm{Hom}_{F[x]}(F[x]/(p^m), F[x]/(p^n))) = \deg(p)\min(m, n)$, где p – неприводимый многочлен над полем F;

2) $\dim_F(\mathrm{Hom}_{F[x]}(F[x]/(f), F[x]/(g))) = \deg((f, g))$.

5.32. Пусть M – правый R-модуль. Покажите, что:

1) для каждого неразложимого правого R-модуля M существует такой идеал $P \in \mathcal{P}(R)$, что $P \subseteq \mathrm{Ann}(M)$;

2) для каждого правого R-модуля M имеет место равенство

$$\bigcap_{P \in \mathcal{P}(R)} MP = 0;$$

3) для каждого ненулевого правого R-модуля M существует такой пирсовский слой R/P, что $M \neq MP$.

4) если M – ненулевой правый R-модуль, который не является прямой суммой двух ненулевых инвариантных подмодулей, то $MP = 0$ для некоторого $P \in \mathcal{M}(R)$;

5) для каждого правого R-модуля M имеет место равенство

$$\bigcap_{P \in \mathcal{M}(R)} MP = 0.$$

5.33. 1) Пусть M – модуль и M_1, M_2 – его подмодули. Покажите, что если $M = M_1 + M_2, M_1 \cap M_2 \leqslant^d M$, то M_1, M_2 – прямые слагаемые модуля M.

2) Пусть M – модуль и M_1, M_2, M_3 – его подмодули. Покажите, что если $M = M_1 + M_2$, $M_1 \cap M_2 \leqslant M_3 \leqslant M_2$ и $M_3 \leqslant^d M$, то $M_2 \leqslant^d M$.

Если A, B – правые R-модули и $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, то подмодуль модуля $A \oplus B$ вида $\{a + f(a) \mid a \in A\}$ обознчается через $< f >$ и называется графиком гомоморфизма f. Пусть B' – подмодуль модуля B и $f : A \to B/B'$ – гомоморфизм модулей. Тогда $\{a+b \mid a \in A, b \in f(a)\}$ – подмодуль модуля $A \oplus B$ и этот подмодуль далее будет обозначаться через $[f]$.

5.34. Покажите, что для произвольного подмодуля X модуля $A \oplus B$ однозначно определены подмодули $A' \in \mathrm{Lat}(A), B' \in \mathrm{Lat}(B)$ и гомоморфизм $f : A' \to B/B'$ такие, что $X = [f]$.

5.35. Пусть p – простое число и $n \in \mathbb{N}$. Количество k-мерных подпространств в m-мерном векторном пространстве над полем F из $q = p^n$ элементов обозначается через

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q .$$

С помощью предыдущего упражнения покажите, что:

1)

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_q .$$

2)

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{m!_q}{k!_q(m-k)!_q},$$

где $k!_q = 1 + q + \ldots + q^{k-1}$.

3) $|\operatorname{Lat}(Z_{p^n} \oplus Z_{p^n})| = F(p)$, где

$$F(x) = \frac{x^{n+2} + x^{n+1} + (-3-2n)x + 2n + 1}{(x-1)^2}.$$

5.36. Пусть A, B – правые R-модули. Покажите, что для подмодуля X модуля $A \oplus B$ следующие условия равносильны:

1) $X \oplus B = A \oplus B$

2) для некоторого гомоморфизма $f \in \operatorname{Hom}_R(A, B)$ имеет место равенство $X =< f >$.

5.37. Пусть A, B – правые R-модули. Покажите, что для подмодуля X модуля $A \oplus B$ следующие условия равносильны:

1) $X \cap B = 0$

2) для некоторого подмодуля A' модуля A и гомоморфизма $f \in \operatorname{Hom}_R(A', B)$ имеет место равенство $X =< f >$.

5.38. Пусть A, B – правые R-модули, X, Y – подмодули модуля $A \oplus B$, для которых выполнены равенства $X \cap B = Y \cap B = 0$. Согласно предыдущему упражнению существуют такие подмодули A', A'' модуля A и гомоморфизмы $f \in \operatorname{Hom}_R(A', B), g \in \operatorname{Hom}_R(A'', B)$, что $X =< f >$, $Y =< g >$. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $X \subset Y$;

2) $A' \subset A''$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[dl, "g"] \\ B & \end{tikzcd}$$

коммутативна, где $\iota : A' \to A''$ – естественное вложение.

5.39. Пусть A, B – правые R-модули. Покажите, что для подмодуля X модуля $A \oplus B$ следующие условия равносильны:

1) $X + B = A \oplus B$;

2) существуют подмодуль B' модуля B и гомоморфизм $f : A \to B/B'$ такие, что $X = [f]$.

5.40. Пусть A, B – правые R-модули, X, Y – подмодули модуля $A \oplus B$, для которых выполнены равенства $X + B = Y + B = A \oplus B$. Согласно предыдущему упражнению существуют такие подмодули B', B'' модуля B и гомоморфизмы $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B/B'), g \in \mathrm{Hom}_R(A, B/B'')$, что $X = [f], Y = [g]$. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $X \subset Y$;

2) $B' \subset B''$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} B/B' \arrow[r, "\pi"] & B/B'' \\ & A \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, где $\pi : B/B' \to B/B''$ – естественный гомоморфизм.

5.41. Пусть M – правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Покажите, что если для натурального n и правого R-модуля N выполнен изоморфизм $M^n \cong R_R \oplus N$ модуль ${}_SM$ конечно порожден.

Точные последовательности

Последовательность модульных гомоморфизмов

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

называется *точной в члене* M_n, если $f(M_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$. Последовательность гомоморфизмов называется *точной,* если она точна в каждом своем члене.

5.42. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & D \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\eta"'] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\zeta"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & & H \arrow[ur, "\nu"'] \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

строка и столбец точны. Покажите, что:

1) $\beta = 0, \eta = 0$;

2) α, ν – изморфизмы.

5.43 (Лемма о змее). Рассмотрим коммутативную диаграмму правых R-модулей

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & C \arrow[d, "h_3"] \\
A' \arrow[r, "g_1"] & B' \arrow[r, "g_2"] & C'
\end{tikzcd}$$

Согласно 5.21 гомоморфизмы f_1, f_2 индуцируют соотетственно гомоморфизмы

$$f_1' : \mathrm{Ker}(h_1) \to \mathrm{Ker}(h_2), f_2' : \mathrm{Ker}(h_2) \to \mathrm{Ker}(h_3)$$

и гомоморфизмы g_1, g_2 индуцируют соответственно гомоморфизмы

$$g_1' : \mathrm{Coker}(h_1) \to \mathrm{Coker}(h_2), g_2' : \mathrm{Coker}(h_2) \to \mathrm{Coker}(h_3).$$

Покажите, что если:

1) g_1 – мономорфизм, то последовательность

$$\mathrm{Ker}(h_1) \xrightarrow{f_1'} \mathrm{Ker}(h_2) \xrightarrow{f_2'} \mathrm{Ker}(h_3)$$

точная;

2) f_2 – эпиморфизм, то последовательность

$$\mathrm{Coker}(h_1) \xrightarrow{g_1'} \mathrm{Coker}(h_2) \xrightarrow{g_2'} \mathrm{Coker}(h_3)$$

точная;

3) g_1 – мономорфизм и f_2 – эпиморфизм, то существует гомоморфизм $d : \mathrm{Ker}(h_3) \to \mathrm{Coker}(h_1)$, для которого последовательность

$$\mathrm{Ker}(h_2) \xrightarrow{f_2'} \mathrm{Ker}(h_3) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(h_1) \xrightarrow{g_1'} \mathrm{Coker}(h_2)$$

точная.

5.44. Рассмотрим коммутативную диаграмму правых R-модулей

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & D \arrow[d, "h_4"] \\
A' \arrow[r, "g_1"] & B' \arrow[r, "g_2"] & C' \arrow[r, "g_3"] & D',
\end{tikzcd}$$

в которой строки точные Покажите, что если h_1 – эпиморфизм и h_4 – мономорфизм, то

$$\mathrm{Ker}(h_3) = f_2(\mathrm{Ker}(h_2)), \mathrm{Im}(h_2) = g_2^{-1}(\mathrm{Im}(h_3)).$$

5.45 (Лемма о пяти гомоморфизмах). Рассмотрим коммутативную диаграмму правых R-модулей

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & H \arrow[d, "h_5"] \\
A' \arrow[r, "g_1"] & B' \arrow[r, "g_2"] & C' \arrow[r, "g_3"] & D' \arrow[r, "g_4"] & H',
\end{tikzcd}$$

в которой строки точные Покажите, что если:

1) h_1 – эпиморфизм и h_2, h_4 – мономорфизмы, то h_3 – мономорфизм;

2) h_5 – мономорфизм и h_2, h_4 – эпиморфизмы, то h_3 – эпиморфизм;

3) h_1 – эпиморфизм, h_5 – мономорфизм и h_2, h_4 – изоморфизмы, то h_3 – изоморфизм.

5.46. Предположим, что строки коммутативной диаграммы правых R-модулей

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"] & B' \arrow[r, "g_2"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

являются точными. Покажите, что если:

1) h_1 и h_3 эпиморфизмы, то h_2 эпиморфизм;

2) h_1 и h_3 мономорфизмы, то h_2 мономорфизм;

3) h_1 и h_3 изоморфизмы, то h_2 изоморфизм.

Простые модули и примитивные идеалы

Идеал I кольца R называется *примитивынм справа,* если для некоторого простого правого R-модуля M выполнено равенство $r_R(M) = I$. Аналогично определяется понятие примитивного слева идеала. Если над кольцом R существует точный простой правый модуль, то кольцо R называется *примитивным справа.*

5.47 (Лемма Шура). Покажите, что если M, N – простые правые R-модули, то всякий гомоморфизм из $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ является либо нулевым, либо изоморфизмом. В частности, кольцо эноморфизмов каждого простого модуля – тело.

5.48. Приведите пример непростого R-модуля M, у которого $\mathrm{End}_R(M)$ – тело.

5.49. Покажите, что над кольцом R всякий простой правый R-модуль является точным тогда и только тогда, когда R – простое кольцо.

Кольцо R называется *правым CSL-кольцом*, если для каждого правого R-модуля M выполнена эквивалентность

$$M \text{ – простой модуль} \Leftrightarrow \mathrm{End}_R(M) \text{ – тело.}$$

5.50. Покажите, что для конечного кольца R следующие условия равносильны:

1) кольцо R изоморфно конечной прямой сумме полных матричных колец конечных размеров над локальными кольцами;

2) R – CSL-кольцо.

5.51. Покажите, что всякий примитивный справа идеал является первичным.

5.52. Покажите, что пресечение всех примитивных справа идеалов кольца R совпадает с радикалом Джекобсона кольца R.

5.53. Покажите, что каждое квазиинвариантное справа примитивное справа кольцо является телом.

5.54. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – примитивное справа кольцо, которое содержит минимальный правый идеал;

2) R – примитивное справа кольцо, которое содержит минимальный левый идеал;

3) R – первичное кольцо, которое содержит минимальный правый идеал;

4) R – первичное кольцо, которое содержит минимальный левый идеал.

5.55. Пусть $r_1, r_2, \ldots$ – регулярная справа убывающая последовательность элементов из кольца R. Покажите, что если каждый элемент последовательности $r_1, r_2, \ldots$ ненулевой, то существует примитивный слева идеал P кольца R такой, что $r_n \notin P$ для каждого n.

Модули на областями главных идеалов.

5.56. Пусть R – евклидово кольцо. Покажите, что:

1) всякая $(n \times m)$-матрица A над R эквивалентна матрице вида

$$diag(a_1, a_2 \dots, a_k, 0 \dots, 0),$$

где $a_i \mid a_{i+1}$ и $a_k \neq 0$.

2) всякая обратимая $(n \times n)$-матрица A над R представима в виде произведения элементарных матриц.

5.57. Пусть R – кольцо главных идеалов. Покажите, что для каждой $(n \times m)$ – матрицы A над R существуют матрицы $C \in GL_n(R), D \in GL_m(R)$ такие, что $CAD = diag(a_1, a_2 \dots, a_k, 0 \dots, 0)$, где $a_i \mid a_{i+1}$ и $a_k \neq 0$. При этом набор идеалов $(a_1), (a_2) \dots, (a_k)$ не зависит от выбора обратимых матриц C и D.

5.58. Пусть R – кольцо главных идеалов и F – конечно порожденный свободный R-модуль. Покажите, что для каждого подмодуля G модуля F существуют базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ модуля F и элементы $a_1, a_2 \dots, a_k \in R$, для которых выполнены условия: $e_1a_1, e_2a_2, \dots, e_ka_k$ – базис модуля G, $a_i \mid a_{i+1}$ и $a_k \neq 0$. При этом набор идеалов $(a_1), (a_2) \dots, (a_k)$ не зависит от выбора базиса модуля F.

5.59. Пусть R – кольцо главных идеалов и F – свободный R-модуль. Покажите, что каждый подмодуль модуля F является свободным.

5.60. Всякий конечно порожденный модуль M над кольцом главных идеалов R изоморфен модулю вида

$$R^n \oplus R/(p_1^{n_1}) \oplus R/(p_2^{n_2}) \oplus \dots \oplus R/(p_k^{n_k}),$$

где $p_1, p_2, \dots, p_1$ – неразложимые элементы кольца R. Два таких модуля

$$R^n \oplus R/(p_1^{n_1}) \oplus R/(p_2^{n_2}) \oplus \dots \oplus R/(p_k^{n_k})$$

и

$$R^m \oplus R/(q_1^{m_1}) \oplus R/(q_2^{m_2}) \oplus \dots \oplus R/(q_l^{m_l})$$

изоморфны в точности тогда, когда $n = m, k = l$ и $(p_i) = (q_{\pi(i)})$, $n_i = m_{\pi(i)}, i = 1 \dots n$, для некоторой перестановки π натуральных чисел $i = 1, \dots, n$.

Пусть V – векторное пространство над полем P и $A \in \mathrm{End}_P(V)$. Операция

$$v(\sum_{i=1}^{n} x^i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} A^i(v)\alpha_i (v \in V)$$

превращает V в модуль над алгеброй $P[x]$. Этот модуль будем обозначать через $V(A)$.

5.61. Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем P, A – линейный оператор, действующий в линейном векторном пространстве V, и $\chi_A = p_1^{s_1} \dots p_m^{s_m}$ – разложение характеристического многочлена линейного опертора A на неприводимые множители над полем P. Тогда

$$\dim_P C(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,t} \deg(p_i) \min(n_{is}, n_{it}),$$

где $\{n_{ij}\}$ – степени неприводимого многочлена p_i, которые входят в p_i-примарную компоненту в разложении модуля $V(A)$. В частности, минимальное значение размерности $C(A)$ достигается в том случае, если минимальный и характеристический многочлены линейного оператора A совпадают.

5.62. Пусть P – поле. Покажите, что если минимальный и характеристический многочлены матрицы $A \in M_n(P)$ совпадают, то $\dim_P(C(A)) = n$ и $C(A) = \{f(A) \mid f \in P[x]\}$.

5.63. Пусть P – поле и $n \geqslant 2$. Покажите, что максимальная размерность $C(A)$ среди всех нескалярных матриц A из $M_n(P)$ равна n^2-2n+2.

Пусть A – матрица размера $n \times n$ над полем P. Операция

$$v(\sum_{i=1}^{n} x^i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} vA^i \alpha_i (v \in P^n)$$

превращает векторное пространство вектор-строк P^n в модуль над алгеброй $P[x]$. Этот модуль будем обозначать через $M(A)$.

5.64. Пусть A, B, C – квадратные матрицы соответственно размеров $n \times n$, $m \times m$ и $n \times m$ над полем P. Покажите, что если $(\chi_A, \chi_B) = p_1^{s_1} \dots p_m^{s_m}$ – разложение многочлена (χ_A, χ_B) на неприводимые множители над полем P, то

1) размерность пространства решений уравнения $AX - XB = 0$ равна

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{s,t} \deg(p_i) \min(n_{is}, n'_{it}),$$

где $\{n_{is}\}$ и $\{n'_{it}\}$ – степени неприводимого многочлена p_i, которые входят в p_i-примарную компоненту в разложения соответственно модуля $M(A)$ и модуля $M(B)$;

2) матричное равнение $AX - XB = C$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ характеристические многочлены матриц A и B взаимно просты.

5.65. Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем P и $A, B \in \mathrm{End}_P(V)$. Покажите, что если каждый линейный оператор, коммутирующий с оператором A, коммутирует также и с оператором B, то $B = f(A)$, где $f \in P[x]$.

В упражнениях 5.66-5.70 через $\mathbb{Z}^n$ через обозначется ортогональная целочисленная решетка, состоящая из точек с целыми координатами в декартовой системе координат.

5.66. Пусть M – подгруппа ранга n группы $\mathbb{Z}^n$ и A – матрица перехода от стандартного базиса $\mathbb{Z}^n$ к базису $e_1, \ldots, e_n$ подгруппы M. Докажите, что

$$\det(A) = \mid \mathbb{Z}^n/M \mid = \mid \{\overline{x} \in \mathbb{Z}^n \mid \overline{x} \in P\} \mid,$$

где $P = \{e_1 t_1 + \ldots + e_n t_n \mid 0 \leqslant t_i < 1\}$.

5.67 (Формула Пика). 1) Пусть P – параллелограмм на решетке $\mathbb{Z}^2$. С помощью предыдущего упражнения покажите, что площадь параллелограмма P вычисляется согласно следующей формуле:

$$i(P) + \frac{i(\partial(P))}{2} - 1,$$

где $i(P)$ – число целых точек, расположенных строго внутри параллелограмма, и $i(\partial(P))$ – число целых точек , расположенных на его границе.

2) Докажите утверждение первого пункта в случае, когда P – простой многоугольник на решетке $\mathbb{Z}^2$.

5.68. Пусть P – параллелепипед на решетке $\mathbb{Z}^3$. Покажите, что объем параллелепипеда P вычисляется согласно следующей формуле:

$$I_1 + \frac{I_2}{2} + \frac{I_3}{4} + 1,$$

где I_1 – число целых точек, расположенных строго внутри параллелепипеда P, I_2 – число целых точек, расположенных строго внутри его граней и I_3 – число целых точек, расположенных строго внутри его ребер.

5.69. Пусть P – простой многоугольник, расположенный на двумерном подпространстве векторного пространства $\mathbb{R}^3$, которое задается уравнением $ax+by+cx = 0, (a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, b, c) = 1)$. Покажите, что если вершины многоугольника P имеют целые координаты, то его площадь вычисляется согласно следующей формуле:

$$(a^3 + ab^2)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}(i(P) + \frac{i(\partial(P))}{2} - 1),$$

где $i(P)$ – число целых точек, расположенных строго внутри P, и $i(\partial(P))$ – число целых точек, расположенных на его границе.

5.70. Обобщите утверждения 5.68 и 5.69 на произвольную размернтость.

6 Проективные и свободные модули

Проективные модули

Подмножество X правого R-модуля M называется *линейно независимым*, если для любых $x_1, \ldots, x_n \in X$ и $r_1, \ldots, r_n \in R$ из равенства $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0$ следуют равенства $r_1 = \ldots = r_n = 0$. Если $\aleph$ – кардинальное число и M имеет линейно независимую систему образующих X мощности $\aleph$, то M называется *свободным модулем ранга* $\aleph$; в этом случае, множество X называется *базисом* модуля M. Каждое прямое слагаемое свободного модуля называется *проективным* модулем.

6.1. Каждый модуль изоморфен фактормодулю свободного модуля.

6.2. Пусть R – кольцо. Покажите, что для кольца $S = \mathrm{End}_R(R_R^{(\mathbb{N})})$ имеет место изоморфизм $S_S \cong S_S \oplus S_S$.

6.3. Пусть R – ненулевое кольцо. Покажите, что если $R_R^{(\alpha)} \cong R_R^{(\beta)}$ и α – бесконечное кардинальное число, то $\alpha = \beta$.

6.4. Покажите, что над ненулевым кольцом R каждый правый модуль является свободным в точности тогда, когда R – тело.

6.5. Для правого R-модуля P следующие условия равносильны:

1) P – проективный модуль;

2) каждый эпиморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(M, P)$ является расщепляющимся;

3) для каждого эпиморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ и любого гомоморфизма $g \in \mathrm{Hom}_R(P, B)$ существует такой гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$, что $g = hf$;

4) для каждого семейства образующих $\{x_i\}_{i \in I}$ модуля P существует такое семейство $\{f_i\}_{i \in I}$, где $f_i \in \mathrm{Hom}_R(P, R_R)$ для любого $i \in I$, что для каждого $p \in P$ $f_i(p) = 0$ для почти всех $i \in I$ и $p = \sum_{i \in I} pf_i(p)$;

5) для некоторого семейства образующих $\{x_i\}_{i \in I}$ модуля P существует такое семейство $\{f_i\}_{i \in I}$, где $f_i \in \mathrm{Hom}_R(P, R_R)$ для любого $i \in I$, что для каждого $p \in P$ $f_i(p) = 0$ для почти всех $i \in I$ и $p = \sum_{i \in I} pf_i(p)$.

6.6. Пусть R – кольцо и $E \in M_m(R), F \in M_n(R)$ – идемпотентные матрицы. Покажите, что $ER_R^m \cong FR_R^n$ в точности тогда, когда для некоторых неотрицательных целых чисел s и t, удовлетворяющих равенству $m + s = n + t$, матрицы $E \oplus 0_s, F \oplus 0_t \in M_{m+s}(R)$ сопряжены.

Кольцо R называется проективно-свободным, если для каждых $m, n \in \mathbb{N}$ выполнена импликация

$$R_R^n \cong R_R^m \Rightarrow n = m.$$

6.7. Покажите, что кольцо R проективно-свободно в точности тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякая идемпотентная матрица $E \in M_n(R)$ сопряжена матрице вида $diag(1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$.

6.8. Пусть I – идеал кольца R и $I \subset J(R)$. Покажите, что если R/I – проективно-свободное кольцо, то кольцо R также является проективно-свободным.

6.9. Покажите, что в каждом из следующих случаев кольцо R является проективно-свободным:

1) R – тело;
2) R – область главных идеалов;
3) R – локальное кольцо;
4) $R = S[[x]]$, где S – проективно-свободное кольцо.

Наследственные и полунаследственные кольца

Модуль M называется *наследственным (соотв., полунаследственным)*, если каждый (соотв., конечно прожденный) подмодуль модуля M является проективным. Кольцо R называется *наследственным справа*, если модуль R_R – наследственный справа. Аналогично определяется понятие полунаследсвенного справа кольца.

6.10. Пусть I – вполне упорядоченное множество, $\{M_i\}_{i\in I}$ – цепь подмодулей модуля M и $\cup_{i\in I} M_i = M$. Покажите, что если для каждого $i \in I$ выполнено равенство $M_i = (\cup_{j<i} M_j) \oplus M_i'$, где $M_i' \leqslant M$, то

$$M = \oplus_{i\in I} M_i'.$$

6.11. 1) Пусть $(P_i)_{i\in I}$ – семейство наследственных правых R – модулей. Тогда для каждого подмодуля N модуля $\oplus_{i\in I} P_i$ имеет место изоморфизм

$$N \cong \oplus_{i\in I} P_i',$$

где $P_i' \leqslant P_i$ – проективный модуль для каждого $i \in I$;

2) Пусть $(P_i)_{i\in I}$ – семейство полунаследственных правых R-модулей. Тогда для каждого конечно порожденного подмодуля N модуля $\oplus_{i\in I} P_i$ имеет место изоморфизм

$$N \cong P_1' \oplus \ldots \oplus P_n',$$

где $P_1' \leqslant P_{i_1}, \ldots, P_n' \leqslant P_{i_n}$ – проективные модули и $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$.

6.12. 1) Если R – наследственное справа кольцо, то каждый подмодуль проективного правого R – модуля является проективным и изоморфен прямой сумме правых идеалов кольца R.

2) Если R – полунаследственное справа кольцо, то каждый конечно порожденный подмодуль проективного правого R – модуля является проективным и изоморфен конечной прямой сумме конечно порожденных правых идеалов кольца R.

Правый R-модуль M называется *риккартовым модулем*, если для каждого $\varphi \in S = \mathrm{End}_R(M)$ имеет место равенство $\mathrm{Ker}\,\varphi = eM$, где $e^2 = e \in S$. Кольцо R называется *риккартовым справа* (или *правым р.р.-кольцом*), если модуль R_R является риккартовым.

6.13. Покажите, что кольцо R является риккартовым справа в точности тогда, когда каждый циклический подмодуль модуля R_R проективен.

6.14. Следующие условия эквивалентны для кольца R и фиксированного $n \in \mathbb{N}$:

1) каждый n-порожденный проективный правый R-модуль является риккартовым модулем;

2) свободный правый R-модуль $R_R^{(n)}$ является риккартовым модулем;

3) $\mathrm{Mat}_n(R)$ является риккартовым справа кольцом;

4) каждый n-порожденный правый идеал кольца R является прективным правым R-модулем.

6.15. Следующие условия эквивалентны для кольца R:

1) каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является риккартовым модулем;

2) каждый конечно порожденный свободный правый R- модуль является риккартовым модулем ;

3) $\mathrm{Mat}_n(R)$ является риккартовым справа кольцом для каждого $n \in \mathbb{N}$;

4) R – полунаследственное справа кольцо;

5) для некоторого натурального числа n кольцо $\mathrm{Mat}_n(R)$ является полунаследственным справа.

7 Модули с условиями на прямые слагаемые

I-конечные модули

7.1. Для правого R – модуля M имеют место следующие утверждения:

1) если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ – бесконечная строго возрастающая цепочка прямых слагаемых модуля M, то существует такая бесконечная строго убывающая цепочка прямых слагаемых $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ модуля M, что $M = A_i \oplus B_i$ для каждого i;

2) если $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ – бесконечная строго убывающая цепочка прямых слагаемых модуля M, то существуют такие ненулевые подмодули $C_1, C_2, \ldots$ модуля M, что $M = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus B_n$ и $\oplus_{i=n+1}^{\infty} C_i \subset B_n$ для каждого n.

7.2. Для правого R – модуля M следующие условия равносильны:

1) каждая убывающая цепочка прямых слагаемых модуля M стабилизируется;

2) каждая возрастающая цепочка прямых слагаемых модуля M стабилизируется;

3) кольцо $\mathrm{End}(M)$ не содержит бесконечного числа взаимоортогональных ненулевых идемпотентов;

4) кольцо $\mathrm{End}(M)$ удовлетворяет условию максимальности для идемпотентов;

5) кольцо $\mathrm{End}(M)$ удовлетворяет условию минимальности для идемпотентов.

SSP - и SIP-модули

Модуль M называется *SSP-модулем* (соотв., *SIP-модулем*), если сумма (соотв., пересечение) двух прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M. Если в модуле M сумма (соотв., пересечение) любого семейства прямых слагаемых является прямым слагаемым, то модуль M называется *$SSSP$-модулем* (соотв., *$SSIP$-модулем*).

Следующие два утверждения проверяются непосредственно.

7.3. Пусть M – правый R-модуль, π – проекция на первое прямое слагаемое относительно разложения $M = A_1 \oplus A_2$ и π' – проекция на первое прямое слагаемое относительно разложения $M = B_1 \oplus B_2$. Покажите, что:

1) $\mathrm{Im}(\pi'\pi) = (A_1 + B_2) \cap B_1$;
2) $\mathrm{Im}(\pi'\pi_{|B_2}) = B_1 \cap (A_1 + B_2) \cap (A_2 + B_2)$;
3) $\mathrm{Ker}(\pi'\pi) = A_1 \cap B_2 + A_2$;
4) $\mathrm{Ker}(\pi'\pi_{|B_2}) = A_1 \cap B_2 + A_2 \cap B_2$.

7.4. Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – SSP-модуль;
2) для каждого прямого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ образ любого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ является прямым слагаемым в M.

Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ называется *регулярным,* если образ и ядро f являются прямыми слагаемыми соответственно в N и M.

7.5. Пусть M – правый R-модуль, $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ – регулярные гомоморфизмы и $M = \mathrm{Ker}(f) \oplus A = \mathrm{Im}(f) \oplus B$, $M = \mathrm{Ker}(g) \oplus A' = \mathrm{Im}(g) \oplus B'$. Тогда имеют место следующие равенства

1) $\mathrm{Im}(fg) = f(A \cap (\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)))$;
2) $\mathrm{Ker}(fg) = g^{-1}_{|A'}(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{Ker}(g)$.

7.6. Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – SSP-модуль;

2) если π, π' – идемпотенты кольца $\mathrm{End}_R(M)$, то $\mathrm{Im}(\pi'\pi)$ – прямое слагаемое модуля M;

3) если $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ – регулярные гомоморфизмы, то $\mathrm{Im}(fg)$ – прямое слагаемое модуля M.

7.7. Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – SIP-модуль;

2) для каждого прямого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ ядро любого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ является прямым слагаемым в M.

7.8. Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – SIP-модуль;

2) если π, π' – идемпотенты кольца $\mathrm{End}_R(M)$, то $\mathrm{Ker}(\pi'\pi)$ – прямое слагаемое модуля M;

3) если $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ – регулярные гомоморфизмы, то $\mathrm{Ker}(fg)$ – прямое слагаемое модуля M.

7.9. 1) Покажите, что всякий проективный (свободный) SSP-модуль является SIP-модулем.

2) Покажите, что существует свободный SSP-модуль, который не является SIP-модулем.

7.10. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – наследственное справа кольцо;

2) над кольцом R каждый проективный (свободный) правый модуль является SIP-модулем;

3) над кольцом R каждый проективный (свободный) правый модуль является SSP-модулем.

Модуль M называется *дуально риккартовым модулем*, если для каждого $\varphi \in S = \mathrm{End}_R(M)$ имеет место равенство $\mathrm{Im}\,\varphi = eM$, где $e^2 = e \in S$.

7.11. Покажите, что каждый риккартовый (соотв., дуально риккартовый) модуль является SIP-модулем (соотв., SSP-модулем).

Модуль M называется *бэровским модулем,* если $r_M(I)$ является прямым слагаемым модуля M для каждого левого идеала I в S. Модуль M называется *дуально бэровским модулем*, если $\sum_{\varphi \in I} \mathrm{Im}\varphi$ является прямым слагаемым модуля M для каждого правого идеала I кольца S.

7.12. 1) Покажите, что модуль является бэровским в точности тогда, когда он является риккартовым и $SSIP$-модулем.

2) Покажите, что модуль является дуально бэровским в точности тогда, когда он является дуально риккартовым и $SSSP$-модулем.

$Ci-$ **и** Di**-модули** $(i = 2, 3)$

Для произвольного правого R – модуля M определим следующие условия.

$(C2)$ Если A и B – подмодули модуля M, $A \cong B$ и B – прямое слагаемое модуля M, то A прямое слагаемое модуля M.

$(C3)$ Если M_1 и M_2 – прямые слагаемые модуля M и $M_1 \cap M_2 = 0$, то $M_1 \oplus M_2$ – прямое слагаемое модуля M.

$(D2)$ Если A – помодуль модуля M и фактормодуль M/A изоморфен прямому слагаемому модуля M, то A – прямое слагаемое M.

$(D3)$ Если M_1 и M_2 – прямые слагаемые модуля M и $M_1 + M_2 = M$, то $M_1 \cap M_2$ – прямое слагаемое M.

Модуль M называется $C2$-модулем (соотв., $C3, D2, D3$), если он удовлетворяет условию $C2$ (соотв., $C3, D2, D3$). Кольцо R называется правым C2-кольцом (сооотв., C3-кольцом), если R_R – $C2$-модуль (соотв., $C3$-модуль).

7.13. Покажите, что:

1) всякий $C2$-модуль является $C3$-модулем;

2) всякий $D2$-модуль является $D3$-модулем.

7.14. Пусть M – правый R-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) если M – D_3-модуль, то для каждого разложения $M = A \oplus B$ модуля M и каждого гомоморфизма $f : A \to B$, у которого $\mathrm{Im}(f)$ – прямое слагаемое модуля M, ядро f является прямым слагаемым M;

2) если M – C_3-модуль, то для каждого разложения $M = A \oplus B$ модуля M и каждого гомоморфизма $f : A \to B$, у которого $Ker(f)$ – прямое слагаемое модуля M, образ f является прямым слагаемым M.

7.15. Пусть M правый R-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) если модуль $M \oplus M$ является $D3$-модулем, то M – $D2$-модуль;

2) Если модуль $M \oplus M$ является $C3$-модулем, то M – $C2$-модуль.

7.16. Пусть M правый R-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) каждая (конечная) прямая сумма копий модуля М является $C3$-модулем тогда и только тогда, когда каждая (конечная) прямая сумма копий модуля М является $C2$-модулем;

2) каждая (конечная) прямая сумма копий модуля М является $D3$-модулем тогда и только тогда, когда каждая (конечная) прямая сумма копий модуля М является $D2$-модулем.

7.17. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – $D3$-модуль;

2) для каждых прямых слагаемых A, B модуля M таких, что $A + B = M$, и всякого гомоморфизма $f : M \to M/A \cap B$ существует гомоморфизм g, для которого коммутативна диграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & M/A \cap B \\ & M \arrow[u, "f"] \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd},$$

где $\pi : M \to M/A \cap B$ – естественный гомоморфизм.

7.18. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – $C3$-модуль;

2) для каждых прямых слагаемых A, B модуля M таких, что $A \cap B = 0$, и всякого гомоморфизма $f : A + B \to M$ существует гомоморфизм g, для которого коммутативна диграмма

$$\begin{tikzcd}
A + B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "g"'] \\
M &
\end{tikzcd},$$

где $\iota : A + B \to M$ – естественное вложение.

7.19. Покажите, что всякий проективный модуль является $D2$-модулем.

7.20. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое $C2$-кольцо;

2) каждый R-изоморфизм $f : rR \to eR$, где $r \in R$ и $e = e^2 \in R$, продолжается до некоторого гомоморфизма $f' : R_R \to eR$;

3) если $r(r) = r(e)$, где $r \in R$ и $e = e^2 \in R$, то $e \in Rr$;

4) если $r(r) = r(e)$, где $r \in R$ и $e = e^2 \in R$, то $Re = Rr$.

7.21. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое $C3$-кольцо;

2) если e, f – идемпотенты из кольца R и $eR \cap fR = 0$, то $R(1 - e) + R(1 - f) = R$;

3) если e, f – идемпотенты из кольца R и $eR \cap fR = 0$, то $(1 - e)fR = gR$, где $g = g^2 \in R$;

4) если e, f – идемпотенты из кольца R и $eR \cap fR = 0$, то $R(1 - e)f = Rf$.

Кольцо R называется *SSP-кольцом,* если R_R – SSP-модуль. Если R_R – SIP-модуль, то кольцо R называется правым *SIP-кольцом.* Аналогично определяется понятие левого SIP-кольца.

7.22. Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M является $D3$-модулем и SSP-модулем;

2) M является $C3$-модулем и SIP-модулем;

3) M является SSP-модулем и SIP-модулем;

4) если $f, g \in \operatorname{End}_R(M)$ – регулярные гомоморфизмы, то fg – регулярный гомоморфизм;

5) $\operatorname{End}_R(M)$ – SSP-кольцо.

7.23. Для свободного (проективного) правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – SSP-модуль;

2) $\operatorname{End}_R(M)$ – SSP-кольцо.

7.24. Пусть R – кольцо. Покажите, что R_R – SSP-модуль в точности тогда, когда ${}_RR$ – SSP-модуль.

7.25. 1) Покажите, что существует правое SIP-кольцо, которое не является левым SIP-кольцом.

2) Покажите, что существует SIP-кольцо, которое не является SSP-кольцом.

7.26. Покажите, что следующие условия равносильны для модуля M:

1) если M/A – простой модуль и B – такой подмодуль модуля M, что $M/A \cong B \leqslant^d M$, то $A \leqslant^d M$;

2) для любых прямых слагаемых A, B модуля M таких, что M/A, M/B – простые модули, $A \cap B \leqslant^d M$;

3) для любых прямых слагаемых A, B модуля M таких, что M/A, M/B – простые модули и $A + B = M$, $A \cap B$ — прямое слагаемое модуля M;

4) если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и M/X_1, M/X_2, …, M/X_n — простые модули, то $\cap_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M.

7.27. Покажите, что следующие условия равносильны для модуля M:

1) если M/A – полупростой модуль и B – такой подмодуль модуля M, что $M/A \cong B \leqslant^d M$, то $A \leqslant^d M$;

2) для любых прямых слагаемых A, B модуля M таких, что M/A, M/B – полупростые модули, $A \cap B \leqslant^d M$;

3) для любых прямых слагаемых A, B модуля M таких, что M/A, M/B – полупростые модули и $A + B = M$, $A \cap B$ — прямое слагаемое модуля M;

4) если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и M/X_1, M/X_2, …, M/X_n — полупростые модули, то $\cap_{i=1}^{n} X_i$ — прямое слагаемое модуля M.

7.28. Покажите, что следующие условия равносильны для модуля M:

1) для всяких простых подмодулей A, B модуля M из условий $A \cong B$, $B \leqslant^d M$ следует, что $A \leqslant^d M$;

2) для любых простых прямых слагаемых A, B модуля M выполнено условие $A + B \leqslant^d M$;

3) для всяких конечно порожденных полупростых подмодулей A, B модуля M из условий $A \cong B$, $B \leqslant^d M$ следует, что $A \leqslant^d M$;

4) для любых конечно порожденных полупростых прямых слагаемых A, B модуля M выполнено условие $A + B \leqslant^d M$.

7.29. Покажите, что следующие условия равносильны для модуля M:

1) для любых полупростых подмодулей A, B модуля M из условия $A \cong B \leqslant^d M$, следует, что $A \leqslant^d M$;

2) для любых полупростых прямых слагаемых A, B модуля M, $A + B \leqslant^d M$;

3) для любых полупростых прямых слагаемых A, B модуля M из условия $A \cap B = 0$, следует, что $A + B \leqslant^d M$;

4) если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — полупростые прямые слагаемые модуля M и X_1, X_2, …, $X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M.

8 Порождающие и копорождающие модули.

Порождающие модули

Пусть $\mathcal{A}$ – непустой класс правых R-модулей. Говорят, что правый R-модуль M $\mathcal{A}$-порожден или *порождается* классом $\mathcal{A}$, если существует эпиморфизм $f : \oplus_{i\in I} N_i \to M$, где $\{N_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A} = \{A\}$, то говорят, что модуль M A-*порожден* или *порождается* модулем A. Класс всех модулей, порожденных классом $\mathcal{A}$ (соотв., модулем A), обозначется через $\mathrm{Gen}(\mathcal{A})$ (соотв., $\mathrm{Gen}(A)$).

8.1. Пусть $\mathcal{A}$ – непустое множество правых R-модулей и M – правый R-модуль. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) модуль M $\mathcal{A}$-порожден;

2) для каждых различных гомоморфизмов $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ существует такой гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$, где $A \in \mathcal{A}$, что $fh \neq gh$;

3) для каждого ненулевого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ существует такой гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$, где $A \in \mathcal{A}$, что $fh \neq 0$.

Говорят, что класс $\mathcal{A}$ правых R-модулей является порождающим (для $Mod-R$), если каждый правый R-модуль порождается классом $\mathcal{A}$. Правый R-модуль M называется *порождающим (или образующим),* если $\mathrm{Gen}(M) = Mod\text{-}R$.

8.2. Пусть $\mathcal{A}$ – непустое множество правых R-модулей. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) класс $\mathcal{A}$ является порождающим;

2) для каждых правых R-модулей M, N гомоморфизм абелевых групп

$$F : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(\oplus_{A\in\mathcal{A}}A, M), \mathrm{Hom}_R(\oplus_{A\in\mathcal{A}}A, N)),$$

действующий по правилу $F : f \mapsto (g \mapsto gf)$, является мономорфизмом;

3) гомоморфизм $f : M \to N$ правых R-модулей является нулевым, если гомоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}_R(\oplus_{A\in\mathcal{A}}A, f)$ нулевой;

4) если для гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ гомоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}_R(\oplus_{A\in\mathcal{A}}A, f)$ является эпиморфизмом, то f – эпиморфизм;

5) последовательность гомоморфизмов правых R-модулей

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

является точной, если точна соответствующая последовательность последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_R(\oplus_{A\in\mathcal{A}}A, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\oplus_{A\in\mathcal{A}}A, M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\oplus_{A\in\mathcal{A}}A, M_3)\ .$$

Пусть $\mathcal{A}$ – непустой класс правых R-модулей и M – правый R-модуль. Подмодуль

$$\sum_{f\in\mathrm{Hom}_R(X,M),X\in\mathcal{A}} f(X).$$

модуля M называется $\mathcal{A}$-*следом* в M и обозначается через $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}, M)$. Если $\mathcal{A} = \{A\}$, то $\mathcal{A}$-след в M обозначается через $\mathrm{Tr}(A, M)$.

8.3. Пусть $\mathcal{A}$ – непустой класс правых R-модулей и M – правый R-модуль. Покажите, что:

1) $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}, M)$ – вполне инвариантный подмодуль модуля M;

2) $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}, M)$ – наибольший $\mathcal{A}$-порожденный подмодуль модуля M;

3) если $\{M_i\}_{i\in I}$ – множество подмодулей модуля M и $M = \oplus_{i\in I} M_i$, то $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}, M) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Tr}(\mathcal{A}, M_i)$;

4) если $\{A_i\}_{i\in I}$ – множество подмодулей модуля A и $A = \oplus_{i\in I} A_i$, то $\mathrm{Tr}(A, M) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Tr}(A_i, M)$;

5) если $e, f \in S = \mathrm{End}_R(M)$ – идемпотенты, то $\mathrm{Tr}(eM, fM) = fSeM$.

8.4. Пусть R – простое кольцо. Покажите, что всякий ненулевой правый идеал кольца R является образующим объектом в категории $Mod - R$.

Копрождающие модули

Пусть $\mathcal{A}$ – непустой класс правых R-модулей. Говорят, что модуль $M \in \mathrm{Mod}-R$ $\mathcal{A}$-копорожден или *копорождается* классом $\mathcal{A}$, если существует мономорфизм $f : M \to \prod_{i\in I} N_i$, где $\{N_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A} = \{A\}$, то говорят, что модуль M *A-копорожден* или *копорождается* модулем A. Класс всех модулей, копорожденных классом $\mathcal{A}$ (соотв., модулем A), обозначется через $\mathrm{Cog}(\mathcal{A})$ (соотв., $\mathrm{Cog}(A)$).

8.5. Пусть $\mathcal{A}$ – непустое множество правых R-модулей и M – правый R-модуль. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) модуль M $\mathcal{A}$-порожден;

2) для каждых различных гомоморфизмов $f, g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ существует такой гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$, где $A \in \mathcal{A}$, что $hf \neq hg$;

3) для каждого ненулевого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ существует такой гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$, где $A \in \mathcal{A}$, что $hf \neq 0$.

Говорят, что класс $\mathcal{A}$ правых R-модулей является копорождающим (для $Mod - R$), если каждый модуль копорождается классом $\mathcal{A}$.

8.6. Пусть $\mathcal{A}$ – непустое множество правых R-модулей. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) класс $\mathcal{A}$ является копорождающим;

2) для каждых правых R-модулей M, N гомоморфизм абелевых групп
$$F : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(N, \prod_{A\in\mathcal{A}} A), \mathrm{Hom}_R(M, \prod_{A\in\mathcal{A}} A)),$$
действующий по правилу $F : f \mapsto (g \mapsto fg)$, является мономорфизмом;

3) гомоморфизм $f : M \to N$ правых R-модулей является нулевым, если гомоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}_R(f, \prod_{A\in\mathcal{A}} A)$ нулевой;

4) если для гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ гомоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}_R(f, \prod_{A\in\mathcal{A}} A)$ является эпиморфизмом, то f – мономорфизм;

5) последовательность гомоморфизмов правых R-модулей
$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$
является точной, если точна соответствующая последовательность последовательность гомоморфизмов абелевых групп
$$\mathrm{Hom}_R(M_3, \prod_{A\in\mathcal{A}} A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_2, \prod_{A\in\mathcal{A}} A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_1, \prod_{A\in\mathcal{A}} A) .$$

Пусть $\mathcal{A}$ – непустой класс правых R-модулей и M – правый R-модуль. Подмодуль
$$\bigcap_{f\in\mathrm{Hom}_R(M,X), X\in\mathcal{A}} \mathrm{Ker}(f).$$
модуля M обозначается через $\mathrm{Re}(M,\mathcal{A})$. Если $\mathcal{A} = \{A\}$, то этот подмодуль обозначается через $\mathrm{Re}(M,A)$.

8.7. Пусть $\mathcal{A}$ – непустой класс правых R-модулей и M – правый R-модуль. Покажите, что:

1) $\mathrm{Re}(M,\mathcal{A})$ – вполне инвариантный подмодуль модуля M;

2) $\mathrm{Re}(M, \mathcal{A})$ – наименьший среди таких подмодулей X модуля M, что фактормодуль M/X копорожден классом $\mathcal{A}$;

3) если $\{M_i\}_{i\in I}$ – множество подмодулей модуля M и $M = \oplus_{i\in I} M_i$, то $\mathrm{Re}(M, \mathcal{A}) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Re}(M_i, \mathcal{A})$;

4) если $\{A_i\}_{i\in I}$ – множество правых R-модулей, то

$$\mathrm{Re}(M, \prod_{i\in I} A_i) = \mathrm{Re}(M, \bigoplus_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Re}(M, A_i);$$

5) если $e, f \in S = \mathrm{End}_R(M)$ – идемпотенты, то $\mathrm{Re}(eM, fM) = \{m \in eM \mid fSem = 0\}$.

Подпрождающие модули

Пусть $\mathcal{A}$ – непустой класс правых R-модулей. Говорят, что модуль $M \in$ Mod-R $\mathcal{A}$-подпорожден или *подпорождается* классом $\mathcal{A}$, если существует мономорфизм $f : M \to N$, где $N \in \mathrm{Gen}(\mathcal{A})$. Если $\mathcal{A} = \{A\}$, то говорят, что модуль M *A-подпорожден* или *подпорождается* модулем A. Полная подкатегория категории правых R-модулей, объектами которой являются все модули подпорожденные классом $\mathcal{A}$ (соотв., модулем A), обозначется через $\sigma(\mathcal{A})$ (соотв., $\sigma(A)$).

8.8. Покажите, что правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) $\sigma(M) = \text{Mod-R}$;

2) $R_R \in \sigma(M)$;

3) для некоторого натурального числа n существует мономорфизм $\phi : R_R^n \to M$;

4) $Gen(\{xR \mid x \in M^{(\mathbb{N})}\}) = \text{Mod-R}$.

Модуль M называется *самопорождающимся,* если M порождает каждый свой подмодуль.

8.9. Пусть M – правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Покажите, что если:

1) ${}_SM$ – конечно порожденный модуль, то $\sigma(M) = $ Mod-R/r(M);

2) R – коммутативное кольцо и M_R – конечно порожденный модуль, то $\sigma(M) = $ Mod-R/r(M).

8.10. Покажите, что правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) $\sigma(M) = Gen(M)$;

2) $M^{(\mathbb{N})}$ – самопорождающийся модуль;

3) M порождает каждый подмодуль модуля $M^{(\mathbb{N})}$;

4) для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого $N \leqslant M^n$ выполнено равенство $N = \mathrm{Hom}(M, N)N$.

8.11. 1) Пусть M – правый R-модуль, для которого выполнено равенство $\sigma(M) = \mathrm{Gen}(M)$, и $\beta \in \mathrm{Biend}_R(M)$. Покажите, что для любого конечного семейства элементов $x_1, x_2, \dots x_n$ из M существует элемент $r \in R$ такой, что $x_1\beta = x_1r, x_2\beta = x_2r, \dots x_n\beta = x_1r$.

2) Пусть R – простое кольцо и I – ненулевой правый идеал в R. Покажите, что каноническое отображение $f : R \to \mathrm{Biend}_R(I)$ является изоморфизмом.

8.12. Пусть P – поле, $R = \begin{pmatrix} P & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$ и $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Определите классы правых R-модулей:

1) $\mathrm{Gen}(eR)$;

2) $\sigma(eR)$.

8.13. Определите классы правых $\mathbb{Z}$-модулей:

1) $\mathrm{Gen}(\mathbb{Z}_n)(n \in \mathbb{N})$;

2) $\sigma(\mathbb{Z}_n)(n \in \mathbb{N})$;

3) $\mathrm{Gen}(\mathbb{Q})$;

4) $\sigma(\mathbb{Q})$;

5) $\mathrm{Gen}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$, где p – простое число;

6) $\sigma(\mathbb{Z}_{p^\infty})$, где p – простое число;

7) $\mathrm{Gen}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$;

8) $\sigma(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

9 Малые и существенные подмодули, дополнения и замыкания

Малые и существенные подмодули

Подмодуль X модуля M называется *малым,* если $X+Y\neq M$ для каждого собственного подмодуля Y модуля M. Тот факт, что X – малый подмодуль модуля M обозначается через $X \ll M$.

Подмодуль X модуля M называется *существенным,* если $X\cap Y\neq 0$ для каждого ненулевого подмодуля Y модуля M и говорят, что M – *существенное расширение* X. Тот факт, что X – существенный подмодуль модуля M обозначается через $X \leqslant^e M$.

9.1. Пусть M – правый R-модуль. Тогда

1) если $N\leqslant N'\leqslant M$, то $N'\ll M$ в точности тогда, когда $N\ll M$ и $N'/N\ll M/N$;

2) если $f: M\to N$ – гомоморфизм правых R-модулей и $X\ll M$, то $f(X)\ll N$;

3) если $N_1,\ldots,N_k$ – малые подмодули модуля M, то $N_1+\ldots+N_k\ll M$;

4) если $N\ll M$, то модуль M конечно порожден в точности тогда, когда M/N – конечно порожденный модуль;

5) если $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$ – подмодули модуля M и $A_i\ll B_i$ для каждого i, то $A_1+\ldots+A_n\ll B_1+\ldots+B_n$.

9.2. Пусть M – правый R-модуль. Тогда

1) если $N\leqslant N'\leqslant M$, то $N\leqslant^e M$ в точности тогда, когда $N'\leqslant^e M$ и $N\leqslant^e N'$;

2) если $f : M \to N$ – гомоморфизм правых R-модулей и $X \leqslant^e N$, то $f^{-1}(X) \leqslant^e M$;

3) если $N_1, \ldots, N_k$ – существенные подмодули модуля M, то

$$N_1 \cap \ldots \cap N_k \leqslant^e M;$$

4) если $N \leqslant^e M$, то модуль M конечно копорожден в точности тогда, когда N – конечно копорожденный модуль;

5) если $M = \oplus_{I \in i} M_i$ и $N_i \leqslant^e M_i$ для каждого $i \in I$, то $\oplus_{I \in i} N_i \leqslant^e M$;

6) если $N \leqslant^e M$ и $N' \leqslant M$, то $N \cap N' \leqslant^e N'$;

7) если $N \leqslant^e M$ и $m \in M$, то $\{r \in R \mid mr \in N\}$ – существенный правый идеал кольца R.

8) если $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ – подмодули модуля M и $A_i \leqslant^e B_i$ для каждого i, то $A_1 \cap \ldots \cap A_n \leqslant^e B_1 \cap \ldots \cap B_n$.

9.3. Пусть M – модуль и $N \subset N'$ – подмодули модуля M. Покажите, что $N \leqslant^e N'$ в точности тогда, когда для каждого подмодуля X модуля M верна импликация:

$$X \cap N = 0 \Rightarrow X \cap N' = 0.$$

9.4. Покажите, что для конечно порожденного подмодуля N модуля M следующие условия равносильны:

1) $N \ll M$;

2)

$$N \leqslant \bigcap_{X \leqslant M, X \text{максимален в } M} X.$$

9.5. 1) Приведите пример модуля M, в котором существует такое семейство малых подмодулей $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$, что $\sum_{\alpha \in A} M_\alpha$ – немалый подмодуль модуля M.

2) Приведите пример модуля M, в котором существует такое семейство существенных подмодулей $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$, что подмодуль $\cap_{\alpha \in A} M_\alpha$ не является существенным подмодулем модуля M.

9.6. 1) Пусть каждый ненулевой фактормодуль модуля M содержит максимальный подмодуль. Покажите, что сумма произвольного семейства малых подмодулей модуля M является малым подмодулем.

2) Пусть каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит простой подмодуль. Покажите, что пересечение произвольного семейства существенных подмодулей модуля M является существенным подмодулем.

Модуль M называется *равномерным* (или *однородным*), если каждый ненулевой подмодуль модуля M существен в M. Модуль M называется *коравномерным* (или *полым*), если каждый собственный подмодуль модуля M мал в M. Если модуль является одновременно и раномерныи и коравномерным, то он называется *биоднородным.*

9.7. Пусть M – биоднородный модуль, $A \subset \mathrm{End}(M)$ – множество всех эндоморфизмов, которые не являются мономорфизмами и $B \subset \mathrm{End}(M)$ – множество всех эндоморфизмов, которые не являются эпиморфизмами. Покажите, что:

1) A, B – идеалы кольца R;

2) каждый собственный правый (или левый) идеал кольца $\mathrm{End}(M)$ содержится либо в идеале A, либо в идеале B.

Идеал I кольца R называется *t-нильпотентным справа*, если для каждого семейства $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ элементов идеала I существует такое натуральное число N, что $r_N \dots r_2 r_1 = 0$.

9.8. Покажите, что для идеала I кольца R следующие условия равносильны:

1) I – t-нильпотентный справа идеал;

2) для каждого ненулевого левого R-модуля M подмодуль $r_M(I)$ существен в M;

3) $r_M(I) \neq 0$ для каждого ненулевого левого R-модуля M;

4) $MI \ll M$ для каждого ненулевого правого R-модуля M;

5) $MI \neq M$ для каждого ненулевого правого R-модуля M;

6) $PI \ll P$ для каждого ненулевого проективного правого R-модуля P;

7) $FI \ll F$ для каждого счетно порожденного свободного правого R-модуля F.

9.9. Покажите, что если идеал I кольца R t - нильпотентен справа, то для любого конечного подмножества X идеала I существует такое натуральное число n, что $X^n = 0$

9.10. Пусть f, g – гомоморфизмы модуля M. Покажите, что если $fg = 1$, то следующие условия равносильны:

1) $gf = 1$;
2) $\mathrm{Im}(g) \leqslant^e M$;
3) $\mathrm{Ker}(f) \ll M$.

Дополнения

Пусть N – подмодуль модуля M. Подмодуль N' модуля M называется *дополнением по пересечению (сокращенно д.п.)* для N в M, если $N \cap N' = 0$ и N' – наибольший элемент в множестве всех подмодулей $L \subset M$, для которых выполнено равенство $N \cap L = 0$. При этом подмодуль N' называется *дополнением по пересечению* в модуле M.

9.11. Пусть N, N' – подмодули модуля M. Покажите, что N' является д.п. для N в M в точности тогда, когда $(N + N')/N'$ – существенный подмодуль модуля M/N' и $N \cap N' = 0$.

9.12. Покажите, что:

1) если S – простой подмодуль модуля M и S' – дополнение по пересечению для S в M, то M/S' – однородный модуль;

2) каждый ненулевой модуль содержит подмодуль, фактормодуль по которому обладает существенным простым подмодулем.

9.13. Пусть A, B – подмодули модуля M и $A \cap B = 0$. Покажите, что существует такой подмодуль C модуля M, что $B \subset C$ и C – д.п. для модуля A в модуле M.

9.14. Пусть B – д.п. для подмодуля A в модуле M. Покажите, что если:

1) N – подмодуль модуля M и $A \subset N$, то $B \cap N$ – д.п. для A в N;

2) A – простой подмодуль модуля M, то M/B – колокальный модуль.

Пусть N – подмодуль модуля M. Подмодуль N' модуля M называется *аддитивным дополнением (сокращенно а.д.)* для N в M, если $N + N' = M$ и N' – наименьший элемент в множестве всех подмодулей $L \subset M$, для которых выполнено равенство $N + L = M$. При этом подмодуль N' называется *аддитивным дополнением* в модуле M. Модуль M называется *дополняемым*, если каждый его подмодуль обладает а.д. дополнением в M. Если для каждых подмодулей A, B модуля M, для которых выполнено равенство $A + B = M$, существует а.д. дополнение C для A в M такое, что С $\subset B$, то модуль M называется *строго дополняемым.*

9.15. Пусть N, N' – подмодули модуля M. Покажите, что N' является а.д. для N в M в точности тогда, когда $N \cap N' \ll N'$ и $N + N' = M$.

9.16. Приведите пример модуля, который не является строго дополняемым.

9.17. Пусть M – конечно порожденный модуль. Покажите, что если M – дополняемый модуль, то модуль M содержит немалый локальный подмодуль.

9.18. Пусть B – а. д. для подмодуля A в модуле M. Покажите, что если:

1) $f : M \to N$ – эпиморфизм модулей и $\mathrm{Ker}(f) \subset A$, то $f(B)$ – а.д. для $f(A)$ в N;

2) модуль M конечно порожден, то B также конечно порожден;

3) A – максимальный подмодуль модуля M, то B – локальный модуль.

Говорят, что подмодуль N модуля M *лежит над прямым слагаемым* модуля M, если существуют такие подмодули N_1 и N_2 модуля M, что $N_1 \oplus N_2 = M$, $N_1 \subset N$ и $N_2 \cap N \ll N_2$.

9.19. Пусть A – подмодуль модуля M. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

1) A лежит над прямым слагаемым модуля M;

2) существует такое прямое слагаемое B модуля M, что $B \subset A, A/B \ll M/B$;

3) существует такое прямое слагаемое B модуля M, что $B \subset A$ и $A = B + \mathrm{C}$, где C – малый подмодуль модуля M;

4) существует такой идемпотент $e \in \mathrm{End}(M)$, что $e(M) \leqslant A, (1 - e)A \ll M$;

4) существует такое а.д. B для подмодуля A в модуле M, что $A \cap B$ – прямое слагаемое A.

Замкнутые и козамкнутые подмодули

Подмодуль N модуля M называется *замкнутым* в M, если N совпадает с любым подмодулем модуля M, являющимся существенным расширением N. Если $\overline{N}$ – замкнутый подмодуль в M и N – существенный подмодуль в $\overline{N}$, то $\overline{N}$ называется *замыканием* модуля N в M.

9.20. Покажите, что для каждого подмодуля N модуля M существует такой замкнутый подмодуль $\overline{N}$ в M, что $N \leqslant^e \overline{N}$.

9.21. Для подмодуля N модуля M следующие условия равносильны:

1) N – замкнутый подмодуль в M;

2) N – д.п. для некоторого подмодуля модуля M.

9.22. Пусть N – замкнутый подмодуль модуля M. Тогда

1) если N' – д.п. для N в M, то N – д.п. для N' в M;

2) если $N' \leqslant^e M$, то $(N' + N)/N \leqslant^e M/N$;

3) если $N_0 \leqslant N$, то N/N_0 – замкнутый подмодуль модуля M/N_0.

9.23. Покажите , что подмодуль N модуля M замкнут в M в точности тогда, когда для каждого существенного подмодуля X модуля M, для которого $N \leqslant X$, модуль X/N существен в M/N.

9.24. Пусть A, B – подмодули модуля M. Покажите, что если A замкнут в M и $B \leqslant^e M$, то $A \cap B$ замкнут в B.

9.25. Пусть A, B – подмодули модуля M и $A \subset B$. Покажите, что если A замкнут в B и B замкнут в M, то A замкнут в M.

9.26. Пусть $\{N_i\}_{i\in I}, \{M_i\}_{i\in I}$ – семейства правых R-модулей. Покажите, что если N_i – замкнутый подмодуль в M_i для каждого $i \in I$, то $\oplus_{i\in I} N_i$ – замкнутый подмодуль в $\oplus_{i\in I} M_i$.

Пусть M – модуль и $N \subset N'$ – подмодули модуля M. Включение $N \subset N'$ называется *комалым,* если для каждого подмодуля X модуля M верна импликация:

$$X + N' = M \Rightarrow X + N = M.$$

9.27. Пусть M – модуль, A, B – подмодули M и $A \subset B$. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $A \subset B$ – комалое включение;

2) $B/A \ll M/A$.

9.28. Пусть M – модуль, A, B, C – подмодули M и $A \subset B \subset C$. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $A \subset C$ – комалое включение;

2) включения $A \subset B, B \subset C$ являются комалыми.

9.29. Пусть M – модуль, A, B, C – подмодули M, $A \subset B$ и $A+C = M$. Покажите, что если $A \subset B$ – комалое включение, то $A \cap C \subset B \cap C$ – комалое включение.

9.30. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ – конезависимое множество подмодулей модуля M. Покажите, что если для множества подмодулей $\{B_i\}_{i\in I}$ модуля M имеет место комалое включение $B_i \subset A_i$ для каждого $i \in I$, то

1) $\{B_i\}_{i\in I}$ – конезависимое множество подмодулей;

2) $\bigcap_{i\in I} B_i \subset \bigcap_{i\in I} A_i$ – комалое включение.

Подмодуль N модуля M называется *козамкнутым* в M, если N совпадает с любым подмодулем N' модуля M, для которого включение $N' \subset N$ является комалым в M. Если $\overline{N}$ – козамкнутый подмодуль в M и включение $\overline{N} \subset N$ является комалым в M, то $\overline{N}$ называется *козамыканием* модуля N в M.

Равномерная и коравномерная размерности модулей

9.31. Пусть $\{M_1, \ldots, M_n\}$ – независимое множество равномерных подмодулей модуля M и $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \leqslant^e M$. Покажите, что для подмодуля N модуля M следующие условия равносильны:

1) $N \leqslant^e M$;
2) $N \cap M_i \neq 0$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$.

9.32. Пусть $\{M_1, \ldots, M_n\}$ – конезависимое множество подмодулей модуля M, $M_1 \cap \ldots \cap M_n \ll M$ и M/M_i – коравномерный модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажите, что для подмодуля N модуля M следующие условия равносильны:

1) $N \ll M$;
2) $N + M_i \neq M$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$.

9.33. Пусть $\{M_1, \ldots, M_n\}$ – независимое множество равномерных подмодулей модуля M и $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \leqslant^e M$. Покажите, что если $\{N_1, \ldots, N_k\}$ – независимое множество подмодулей модуля M, то $k \leqslant n$.

9.34. Пусть $\{M_1, \ldots, M_n\}$ – конезависимое множество подмодулей модуля M, $M_1 \cap \ldots \cap M_n \ll M$ и M/M_i – коравномерный модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажите, что если $\{N_1, \ldots, N_k\}$ – конезависимое множество подмодулей модуля M, то $k \leqslant n$.

Следующие два утверждения являются аналогами теоремы Штейница о замене из линейной алгебры.

9.35. Пусть $\{M_1, \ldots, M_n\}$ – независимое множество равномерных подмодулей модуля M и $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \leqslant^e M$. Покажите, что если $\{N_1, \ldots, N_k\}$ – независимое множество равномерных подмодулей модуля

M, то $k \leqslant n$ и существует такое подмножество $\{M_{i_1}, \ldots, M_{i_{n-k}}\}$ множества $\{M_1, \ldots, M_n\}$, что $\{N_1, \ldots, N_k, M_{i_1}, \ldots, M_{i_{n-k}}\}$ – независимое множество подмодулей и $N_1 \oplus \ldots \oplus N_k \oplus M_{i_1} \oplus \ldots \oplus M_{i_{n-k}} \leqslant^e M$.

9.36. Пусть $\{M_1, \ldots, M_n\}$ – конезависимое множество подмодулей модуля M, $M_1 \cap \ldots \cap M_n \ll M$ и M/M_i – коравномерный модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажите, что если $\{N_1, \ldots, N_k\}$ – конезависимое множество подмодулей модуля M и N/N_i – коравномерный модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$, то $k \leqslant n$ и существует такое подмножество $\{M_{i_1}, \ldots, M_{i_{n-k}}\}$ множества $\{M_1, \ldots, M_n\}$, что $\{N_1, \ldots, N_k, M_{i_1}, \ldots, M_{i_{n-k}}\}$ – конезависимое множество подмодулей и
$N_1 \cap \ldots \cap N_k \cap M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_{n-k}} \ll M$.

Если для модуля M существует множество подмодулей $\{M_1, \ldots, M_n\}$, удовлетворяющее условиям упражнения 9.35, то говорят, что модуль M имеет *равномерную размерность* (или *размерность Голди*) n и обозначается $u.dim(M) = n$. Из 9.35 следует, что число n не зависит от выбора множества подмодулей $\{M_1, \ldots, M_n\}$ модуля M, удовлетворяющее условиям 9.35.

Если для модуля M существует множество подмодулей $\{M_1, \ldots, M_n\}$, удовлетворяющее условиям упражнения 9.36, то говорят, что модуль M имеет *коравномерную размерность* (или *дуальную размерность Голди*) n и обозначается $h.dim(M) = n$. Из 9.36 следует, что число n не зависит от выбора множества подмодулей $\{M_1, \ldots, M_n\}$ модуля M, удовлетворяющее условиям 9.36.

9.37. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) модуль M не обладает бесконечным независимым множеством подмодулей;

2) для всякой возрастающей цепи

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$$

подмодулей модуля M существует такое число k, что $N_k \leqslant^e N_i$ для каждого $i \geqslant k$;

3) для всякой убывающей цепи

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$$

подмодулей модуля M существует такое число k, что $N_i \leqslant^e N_k$ для каждого $i \geqslant k$;

4) каждая возрастающая цепь

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$$

замкнутых подмодулей модуля M стабилизируется;

5) каждая убывающая цепь

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$$

замкнутых подмодулей модуля M стабилизируется;

6) $u.dim(M) = n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$;

7) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует существенный мономорфизм из прямой n однородных модулей в модуль M;

8) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует мономорфизм из прямой n ненулевых модулей в модуль M и не существует мономорфизма из прямой $n+1$ ненулевых модулей в модуль M.

9.38. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) модуль M не обладает бесконечным конезвисимым множеством подмодулей;

2) для всякой убывающей цепи

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$$

подмодулей модуля M существует такое число k, что включение $N_i \leqslant N_k$ является малым для каждого $i \geqslant k$;

3) $h.dim(M) = n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$;

4) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует малый эпиморфизм из модуля M в прямую n коoднородных модулей;

5) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует эпиморфизм из модуля M в прямую n ненулевых модулей и не существует эпиморфизма из модуля M в прямую $n+1$ ненулевых модулей.

10 Радикал Джекобсона и цоколь модуля, сингулярные и несингулярные модули

Цоколь колец и модулей

Цоколем модуля M называется сумма всех его простых подмодулей. Цоколь модуля M обозначается через $\mathrm{Soc}(M)$.

10.1. Пусть M – правый R- модуль. Тогда

1) $\mathrm{Soc}(\mathrm{Soc}(M)) = \mathrm{Soc}(M)$;

2) если $f : M \to N$ – гомоморфизм правых R-модулей, то $f(\mathrm{Soc}(N)) \leqslant \mathrm{Soc}(M)$;

3) если $f : M \to N$ – гомоморфизм правых R-модулей и $\mathrm{Im}(f) \leqslant^e N$, то $\overline{f}(\mathrm{Soc}(M/\operatorname{Ker}(f))) = \mathrm{Soc}(N)$, где $\overline{f} : M/\operatorname{Ker}(f) \to N$ – гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом f;

4) $\mathrm{Soc}(M)$ – вполне инвариантный подмодуль модуля M;

5) $\mathrm{Soc}(M) = \bigcap_{N \leqslant^e M} N$;

6) если $M = \oplus_{i \in I} M_i$, то $\mathrm{Soc}(M) = \oplus_{i \in I} \mathrm{Soc}(M_i)$;

7) если $N \leqslant M$, то $\mathrm{Soc}(N) = \mathrm{Soc}(M) \cap N$.

10.2. Пусть R – полупервичное кольцо. Покажите, что:

1) каждый конечно порожденный полупростой подмодуль модуля R_R является прямым слагаемым R_R;

2) $\mathrm{Soc}(R_R) = \mathrm{Soc}({}_R R)$;

3) для каждого элемента $a \in \mathrm{Soc}(R_R)$ существует такой элемент $b \in \mathrm{Soc}(R_R)$, что $a = aba$;

4) если $\mathrm{Soc}(R_R)$ – существенный правый идеал и R – I-конечное кольцо, то R – классически полупростое кольцо.

Радикал Джекобсона модуля

Радикалом Джекобсона модуля M называется пересечение всех его максимальных подмодулей. Радикал Джекобсона модуля M обозначается через $J(M)$.

10.3. Пусть M – правый R-модуль. Тогда

1) $J(M/J(M)) = 0$;

2) если $f : M \to N$ – гомоморфизм правых R-модулей, то $f(J(M)) \leqslant J(N)$;

3) если $f : M \to N$ – гомоморфизм правых R-модулей и $\mathrm{Ker}(f) \leqslant J(M)$, то $f(J(M)) = J(f(M))$;

4) $J(M)$ – вполне инвариантный подмодуль модуля M;

5) $J(M) = \sum_{N \ll M} N$;

6) если $M = \oplus_{i \in I} M_i$, то $J(M) = \oplus_{i \in I} J(M_i)$;

7) если N – замкнутый подмодуль модуля M, то $J(N) = J(M) \cap N$;

8) $\mathrm{Soc}(J(M)) \ll M$.

10.4. Покажите, что если каждый ненулевой фактормодуль модуля M содержит максимальный подмодуль, то $J(M) \ll M$.

10.5. Покажите, что если M – конечно порожденный модуль, то $J(M) \ll M$.

10.6. Пусть $(M_i)_{i \in I}$ – семейство правых R-модулей. Покажите, что

$$J(\prod_{i \in I} M_i) \subset \prod_{i \in I} J(M_i)$$

10.7. Пусть R – квазиинвариантное справа кольцо. Покажите, что для правого R-модуля M имеет место равенство

$$J(M) = \bigcap_{A-\text{максимальный идеал } R} MA.$$

Докажите аналогичное равенство в случае, когда R – конечное кольцо.

10.8. Пусть P – проективный правый R-модуль. Тогда

1) $J(P) = PJ(R)$;

2) $J(P) \neq P$;

3) $J(\mathrm{End}_R(P)) = \{f \in \mathrm{End}_R(P) \mid \mathrm{Im}(f) \ll P\}$.

Бесконечное семейство $(A_\alpha)_{i\in I}$ правых идеалов кольца R называется *обнуляемым слева,* если для каждой последовательности $(a_{i_k})_{k=1}^{\infty}$, у которой $a_{i_k} \in A_{i_k}$ и индексы $i_1, i_2, \ldots$ попарно различны, существует такой число $N \in \mathbb{N}$, что $a_{i_N} \ldots a_{i_1} = 0$.

10.9. Пусть R – кольцо, I – бесконечное множество и $A \in \mathrm{CFM}_I(R)$. Тогда $A \in J(\mathrm{CFM}_I(R))$ в точности тогда, когда семейство правых идеалов

$$A_i = \{\sum_{j\in I} A_{ij} r_j \mid r_j \in R, r_j = 0 \quad \text{для почти всех } j \in I\}(i \in I)$$

обнуляемо слева.

Лемма Накаямы и ее приложения

10.10. (**Лемма Накаямы**) Если M – ненулевой конечно порожденный правый R-модуль, то $MJ(R) \neq M$.

10.11. Пусть M – конечно порожденный модуль над коммутативным кольцом R, I – идеал R, для которого выполнено равенство $MI = M$. Докажите, что:

1) существует элемент $r \in R$, для которого выполнены условия$Mr = 0, 1 - r \in I$;

2) если M – точный модуль, то $I = R$.

10.12. Пусть M – конечно порожденный модуль над коммутативным кольцом R. Покажите, что если $f \in \mathrm{End}_R(M)$ – эпиморфизм, то f – изоморфизм.

10.13. Пусть S – подкольцо кольца R и R как правый S-модуль обладает конечным семейством порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которого выполнено условие $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset C(S)$. Покажите, что:

1) если M – ненулевой конечно порожденный правый R-модуль, то $MJ(S) \neq M$;

2) если M – простой правый R-модуль, то $MJ(S) = 0$;

3) $J(S) \subset J(R)$.

10.14. Пусть A – коммутативная область, R – подкольцо кольца A и для некоторого элемента $a \in A$ выполнено равенство $A = R[a]$. Покажите, что если:

1) для многочлена $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i a_i \in R[x] (a_n \neq 0)$ выполнено равенство $f(a) = 0$ и $a_n \notin I$, где I – максимальный идеал кольца R, то $AI \neq A$;

2) $J(R) = 0$, то $J(A) = 0$;

3) $J(R) = 0$ и A – поле, то R также является полем.

10.15. Пусть A – коммутативная область и R – подкольцо кольца A. Покажите, что если A как алгебра над R конечно порождена и $J(R) = 0$, то $J(A) = 0$.

10.16. Пусть A – поле и R – полупримитивное подкольцо поля A. Покажите, что если A как алгебра над R конечно порождена, то R – поле и расширение полей $R \subset A$ является конечным. В частности, всякая коммутативная конечно порожденная алгебра с делением над полем является конечномерной.

10.17. Пусть A – коммутативная конечно порожденная алгебра над полем P. Тогда имеет место равенство $\sqrt{A} = J(A)$.

10.18 (Слабая теорема о нулях). Пусть P – алгебраически замкнутое поле. Покажите, что:

1) I – максимальный идеал алгебры $P[x_1, \ldots, x_n]$ в точности тогда, когда идеал I имеет вид $I = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, где $a_1, \ldots, a_n \in P$;

2) если I – собственный идеал алгебры $P[x_1, \ldots, x_n]$, то

$$\{a \in P^n \mid \forall f \in I : f(a) = 0\} \neq \emptyset.$$

10.19 (Теорема Гильберта о нулях). Пусть P – алгебраически замкнутое поле и $f, f_1, \ldots, f_n \in P[x_1, \ldots, x_n]$. Если для многочлена f выполнено условие

$$\forall a \in P^n : f_1(a) = 0, \ldots, f_n(a) = 0 \Rightarrow f(a) = 0,$$

то для существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $f^m \in (f_1, \ldots, f_n)$.

Сингулярные и несингулярные модули

Пусть M – правый R-модуль. Правый R-модуль N называется *M-сингулярным,* если $N \cong A/B, A \leqslant^e B$ для некоторых модулей $A, B \in \sigma(M)$.

10.20. Покажите, что если модуль N является M-сингулярным, то каждый модуль из категории $\sigma(N)$ также является M-сингулярным.

Из предыдущего упражнения следует, что для произвольных правых R-модулей M и N модуль N обладает наибольшим M-сингулярным подмодулем. Этот подмодуль обозначается через $Z_M(N)$. Если $M = R_R$, то подмодуль $Z_M(N)$ обозначается через $Z(N)$. Ясно, что $Z_M(N)$ – вполне инвариантный подмодуль модуля N. Модуль M называется *сингулярным*, если $M = Z(M)$.

10.21. Покажите, что для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – сингулярный модуль;

2) имеет место изоморфизм $M \cong A/B$, где A – правый R-модуль и $B \leqslant^e A$;

3) имеет место изоморфизм $M \cong A/B$, где A – свободный правый R-модуль и $B \leqslant^e A$;

4) $r(m) \leqslant^e R_R$ для каждого $m \in M$.

10.22. Покажите, что для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) $Z(M) = 0$;

2) для каждого правого R-модуля N и каждого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ $\mathrm{Ker}(f)$ – замкнутый подмодуль модуля N;

3) для каждого правого R-модуля N и каждого ненулевого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ $\mathrm{Ker}(f)$ – несущественный подмодуль модуля N;

4) $\mathrm{Hom}_R(A, M) = 0$ для каждого сингулярного правого R-модуля A.

Правый R-модуль M называется *несингулярным,* если он удовлетворяет одному из эквивалентных условий упражнения 10.22.

10.23. 1) Покажите, что класс всех несингулярных правых R-модулей замкнут относительно прямых произведений, подмодулей и существенных расширений.

2) Покажите, что если в точной последовательности правых R-модулей

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

модули A, C несингулярны, то B – несингулярный модуль.

Для кольца R подмодуль $Z(R_R)$ модуля R_R обозначается через $Z_r(R)$. Ясно, что $Z_r(R)$ – идеал кольца R. Кольцо R называется *несингулярным справа,* если $Z_r(R) = 0$.

10.24. Пусть R – несингулярное справа кольцо. Покажите, что:

1) $R[x_1, \ldots, x_n]$ – несингулярное справа кольцо;

2) $M_n(R)$ – несингулярное справа кольцо для каждого $n \in \mathbb{N}$.

10.25. Пусть R – несингулярное справа кольцо. Покажите, что:

1) правый R-модуль M сингулярен в точночти тогда, когда $\mathrm{Hom}_R(M, A) = 0$ для каждого несингулярного правого R-модуля A;

2) класс всех сингулярных правых R-модулей замкнут относительно существенных расширений;

3) если в точной последовательности правых R-модулей

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

модули A, C сингулярны, то B – сингулярный модуль.

10.26. Покажите, что для полупростого модуля M следующие условия равносильны:

1) M – несингулярный модуль;

2) M – проективный модуль.

10.27. Пусть M – правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Покажите, что если:

1) в модуле M каждая возрастающих цепь подмодулей, являющихся правыми аннуляторами подмножеств в S стабилизируется, то $\triangle(S)$ – нильпотентный идеал;

2) в модуле M каждая возрастающих цепь подмодулей, являющихся ядрами эндоморфизмов модуля M стабилизируется, то $\triangle(S)$ – ниль-идеал.

3) модуль M локально нетеров, то $\triangle(S) \subset J(S)$.

10.28. Пусть M – правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Покажите, что если:

1) в модуле M каждая убывающая цепь подмодулей, порожденных модулем M стабилизируется, то $\nabla(S)$ – нильпотентный идеал;

2) в модуле M каждая убывающая цепь подмодулей, являющихся образами эндоморфизмов модуля M стабилизируется, то $\nabla(S)$ – ниль-идеал.

11 Полупростые и кополупростые модули

Полупростые модули и классически полупростые кольца

Модуль M называется *полупростым*, если M – сумма простых подмодулей.

11.1. Для модуля M равносильны условия:

1) M – полупростой модуль;

2) M – прямая сумма простых модулей;

3) M – гомоморфный образ суммы простых модулей;

4) M не имеет собственных существенных подмодулей;

5) каждый ненулевой фактормодуль модуля M обладает максимальным подмодулем и M не имеет существенных максимальных подмодулей;

6) $M = \mathrm{Soc}(M)$;

7) в модуле M каждый подмодуль является прямым слагаемым;

8) каждый модуль в $\sigma(M)$ является полупростым;

9) $\mathrm{Soc}(M) \leqslant^e M$, $J(M) = 0$ и $\mathrm{Soc}(mR)$ – модуль конечной длины для каждого $m \in M$.

11.2. Пусть $R = M_n(T)$ – кольцо матриц над телом T. Покажите, что R_R – полупростой правый R-модуль и если S_1, S_2 – простые подмодули модуля M, то $S_1 \cong S_2$.

11.3. Пусть A, B – матрицы над полем P размеров m на n и s на n соответсвенно и $R = M_n(P)$. Покажите, что циклические правые R-модули AR и BR изоморфны в точности тогда, когда $rk(A) = rk(B)$.

11.4. Пусть A, B – ненулевые матрицы над полем P размеров m на n, $R = M_n(P)$ и $S = M_m(P)$. Покажите, что каждый S-R-бимодуль изоморфен некоторой прямой сумме бимодуля SAR и выполнено равенство $SAR = SBR$.

11.5. Для кольца R равносильны условия:

1) R_R – полупростой правый R-модуль;

2) ${}_RR$ – полупростой левый R-модуль;

3) кольцо R изоморфно конечной прямой сумме полных матричных колец конечных размеров над телами;

4) над кольцом R каждый правый модуль является полупростым;

5) над кольцом R каждый левый модуль является полупростым;

6) в правом R-модуле R_R каждый существенный подмодуль совпадает с R;

7) над кольцом R каждый простой правый модуль является несингулярным;

8) в правом R-модуле R_R каждый максимальный подмодуль является прямым слагаемым;

9) над кольцом R каждый правый модуль является SIP-модулем;

10) над кольцом R каждый правый модуль является SSP-модулем;

11) над кольцом R каждый проективный правый модуль является SSP-модулем;

12) над кольцом R каждый инъективный правый модуль является SIP-модулем;

13) над кольцом R каждый правый модуль является $C3$-модулем;

14) над кольцом R каждый правый модуль является $D3$-модулем;

15) над кольцом R каждый простой правый модуль является проективным;

16) над кольцом R каждый циклический правый модуль является проективным;

17) над кольцом R каждый правый модуль является инъективным.

Кольцо, удовлетворяющее эквивалентным условия предыдущего упражнения, называется *классически полупростым.*

11.6. Покажите, что для кольца R равносильны условия:

1) кольцо R изоморфно конечной прямой сумме тел;

2) R – редуцированное классически полупростое кольцо;

3) R – нормальное классически полупростое кольцо;

4) R – инвариантное справа классически полупростое кольцо;

5) R – квазиинвариантное справа классически полупростое кольцо;

11.7. Покажите, что если M – полупростой конечно порожденный правый R-модуль, то $\mathrm{End}_R(M)$ – классически полупростое кольцо.

11.8. Покажите, что для полупростого правого R-модуля M следующие условия равносильны условия:

1) M – дистрибутивный модуль;

2) $\mathrm{End}_R(M)$ – прямое произведение тел;

3) M – прямая сумма попарно неизоморфных простых модулей.

11.9. Пусть M – полупростой правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Тогда левый S-модуль M является полупростым дистрибутивным модулем.

11.10. Пусть M – правый R-модуль. Покажите, что каждый собственный подмодуль модуля M является полупростым в точности тогда, когда либо M – полупростой модуль, либо $\mathrm{Soc}(M)$ – наибольший собственный подмодуль модуля M.

11.11. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны условия:

1) R – квазиинвариантное справа кольцо;

2) каждый циклический подмодуль всякого однородного полупростого правого R-модуля, является простым;

3) каждый циклический подмодуль всякого однородного полупростого правого R-модуля длины два, является простым.

11.12. 1) Пусть N – конечно порожденный полупростой подмодуль модуля M. Если $N \cap J(M) = 0$, то N – прямое слагаемое модуля M.

2) Пусть N – конечная прямая сумма немалых простых подмодулей модуля M. Приведите пример, когда N не является прямым слагаемым модуля M.

11.13. Покажите, что для ненулевого кольца R следующие условия равносильны:

1) $R \cong M_n(T)$, где T – тело;

2) R – простое кольцо, которое содержит минимальный правый идеал;

3) каждый конечно порожденный правый R-модуль является модулем конечной длины и для всяких конечно порожденных правых R-модулей M и N выполнена эквивалентность

$$M \cong N \Leftrightarrow \lg(M) = \lg(N).$$

11.14. Пусть R – классически полупростое кольцо. Покажите, что если M, N – конечно порожденные правые R-модули, то $M \cong N$ в точности тогда, когда для каждого примитивного центрального идемпотента e кольца R выполнено равенство: $\lg(Me) = \lg(Ne)$.

Пусть M – абелева группа, R – кольцо и $\phi : R \to \mathrm{End}(M)$ – гомоморфизм колец. Операция

$$rm = \phi(r)(m)(r \in R, m \in M)$$

превращает M в левый R-модуль. Этот модуль обозначается через ${}_{\phi}M$.

11.15. Пусть A – классически полупростая алгебра над полем P характеристики нуль, V, W – конечномерные векторные пространства над полем P и $\phi_1 : A \to \mathrm{End}_P(V), \phi_1 : A \to \mathrm{End}_P(W)$ – гомоморфизмы P-алгебр. Покажите, что ${}_{\phi_1}V \cong_{\phi_2} W$ в точности тогда, когда для каждого $a \in A$ выполнено равенство $\mathrm{tr}(\phi_1(a)) = \mathrm{tr}(\phi_2(a))$.

11.16 (**Теорема Сколема-Нетера**). Пусть P – поле. Покажите, что если $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – изоморфизм простых подалгебр алгебры $M_n(P)$, то существует такая обратимая матрица $A \in M_n(P)$, что $A^{-1}aA = \phi(a)$ для каждого $a \in \mathcal{A}$. В частности, всякий автоморфизм алгебры $M_n(P)$ является внутренним.

11.17. Пусть R – кольцо, G – группа и H – подгруппа в G. Правый идеал ωH кольца RG – прямое слагаемое кольца $RG_{RG} \Leftrightarrow |H| = n < \infty$ и $n^{-1} \in R$.

11.18. Пусть R – кольцо, G – группа, M – правый RG-модуль и H – нормальная подгруппа в G такого конечного индекса n, что $n^{-1} \in A$. Покажите, что:

1) если X – правый RG-модуль и $f \colon M \to X$ – гомоморфизм правых RH-модулей, то f – гомоморфизм правых RG-модулей;

2) если N_{RG} – подмодуль модуля M_{RG} и N_{RH} – прямое слагаемое модуля M_{RH}, то N_{RG} – прямое слагаемое в M_{RG};

3) M – полупростой правый RG-модуль $\Leftrightarrow$ M – полупростой правый RH-модуль;

4) кольцо RG полупросто $\Leftrightarrow$ кольцо RH полупросто.

11.19. Для кольца R и группы G равносильны условия:

1) RG – полупростое кольцо;

2) R – полупростое кольцо и ωG – прямое слагаемое модуля RG_{RG};

3) R – полупростое кольцо, G – конечная группа порядка n и $n^{-1} \in R$.

Теорема плотности и ее приложения

11.20 (**Теорема плотности**). Пусть M – полупростой правый R-модуль и $\beta \in \mathrm{Biend}_R(M)$. Тогда для любого конечного семейства элементов $x_1, x_2, \ldots x_n$ из M существует элемент $r \in R$ такой, что $x_1\beta = x_1 r, x_2\beta = x_2 r, \ldots x_n\beta = x_1 r$.

11.21 (**Теорема Бернсайда**). Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F и A – подалгебра алгебры $\mathrm{End}_F(V)$. Покажите, что если V не содержит подпространств инвариантных относительно A, отличных от 0 и V, то $A = \mathrm{End}_F(V)$.

11.22. Пусть A – алгебра над полем P, M – простой правый A – модуль и $\dim_P(M) < \infty$. Покажите, что $\mathrm{End}_A(M) = P$ в точности тогда, когда отображение $\phi : A \to \mathrm{End}_P(M)$, действующее по правилу $a \mapsto (v \mapsto av)$, является сюръективным.

11.23. Пусть V – векторное пространство размерности n над алгебраически замкнутым полем F и G – конечная группа обратимых линейных операторов, действующих на V. Покажите, что V не содержит подпространств инвариантных относительно G, отличных от 0 и V, в точности тогда, когда G содержит n^2 линейно независимых линейных операторов.

11.24. Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F и $\mathcal{A} = \mathrm{End}_F(V)$. Покажите, что подалгебра $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{A}$ триангулизуема в точности тогда, когда каждый элемент из $[\mathcal{B}, \mathcal{B}]$ нильпотентен.

11.25. Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F. Покажите, что линейные операторы $A, B \in \mathrm{End}_F(V)$ одновременно триангулизуемы в точности тогда, когда каждая матрица вида $f(A, B)[A, B]$, где $f(x, y)$ – многочлен от некоммутирующих переменных x и y, является нильпотентной.

11.26. Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F. Покажите, что в каждом из следующих случаев линейные операторы $A, B \in \mathrm{End}_F(V)$ одновременно триангулизуемы:

1) $A[A, B] = [A, B]B = 0$;

2) $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ и $F = \mathbb{C}$;

3) $AB = 0$;

4) $[A,B]A = [A,B]B = 0$.

11.27. Пусть R примитивное справа кольцо. Покажите, что для некоторого тела T либо R изоморфно кольцу матриц $M_n(T)$, где $n \in \mathbb{N}$, либо для каждого натурального числа n существует подкольцо R_n кольца R, которое гомоморфно отображается на кольцо $M_n(T)$.

11.28. Пусть для каждого элемента r кольца R существует натуральное число $n > 1$ такое, что $x^n = x$. Покажите, что R – коммутативное кольцо.

11.29. Пусть R – полупримитивное кольцо, для которого выполнено условие $[R, R] \subset C(R)$. Покажите, что R – коммутативное кольцо.

11.30. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) $R/J(R)$ – коммутативное кольцо;

2) множество $U(M_2(R))$ замкнуто относительно операции транспонирования;

3) множество $U(M_n(R))$ замкнуто относительно операции транспонирования для любого $n > 1$

V-кольца и модули

Модуль M называется *V-модулем (или кополупростым),* если каждый его подмодуль является пересечением максимальных подмодулей.

11.31. Для модуля M равносильны условия:

1) M – V-модуль;

2) категория $\sigma(M)$ обладает полупростым копорождающим;

3) категория $\sigma(M)$ обладает копорождающим N, у которого $J(N) = 0$;

4) для каждого модуля $N \in \sigma(M)$ имеет место равенство $J(N) = 0$;

5) для каждого фактормодуля N модуля M имеет место равенство $J(N) = 0$;

6) каждый простой подмодуль произвольного модуля $N \in \sigma(M)$ является замкнутым в N;

7) каждый конечно копорожденный модуль в $\sigma(M)$ является полупростым;

8) каждый конечно копорожденный фактормодуль модуля M является полупростым;

9) каждый модуль в $\sigma(M)$ является V-модулем.

11.32. Пусть $(M_i)_{i \in I}$ – семейство правых R-модулей. Покажите, что если для каждого $i \in I$ модуль M_i является V-модулем, то $\bigoplus_{i \in I} M_i$ – V-модуль.

11.33. Пусть M – правый R-модуль. Покажите, что для каждого ненулевого подмодуля N модуля M фактормодуль M/N является V-модулем в точности тогда, когда либо M – V-модуль, либо $J(M)$ – наименьший ненулевой подмодуль модуля M.

11.34. Для кольца R равносильны условия:

1) правый R-модуль R_R является V-модулем;

2) каждый правый идеал кольца R является пересечением максимальных правых идеалов;

3) для каждого правого R-модуля M выполнено равенство $J(M) = 0$;

4) каждый правый R-модуль является V-модулем.

Кольцо R, удовлетворяющее эквивалентным условия предыдущего упражнения, называется *правым V-кольцом.*

Модуль M называется *π-проективным,* если для каждых его подмодулей M_1 и M_2 верна импликация:

$$M_1 + M_2 = M \Rightarrow \mathrm{Hom}(M, M_1) + \mathrm{Hom}(M, M_2) = \mathrm{End}(M).$$

Несложно заметить, что прямое слагаемое π-проективного модуля является π-проективным модулем и всякий свободный модуль π-проективен.

11.35. Пусть P – π-проективный правый R – модуль и N – его инвариантный подмодуль. Тогда для модуля P следующие условия равносильны:

1) P – V-модуль;
2) P/N – V-модуль, N – V-модуль и каждый максимальный подмодуль правого R – модуля N является пересечением максимальных подмодулей модуля P.

В частности, если I – идеал кольца R, то R – правое V-кольцо в точности тогда, когда R/I – правое V-кольцо, I_R – V-модуль и каждый максимальный подмодуль правого R-модуля I_R является пересечением максимальных правых идеалов кольца R.

11.36. Пусть M – правый R-модуль и для каждого подмодуля N модуля M имеет место равенство $N = \operatorname{Hom}(M, N)N$. Тогда следующие условия равносильны:

1) M – V-модуль;
2) для каждого примитивного справа идеала I кольца R модуль M/MI является V-модулем.

11.37. Если модуль M является π-проективным и N – подмодуль модуля M, то $N/\operatorname{Hom}(M, N)N \ll M/\operatorname{Hom}(M, N)N$.

Модуль M называется *кополиформным*, если $\operatorname{Hom}(M, N/L) = 0$, где $N \ll M$ и $L \subset N$. Если каждый фактормодуль модуля M является кополиформным, то модуль M называется *строго кополиформным*. Кольцо R называется строго кополиформным справа, если модуль R_R строго кополиформен. Ясно, что всякий V-модуль является строго кополиформным.

11.38. Каждое ли строго кополиформное справа кольцо, является правым V-кольцом?

11.39. Пусть P – π-проективный строго кополиформный модуль. Если P порождает каждый свой подмодуль, то для каждого подмодуля N модуля P имеет место равенство $N = \operatorname{Hom}(P, N)N$.

Кольцо R называется *слабо регулярным справа,* если для каждого его правого идеала I выполнено равенство $I^2 = I$.

11.40. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое V-кольцо;

2) R – слабо регулярное справа кольцо и каждое примитивное справа факторкольцо кольца R является V – кольцом.

12 Локальные и полулокальные кольца

Модуль M называется *локальным*, если M – ненулевой циклический модуль и фактормодуль $M/J(M)$ прост. Кольцо R называется *локальным*, если $R/J(R)$ – тело.

12.1. Для модуля M равносильны условия:

1) M – локальный модуль;

2) $M/J(M)$ – простой модуль и $J(M)$ – малый подмодуль в M;

3) M – конечно порожденный модуль и каждый его собственный подмодуль мал в M;

4) M – конечно порожденный модуль, обладающий ровно одним максимальным подмодулем;

5) $M \neq J(M)$ и M совпадает с каждым своим подмодулем, не содержащимся в $J(M)$;

6) $M \neq J(M)$ и M – неразложимый I_0-модуль.

12.2. Для кольца R равносильны условия:

1) R – локальное кольцо;

2) R_R – локальный модуль;

3) ${}_RR$ – локальный модуль;

4) $R = rR$ для каждого $r \in R \setminus J(R)$;

5) $R = Rr$ для каждого $r \in R \setminus J(R)$;

6) каждый элемент $r \in R \setminus J(R)$ обратим в R;

7) $J(R)$ совпадает с множеством всех необратимых элементов кольца R;

8) для любых таких $s, t \in R$, что $s+t=1$, хотя бы один из элементов s, t обратим в R;

9) для любых таких $s, t \in R$, что $s+t=1$, хотя бы один из элементов s и t обратим справа в R.

Идемпотент e кольца R называется *локальным*, если eRe – локальное кольцо.

12.3. Покажите, что для идемпотента e кольца R следующие условия равносильны:

1) e – локальный идемпотент;

2) eR – локальный правый R-модуль;

3) eR – локальный левый R-модуль.

Пусть R – кольцо. Правый R-модуль M называется *полулокальным*, если $M/J(M)$ – полупростой модуль. Кольцо R называется *полулокальным*, если факторкольцо $R/J(R)$ полупросто. Ясно, что кольцо R является полулокальным в точности тогда, когда R_R – полулокальный модуль.

12.4. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – полулокальный модуль;

2) для каждого подмодуля A модуля M существует такой подмодуль $B \leqslant M$, что $A+B=M$ и $A \cap B \leqslant J(M)$.

3) в категории $\mathrm{Gen}(M)$ каждый модуль является полулокальным.

12.5. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – полулокальное кольцо;

2) над кольцом R каждый правый R-модуль является полулокальным.

12.6. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – полулокальное кольцо;

2) для каждого семейства $\{M_i\}_{i\in I}$ правых R-модулей выполнено равенство

$$\mathrm{Soc}(\prod_{i\in I} M_i) = \prod_{i\in I}\mathrm{Soc}(M_i);$$

3) всякое прямое произведение полупростых правых R-модулей является полупростым модулем.

12.7. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) $R/J(R)$ – правое V-кольцо;

2) для каждого правого R-модуля M выполнено равенство $J(M) = MJ(R)$;

3) над кольцом R всякое прямое произведение V-модулей является V-модулем.

12.8. Пусть R – полулокальное кольцо и $J(R)^2 \neq J(R)$. Покажите, что для простого правого R-модуля S следующие условия равносильны:

1) S – изоморфен подмодулю правого R-модуля $J(R)/J(R)^2$;

2) для некоторого правого R-модуля M существует мономорфизм $\phi : S \to J(M)$;

3) существует однородный непростой правый R-модуль, у которого цоколь изоморфен S.

Кольцо R называется *полупримарным*, если факторкольцо $R/J(R)$ полупросто и идеал $J(R)$ нильпотентен. Кольцо R называется *полусовершенным*, если $R/J(R)$ – полупростое кольцо и каждый его идемпотент поднимается до идемпотента кольца R. Ясно, что всякое полупримарное кольцо является полусовершенным.

12.9. Покажите, что радикал Джекобсона полулокального кольца совпадает с пересечением всех его максимальных идеалов.

12.10. Покажите, что для полусовершенного кольца R следующие условия равносильны:

1) R – конечное прямое произведение локальных колец;

2) каждый идемпотент из кольца R является центральным;

3) всякий идемпотент из кольца R коммутирует с каждым элементом, у которого квадрат равен нулю.

12.11. Пусть R – полусовершенное кольцо, для которого выполнена импликация:

$$\forall r \in R : r^2 = 0 \Rightarrow r \in J(R).$$

Покажите, что $R/J(R)$ – конечное прямое произведение тел.

12.12. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – полусовершенное кольца;

2) $1 = e_1 + \ldots + e_n$, где e_i – локальные ортогональные идемпотенты кольца R.

12.13. Приведите пример полулокального, но неполусовершенного кольца.

12.14. Пусть $1 = e_1 + \ldots + e_n = f_1 + \ldots + f_m$, где $e_1, \ldots, e_n$; $f_1, \ldots, f_m$ – ортогональные системы локальных идемпотентов из полусовершенного кольца R. Тогда $n = m$ и существует такой обратимый элемент u, что для некоторой перестановки $\pi \in S_n$ имеем $f_i = u^{-1} e_{\pi(i)} u$, где $i = 1, \ldots, n$.

12.15. Пусть R – полусовершенное кольцо и A, B – идеалы кольца R. Покажите, что если всякий идемпотент из кольца R коммутирует с каждым элементом, квадрат которого равен нулю, и $A + B = R$, то $AB = BA$.

12.16. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – полулокальное кольцо и $J(R)$ – t-нильпотентный слева идеал;

2) R – полулокальное кольцо и каждый ненулевой правый R-модуль содержит простой подмодуль;

3) R – полулокальное кольцо и каждый ненулевой левый R-модуль содержит максимальный подмодуль;

4) R – полулокальное кольцо и для каждого правого R-модуля M выполнено условие $\mathrm{Soc}(M) \leqslant^e M$;

5) R – полулокальное кольцо для каждого левого R-модуля M выполнено условие $J(M) \ll M$.

Кольцо R, удовлетворяющее одному из условий предыдущего упражнения, называется *совершенным слева кольцом.* Ясно, что всякое совершеное слева кольцо является полусовершенным.

12.17. Пусть P_1, P_2 – проективные правые R-модули.

Тогда

1) если $K_1 \ll P_1, K_2 \ll P_2$ и $P_1/K_1 \cong P_2/K_2$, то $P_1 \cong P_2$;

2) если P_2 – конечно порожденный модуль и $P_1/J(P_1) \cong P_2/J(P_2)$, то $P_1 \cong P_2$.

Эпиморфизм $f : P \to M$ правых R-модулей называется *проективной оболочкой* модуля M, если P – проективный модуль и $\mathrm{Ker}(f) \ll P$. Из предыдущего упражнения следует, что если $f : P_1 \to M, f : P_2 \to M$ – проективные оболочки модуля M, то $P_1 \cong P_2$.

12.18. Покажите, что если каждый фактормодуль модуля M обладает проективной оболочкой, то M – строго дополняемый модуль

12.19. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – совершенное справа кольцо;

2) $R_R^{(\mathbb{N})}$ – слабо дополняемый модуль;

3) каждый проективный (свободный) правый R-модуль является слабо дополняемым;

4) каждый проективный (свободный) правый R-модуль является дополняемым;

5) каждый проективный (свободный) правый R-модуль является строго дополняемым;

6) каждый правый R-модуль является дополняемым;

7) каждый правый R-модуль является строго дополняемым;

8) каждый правый R-модуль обладает проективной оболочкой;

9) каждый полупростой правый R-модуль обладает проективной оболочкой.

12.20. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – полусовершенное кольцо кольцо;

2) каждый конечно порожденный проективный (свободный) правый R-модуль является дополняемым;

3) каждый конечно порожденный проективный (свободный) правый R-модуль является строго дополняемым;

4) каждый конечно порожденный правый R-модуль является дополняемым;

5) каждый конечно порожденный правый R-модуль является строго дополняемым;

6) каждый конечно порожденный правый R-модуль обладает проективной оболочкой;

7) каждый простой правый R-модуль обладает проективной оболочкой.

13 Артиновы и нетеровы модули. Полуартиновы и полунетеровы модули

Артиновы и нетеровы модули

Модуль M называется *артиновым* (соотв., *нётеровым*), если решетка $\mathrm{Lat}(M)$ – артиново (соотв., *нётерово*) частично упорядоченное множество; это означает, что M не имеет бесконечных строго убывающих (соотв., строго возрастающих) цепей подмодулей.

13.1. Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – нетеров модуль;

2) существует такой подмодуль N модуля M, что N и M/N – нетеровы модули;

3) M – конечная сумма нетеровых подмодулей;

4) существует такая цепь

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

подмодулей в M, что все модули M_i/M_{i-1} нетеровы;

5) для каждого множества подмодулей $\{M_i\}_{i \in I}$ модуля M существует такое конечное подмножество $I' \subset I$, что

$$\sum_{i \in I} M_i = \sum_{i \in I'} M_i;$$

6) каждый подмодуль модуля M конечно порожден;

7) каждый существенный подмодуль модуля M конечно порожден.

13.2. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) $M/\operatorname{Soc}(M)$ – нетеров модуль;

2) M не имеет строго возрастающих цепей существенных подмодулей.

13.3. Для модуля M равносильны условия:

1) M – артинов модуль;

2) существует такой подмодуль N модуля M, что N и M/N – артиновы модули;

3) M – конечная сумма артиновых подмодулей;

4) существует такая цепь

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

подмодулей в M, что все модули M_i/M_{i-1} артиновы;

5) для каждого множества подмодулей $\{M_i\}_{i\in I}$ модуля M существует такое конечное подмножество $I' \subset I$, что

$$\bigcap_{i\in I} M_i = \bigcap_{i\in I'} M_i;$$

6) каждый фактормодуль модуля M конечно копорожден;

7) M – слабо дополняемый модуль и для каждого малого подмодуля N модуля M фактормодуль M/N конечно копорожден;

8) каждый фактормодуль модуля M является существенным расширением конечно порожденного полупростого модуля.

13.4. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – полупростой модуль;

2) M – артинов модуль и $J(M) = 0$.

Модуль M называется *локально артиновым* (соотв., *нетеровым*), если каждый его конечно порожденный модуль – артиновый модуль (соотв., нетеровый модуль).

13.5. Пусть R – правое V-кольцо. Покажите, что для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – полупростой модуль;

2) M – локально артиновый модуль.

13.6. Пусть M – правый R-модуль, I – идеал кольца $S = \mathrm{End}_R(M)$, который конечно порожден как правый S-модуль. Покажите, что если модуль IM/I^2M артинов (нетеров), то для каждого $n \in \mathbb{N}$ модуль $I^nM/I^{n+1}M$ является артиновым (нетеровым).

Модули конечной длины

Модуль M называется *модулем конечной длины*, если либо $M = 0$, либо в M существует такая цепь $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ подмодулей, что все модули M_i/M_{i-1} просты.

13.7. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) M – модуль конечной длины;

2) M – нетеров и артинов модуль;

3) M – конечно порожденный модуль и каждый конечно порожденный модуль из категории $\sigma(M)$ является модулем конечной длины.

13.8. Покажите, что каждый самопорождающийся артинов модуль является модулем конечной длины.

13.9. Пусть $M_1, \ldots, M_n$ – подмодули модуля M. Покажите, что если для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ M/M_i – модуль конечной длины (соотв., нетеров, артинов), то модуль $M/\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} M_i$ является модулем конечной длины (соотв., нетеровым, артиновым).

Цепь подмодулей

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

модуля M называется *композиционным рядом*, если фактормодули M_{i+1}/M_i просты для всех $0 \leqslant i < n$. Фактормодули M_{i+1}/M_i называются *композиционными факторами* этого ряда.

Цепь подмодулей $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$ модуля M называется *уплотнением* цепи подмодулей $0 = M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \ldots \subseteq M'_{n-1} \subseteq$

$M'_m = M$, если для каждого $0 \leqslant i \leqslant m$ существует $0 \leqslant j \leqslant n$ такой, что $M'_i = M_j$.

Цепи подмодулей $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$ и $0 = M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \ldots \subseteq M'_{n-1} \subseteq M'_m = M$ модуля M называются *эквивалентными*, если $n = m$ и существует перестановка σ последовательности $1, \ldots, n$ такая, что $M_i/M_{i-1} \cong M'_{\sigma(i)}/M'_{\sigma(i)-1}$.

13.10 (Теорема Шрайера об уплотнении). Любые две цепи подмодулей $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$ и $0 = M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \ldots \subseteq M'_{n-1} \subseteq M'_m = M$ модуля M обладают эквивалентными уплотнениями.

Из предыдущего упражнения непосредственно следует

Теорема Жордана-Гельдера. *Любые два композиционных ряда модуля M изоморфны.*

Если M – модуль конечной длины, то длина любого композиционного ряда модуля M называется *длиной модуля* M и обозначается через $\lg(M)$.

13.11. Пусть $0 \to M_1 \to \ldots \to M_{n-1} \to M_n \to 0$ – точная последовательность модулей конечной длины. Покажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \lg(M_i) = 0.$$

13.12. Пусть A – конечномерная коммутативная алгебра над алгебраически замкнутым полем P. Покажите, что каждый конечно порожденный правый A-модуль M имеет конечную длину и имеет место равенство

$$\lg(M) = \dim_P(M).$$

13.13. Пусть A, B – модули конечных длин над коммутативным кольцом R. Тогда

$$\lg(\mathrm{Hom}_R(A, B)) \leqslant \lg(A)\lg(B).$$

13.14. Пусть M – модуль и $f \in \mathrm{End}(M)$. Покажите, что если:

1) M – артинов модуль, то $\mathrm{Ker}(f^n) + \mathrm{Im}(f^n) = M$ для некоторого целого $n \geqslant 1$;

2) M – нетеров модуль, то $\mathrm{Ker}(f^n) \cap \mathrm{Im}(f^n) = 0$ для некоторого целого $n \geqslant 1$;

3) M – модуль конечной длины, то $\mathrm{Ker}(f^n) \oplus \mathrm{Im}(f^n) = M$ для некоторого целого $n \geqslant 1$.

13.15 (Лемма Харады). Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_{2^n}$ – неразложимые модули, у которых длины не превосходят n, и $f_i : M_i \to M_{i+1} (1 \leqslant i < n)$ – гомоморфизмы. Если $f_{2^n-1} \ldots f_2 f_1 \neq 0$, то для некоторого $1 \leqslant i < n$ гомоморфизм f_i является изоморфизмом.

13.16. Пусть M – модуль конечной длины. Покажите, что $\mathrm{End}(M)$ – полупримарное кольцо.

Модуль M называется *локально конечным,* если каждый его конечно порожденный подмодуль – модуль конечной длины.

13.17. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) M – локально конечный модуль;

2) каждый модуль из категории $\mathrm{Gen}(M)$ является локально конечным;

3) каждый конечно порожденный модуль из категории $\sigma(M)$ является модулем конечной длины.

Артиновы кольца

13.18. Покажите, что:

1) кольцо $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ является артиновым справа, но не является артиновым слева;

2) кольцо $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ является нетеровым справа, но не является нетеровым слева;

3) кольцо $\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ является артиновым слева, но не является артиновым справа;

4) кольцо $\begin{pmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ является нетеровым слева, но не является нетеровым справа;

5) кольцо $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ является артиновым справа, но не является нетеровым слева.

13.19. Покажите, что конечное прямое произведение артиновых справа (нетеровых справа) колец является артиновым справа (нетеровым справа) кольцом.

13.20. Ненулевое артиново справа кольцо без делителей нуля является телом.

13.21. Покажите, что радикал Джекобсона артинового справа кольца является нильпотентным идеалом.

13.22. Докажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R изоморфно конечному прямому произведению матричных колец конечных размеров над телами;

2) R – полупервичное артиново справа кольцо;

3) R – полупримитивное артиново справа кольцо.

13.23. Докажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R изоморфно полному матричному кольцу конечного размера над телом;

2) R – первичное артиново справа кольцо;

3) R – примитивное справа (слева) артиново справа кольцо;

4) R – простое кольцо и $\mathrm{Soc}(R_R) \neq 0$.

13.24. Покажите, что всякое артиново справа кольцо является нетеровым справа.

13.25. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – артиново справа кольцо;

2) R – полупримарное нетерово справа кольцо;

3) R – совершенное слева (справа) кольцо и $J(R)/J^2(R)$ конечнопорожден как правый R-модуль.

13.26. Докажите, что для артинового справа кольца R следующие условия равносильны:

1) R – ниль-чистое кольцо;

2) $R/J(R)$ изоморфно прямому произведению матричных колец над полем F_2.

13.27. Если M – точный модуль конечной длины над артиновым коммутативным кольцом A, то $\lg(A) \leqslant [\frac{\lg^2(M)}{4}] + 1$.

13.28 (Теорема Шура). Размерность коммутативной подалгебры полной матричной алгебры $M_n(P)$ над произвольным полем P не превосходит числа $[\frac{n^2}{4}] + 1$.

Нетеровы кольца

13.29. Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A, $Q \equiv \left(\dfrac{\alpha, \beta}{A}\right)$ – алгебра кватернионов над A. Тогда Q – артиново справа (нётерово справа) кольцо $\Leftrightarrow$ A – артиново (нётерово) кольцо.

13.30. Покажите, что всякое артиново справа кольцо нетерово слева в точности тогда, когда оно артиново.

13.31. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – классически полупростое кольцо;

2) R – артиново справа регулярное кольцо;

3) R – нетерово справа регулярное кольцо;

4) R – артиново справа I_0-кольцо;

5) R – нетерово справа I_0-кольцо;

6) R – I-конечное регулярное кольцо;

7) R – I-конечное I_0-кольцо.

13.32. Пусть кольцо R порождается элементом $r \in R$ и своим подкольцом S. Покажите, что если выполнено равенство $rS + S = Sr + S$ и S – нетерово справа (слева) кольцо, то кольцо R является нетеровым справа (слева). В частности, если у кольца скрещенных многочленов $R = S[x; \sigma, \delta]$ гомоморфизм σ является автоморфизмом и S – нетерово справа кольцо, то кольцо R также является нетеровым справа.

Из предыдущего утверждения следует:

Теорема Гильберта о базисе. Если кольцо R нетерова справа, то кольцо многочленов $R[x_1, \ldots, x_n]$ также является нетеровым справа.

max**-кольца**

Пусть M – модуль. *Радикальным рядом* модуля M называется убывающая цепочка

$$M \supset J^1(M) = J(M) \supset \ldots \supset J^\alpha(M) \supset J^{\alpha+1}(M) \supset \ldots,$$

где $J^\alpha(M) = J(J^{\alpha-1}(M))$ для каждого непредельного ординального числа α и $J^\alpha(M) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} J^\beta(M)$ для каждого предельного ординального числа α.

13.33. Пусть R-кольцо. Покажите, что если:

1) M – правый R-модуль, то $MJ(R)^n \subseteq J^n(M)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$;

2) $R/J(R)$ – V-кольцо, то $MJ(R)^n = J^n(M)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

13.34. Пусть M – правый R-модуль. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) $J(N) \neq N$ для каждого ненулевого подмодуля N модуля M;

2) каждый ненулевой подмодуль N модуля M обладает максимальным подмодулем;

3) для некоторого ординального числа α имеет место равенство $J_\alpha(M) = 0$;

4) существует убывающая цепочка подмодулей

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_\alpha \supset M_{\alpha+1} \supset \ldots \supset M_\tau = 0,$$

такая, что $M_\alpha/M_{\alpha+1}$ – полупростой модуль для каждого $0 \leqslant \alpha < \tau$ и $M_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$, если α – предельное ординальное число.

Модуль M, удовлетворяющий одному из условий предыдущего упражнения называется *полунетеровым.* Так как каждый подмодуль нетерова модуля является конечно порожденным, то всякий нетеров модуль является полунетеровым.

13.35. Покажите, что:

1) прямая сумма полунетеровых модулей является полунетеровым модулем;

2) прямое произведение полунетеровых модулей является полунетеровым модулем.

13.36. Пусть каждый фактормодуль модуля M является полунетеровым. Покажите, что если модуль M не является конечно порожденным, то $\mathrm{Soc}(M/N)$ – модуль бесконечной длины и $J(M/N) = 0$ для некоторого подмодуля N модуля M.

13.37. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – нетеров модуль;

2) M/N – полунетеров модуль и $\mathrm{Soc}(M/N)$ – модуль конечной длины для каждого подмодуля N модуля M.

13.38. Покажите, что для артинового модуля M следующие условия равносильны:

1) M – нетеров модуль;

2) M – полунетеров модуль.

Модуль M называется $\max$-*модулем,* если всякий ненулевой M-подпорожденный модуль обладает максимальным подмодулем. Кольцо R называется правым $\max$-*кольцом*, если каждый ненулевой правый R-модуль содержит максимальный подмодуль.

13.39. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) $J(N) \ll N$ для каждого модуля N из категории $\sigma(M)$;

2) M – $\max$-модуль.

13.40. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое max-кольцо;

2) $J(M) \ll M$ – для каждого правого R-модуля M;

3) каждое существенное расширение простого правого R – модуля является полунетеровым модулем.

13.41. Пусть G – конечная группа. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) RG – правое max-кольцо;

2) R – правое max-кольцо.

13.42. Пусть $(R_i)_{i\in I}$ – бесконечное семейство ненулевых max-колец и R – подкольцо кольца $\prod_{i\in I} R_i$, которое содержит $\oplus_{i\in I} R_i$. Тогда следующие условия равносильны:

a) R – правое max-кольцо;

b) $R/(\oplus_{i\in I} R_i)$ – правое max-кольцо.

13.43. Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i R$ – прямая сумма циклических правых R-модулей, $G = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - x_{i+1}r_i)R$ и каждый ненулевой фактормодуль модуля M обладает максимальным подмодулем. Покажите, что если:

1) $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ – базис модуля F и $\{r_i\}_{i=1}^{\infty} \subset J(R)$, то $F = G$;

2) $r_i = r_j$ для каждой пары индексов i, j и кольцо R квазиинвариантно справа, то $F = G$.

13.44. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое max-кольцо;

2) $R/J(R)$ – правое max-кольцо и $J(R)$ – t-нильпотентно справа.

13.45. Приведите пример кольца, которое является правым max-кольцом, но не является левым max-кольцом.

13.46. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое max-кольцо;

2) каждый пирсовский слой кольца R является max-кольцом;

3) каждый максимальный неразложимый фактор кольца R является max-кольцом.

13.47. Пусть R – квазиинвариантное справа правое max-кольцо. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) если элемент r кольца R не является левым делителем нуля, то $r \in U(R)$;

2) $R/J(R)$ – строго регулярное кольцо.

13.48. Для квазиинвариантного справа кольца R следующие условия равносильны:

1) R – регулярное кольцо;

2) R – правое $\sum$-V-кольцо;

3) R – правое V-кольцо;

4) R – слабо регулярное справа кольцо.

13.49. Для квазиинвариантного справа кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое max-кольцо;

2) $R/J(R)$ – строго регулярное кольцо и $J(R)$ – t-нильпотентный справа идеал.

13.50. Для коммутативного кольца R следующие условия равносильны:

1) R – max-кольцо;

2) $R/J(R)$ – регулярное кольцо и $J(R)$ – t-нильпотентный идеал.

Полуартиновы кольца и модули

Модуль M называется *полуартиновым*, если каждый его ненулевой гомоморфный образ содержит простой подмодуль. Не сложно заметить, что каждый артинов модуль является полуартиновым. Кольцо R называется *полуартиновым справа*, если полуартинов модуль R_R. Аналогично определяется понятие полуартинового слева кольца. Кольцо называется полуартиновым, если оно полуартново слева и справа.

Рядом Леви модуля M называется возрастающая цепочка

$$0 \subset \operatorname{Soc}_1(M) = \operatorname{Soc}(M) \subset \ldots \subset \operatorname{Soc}_\alpha(M) \subset \operatorname{Soc}_{\alpha+1}(M) \subset \ldots,$$

где $\operatorname{Soc}_\alpha(M)/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M) = \operatorname{Soc}(M/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M))$ для каждого непредельного ординального числа α и $\operatorname{Soc}_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \operatorname{Soc}_\beta(M)$ для каждого предельного ординального числа α. Обозначим через $L(M)$ подмодуль вида $\operatorname{Soc}_\xi(M)$, где ξ - наименьший ординал для которого выполнено равенство $\operatorname{Soc}_\xi(M) = \operatorname{Soc}_{\xi+1}(M)$. В этом случае ξ называется *длиной Леви* модуля M и обозначается $\operatorname{Loewy}(M)$.

13.51. Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – полуартиновый модуль;

2) каждый ненулевой гомоморфный образ модуля M имеет ненулевой цоколь;

3) для некоторого ординального числа α имеет место равенство $\operatorname{Soc}_\alpha(M) = M$;

4) существует возрастающая цепочка подмодулей

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset \ldots \subset M_\tau = M,$$

такая, что $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ – полупростой модуль для каждого $0 \leqslant \alpha < \tau$ и $M_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$, если α – предельное ординальное число;

5) каждый модуль в категории $\sigma(M)$ является полуартиновым.

13.52. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – модуль конечной длины;

2) M – артинов max-модуль;

3) M – полуартинов и нетеров модуль.

13.53. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – артинов модуль;

2) M – полуартиновый модуль и $\mathrm{Soc}(M/N)$ – модуль конечной длины для каждого подмодуля N модуля M.

13.54. Если N – подмодуль модуля M и α – ординал, то

$$\mathrm{Soc}_\alpha(N) = \mathrm{Soc}_\alpha(M) \cap N.$$

13.55. Для произвольного семейства модулей $(M_i)_{i\in I}$ и каждого ординала α имеет место равенство

$$\mathrm{Soc}_\alpha(\oplus_{i\in I} M_i) = \oplus_{i\in I}\,\mathrm{Soc}_\alpha(M_i).$$

13.56. Пусть $f : M \to N$ – гомоморфизм полуартиновых правых R – модулей. Тогда для каждого ординала α имеет место включение

$$f(\mathrm{Soc}_\alpha(M)) \subset \mathrm{Soc}_\alpha(N)$$

В частности, если f – эпиморфизм, то $\mathrm{Loewy}(N) \leqslant \mathrm{Loewy}(M)$.

13.57. Покажите, что для произвольного правого R-модуля M имеет место включение $M\,\mathrm{Soc}_\alpha(R_R) \subset \mathrm{Soc}_\alpha(M)$ для каждого ординала α.

13.58. Если P – конечно порожденный свободный (проективный) правый модуль над полуартиновым справа кольцом R, то $\mathrm{End}_R(P)$ – полуартиново справа кольцо и $\mathrm{Soc}_\alpha(P) = P\,\mathrm{Soc}_\alpha(R_R)$ для каждого ординала α.

13.59. Пусть R – полупримарное кольцо. Покажите, что для правого R-модуля следующие условия равносильны:

1) M – артинов модуль;

2) M – нетеров модуль;

3) $\mathrm{Soc}_{\alpha+1}(M)/\mathrm{Soc}_\alpha(M)$ – модуль конечной длины для каждого ординала α.

13.60. Пусть M – полуартинов правый R-модуль и $\mathrm{Soc}_{\alpha+1}(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha}(M)$ – модуль конечной длины для каждого ординала α. Покажите, что для эндоморфизма $f \in \mathrm{End}_R(M)$ следующие условия равносильны:

1) f – автоморфизм;

2) f – мономорфизм;

3) $f_{|\mathrm{Soc}(M)} : \mathrm{Soc}(M) \to \mathrm{Soc}(M)$ – автоморфизм.

13.61. Если каждый замкнутый подмодуль полуартинового модуля M является конечно порожденным, то модуль M имеет конечную размерность Голди.

13.62. Каждый конечно порожденный полуартиновый CS - модуль является конечной прямой суммой однородных модулей.

13.63. Покажите, что для правого CS-кольца R следующие условия равносильны:

1) R – совершенное слева кольцо;

2) R – полуартиново справа кольцо.

13.64. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – полуартиново справа кольцо;

2) $R/J(R)$ – полуартиново справа кольцо и $J(R)$ t-нильпотентен слева.

13.65. Приведите пример кольца, которое полуартиново справа, но не является полуартиновым слева.

13.66. Покажите, что полуартиново справа кольцо является нетеровым справа в точности тогда, когда оно артиново справа.

13.67. Пусть $(R_i)_{i\in I}$ – семейство колец. Покажите ,что

1) $Soc(\prod_{i\in I} R_i/ \oplus_{i\in I} R_i) = 0$;

2) кольцо $\prod_{i\in I} R_i$ – полуартиново справа в точности тогда, когда $\mid I \mid < \infty$ и R_i – полуартиново справа кольцо для каждого $i \in I$.

13.68. Пусть G – конечная группа. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) RG – полуартиново справа кольцо;

2) R – полуартиново справа кольцо.

13.69. Пусть M – правый R-модуль. Показать, что для каждого модуля $N \in \sigma(M)$ имеет место неравенство $\mathrm{Loewy}(N) \leqslant \mathrm{Loewy}(M)$. В частности, для каждого правого R-модуля M имеем $\mathrm{Loewy}(M) \leqslant \mathrm{Loewy}(R_R)$.

13.70. Если N – подмодуль полуартинового правого R-модуля M, то

$$\mathrm{Loewy}(M) \leqslant \mathrm{Loewy}(N) + \mathrm{Loewy}(M/N)$$

13.71. Пусть R – полуартиново справа кольцо и $\mathrm{Loewy}(R_R) = n < \infty$. Тогда R – полуартиново слева кольцо и $\mathrm{Loewy}({}_RR) \leqslant 2^n - 1$.

13.72. 1) Приведите пример полуартинового справа кольцо R, у которого $\mathrm{Loewy}(R_R) = 2$ и $\mathrm{Loewy}({}_RR) = 3$.

2) Приведите пример полуартинового кольца R, у которого $\mathrm{Loewy}(R_R) = n$ и $\mathrm{Loewy}({}_RR) = 2n - 1$.

13.73. Пусть α и β – бесконечные ординалы. Приведите пример полуартинового кольца, у которого левая длина Леви равна $\alpha + 1$, а правая длина Леви равна $\beta + 1$.

13.74. Пусть R – полупримарное кольцо и n – степень нильпотентности $J(R)$. Показать, что R – полуартиново справа и слева кольцо и $\mathrm{Loewy}(R_R) = \mathrm{Loewy}({}_RR) = n + 1$.

13.75. Пусть R – полулокальное кольцо. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) для каждого натурального k имеют место равенства $\mathrm{Soc}_k({}_RR) = r(J^k)$ и $\mathrm{Soc}_k(R_R) = l(J^k)$;

2) если $\mathrm{Soc}({}_RR) = \mathrm{Soc}(R_R)$, то $\mathrm{Soc}_k({}_RR) = \mathrm{Soc}_k(R_R)$ для каждого натурального k.

13.76. Если R – регулярное полуартиново справа кольцо, то R – полуартиново слева и $\mathrm{Loewy}({}_RR) = \mathrm{Loewy}(R_R)$.

13.77. Пусть R – полуартиново справа кольцо и $\mathrm{Loewy}(R_R) = n < \infty$. Какие значения может принимать левая длина Леви кольца R?

14 Кольца, близкие к регулярным

I_0-кольца

14.1. Покажите, что для элемента r из кольца R следующие условия равносильны:

1) правый идеал rR содержит ненулевой идемпотент;
2) левый идеал Rr содержит ненулевой идемпотент;
3) $srs = s$ для некоторого $s \in R \setminus \{0\}$.

Элемента r из кольца R, удовлетворяющий одному из эквивалентных условий предыдущего упражнения, называется *частично обратимым.* Кольцо R называется I_0-*кольцом*, если каждый элемент r из $R \setminus J(R)$ частично обратим.

14.2. Приведите пример полупримитивного нерегулярного I_0-кольца.

14.3. Для полупримитивного I_0-кольца R следующие условия равносильны:

1) R – классически полупростое кольцо;

2) R – артиново справа кольцо;

3) R – нетерово справа кольцо;

4) R – I-конечное.

14.4. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – полусовершенные кольца;

2) R – полулокальное I_0-кольцо;

3) R – I-конечное I_0-кольцо;

4) R – I-конечное и каждый примитивный идемпотент в R локален.

Для нильпотентного элемента r кольца R положим $In(r) = Min\{n \in \mathbb{N} \mid r^n = 0\}$. Если элемент $r \in R$ не является нильпотентным, то положим $In(r) = 1$. Кольцо R называется *кольцом ограниченного индекса*, если $In(R) = \sup\{In(r) \mid r \in R\} < \infty$.

14.5 (**Теорема Левицкого**). Если R – полупримитивное I_0-кольцо, то имеют место следующие утверждения:

1) если $r^n = 0$ и $r^{n-1} \neq 0$ для некоторых $r \in R \setminus \{0\}$ и $n \in \mathbb{N}$, то идеал RrR содержит систему из n^2 матричных единиц;

2) если кольцо R содержит систему из n^2 матричных единиц $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и либо кольцо $e_{11}Re_{11}$ не является редуцированным, либо $\sum_{i=1}^n e_{ii}$ не является центральным идемпотентом в R, то R содержит такую систему матричных единиц $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^m$, что $n < m$ и $f_{11} \in e_{11}Re_{11}$.

14.6. Если R – полупримитивное I_0-кольцо ограниченного индекса, то каждый идеал $I \neq 0$ кольца R содержит идеал вида $M_n(D)$, где D – редуцированное кольцо с единицей и единица кольца $M_n(D)$ является центральным идемпотентом кольца R.

14.7. Для кольца R, у которого $\mathrm{In}(R) = n$, следующие условия равносильны:

1) R – полупримитивное I_0-кольцо;

2) кольцо R содержит существенный идеал $A = \oplus_{i \in I} M_{n_i}(D_i)$, где

   a) $n_i \leqslant n$ для каждого $i \in I$;

   b) D_i – редуцированное кольцо для каждого $i \in I$ и каждый односторонний идеал L кольца D_i содержит идеал K, который порождается центральными идемпотентами кольца D_i и является существенным в L.

14.8. Пусть R – полупримитивное I_0 - кольцо. Если каждый примитивный гомоморфный образ кольца R имеет ограниченный индекс нильпотентности, то всякий идеал $I \neq 0$ кольца R содержит идеал вида $M_n(D)$, где D – редуцированное кольцо с единицей и единица кольца $M_n(D)$ является центральным идемпотентом кольца R.

14.9. Пусть R – неразложимое полупримитивное I_0-кольцо. Если каждый примитивный гомоморфный образ кольца R имеет ограниченный индекс нильпотентности, то $R \cong M_n(D)$, где D – тело.

14.10. Для кольца R, у которого $\mathrm{In}(R) = n$, следующие условия равносильны:

1) R – первичное полупримитивное I_0-кольцо;

2) $R \cong M_n(D)$, где D – тело.

14.11. Пусть R – I_0-кольцо, для которого выполнена импликация:

$$\forall r \in R : r^2 = 0 \Rightarrow r \in J(R).$$

Покажите, что если идемпотенты кольца R поднимаются по модулю радикала Джекобсона $J(R)$, то $R/J(R)$ – редуцированное кольцо.

Регулярные кольца

Модуль M называется *регулярным,* если каждый его циклический подмодуль – прямое слагаемое в M. Кольцо R называется *регулярным,* если R_R – регулярный модуль.

14.12. Пусть M – регулярный модуль. Покажите, что в модуле M каждый конечно порожденный подмодуль является прямым слагаемым M.

14.13. Приведите пример, показывающий, что регулярные модули не замкнуты относительно прямых сумм.

Элемент r из кольца R называется *регулярным,* если $rsr = r$ для некоторого $s \in R$.

14.14. Покажите, что для элемента r кольца R следующие условия равносильны:

1) $rR = eR$ для некоторого $e = e^2 \in R$;
2) $Rr = Re$ для некоторого $e = e^2 \in R$;
3) r – регулярный элемент;
4) существует такой элемент $s \in R$, что $rsr = r, s = rsr$.

14.15. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – регулярное кольцо;

2) каждый конечно порожденный правый идеал кольца R – прямое слагаемое модуля R_R;

3) каждый элемента r из кольца R является регулярным.

14.16. Для регулярного кольца R следующие условия равносильны:

1) R – классически полупростое кольцо;

2) R – артиново справа регулярное кольцо;

3) R – нетерово справа регулярное кольцо;

4) R – I-конечное регулярное кольцо;

5) R – регулярное кольцо, у которого размерность Голди конечна;

6) R – регулярное кольцо, у которого дуальная размерность Голди конечна.

14.17 (Теорема Капланского). Для коммутативного регулярного кольца R следующие условия равносильны:

1) R – регулярное кольцо;

2) R – слабо регулярное кольцо;

3) R – V-кольцо.

Идеал J кольца R называется *регулярным*, если для каждого $x \in J$ существует такой элемент $y \in J$, что $x = xyx$.

14.18. Пусть I – регулярный идеал кольца R. Тогда для кольца R имеют место следующие утверждения:

1) идемпотенты кольца R поднимаются по модулю идеала I;

2) если $e_1, e_2, \ldots$ – ортогональные идемпотенты кольца R/I, то существуют такие ортогональные идемпотенты $f_1, f_2, \ldots$ кольца R, что $f_i + I = e_i$ для каждого i;

3) если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортогональные идемпотенты кольца R/I и $e_1 + \ldots + e_n = 1$, то элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из пункта 2) могут быть выбраны таким образом, что $f_1 + \ldots + f_n = 1$.

14.19. Пусть R – предкольцо и J – идеал кольца R. Тогда для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – регулярное предкольцо;

2) J – регулярный идеал и R/J – регулярное предкольцо.

14.20. Покажите, что конечное подпрямое произведение регулярных колец является регулярным кольцом.

14.21. Покажите, что во всяком кольце сумма регулярных идеалов является регулярным идеалом.

14.22. Пусть R – кольцо и $T = \{x \in R \mid RxR$ – регулярный идеал $\}$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) T – регулярный идеал;

2) каждый регулярный идеал кольца R содержится в T;

3) кольцо R/T не содержит ненулевых регулярных идеалов.

14.23. Кольцо R является регулярным в точности тогда, когда выполнены условия:

1) R – полупервичное кольцо;

2) объединение каждой возрастающей цепочки полупервичных идеалов является полупервичным идеалом;

3) факторкольцо R/P является регулярным для каждого первичного идеала P кольца R.

14.24. Кольцо R является регулярным в точности тогда, когда для каждого идеала I кольца R выполнено равенство $I^2 = I$ и факторкольцо R/P регулярно для каждого первичного идеала P кольца R.

14.25. Покажите, что если R – коммутативное кольцо, у которого каждое факторкольцо является редуцированным, то R – регулярное кольцо.

Элемент r из кольца R называется *обратимо регулярным,* если $rur = r$ для некоторого $u \in U(R)$. Кольцо R называется *обратимо регулярным,* если каждый его элемент обратимо регулярен.

14.26. Покажите, что для элемента r кольца R следующие условия равносильны:

1) r – обратимо регулярый элемент;
2) $r = ue$ для некоторых $e = e^2 \in R, u \in U(R)$;
3) $r = eu$ для некоторых $e = e^2 \in R, u \in U(R)$;
4) ru – идемпотент для некоторого $u \in U(R)$;
5) uru' – идемпотент для некоторых $u, u' \in U(R)$.

14.27. Пусть V – векторное пространство над телом T и $S = \mathrm{End}_T(V)$. Покажите, что кольцо S является обратимо регулярным в точности тогда, когда $\dim(V) < \infty$.

Элемент r из кольца R называется *строго регулярным*, если $r^2s = r = tr^2$ для некоторых $s, t \in R$. Кольцо R называется *строго регулярным*, если каждый его элемент строго регулярен.

14.28. Покажите, что для элемента r кольца R следующие условия равносильны:

1) r – строго регулярный элемент;
2) $rR = r^2R$ и $r(r) = r(r^2)$;
3) $R = rR \oplus r(r)$;
4) $rsr = r, rs = sr$ для некоторого $s \in R$;

5) $rur = r, ru = ur$ для некоторого $u \in U(R)$;

6) $r = ue = eu$ для некоторых $e = e^2 \in R, u \in U(R)$;

7) $r = ur^2 = r^2u$ для некоторого $u \in U(R)$;

8) существуют такие однозначно определенные элементы $e, u \in R$, что $r = e + u, ru = ur, ere = 0, e^2 = e$ и u – обратимый элемент кольца R.

В частности, в кольце R каждый строго регулярный элемент является обратимо регулярным.

14.29. Покажите, что если r – строго регулярный элемент кольца R, то для некоторого идемпотента $e \in R$ выполнены равенства

$$rR = eR, r(r) = (1-e)R, eR = rR, R(1-e) = l(r).$$

14.30. Для регулярного кольца R следующие условия равносильны:

1) R – строго регулярное кольцо;

2) R – инвариантное справа кольцо;

3) R – квазиинвариантное справа кольцо;

4) R – редуцированное кольцо;

5) R/P – тело для каждого первичного идеала P кольца R;

6) R – гауссово справа (слева) кольцо;

7) R – подпрямое произведение тел.

14.31. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – строго регулярное кольцо;

2) для каждого элемента $r \in R$ существует такой центральный идемпотент e кольца R, что $r \in eRe$ и r – обратимый элемент в кольце eRe;

3) R регулярно и R/P – тело для каждого примитивного справа (слева) идеала P кольца R;

4) R регулярно и каждый правый (левый) идеал кольца R содержит существенный идеал, порожденный центральными идемпотентами.

14.32. Для редуцированного кольца R следующие условия равносильны:

1) R – регулярное кольцо;

2) в кольце R каждый главный правый идеал – правый аннулятор некоторого элемента кольца R;

3) в кольце R каждый главный левый идеал – левый аннулятор некоторого элемента кольца R.

14.33. Пусть R – строго регулярное кольцо. Тогда для каждого $r \in R$ однозначно определен такой элемент $s \in R$, что $r = rsr$ и $s = srs$.

14.34. Покажите, что пересечение строго регулярных подколец произвольного кольца R является строго регулярным подкольцом.

14.35. Приведите пример регулярного кольца R, у которого существует убывающая цепочка регулярных подколец $R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots$ такая, что кольцо $\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$ не регулярно.

14.36. Покажите, что для регулярного кольца R следующие условия равносильны:

1) R/P – артиново кольцо для каждого примитивного слева идеала P кольца R;

2) R/P – артиново кольцо для каждого примитивного справа идеала P кольца R;

3) R/P – артиново кольцо для каждого первичного идеала P кольца R;

4) для каждой последовательности ортогональных идемпотентов $e_1, e_2, \ldots$ кольца R и каждой последовательности элементов $r_1, r_2, \ldots$ кольца R существует такое натуральное число n, что

$$e_1 r_1 e_2 r_2 \ldots, e_n r_n = 0;$$

5) для каждой последовательности ортогональных идемпотентов $e_1, e_2, \ldots$ кольца R и каждой последовательности элементов $r_1, r_2, \ldots$ кольца R существует такое натуральное число n, что

$$r_n e_n \ldots r_2 e_2 r_1 e_1 = 0.$$

14.37. Пусть R – регулярное кольцо, у которого каждый примитивный образ является артиновым. Тогда каждый ненулевой идеал I кольца R содержит такой ненулевой центральный идемпотент e, что кольцо eR изоморфно кольцу матриц над строго регулярным кольцом.

14.38. Пусть R – неразложимое регулярное кольцо, у которого каждый примитивный образ является артиновым. Тогда R – артиново простое кольцо.

14.39. Если C – счетно порожденный правый идеал регулярного кольца R, то $C = \sum_{i \in I} e_i R$, где $\{e_i \mid i \in I\}$ – счетное множество взаимоортогональных идемпотентов кольца R.

14.40. Приведите пример, показывающий, что подпрямое произведение бесконечного числа регулярных колец вообще говоря не является регулярным кольцом.

14.41. Пусть P – проективный модуль и ϕ – эндоморфизм модуля P, у которого для каждого натурального числа n эндоморфизм ϕ^n регулярен. Покажите, что:

1) $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \phi^i(P)$ – прямое слагаемое в P для каждого i;

2) если для некоторого $t \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\phi^t = 0$, то существуют такие подмодули $P_1, \ldots P_t$ модуля P, что $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_t$, $\phi(P_i) = P_i$ и $\phi(P_t) = 0$.

14.42. Если $J \subset I$ – регулярные идеалы кольца R, то $In(I/J) \leqslant In(I)$.

14.43. Каждое кольцо обладает наибольшим регулярным идеалом, чей индекс не превосходит фиксированного натурального числа n.

14.44. Если в кольце R каждый правый идеал порождается полуцентральными слева идемпотентами, то кольцо R регулярно.

14.45. Пусть R – кольцо, у которого каждый односторонний идеал порождается идемпотентами. Если каждый примитивный гомоморфный образ кольца R имеет ограниченный индекс нильпотентности, то кольцо R регулярно.

14.46. Пусть P – произвольное поле. В кольце $CFM_{\mathbb{N}}(P)$ выделим подмножество R всех матриц r, у которых ненулевые элементы отстоят от главной диагонали не более чем на $n(r)$ мест по вертикали. Таким образом, $n(r)$ – такое натуральное число, зависящее от r, что $r_{ij} = 0$, если $| j - i |> n(r)$. Покажите, что:

1) для каждых $r, s \in R$ имеет место неравенство $n(rs) \leqslant n(r) + n(s)$;
2) R – подкольцо кольца $CFM_{\mathbb{N}}(P)$;
3) каждый правый идеал кольца R порождается идемпотентами;
4) кольцо R не является регулярным.

Элемент r из кольца R называется *полурегулярным,* если существует такой $s \in R$, что

$$srs = s, r - rsr \in J(R).$$

Кольца R называется *полурегулярным,* если каждый его элемент полурегулярен.

14.47. Покажите, что для элемента r из кольца R следующие условия равносильны:

1) r – полурегулярный элемент;
2) существует такой $s \in R$, что $(sr)^2 = sr$ и $r - rsr \in J(R)$;
3) существует такой идемпотент $e \in Rr$, что $r(1 - e) \in J(R)$;
4) существует такой идемпотент $e \in rR$, что $(1 - e)r \in J(R)$;
5) существует такой регулярный элемент $s \in R$, что $r - s \in J(R)$.

14.48. Покажите, что кольца R следующие условия равносильны:

1) R – полурегулярое кольцо;
2) $R/J(R)$ – регулярное кольцо и идемпотенты кольца R поднимаются по модулю идеала $J(R)$.

Слабо регулярные кольца

Кольцо R называется *слабо регулярным справа (слева)*, если $I^2 = I$ для каждого правого (левого) идеала I кольца R. Если в кольце R равенство $I^2 = I$ выполняется для каждого идеала I кольца R, то кольцо R называется *слабо регулярным.*

Элемент r кольца R называется слабо регулярным справа, если $rR = rRrR$. Идеал I кольца R называется слабо регулярным справа, если каждый его элемент слабо регулярен справа.

14.49. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – слабо регулярное справа кольцо;

2) каждый элемент из кольца из R слабо регулярен справа;

3) для каждого элемента r кольца R найдутся такие элементы $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n \in R$, что $r = \sum_{i=1}^{n} rr_irs_i$.

14.50. Пусть R – слабо регулярное справа кольцо. Докажите следующие утверждения:

1) $J(R) = 0$;

2) если R – область, то R – простое кольцо;

3) для всякого идемпотента $e \in R$ кольцо eRe слабо регулярно справа;

4) для каждого $n \in \mathbb{N}$ кольцо $M_n(R)$ – слабо регулярно справа.

14.51. Покажите, что:

1) каждое простое кольцо является слабо регулярным справа;

2) прямое произведение слабо регулярных (справа) колец является слабо регулярным (справа) кольцом;

3) каждое коммутативное слабо регулярное кольцо является регулярным;

4) центр всякого слабо регулярного справа кольца является регулярным кольцом;

5) если в кольце R каждый правый идеал порождается идемпотентами, то кольцо R слабо регулярно справа;

6) каждое факторкольцо слабо регулярного (справа) кольца является слабо регулярным (справа);

7) R – слабо регулярное справа кольцо и все его первичные факторкольца регулярны $\Leftrightarrow$ R – слабо регулярное слева кольцо и все его первичные факторкольца регулярны $\Leftrightarrow$ R регулярно.

14.52. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – слабо регулярное справа кольцо;

2) если I – правый идеал кольца R и J – идеал кольца, то $IJ = I \cap J$.

3) если I – идеал кольца R и $r \in I$, то $r \in rI$.

14.53. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – слабо регулярное кольцо;

2) для каждого идеала I кольца R и каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $I = I^n$;

3) если I и J – идеалы кольца R, то $IJ = JI = I \cap J$;

4) для каждого $r \in R$ выполнено условие $r \in (RrR)^2$;

5) для каждого $r \in R$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $r \in (RrR)^n$.

14.54. Пусть J – идеал кольца R. Показать, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – слабо регулярное (справа) кольцо;

2) R/J – слабо регулярное (справа) кольцо и J – слабо регулярный (справа) идеал.

14.55. Покажите, что конечное подпрямое произведение слабо регулярных (справа) колец является слабо регулярным (справа) кольцом.

14.56. Покажите, что во всяком кольце сумма слабо регулярных (справа) идеалов является слабо регулярным (справа) идеалом. Таким образом, каждое кольцо обладает наибольшим слабо регулярным справа (слева) идеалом.

14.57. Пусть R – кольцо и $T = \{x \in R \mid$ в RxR каждый элемент слабо регулярен справа$\}$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) T – слабо регулярный справа идеал;

2) каждый слабо регулярный справа идеал кольца R содержится в T;

3) кольцо R/T не содержит слабо регулярных справа идеалов.

Следующий пример показывает, что существует слабо регулярное слева кольцо, которое не является слабо регулярным справа кольцом.

14.58. Пусть $A = \mathrm{End}_P(V)/I$, где V – векторное пространство счетной размерности над полем P, а I – идеал, состоящий из всех линейных операторов конечного ранга. Покажите, что

1) A – простая регулярная неартинова P - алгебра;

2) если M – максимальный правый идеал алгебры A, то
$$M' = \begin{pmatrix} M & M \\ A & A \end{pmatrix}$$
является слабо регулярным слева максимальным правым идеалом простой регулярной неартиновой алгебры
$$A' = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix};$$

3) если R – P - алгебра, которая получается из M' путем присоединения внешней единицы, то R – слабо регулярная слева алгебра, которая не является слабо регулярной справа.

14.59. Докажите, что если

1) в кольце R каждая регулярная слева последовательность стабилизируется, то R – конечное прямое произведение простых колец в точности тогда, когда R – слабо регулярное справа кольцо;

2) R – кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов, то R – конечное прямое произведение простых колец в точности тогда, когда R – слабо регулярное справа кольцо.

14.60. Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A, $Q \equiv \left(\dfrac{\alpha,\beta}{A}\right)$ – алгебра кватернионов над A и $2^{-1} \in A$. Тогда равносильны условия:

1) Q – регулярное кольцо;

2) A – регулярное кольцо;

3) каждое факторкольцо кольца Q полупервично;

4) каждое факторкольцо кольца A полупервично;

5) Q – полупервичное кольцо, в котором каждый первичный идеал – максимальный идеал;

6) A – полупервичное кольцо, в котором каждый первичный идеал – максимальный идеал;

7) Q – слабо регулярное кольцо;

8) Q –слабо регулярное справа кольцо.

9) Q – слабо регулярное слева кольцо;

10) Q – бирегулярное кольцо.

14.61. Пусть α и β – обратимые элементы коммутативного кольца A, $Q \equiv \left(\dfrac{\alpha,\beta}{A}\right)$ – алгебра кватернионов над A и $2^{-1} \in A$. Тогда $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{A}\right)$ – строго регулярное кольцо $\Leftrightarrow$ A – регулярное (α,β)-кольцо.

Кольцо R называется *слабо π-регулярным справа*, если для каждого элемента $r \in R$ существует такое $n = n(r) \in \mathbb{N}$, что $r^nR = (r^nR)^2$.

14.62. Если R – слабо π-регулярное справа кольцо, то $\mathrm{Sing}({}_RR)$ – ниль-идеал кольца R и $J(R)$ – наибольший ниль-идеал кольца A. В частности, каждое слабо регулярное справа кольцо является несингулярным слева.

Строго π-регулярные кольца

14.63. Покажите, что для элемента r из кольца R следующие условия равносильны:

1) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $r^n \in r^{n+1}R$;

2) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $r^n R = r^{n+1}R$;

3) цепь главных правых идеалов $rR \supseteq r^2R \supseteq \ldots$ кольца R стабилизируется на конечном шаге.

Элемент r кольца R называется *строго π-регулярным справа*, если для него выполнено одно из эквивалентных условий предыдущего упражнения. Аналогично определяется понятие строго π-регулярного справа элемента. Если элемент r является строго π-регулярным справа и слева, то элемент r называется *строго π-регулярным* .

14.64. Покажите, что для элемента r из кольца R следующие условия равносильны:

1) r – строго π-регулярный элемент;

2) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $r^n \in r^{n+1}R \cap Rr^{n+1}$;

3) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $R = r(r^n) \oplus r^n R$;

4) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $R = l(r^n) \oplus Rr^n$;

5) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ элемент r^n является строго регулярным;

6) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенства $r^n = ue = eu, ru = ur, er = re$, где $e = e^2, u \in U(R)$;

7) существуют $n \in \mathbb{N}$ и $s \in R$ такие, что $r^n = r^{n+1}s, sr = sr$;

8) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $r^n = r^{n+1}u, ur = ru$, где $u \in U(R)$.

14.65. Покажите, что для элемента r из кольца R следующие условия равносильны:

1) r – строго π-регулярный элемент;

2) существуют такие элементы $e, u \in R$, что $r = e + u, ru = ur, e^2 = e, u \in U(R)$ и ere – нильпотентный элемент.

Если r – строго π-регулярный элемент из кольца R, то его представление в виде $r = e + u$, где e и u – удовлетворяют условиям второго пункта упражнения 14.65, называется *сторго π-регулярным разложением* элемента r.

14.66. Пусть r – строго π-регулярный элемент из кольца R и $r = e + u = e' + u'$ – строго π-регулярные разложения r. Тогда $e = e'$ и $u = u'$.

14.67. Для кольца R равносильны условия:

1) каждый элемент кольца R является строго π-регулярным;

2) каждый элемент кольца R является строго π-регулярным справа;

3) каждый элемент кольца R является строго π-регулярным слева;

4) для каждого $x \in R$ убывающая цепь главных правых идеалов $xR \supseteq x^2R \supseteq \ldots \supseteq x^nR \supseteq \ldots$ кольца R стабилизируется на конечном шаге;

5) для каждого $x \in R$ убывающая цепь главных левых идеалов $Rx \supseteq Rx^2 \supseteq \ldots \supseteq Rx^n \supseteq \ldots$ кольца R стабилизируется на конечном шаге.

Кольцо R называется *строго π-регулярным,* если верны эквивалентные условия 14.67.

14.68. Покажите, что для кольца R равносильны условия:

1) R строго π-регулярно;

2) факторкольцо $R/rad(R)$ строго π-регулярно;

3) каждое первичное факторкольцо кольца R строго π-регулярно.

14.69. Покажите, что R – совершенное справа кольцо в точности тогда, когда R – строго π-регулярное I-конечное кольцо и идеал $J(R)$ t-нильпотентен справа.

14.70. Покажите, что:

1) существуют регулярные кольца, не являющиеся строго π-регулярными;

2) каждое регулярное кольцо π-регулярно и существуют π-регулярные кольца, не являющиеся слабо регулярными справа или слева;

3) каждое строго π-регулярное кольцо π-регулярно и существуют π-регулярные кольца, не являющиеся строго π-регулярными;

4) если A – π-регулярное кольцо, то $J(A)$ – ниль-идеал;

5) каждое π-регулярное кольцо – I_0-кольцо и существуют I_0-кольца, не являющиеся π-регулярными.

14.71. Покажите, что для квазиинвариантного справа кольца R следующие условия равносильны:

1) R – строго π-регулярное кольцо;

2) $R/rad(R)$ – строго π-регулярное кольцо;

3) каждый первичный фактор кольца R является артиновым кольцом;

4) каждый первичный фактор кольца R является регулярным кольцом;

5) каждый первичный идеал кольца R является максимальным;

6) каждый первичный идеал кольца R является примитивным справа;

7) R – π-регулярное кольцо и $R/rad(R)$ – строго π-регулярное кольцо.

Бирегулярные кольца

Кольцо R называется *бирегулярным,* если каждый главный идеал кольца R порождается центральным идемпотентом.

14.72. Каждое бирегулярное кольцо является слабо регулярным справа.

14.73. Для редуцированного кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1) R – слабо регулярное справа кольцо;

2) R – слабо регулярное слева кольцо;

3) R – бирегулярное кольцо.

14.74. Для квазиинвариантного справа (слева) кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1) R – строго регулярное кольцо;

2) R – бирегулярное кольцо.

14.75. Для кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1) R – бирегулярное кольцо;

2) все пирсовские слои кольца R – простые кольца.

Чистые и строго чистые кольца

Элемент a из кольца R называется *чистым*, если он представим в виде $a = e + u$, где $u \in U(R), e = e^2 \in R$. Кольцо R называется *чистым*, если любой элемент из R является чистым.

14.76. Покажите, что элемент a из кольца R является чистым в следующих случаях:

1) $-a$ – чистый элемент;

2) a – нильптентный элемент;

3) a – строго регулярный элемент;

4) a – периодический элемент.

14.77. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортогональные идемпотенты кольца R и $e_1 + \ldots + e_n = 1$. Покажите, что если e_iRe_i – чистое кольцо для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$, то R – чистое кольцо.

Кольцо R называется *получистым,* если каждый его элемент a представим в виде $a = e + u$, где $u \in U(R)$ и e – периодический элемент.

14.78. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортогональные идемпотенты кольца R и $e_1 + \ldots + e_n = 1$. Покажите, что если e_iRe_i – получистое кольцо для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$, то R – получистое кольцо.

14.79. Пусть V – правое векторное пространство над телом T. Покажите, что кольцо $\mathrm{End}_T(V)$ является чистым.

Элемент a из кольца R называется *ниль-чистым,* если он представим в виде $a = e + n$, где $e = e^2 \in R$, n – нильпотентный элемент кольца R. Кольцо называется *ниль-чистым*, если любой его элемент является ниль-чистым.

14.80. Покажите, что каждое ниль-чистое кольцо является чистым кольцом.

14.81. Покажите, что:

1) факторкольцо ниль-чистого кольца является ниль-чистым;

2) прямое произведение ниль-чистых колец является ниль-чистым кольцом;

3) если R – ниль-чистое кольцо, то 2 – нильпотентный элемент R;

4) если R – ниль-чистое кольцо, то $J(R)$ – ниль-идеал;

5) если R – нормальное ниль-чистое кольцо, то $J(R) = \mathrm{Nil}(R)$;

6) если R – нормальное редуцированное ниль-чистое кольцо,то R – булево кольцо.

7) если I – ниль-идеал кольца R, то R – ниль-чистое кольцо в точности тогда, когда R/I – ниль-чистое кольцо.

14.82. Кольцо R является ниль-чистым в точности тогда, когда $J(R)$ – ниль-идеал и $R/J(R)$ – ниль-чистое кольцо.

14.83. Нормальное кольцо R является ниль-чистым в точности тогда, когда $J(R)$ – ниль-идеал и $R/J(R)$ – булево кольцо.

14.84. Покажите, что для поля F следующие условия равносильны:

1) $F \cong F_2$

2) $M_n(F)$ – ниль-чистое кольцо для некоторого $n \in \mathbb{N}$

3) $M_n(F)$ – ниль-чистое кольцо для каждого $n \in \mathbb{N}$

14.85. Покажите, что если R – коммутативное ниль-чистое кольцо, то $M_n(R)$ является ниль-чистым для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Элемент a из кольцо R называется *строго чистым*, если он представим в виде $a = e + u$, где $u \in U(R), e = e^2 \in R$ и $eu = ue$. Кольцо R называется *строго чистым,* если любой элемент из R является строго чистым.

14.86. Покажите, что каждый строго π-регулярный элемент кольца R является строго чистым.

Однозначно чистые и однозначно строго чистые кольца

Элемент a из кольцо R называется *однозначно чистым*, если он однозначно представим в виде $a = e + u$, где $u \in U(R), e = e^2 \in R$. Кольцо R называется *однозначно чистым,* если любой элемент из R является однозначно чистым.

Элемент a из кольцо R называется *однозначно строго чистым*, если он однозначно представим в виде $a = e + u$, где $u \in U(R), e = e^2 \in R$ и

$eu = ue$. Кольцо R называется *однозначно строго чистым*, если любой элемент из R является однозначно строго чистым.

14.87. Докажите эквивалентность

$\prod_{i\in I} R_i$ – однозначно (соотв., строго) чистое кольцо $\Leftrightarrow$ R_i – однозначно (соотв., строго) чистое кольцо для каждого $i \in I$.

14.88. Для кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1) R – однозначно чистое кольцо;

2) для каждого $r \in R$ существуют однозначно определенные элементы $e = e^2 \in R, j \in J(R)$, для которых выполнено равенство $r = e + j$;

3) $R/J(R)$ – булево кольцо и идемпотенты однозначно поднимаются относительно $J(R)$;

4) R – нормальное кольцо, $R/J(R)$ – булево кольцо и идемпотенты поднимаются относительно $J(R)$;

5) R – нормальное однозначно строго чистое кольцо.

14.89. Для локального кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1) R – однозначно чистое кольцо;

2) R – однозначно строго чистое кольцо;

3) $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$.

14.90. Пусть R – однозначно строго чистое кольцо. Покажите, что:

1) если $e^2 = e \in R$, то eRe – однозначно строго чистое кольцо;

2) $2 \in J(R)$;

3) в R не существует ненулевого идемпотента e такого, что $eRe \cong M_n(S) (n \geqslant 1)$ для некоторого кольца S.

14.91. Покажите, что всякое полупримитвное однозначно строго чистое кольцо является булевым.

14.92. Покажите, что кольцо R является однозначно строго чистым в точности тогда, когда для каждого $r \in R$ существуют такие однозначно определенные элементы $e = e^2 \in R, j \in J(R)$, что $r = e + j, ej = je$.

14.93. Покажите, что для коммутативного кольца R следующие условия раносильны:

1) R – однозначно чистое кольцо;

2) $T_n(R)$ – однозначно строго чистое кольцо для некоторого $n \in \mathbb{N}$;

3) $T_n(R)$ – однозначно строго чистое кольцо для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Элемент a из кольца R называется *строго ниль-чистым,* если он представим в виде $a = e+n$, где $e = e^2$, n – нильпотентный элемент и $en = ne$. Кольцо называется *строго ниль-чистым*, если любой его элемент является строго ниль-чистым.

14.94. Покажите, что для элемента r из кольца R следующие условия равносильны:

1) r – строго ниль-чистый элемент;

2) r – строго π-регулярный элемент и $r^2 - r$ – нильпотентный элемент;

3) r – однозначно строго чистый элемент и $r^2 - r$ – нильпотентный элемент;

4) r – строго чистый элемент и $r^2 - r$ – нильпотентный элемент.

В частности, каждое строго ниль-чистое кольцо является однозначно строго чистым.

14.95. Для кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1) R – строго ниль-чистое кольцо;

2) $R/J(R)$ – булево кольцо и $J(R)$ – ниль-идеал;

3) R – строго π-регулярное кольцо и $U(R) = 1 + \mathrm{Nil}(R)$.

15 Модули, близкие к проективным и инъективным.

Относительная проективность

Пусть A, B – правые R-модули. Модуль A называется *B-проективным (или проективным относительно B),* если всякая диаграмма в $Mod{-}R$ с точной строкой

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r] & 0 \\ & A \arrow[u, "g"] & \end{tikzcd}$$

может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r] & 0 \\ & A \arrow[u, "g"] \arrow[ul, "\overline{g}"] & \end{tikzcd}$$

Модуль M называется *квазипроективным*, если он M-проективен.

Напомним, что правый R-модуль P называется проективным, если P – прямое слагаемое свободного модуля.

15.1. Покажите, что для правого R-модуля P следующие условия равносильны:

1) P – проективный модуль;

2) модуль P проективен относительно каждого правого R-модуля.

15.2. Пусть A, B – правые R-модули. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) A – B-проективный модуль;

2) для всякого подмодуля X модуля $A \oplus B$, удовлетворяющего условию $X + B = A \oplus B$, существует подмодуль $Y \leqslant A \oplus B$ такой, что $Y \leqslant X$ и $Y \oplus B = A \oplus B$.

15.3. Пусть A, B – правые R-модули и $B_0 \leqslant B$. Если A – B-проективный модуль, то A B/B_0-проективен и B_0-проективен.

15.4. Пусть $(B_i)_{i\in I}$ – семейство правых R-модулей и A – правый R-модуль. Покажите, что если:

1) $\mid I \mid < \infty$ и для каждого $i \in I$ модуль A B_i-проективен, то модуль A проективен относительно модуля $\oplus_{i\in I} B_i$;

2) модуль A конечно порожден и для каждого $i \in I$ модуль A B_i-проективен, то модуль A проективен относительно каждого модуля из категории $\sigma(\oplus_{i\in I} B_i)$.

15.5. Пусть A – правый R-модуль. Покажите, что если модуль A квазипроективен, то для любого натурального числа $n \geqslant 1$ модуль A^n квазипроективен.

15.6. Покажите, что всякая прямая сумма изоморфных конечно порожденных квазипроективынх модулей является квазипроективным модулем.

Пусть M – правый R-модуль. Правый идеал кольца R вида $I = r_R(X)$, где X – подмножество модуля M, называется *правым M-аннулятором.*

15.7. Пусть M – конечно порожденный квазипроективный правый R-модуль и R – кольцо с условием минимальности для правых M-аннуляторов. Покажите, что M проективен как правый $R/r(M)$-модуль.

15.8. Пусть M – конечно порожденный квазипроективный правый R-модули, содержащий конечное подмножество X, для которого выполнено равенство $r(X) = r(M)$. Покажите, что если для правого R-модуля N выполнено равенство $Nr(M) = 0$, то модуль M – N-проективен.

Относительная инъективность

Пусть A, B – правые R-модули. Модуль A называется *B-инъективным (или инъективным относительно B,)* если всякая диаграмма в $\mathrm{Mod}-R$ с точной строкой

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "\overline{g}"'] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Модуль A называется *квазиинъективным*, если он A-инъективен.

15.9. Пусть A, B – правые R-модули. Покажите, что для следующие условия равносильны:

1) A – B-инъективный модуль;

2) для всякого подмодуля X модуля $A \oplus B$, удовлетворяющего условию $X \cap B = 0$, существует подмодуль $Y \leqslant A \oplus B$ такой, что $X \leqslant Y$ и $Y \oplus B = A \oplus B$.

15.10. Пусть A, B – правые R-модули и $B_0 \leqslant B$. Если A – B-инъективный модуль, то A B/B_0-инъективен и B_0-инъективен.

15.11. Пусть $(B_i)_{i \in I}$ – семейство правых R-модулей. Покажите, что если правый R-модуль A B_i-инъективен для каждого $i \in I$, то модуль A инъективен относительно каждого модуля из категории $\sigma(\oplus_{i \in I} B_i)$.

15.12. Пусть A – правый R-модуль. Покажите, что если модуль A квазиинъективен, то для любого натурального числа $n \geqslant 1$ модуль nA квазиинъективен.

15.13. Пусть R – область главных идеалов. Покажите, что для конечно порожденного R-модуля M следующие условия раносильны:

1) M – квазиинъективный модуль;

2) M – квазипроективный модуль;

3) для каждого простого элемента q кольца R q-примарная компонента модуля M имеет вид $(R/(q^n))^m$.

15.14. Пусть M – квазинъективный правый R-модуль и R – кольцо с условием минимальности для правых M-аннуляторов. Покажите, что модуль M инъективен как правый $R/r(M)$-модуль. В частности, каждый точный квазиинъективный правый модуль над артиновым справа кольцом инъективен.

15.15. Пусть M – квазиинъективный правый R-модули, содержащий конечное подмножество X, для которого выполнено равенство $r(X) = r(M)$. Покажите, что если для правого R-модуля N выполнено равенство $Nr(M) = 0$, то модуль M – N-инъективен.

15.16. Пусть A и B – правые R-модули. Покажите, что следующие условия раносильны:

1) A – B-проективный модуль и каждый фактормодуль модуля B является A-инъективным;

2) B – A-инъективный модуль и каждый подмодуль модуля A является B-проективным.

15.17. Покажите, что для кольца R следующие условия раносильны:

1) R – наследственное справа кольцо;

2) у каждого проективного правого R-модуля все подмодули являются проективными;

3) у каждого инъективного правого R-модуля все фактормодули являются инъективными;

4) каждый проективный правый R-модуль является SIP-модулем;

5) каждый инъективный правый R-модуль является SSP-модулем.

Оболочки и накрытия

Пусть R – кольцо и Ω – некоторый класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется Ω-*оболочкой* правого R-модуля M, если:

1) $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E \\ E' & \end{tikzcd},$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E \arrow[dl, "h"'] \\ E' & \end{tikzcd};$$

2) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[dl, "h"'] \\ E & \end{tikzcd}$$

следует, что h – автоморфизм.

Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется Ω-*накрытием* правого R-модуля M, если:

1) $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"] \end{tikzcd},$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"'] \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd};$$

2) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd}$$

следует, что h – автоморфизм.

Если Ω – класс проективных (соотв., инъективных) правых R-модулей, то Ω-накрытие (соотв., Ω-оболочка) правого R-модуля M называется *проекивной оболочкой* (соотв., инъективной оболочкой) модуля M.

Пусть M – правый R-модуль. Абелева группа $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ называется группой характеров M и обозначается M^+. M^+ является левым R-модулем относительно умножения $rf(m) := f(mr)$, где $m \in M, r \in R, f \in M^+$. Если $f : M \to N$ – гомоморфизм правых R-модулей, то гомоморфизм левых R-модулей $\mathrm{Hom}(f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ обозначается f^+.

15.18. Пусть M – правый R-модуль. Покажите, что:

1) гомоморфизм $f : P \to M$, где P – проективный правый R-модуль, является проективной облочкой модуля M в точности тогда, когда f – эпиморфизм и $\mathrm{Ker}(f) \ll P$;

2) гомоморфизм $f : M \to E$, где E – инъективный правый R-модуль, является инъективной оболочкой модуля M в точности тогда, когда f – мономорфизм и $\mathrm{Im}(f) \leqslant^e E$.

15.19. Пусть M – правый R-модуль. Тогда

1) отображение $f : M \to M^{++}$, действующее по правилу
$$m \mapsto (f \mapsto f(m)),$$
является мономорфизмом правых R-модулей;

2) $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ – мономорфизм $\Leftrightarrow$ f^+ – эпиморфизм;

3) если P – проективный правый R-модуль, то P^+ – инъективный левый R-модуль.

15.20. Пусть R – кольцо. Покажите, что:

1) для каждого правого R-модуля M существует мономорфизм правых R-модулей $f : M \to E$, где E – инъективный правый R-модуль;

2) каждый правый R-модуль обладает инъективной оболочкой;

3) если M – правый R-модуль, то в категории $\sigma(M)$ каждый модуль обладает инъективной оболочкой.

15.21. Пусть R – кольцо, M, N – правые R-модули и $\iota_1 : M \to E(M), \iota_2 : N \to E(N)$ – инъективные оболочки соответственно модулей M и N. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) модуль M – N-инъективен;

2) для каждого гомоморфизма $f : E(N) \to E(M)$ существует гомоморфизм $g : N \to M$, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, dotted, "g"'] & E(N) \arrow[d, "f"'] \\ M \arrow[r, "\iota_1"] & E(M) \end{tikzcd}$$

В частности, модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M является вполне инвариантным подмодулем в своей инъективной оболочке.

15.22. Пусть R-кольцо, M, N – правые R-модули и $\pi_1 : P \to M, \pi_2 : P' \to N$ – проективные оболочки соответственно модулей M и N. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) модуль M – N-проективен;

2) для каждого гомоморфизма $f : P \to P'$ существует гомоморфизм $g : M \to N$, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, dotted, "g"'] \\ P' \arrow[r, "\pi_2"] & N \end{tikzcd}$$

15.23. Покажите, что каждый инъективный правый R-модуль порождается модулем $E(R_R)$.

Инъективные оболочки простых модулей

15.24. Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ – система представителей классов изоморфных простых правых R-модулей. Покажите, что M – копорождающий правый R-модуль в точности тогда, когда существует мономорфизм
$\phi : \oplus_{i\in I} E(S_i) \to M$.

15.25. Покажите, что модуль M является V-модулем в точности тогда, когда для каждого простого модуля $S \in \sigma(M)$ имеет место равенство $S = E_M(S)$.

15.26. Пусть R – регулярное кольцо. Покажите, что для максимального правого идеала M кольца R следующие условия равносильны:

1) R/M – как векторное пространство над телом $\mathrm{End}_R(R/M)$ является конечномерным;

2)R/M – Σ-инъективный правый R-модуль.

15.27. Покажите, что для регулярного кольца R следующие условия равносильны:

1) R – Σ-V-кольцо;

2) каждый примитивный образ кольца R является артиновым.

15.28. 1) Кольцо R является правым V-кольцом в точности тогда, когда каждый конечно копорожденный правый R-модуль является инъективынм.

2) Кольцо R является нетеровым справа правым V-кольцом в точности тогда, когда каждый правый R-модуль, у которого цоколь существен, является инъективным.

Кольцо R называется *правым π-V-кольцом*, если инъективная оболочка каждого простого правого R-модуля имеет конечную длину. Если длина инъективной оболочки каждого простого правого R-модуля не превосходит n, то кольцо R называется *правым n-V-кольцом*,

15.29. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое π-V-кольцо;

2) у каждого правого R-модуля конечной длины инъективная оболочка имеет конечную длину;

3) у каждого правого R-модуля M всякий подмодуль является пересечением подмодулей N, у которых $\lg(M/N) < \infty$;

4) у каждого правого R-модуля M пересечение всех подмодулей N, у которых $\lg(M/N) < \infty$, является нулевым.

15.30. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое n-V-кольцо;

2) у каждого правого R-модуля M всякий подмодуль является пересечением подмодулей N, у которых $\lg(M/N) \leqslant n$;

3) у каждого правого R-модуля M пересечение всех подмодулей N, у которых $\lg(M/N) \leqslant n$, является нулевым.

15.31. Пусть R – правое n-V-кольцо. Покажите, что для каждого правого идеала I кольца R имеет место равенство $I^n = I^{n+1}$.

15.32. Пусть R – кольцо и S – такое его подкольцо, что $R = \sum_{i=1}^{n} a_i S$, где $a_i \in R$ и $Sa_i = a_i S$ для каждого i. Если S – правое π-V-кольцо, то R также является правым π-V-кольцом.

15.33. Пусть A – алгебра, над коммутативным π-V-кольцом R. Если A – конечно порожденный R-модуль, то A – правое и левое π-V-кольцо.

15.34. Если R – правым π-V-кольцо, то для каждого натурального n кольцо $M_n(R)$ является правым π-V-кольцом.

Автоморфизм инвариантные и дуально автоморфизм инвариантные модули

Модуль M называется *автоморфизм инвариантным,* если для каждого автоморфизма $f \in \mathrm{Aut}(E(M))$ существует гомоморфизм $g \in \mathrm{End}(M)$, для которого коммутативна диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, dotted, "g"'] & E(M) \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, "\iota"] & E(M)
\end{tikzcd},
$$

где $\iota : M \to E(M)$ – естественное вложение.

15.35. Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – автоморфизм инвариантный модуль;

2) всякий изоморфизм между двумя существенными подмодулями модуля M может быть продолжен до эндоморфизма модуля M;

3) всякий изоморфизм между двумя существенными подмодулями модуля M может быть продолжен до автоморфизма модуля M.

Пусть A, B – правые R-модули. Модуль A называется B-*псевдоинъективным,* если для каждого подмодуля B_0 модуля B каждый мономорфизм $f : B_0 \to A$ продолжается до некоторого гомоморфизма $f' : B \to A$. Модуль M называется *псевдоинъективным*, если он M-псевдоинъективен.

15.36. Покажите, что всякий псевдоинъективный модуль является $C2$-модулем.

15.37. Пусть A, B – правые R-модули. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) A – B-псевдоинъективный модуль;

2) для всякого подмодуля X модуля $A \oplus B$, удовлетворяющего условию $X \cap A = X \cap B = 0$, существует подмодуль $Y \leqslant A \oplus B$ такой, что $X \leqslant Y$ и $Y \oplus B = A \oplus B$.

15.38. Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – автоморфизм инвариантный модуль;

2) M – псевдоинъективный модуль.

Модуль M называется *дуально автоморфизм инвариантным,* если для каждых малых подмодулей K_1, K_2 модуля M каждый эпиморфизм $f: M/K_1 \to N/K_2$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \ll M/K_1$, поднимается до некоторого эндоморфизма $f': M \to M$.

15.39. Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – дуально автоморфизм инвариантный модуль;

2) для каждых малых подмодулей K_1, K_2 модуля M каждый эпиморфизм $f: M/K_1 \to N/K_2$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \ll M/K_1$, поднимается до некоторого автоморфизма $f': M \to M$..

15.40. Пусть $f : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Тогда следующие равносильны:

1) M – дуально автоморфизм инвариантный модуль;

2) $g(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant \mathrm{Ker}(f)$ для каждого автоморфизма модуля P;

3) $g(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}(f)$ для каждого автоморфизма модуля P.

Пусть A, B – правые R-модули. Модуль A называется *B-псевдопроективным,* если для каждого подмодуля B_0 модуля B каждый эпиморфизм $f : A \to B/B_0$ поднимается до некоторого гомоморфизма $f' : A \to B$. Модуль M называется *псевдопроективным*, если он M-псевдопроективен.

15.41. Покажите, что всякий псевдопроективный модуль является дуально автоморфизм инвариантным.

15.42. Покажите, что всякий псевдопроективный модуль является $D2$-модулем.

15.43. Пусть A, B – правые R-модули. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) A – B-псевдопроективный модуль;

2) для всякого подмодуля X модуля $A \oplus B$, удовлетворяющего условию $X + A = X + B = A \oplus B$, существует подмодуль $Y \leqslant A \oplus B$ такой, что $Y \leqslant X$ и $Y \oplus B = A \oplus B$.

15.44. Пусть R – полусовершенное справа кольцо. Для конечно порожденного правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – дуально автоморфизм инвариантный модуль;

2) M – псевдопроективный модуль.

15.45. Пусть R – совершенное справа кольцо. Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – дуально автоморфизм инвариантный модуль;

2) M – псевдопроективный модуль.

16 Непрерывные и дискретные модули

CS-модули

Модуль M называется *CS-модулем,* если каждый его замкнутый подмодуль – прямое слагаемое в M.

16.1. Покажите, что:

1) всякий квазиинъективный модуль является CS-модулем;

2) неразложимый модуль M является CS-модулем тогда и только тогда, когда M – однородный модуль.

16.2. Покажите, что прямое слагаемое CS-модуля является CS-модулем.

16.3. Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ – модуль. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) M – CS-модуль;

2) M_1, M_2 – CS-модули и каждый замкнутый подмодуль N модуля M, для которого либо $N \cap M_1 = 0$, либо $N \cap M_2 = 0$, является прямым слагаемым модуля M.

16.4. Пусть $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ – модуль. Покажите, что если для каждой пары различных индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$ модуль M_i – M_j-инъективен, то следующие условия равносильны:

1) M – CS-модуль;

2) $M_1, \ldots, M_n$ – CS-модули.

16.5. Пусть $M = A \oplus B$ – разложение модуля M, A – вполне инвариантный подмодуль модуля M и модули A и B не содержат ненулевых изоморфных подмодулей. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) M – CS-модуль;

2) A, B – CS-модули и A – B-инъективен.

16.6. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – CS-модуль;

2) для некоторого подмодуля B модуля M имеет место разложение

$$M = Z_2(M) \oplus B,$$

где $Z_2(M), B$ – CS-модули и модуль $Z_2(M)$ – B-инъективен.

16.7. Пусть R – область главных идеалов. Покажите, что для конечно порожденного R-модуля M следующие условия раносильны:

1) M – CS-модуль;

2) либо M – свободный модуль, либо M – периодический модуль и для каждого простого элемента q кольца R q-примарная компонента модуля M имеет вид $(R/(q^n))^s \oplus (R/(q^{n+1}))^t$.

16.8. 1) Пусть M – правый R-модуль. Покажите, что если существует такой правый R-модуль N, что $N \in \mathrm{Gen}(M) \setminus Add(M)$ и $Z_M(N) = 0$, то в категории $Add(M)$ существует не CS-модуль.

2) Покажите, что если над кольцом R существует ненулевой правый R-модуль M, удовлетворяющий условиям: $J(M) = M, Z(M) = 0$, то над кольцом R существует свободный правый R-модуль, который не является CS-модулем.

3) Покажите, что каждый неконечно порожденный свободный $\mathbb{Z}$-модуль не является CS-модулем.

16.9. Пусть M – правый R-модуль. Покажите, что если:

1) M – CS-модуль и в кольце R каждая возрастающая цепь правых идеалов, являющихся аннуляторами элементов кольца R, стабилизируется, то M – прямая сумма однородных модулей;

2) M – локально нетеров CS-модуль, то M – прямая сумма однородных модулей.

16.10. Пусть M – циклический модуль, у которого $\mathrm{Soc}(M) \leqslant^e M, J(M) = 0$ и $\mathrm{Soc}(M)$ не является конечно порожденным. Тогда модуль M обладает циклическим подфактором, у которого существует нециклический замкнутый подмодуль.

16.11 (**Теорема Ософски - Смита**). Пусть M – циклический модуль. Если каждый циклический подфактор модуля M является CS-модулем, M – конечная прямая сумма однородных модулей.

CS-модуль M называется *квазинепрерывным* (или π-*инъективным*), если M – $C3$-модуль.

16.12. Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – квазинепрерывный модуль;

2) $\pi(M) \leqslant M$ для каждого идемпотента $\pi \in \mathrm{End}(E(M))$;

3) если $M \leqslant^e M'$, то $\pi(M) \leqslant M$ для каждого идемпотента $\pi \in \mathrm{End}(M')$;

4) если $E(M) = \oplus_{i\in I} M_i$, то $M = \oplus_{i\in I}(M_i \cap M)$;

5) если $M \leqslant^e M'$ и $M' = \oplus_{i\in I} M_i$, то $M = \oplus_{i\in I}(M_i \cap M)$;

6) если $A, B \leqslant M$, A – д.п. для B в M и B – д.п. для A в M, то $M = A \oplus B$;

7) если $A, B \leqslant M$ и $A \cap B = 0$, то существуют такие подмодули A', B' модуля M, что $A \leqslant A'$, $B \leqslant B'$ и $M = A' \oplus B'$;

8) если $A, B \leqslant M$ и $A \cap B = 0$, то существуют такие подмодули A', B', C модуля M, что $A \leqslant^e A'$, $B \leqslant^e B'$ и $M = A' \oplus B' \oplus C$;

9) если $A_1, \ldots, A_n$ – независимое семейство подмодулей модуля M, то существуют такие подмодули $A'_1, \ldots, A'_n$ модуля M, что
$A_1 \leqslant A'_1, \ldots, A_n \leqslant A'_n$ и $M = A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_n$;

10) если $A_1, \ldots, A_n$ – независимое семейство подмодулей модуля M, то существуют такие подмодули $A'_1, \ldots, A'_n, C$ модуля M, что
$A_1 \leqslant^e A'_1, \ldots, A_n \leqslant^e A'_n$ и $M = A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_n \oplus C$;

11) если A, B – замкнутые подмодули модуля M и $A \cap B = 0$, то существует такой подмодуль С модуля M, что $M = A \oplus B \oplus C$;

12) если $A_1, \ldots, A_n$ – независимое семейство замкнутых подмодулей модуля M, то существует такой подмодуль C модуля M, что
$M = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus C$;

13) если $A, B \leqslant M$ и $A \cap B = 0$, то существуют такой гомоморфизм $f \in \mathrm{End}(M)$, что $A \leqslant \mathrm{Ker}(f), B \leqslant \mathrm{Ker}(1 - f)$;

14) если $A_1, \ldots, A_n$ – независимое семейство подмодулей модуля M, то существуют такие гмоморфизмы $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{End}(M)$, что
$1 = f_1 + \ldots + f_n$ и $A_i \leqslant \mathrm{Ker}(f_i)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$;

15) если $A, B \leqslant M$ и $A \cap B = 0$, то мономорфизм $f : M \to M/A \oplus M/B$, действующий по правилу $m \mapsto (m + A, m + B)$, является расщепляющимся;

16) если $A_1, \ldots, A_n$ – независимое семейство подмодулей модуля M, то мономорфизм $f : M \to M/A_1 \oplus \ldots \oplus M/A_n$, действующий по правилу $m \mapsto (m + A_1, \ldots, m + A_n)$, является расщепляющимся;

17) M – CS-модуль и для каждого разложения $M = A \oplus B$ модуль A – B-инъективен, модуль B – A-инъективен;

18) каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля M продолжается до эндоморфизма модуля M;

19) каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля M продолжается до идемпотентного эндоморфизма модуля M.

16.13. Покажите, что модуль $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ является квазинепрерывным в точности тогда, когда M_i квазинепрерывный модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и M_i – M_j-инъективный модуль для каждых различных индексов $1 \leqslant i.j \leqslant n$.

16.14. Покажите, что модуль M является квазинъективным в точности тогда, когда $M \oplus M$ – квазинепрерывный модуль.

CS-модуль M называется *непрерывным*, если M – $C2$-модуль.

16.15. Покажите, что квазинепрерывный модуль M является непрерывным в точности тогда, когда всякий мономорфизм $f \in \mathrm{End}(M)$, у которого $\mathrm{Im}(f) \leqslant^e M$, является изоморфизмом.

16.16. Покажите, что модуль $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ является непрерывным в точности тогда, когда M_i непрерывный модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и M_i – M_j-инъективный модуль для каждых различных индексов $1 \leqslant i.j \leqslant n$.

16.17. Покажите, что модуль $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ является непрерывным в точности тогда, когда M – квазинепрерывный модуль и M_i непрерывный модуль для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Модули со свойством подъема

Правый R-модуль M называется *модулем со свойством подъема*, если каждый его подмодуль лежит над прямым слагаемым модуля M. Если каждый циклический подмодуль модуля M лежит над прямым слагаемым, то модуль M называется *полурегулярным*.

16.18. Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – модуль со свойством подъема;

2) M – строго дополняемый модуль и каждый замкнутый подмодуль модуля M является прямым слагаемым M;

3) M – строго дополняемый модуль и каждое дополенение по пересечению в модуле M является прямым слагаемым M.

16.19. Пусть M – модуль со свойством подъема и N – немалый подмодуль модуля M. Покажите, что N содержит локальный подмодуль, который является прямым слагаемым модуля M.

16.20. Пусть каждый ненулевой подфактор модуля M содержит максимальный подмодуль. Покажите, что если M – модуль со свойством подъема, то M является прямой суммой локальных модулей. В частности, если R – правое max-кольцо, то каждый правый R-модуль со свойством подъема является прямой суммой локальных модулей.

Модуль со свойством подъема M называется *квазидискретным,* если M – $D3$-модуль.

16.21. Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – квазидискретный модуль;

2) M – строго дополняемый модуль и если $A, B \leqslant M$, A – а.д. для B в M и B – а.д. для A в M, то $M = A \oplus B$;

3) M – строго дополняемый модуль и если A, B – подмодули модуля M, для которых выполнено равенство $A+B = M$, то существуют такие подмодули A', B' модуля M, что $A' \leqslant A$, $B' \leqslant B$ и $M = A' \oplus B'$;

4) если $A, B \leqslant M$ и $A + B = M$, то существует такой идемпотент $e \in \mathrm{End}(M)$, что $eM \leqslant A, (1-e)M \leqslant B$ и $(1-e)A \ll (1-e)M$;

7) M – дополняемый модуль и если A, B – подмодули модуля M, для которых выполнено равенство $A + B = M$, то существуют такой гомоморфизм $f \in \mathrm{End}(M)$, что $\mathrm{Im}(f) \subset A, \mathrm{Im}(1-f) \subset B$;

8) M – дополняемый модуль и если $A, B \leqslant M$ и $A + B = M$, то эпиморфизм $f : A \oplus B \to M$, действующий по правилу $(a, b) \mapsto a + b$, является расщепляющимся;

7) M – модуль со свойством подъема и для каждого разложения $M = A \oplus B$ модуль A – B-проективен, модуль B – A-проективен.

16.22. Пусть $f : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Покажите, что для модуля M следующие условия равносильны:

1) M – квазидискретный модуль;

2) $\pi(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)$ для каждого идемпотента $\pi \in \mathrm{End}(P)$.

17 Тензорное произведение модулей и алгебр. Плоские модули

Пусть A – кольцо, X_A и ${}_AY$ – правый и левый A-модули соответственно, $X \times Y$ – декартово произведение, F – свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом, индексированным множеством $X \times Y$ и H – подгруппа в F, порожденная всеми элементами вида $(x+u, y)-(x, y)-(u, y)$, $(x, y+v)-(x, y)-(x, v)$ и $(xa, y) - (x, ay)$, где $x, u \in X$, $y, v \in Y$ и $a \in A$. Абелева группа F/H называется *тензорным произведением* модулей X и Y; она обозначается через $X \otimes_A Y$. Будем писать $X \otimes Y$ вместо $X \otimes_A Y$, если ясно, какое кольцо A имеется в виду. Образ пары (x, y) при естественном отображении $X \times Y \to X \otimes Y$ обозначается через $x \otimes y$.

Тензорное произведение модулей

17.1. Пусть R – кольцо и X_R и ${}_RY$ – правый и левый R-модули соответственно.

1) Для любого $x \in X \otimes Y$ существует такое конечное множество индексов I, что $x = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i$.

2) Если $x, u \in X$, $y, v \in Y$ и $r \in R$, то

$$(x + u) \otimes y = x \otimes y + u \otimes y, \quad x \otimes (y + v) = x \otimes y + x \otimes v, \quad xr \otimes y = x \otimes ry.$$

3) Если $\{y_i\}_{i \in I}$ – образующие модуля модуля Y, $\{x_i\}_{i \in I}$ – элементы модуля X, почти все равные нулю, то $\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i = 0 \Leftrightarrow$ существуют такие множества $\{x'_i \in X\}_{i \in I'}$ и $\{a_{ik} \in R\}_{i \in I', j \in I}$, что $\mid I' \mid < \infty$, почти все элементы множества $\{a_{ik} \in R\}_{i \in I', j \in I}$ равны нулю, $x_j = \sum_{i \in I'} x'_i a_{ij}$ и $\sum_{i \in I} a_{ij} y_j = 0$ для всех i и j.

4) Для любых модульных гомоморфизмов $f\colon X_R \to M_R$ и $g\colon {}_RY \to {}_RN$ групповой гомоморфизм $f\otimes g\colon X\otimes Y \to M\otimes_R N$ корректно задается равенством $(f\otimes g)(\sum x_i\otimes y_i) = \sum f(x_i)\otimes g(y_i)$.

5) Канонический групповой эпиморфизм $h\colon X\otimes_R R \to X$ является изоморфизмом правого R-модуля $X\otimes R$ на модуль X_R.

6) Если $X_R = \oplus_{i\in I}X_i$, то абелева группа $(\oplus_{i\in I}X_i)\otimes Y$ естественным образом изоморфна группе $\oplus_{i\in I}(X_i\otimes Y)$.

7) Если P и Q – подмодули в ${}_RY$, то пересечение в $X\otimes(P+Q)$ канонических образов модулей $X\otimes P$ и $X\otimes Q$ совпадает с каноническим образом модуля $X\otimes(P\cap Q)$.

8) Если I – левый идеал кольца R, то имеет место групповой изоморфизм $X\otimes_R R/J \cong X/XJ$.

17.2. Пусть

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$$

– точная последовательность правых R-модулей. Покажите, что для любого левого R-модуля N последовательность

$$M_1\otimes_R N \xrightarrow{f_1} M_2\otimes_R N \xrightarrow{f_2} M_3\otimes_R N \longrightarrow 0$$

является точной.

17.3. Пусть

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g_1} N_2 \xrightarrow{g_2} N_3 \longrightarrow 0$$

– точные последовательность правых R-модулей. Покажите, что:

1) $\mathrm{Ker}(f_2\otimes g_2) = \mathrm{Im}(1_{M_2}\otimes g_1) + \mathrm{Im}(f_1\otimes 1_{N_2})$;

2) $M_2\otimes_R N_2/\mathrm{Ker}(f_2\otimes g_2) \cong M_2/f_1(M_1)\otimes_R N_2/g_1(N_1)$.

17.4. Пусть R – локальное коммутативное кольцо и M, N – конечно порожденные модули над R. Тогда $M\otimes_R N = 0 \Leftrightarrow$ либо $M = 0$, либо $N = 0$.

17.5. Пусть R – коммутативная область, P – поле частных R и M, N – векторные пространства над полем P. Покажите, что имеет место изоморфизм $M \otimes_P N \cong M \otimes_R N$.

17.6. Пусть M, N – модули над коммутативным кольцом R. Покажите, что:

1) если M – нетеров модуль и N – конечно порожденный модуль, то $M \otimes_R N$ – нетеров модуль;

2) если M – модуль конечной длины и N – конечно порожденный модуль, то $M \otimes_R N$ – модуль конечной длины;

3) если M, N – модули конечной длины, то $M \otimes_R N$ – модуль конечной длины и $\lg(M \otimes_R N) \leqslant \lg(M) \lg(N)$;

4) если M, N – артиновы модули, то $M \otimes_R N$ – артинов модуль.

Плоские модули

Пусть N – левый R-модуль. Правый R-модуль M называется N – *плоским,* если для любого мономорфизма левых R-модулей $f : L \to N$ естественный групповой гомоморфизм $1_M \otimes f : M \otimes L \to M \otimes N$ – мономорфизм.

17.7. Пусть M – правый R-модули, N – левый R-модуль. Покажите, что M – плоский относительно модуля N в точности тогда, когда для любого мономорфизма левых R-модулей $f : L \to N$, где L – конечно порожденный левый R-модуль, естественный групповой гомоморфизм $1_M \otimes f : M \otimes L \to M \otimes N$ – мономорфизм.

17.8. Пусть $(M_i)_{i \in I}$ – семейство правых R-модулей и N – левый R-модуль. Покажите, что модуль $\oplus_{i \in I} M_i$ – плоский относительно модуля N в точности тогда, когда модуль M_i – плоский относительно модуля N для каждого $i \in I$.

17.9. Пусть M – правый R-модули, N – левый R-модуль и $L \leqslant N$. Если M – плоский относительно модуля N, то M – плоский относительно модулей N/L и L.

17.10. Пусть $(N_i)_{i \in I}$ – семейство левых R-модулей. Покажите, что если правый R-модуль M является плоским относительно модуля N_i для каждого $i \in I$, то модуль M – плоский относительно каждого модуля из категории $\sigma(\oplus_{i \in I} N_i)$.

Правый R-модуль M называется *плоским,* если он является плоским относительно каждого левого R-модуля.

17.11. Покажите, что:

1) все прямые суммы и все прямые слагаемые плоских модулей – плоские;

2) все свободные модули – плоские;

3) все проективные модули – плоские.

17.12. Для правого модуля M над кольцом R равносильны условия:

1) M – плоский модуль;

2) для каждого левого идеала I кольца R канонический групповой гомоморфизм $M \otimes I \to M \otimes R$ – мономорфизм;

3)для каждого конечно порожденного левого идеала I кольца R канонический групповой гомоморфизм $M \otimes I \to M \otimes R$ – мономорфизм.

17.13. Для правого модуля M над кольцом R равносильны условия:

1) M – плоский модуль;

2) для любых таких $x_1, \ldots, x_n \in X$ и $y_1, \ldots, y_n \in A$, что $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$, существуют такие $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m \in X$ и $a_{ik} \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m)$, что $x_i = \sum_{k=1}^{m} \overline{x}_k a_{ik}$ и $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i = 0$ для всех i и k.

17.14. Пусть M – плоский правый R-модули и N – его подмодуль. Покажите, что следующие условия равносильны:

1) M/N – плоский модуль;

2) $MI \cap N = NI$ для каждого конечно порожденного левого идеала I кольца R;

3) $MI \cap N = NI$ для каждого левого идеала I кольца R.

Проективность плоских модулей

17.15. Пусть I – ненулевой правый идеал кольца R. Покажите, что если R/I – плоский правый R-модуль, то существует возрастающая регулярная справа ненулевая последовательность элементов из I.

17.16. Пусть P – проективный правый R-модуль, $S = \mathrm{End}_R(P)$ и $f_1, f_2, \ldots$ – возрастающая регулярная справа последовательность элементов из S. Покажите, что:

1) $P/\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(P)$ – плоский модуль;

2) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(P)$ – проективный модуль;

3) если P – конечно порожденный модуль и $P/\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(P)$ – проективный модуль, то последовательность $f_1, f_2, \ldots$ сходится.

В частности, если $A_1, A_2, \ldots$ – возрастающая регулярная справа последовательность элементов из $M_n(R)$, то модуль $R_R^{(n)}/\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i R_R^{(n)}$ является плоским и $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i R_R^{(n)}$ - проективный модуль.

17.17. Покажите, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) каждый циклический плоский правый R-модуль является проективным;

2) всякая возрастающая регулярная справа последовательность элементов из R сходится.

17.18. Покажите, что для кольца R и фиксированного натурального числа n следующие условия равносильны:

1) каждый n-порожденный плоский правый R-модуль является проективным;

2) в кольце $M_n(R)$ всякая возрастающая регулярная справа последовательность сходится.

Кольцо R называется правым *S-кольцом*, если каждый конечно порожденный плоский правый R-модуль является проективным. Из вышеизложенного следует следующая характеризация правых S-колец.

Теорема. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое S-кольцо;

2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ в кольце $M_n(R)$ всякая возрастающая регулярная справа последовательность сходится.

17.19. Покажите, что:

1) каждое подкольцо правого S-кольца является правым S-кольцом;

2) каждая правая область Оре является S-кольцом (в частности, всякая комутативная область является S-кольцом);

3) каждое полулокальное коммутативное кольцо является S-кольцом

4) каждое полусовершенное кольцо является S-кольцом

5) конечное прямое произведение правых S-колец является правым S-кольцом;

6) всякое S-кольцо является I-конечным;

7) I_0-кольцо является правым S-кольцом в точности тогда, когда оно является полусовершенным.

17.20. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ – базис свободного правого R-модуля F и $G = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - x_{i+1}r_i)R$. Покажите, что:

1) F/G – плоский модуль;

2) если G – прямое слагаемое F, то убывающая цепь

$$r_1R \supset r_1r_2R \supset \dots$$

главных правых идеалов стабилизируется.

17.21. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) R – совершенное справа кольцо;

2) над кольцом R каждый плоский правый модуль является проективным.

Инъективные и плоские модули

17.22 (**Теорема Ламбека**). Правый R-модуль M является плоским в точности тогда, когда M^+ – инъективный левый R-модуль.

17.23. Пусть R, S-кольца и F : Mod-$R \to$ Mod-S , G : Mod-$S \to$ Mod-R – функторы. Если функтор G сопряжен слева к функтору F и G – точный слева функтор, то F сохраняет инъективные объекты.

17.24. Пусть P – правый R-модуль и кольцо $S = \mathrm{End}_R(P)$ регулярно. Тогда из инъективности правого R-модуля M следует инъективность правого S-модуля $\mathrm{Hom}_R(P, M)$.

17.25. Если e – ненулевой идемпотент кольца R и eRe – регулярное кольцо, то из инъективности правого R-модуля M следует инъективность правого eRe-модуля Me.

17.26. Пусть $\phi : S \to R$ – кольцевой гомоморфизм и M – инъективный правый R-модуль. Если ${}_SR$ – плоский модуль, то M – инъективный как правый S-модуль.

Тензорное произведение алгебр

17.27. Пусть A, B – алгебры над коммутативном кольцом R. Тогда на R-модуле $A \otimes_R B$ определена операция умножения, удовлетворяющая условию

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

Относительно этой операции умножения R-модуль $A \otimes_R B$ превращается в R-алгебру.

17.28. Установите изоморфизмы алгебр:
1) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$;
2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \oplus \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$;
4) $\left(\dfrac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) \otimes_{\mathbb{R}} \left(\dfrac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) \cong M_4(\mathbb{R})$;
5) $M_n(P) \otimes_P M_m(P) \cong M_{mn}(P)$, где P – поле.

17.29. Пусть A – алгебра над коммутативным кольцом R и I – идеал кольца I. Покажите, что имеет место изоморфизм R-алгебр

$$A/I \otimes_R A \cong A/AI.$$

17.30. Пусть R – коммутативное кольцо, A и B – идеалы кольца R. Покажите, что имеет место изоморфизм колец

$$R/A \otimes_R R/B \cong R/(A+B).$$

17.31. Покажите, что:
1) кольцо $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i]$ неразложимо;
2) $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$

17.32. Пусть $F, P(a)$ – конечные расширения поля P и $f(x)$ – минимальный многочлен элемента a над P. Тогда $F \otimes P(a) \cong F[x]/(f)$.

17.33. Пусть $P_1, \dots, P_n$ – конечные расширения поля P. Покажите, что если $([P_i : P], [P_j : P]) = 1$ для $i \neq j$, то $P_1 \otimes_P \dots \otimes_P P_n$ – поле.

17.34. Пусть P_1, P_2 – конечные расширения поля P одно из которых является расширением Галуа. Покажите, что $P_1 \otimes_P P_2$ – поле в точности тогда, когда поля P_1, P_2 не содержат изоморфных подполей, собственно содержащих поле P.

18 Кольца формальных матриц. Подструктуры Hom

Кольца формальных матриц и модули над ними

Пусть R_1, R_2, …, R_n – кольца, а M_{ij} – R_i-R_j-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Пусть также $\varphi_{ijk}\colon\ M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$ – такие R_i-R_k-бимодульные гомоморфизмы, что φ_{iij} и φ_{ijj} – канонические изоморфизмы для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Обозначим $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$ для $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. Через K обозначим множество всех $n \times n$-матриц (m_{ij}), с элементами $m_{ij} \in M_{ij}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения K будет кольцом в точности тогда $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kl}$, $c \in M_{lj}$, $1 \leqslant i, k, l, j \leqslant n$. Полученное кольцо K называется *кольцом формальных матриц* порядка n и обозначается $K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$. Если $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ – кольцо формальных матриц второго порядка, то упорядоченный набор $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ называется *Морита контекстом*, или *ситуацией предэквивалентности*.

Кольцо формальных матриц $K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, в котором $M_{ij} = R$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, называется *кольцом формальных матриц над R порядка n* и обозначается $K_n(R)$ или $K_n(R\colon \{\varphi_{ikj}\})$. Для кольца формальных матриц над R порядка n $K_n(R\colon \{\varphi_{ijk}\})$ положим $\eta_{ijk} =$

$\varphi_{ijk}(1\otimes 1)$ для всех $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$. Тогда $a\circ b = \varphi_{ijk}(a\otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a,b \in R$. Для любого $a \in R$ имеем $a\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(a\otimes 1) = \varphi_{ijk}(1\otimes a) = \eta_{ijk}a$. Таким образом, $\eta_{ijk} \in C(R)$, и выполняются условия:

1) $\eta_{iij} = \eta_{ijj} = 1, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$

2) $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}, \quad 1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n.$

Первое условие выполняется в силу того, что φ_{iij} и φ_{ijj} – канонические изоморфизмы. В силу ассоциативности операции $\circ$ имеем $\eta_{ijk}\,\eta_{ikl}\,abc = \eta_{ijl}\,\eta_{jkl}\,abc$ для всех $a,b,c \in R$. Положив $a=b=c=1$ получаем второе условие. Для любого набора $\{\eta_{ijk}\,|\,1 \leqslant i,j,k \leqslant n\}$ центральных элементов R, удовлетворяющих первому и второму условию, можно положить $\varphi_{ijk}(a\otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a,b \in R$. Непосредственная проверка показывает, что $K_n(R\colon\{\varphi_{ikj}\})$ – кольцо формальных матриц над R порядка n. Таким образом, кольцо формальных матриц $K_n(R\colon\{\varphi_{ikj}\})$ однозначно определяется набором центральных элементов $\{\eta_{ijk}\,|\,1 \leqslant i,j,k \leqslant n\}$. В этом случае кольцо формальных матриц $K_n(R\colon\{\varphi_{ikj}\})$ мы будем обозначать через $K_n(R\colon\{\eta_{ikj}\})$.

Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$, X – правый R-модуль, Y – правый S-модуль и определены R-модульный гомоморфизм $f\colon\ Y\otimes_S N \to X$ и S-модульный гомоморфизм $g\colon\ X\otimes_R M \to Y$. Положим $yn := f(y\otimes n)$, $xm := g(x\otimes m)$ и потребуем выполнение равенств $(yn)m = y(nm)$ и $(xm)n = x(mn)$ для всех $x\in X$, $y \in Y$, $m \in M$, $n \in N$. В этом случае группа вектор-строк (X,Y) естественным образом наделяется структурой правого K-модуля. Несложно показать что любой правый K-модуль можно представить в виде модуля вектор-строк. Гомоморфизмы K-модулей можно представить в виде пары, состоящей из R-гомоморфизма и S-гомоморфизма. А именно, если $\Gamma\colon\ (X,Y) \to (X',Y')$ - гомоморфизм, то найдутся R-гомоморфизм $\alpha\colon\ X \to X'$ и S-гомоморфизм $\beta\colon\ Y \to Y'$ такие, что $\Gamma(x,y) = (\alpha(x),\beta(y))$. При этом выполняются соотношения $\alpha(yn) = \beta(y)n$ и $\beta(xm) = \alpha(x)m$ для всех $x \in X$, $y\in Y$, $m \in M$, $n\in N$.

Далее K – произвольное кольцо формальных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$.

18.1. Пусть (A,B) – правый K-модуль. Установите следующие вложения, сохраняющие отношение включения:

1) $\mathrm{Lat}((A,B)_K) \hookrightarrow \mathrm{Lat}((A,B)_{R\times S})$;

2) $\mathrm{Lat}(A_R) \hookrightarrow \mathrm{Lat}((A,B)_K)$;

3) $\mathrm{Lat}(B_S) \hookrightarrow \mathrm{Lat}((A,B)_K)$.

18.2. Покажите, что для правого K-модуля (A,B) следующие условия равносильны:

1) $(A,B)_K$ – нетеров (артинов) модуль;

2) A_R, B_S – нетеровы (артиновы) модули.

18.3. Покажите, что для кольца формальных матриц $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ следующие условия равносильны:

1) K – нетерово (артиново) справа кольцо;

2) R, S – нетеровы (артиновы) справа кольца и правые модули M_S, N_R – нетеровы (артиновы).

18.4. Пусть (A,B) – правый K-модуль конечной длины. Тогда

1) A_R, B_S – модули конечной длины;

2) $\max(\lg(A_R), \lg(B_S)) \leqslant \lg((A,B)_K) \leqslant \lg(A_R) + \lg(B_S)$;

3) если идеалы следа кольца формальных матриц K равны нулю, то

$$\lg((A,B)_K) = \lg(A_R) + \lg(B_S).$$

Приведите пример правого K - модуля (A,B) конечной длины, для которого выполнено равенство

$$\max(\lg(A_R), \lg(B_S)) = \lg((A,B)_K).$$

18.5. Правый K-модуль (A,B) является простым в точности тогда, когда либо A и B – простые модули и $A = BN$, $B = AM$, либо A – простой модуль и $B = 0$, либо $A = 0$ и B – простой модуль.

Пусть (X,Y) – правый K-модуль. Определим подмодули модулей X и Y, положив $L(X) = \{x \in X \mid xm = 0 \text{ для каждого } m \in M\}$ и $L(Y) = \{y \in Y \mid yn = 0 \text{ для каждого } n \in N\}$.

18.6. Покажите, что для правого K-модуля (A, B) имеет место равенство:

$$\operatorname{Soc}((A, B)) = (\operatorname{Soc} L(A), \operatorname{Soc} L(B)) + \sum (X, XM),$$

где суммирование производится по всем таким минимальным подмодулям X в A, что $XMN \neq 0$ и XM – минимальный подмодуль в B.

18.7. Пусть (A, B) – подмодуль K-модуля (X, Y). Покажите, что (A, B) – максимальный подмодуль в точности тогда, когда либо A и B – максимальные и $XM \nsubseteq B$, $YN \nsubseteq A$, либо A – максимальный и $B = Y$, либо $A = X$ и B – максимальный.

18.8. Пусть кольцо K имеет нулевые идеалы следа и (X, Y) – правый K-модуль. Тогда

1) K-модуль (X, Y) конечно порожден в точности тогда, когда R-модуль X/YN и S-модуль Y/XM конечно порождены;

2) подмодуль (A, B) является малым в (X, Y) в точности тогда, когда $(A + YN)/YN \ll X/YN$ и $(B + XM)/XM \ll B/XM$;

3) если модуль (X, Y) ненулевой, то он является полым в точности тогда, когда либо X/YN – полый модуль и $Y = XM$, либо Y/XM – полый модуль и $X = YN$;

4) модуль (X, Y) является локальным в точности тогда, когда либо X/YN – локальный модуль и $Y = XM$, либо Y/XM – локальный модуль и $X = YN$;

5) подмодуль (A, B) модуля (X, Y) является существенным в точности тогда, когда $A \cap L(X)$ – существенный подмодуль в $L(X)$ и $B \cap L(Y)$ – существенный подмодуль в $L(Y)$;

6) модуль (X, Y) однороден в точности тогда, когда либо $L(X) = 0$ и Y однороден, либо $L(Y) = 0$ и X однороден;

18.9. Для кольца формальных матриц $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ следующие условия равносильны:

1) K – правое max-кольцо.

2) R и S – правые max-кольца.

18.10. Для кольца формальных матриц $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ следующие условия равносильны:

1) K – полуартиново справа кольцо;

2) R и S – полуартиновы справа кольца.

18.11. Покажите, что:

1) кольцо формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n является полуартиновым справа (правым max-кольцом) в точности тогда, когда R_i является полуартиновым справа кольцом (правым max-кольцом) для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$;

2) кольцо формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n является совершенным справа в точности тогда, когда R_i является совершенным справа кольцом для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Подструктуры Hom

Пусть M, N – правые R-модули. *Радикалом Джекобсона* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ называется множество вида

$J(\mathrm{Hom}_R(M, N)) := \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) : 1_M - gf \in U(\mathrm{End}_R(M))\}$.

18.12. Докажите равенства

$$J(\mathrm{Hom}_R(M, N))$$

$$= \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) : 1_N - fg \in U(\mathrm{End}(N))\}$$

$$= \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) : gf \in J(\mathrm{End}(M))\}$$

$$= \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) : fg \in J(\mathrm{End}(N))\}.$$

18.13. Пусть A, B – правые R-модули и $C \leqslant A, D \leqslant B$. Тогда:

1) $J(\mathrm{Hom}(A, D)) \subset J(\mathrm{Hom}(A, B))$;

2) $J(\mathrm{Hom}(A/C, B))\pi \subset J(\mathrm{Hom}(A, B))$, где $\pi : A \to A/C$ – естественный гомоморфизм.

18.14. Если A, B, C, D – правые R-модули, то

$$\operatorname{Hom}(B,D)J(\operatorname{Hom}(A,B))\operatorname{Hom}(C,A)\subset J(\operatorname{Hom}(C,D)).$$

18.15. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ – правые R-модули, $\pi_i : A \to A_i$, $\pi'_j : B \to B_j$ – канонические проекции, $\varepsilon_i : A_i \to A$, $\varepsilon'_j : B_j \to B$ – канонические вложения. Тогда имеют место равенства:

1) $J(\operatorname{Hom}(A,B)) = (J(\operatorname{Hom}(A_i,B_j)))$;

2) $J(\operatorname{Hom}(A_i,B_j)) = \pi'_j J(\operatorname{Hom}(A,B))\varepsilon_i$.

Пусть e, f – идемпотенты кольца R. Ввиду канонического изоморфизма $\operatorname{Hom}_R(fR,eR) \cong eRf$ будем считать, что $J(eRf) = \{r \in eRf \mid \forall s \in fRe : e - rs \in U(eRe)\}$.

18.16. Пусть e, f – идемпотенты кольца R. Тогда $J(eRf) = eJ(R)f$.

Для каждой пары правых R-модулей M и N определим подгруппы абелевой группы $\operatorname{Hom}_R(M,N)$:

$$\triangle(\operatorname{Hom}_R(M,N)) = \{f \in \operatorname{Hom}_R(M,N) \mid \operatorname{Ker}(f) \leqslant^e M\};$$

$$\triangledown(\operatorname{Hom}_R(M,N)) = \{f \in \operatorname{Hom}_R(M,N) \mid \operatorname{Im}(f) \ll N\}.$$

18.17. Пусть M, N – правые R-модули. Покажите, что если:

1) M – $C2$-модуль, то $\triangle(\operatorname{Hom}_R(M,N)) \subset J(\operatorname{Hom}_R(M,N))$;

2) N – $D2$-модуль, то $\triangledown(\operatorname{Hom}_R(M,N)) \subset J(\operatorname{Hom}_R(M,N))$.

18.18. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ – правые R-модули. Тогда имеют место равенства:

1) $\triangle(\operatorname{Hom}(A,B)) = (\triangle(\operatorname{Hom}(A_i,B_j)))$;

2) $\triangledown(\operatorname{Hom}(A,B)) = (\triangledown(\operatorname{Hom}(A_i,B_j)))$.

18.19. Пусть $A = \oplus_{i\in I} A_i$ и $B = \oplus_{j\in J} B_j$ – правые R-модули. Покажите, что:

1) $\triangle(\mathrm{Hom}(A,B))=0 \Leftrightarrow \forall i\in I \forall j\in J \triangle (\mathrm{Hom}(A_i,B_j))=0$;

2) $\bigtriangledown(\mathrm{Hom}(A,B))=0 \Leftrightarrow \forall i\in I \forall j\in J \bigtriangledown (\mathrm{Hom}(A_i,B_j))=0$.

Регулярные гомоморфизмы

18.20. Пусть M,N – правые R-модули. Тогда для гомоморфизма $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ следующие условия равносильны:

1) существует такой гомоморфизм $g\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, что $f=fgf$;

2) образ и ядро отображения f выделяются в виде прямого слагаемого в модуле N и в модуле M соответственно.

Гомоморфизм $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ называется *регулярным*, если он удовлетворяет одному из пунктов предыдущей теоремы. $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ называется *регулярным*, если каждый элемент из $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ регулярен.

18.21. Пусть M – модуль и $f\in \mathrm{End}(M)$. Покажите, что:

1) гомоморфизм f строго регулярен в точности тогда, когда $M=\mathrm{Ker}(f)\oplus f(M)$;

2) гомоморфизм f строго π-регулярен в точности тогда, когда существует такое $n\in\mathbb{N}$, что $M=\mathrm{Ker}(f^n)\oplus f^n(M)$.

18.22. Пусть M – правый R-модуль, у которого кольцо $S=\mathrm{End}_R(M)$ регулярно. Тогда следующие условия равносильны:

1) S – обратимо регулярное кольцо;

2) если $M=A_1\oplus B_1=A_2\oplus B_2$ и $A_1\cong A_2$, то $B_1\cong B_2$.

18.23. Пусть M,N – правые R-модули, $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ и $g\in \mathrm{Hom}_R(N,M)$. Покажите, что если $f-fgf$ – регулярный элемент, то элемент f регулярен.

18.24. Пусть M, N – правые R-модули. Тогда $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ содержит наибольший регулярный $\mathrm{End}(N)$-$\mathrm{End}(M)$-подбимодуль.

Далее для произвольных правых R-модулей M и N через $\mathrm{Reg}(M,N)$ мы будем обозначать наибольший регулярный подбимодуль бимодуля ${}_{\mathrm{End}_R(N)}\,\mathrm{Hom}_R(M,N)_{\mathrm{End}_R(M)}$. Ясно, что

$\mathrm{Reg}(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid$ каждый гомоморфизм из $\mathrm{End}_R(N) f \,\mathrm{End}_R(M)$ регулярен $\}$.

18.25. Пусть $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ и $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$ – правые R-модули. Тогда

$\mathrm{Reg}(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid \mathrm{Hom}_R(N_i,N_t) f_{ij} \,\mathrm{Hom}_R(M_s,M_j) \subset \mathrm{Reg}(M_s,N_t)\}$.

18.26. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ – правые R-модули.. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathrm{Hom}(A,B)$ регулярно;

2) для каждых $1 \leqq i \leqq n$ и $1 \leqq j \leqq m$ $\mathrm{Hom}(A_i,B_j)$ регулярно.

Полурегулярные гомоморфизмы

Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ называется *полурегулярным,* если существует такой гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$, что

$$gfg = g, f - fgf \in J(\mathrm{Hom}_R(M,N)).$$

$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ называется *полурегулярным,* если каждый гомоморфизм из $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ полурегулярен.

18.27. Покажите, что для гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ следующие условия равносильны:

1) f – полурегулярный гомоморфизм;

2) существует гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ такой, что $(gf)^2 = gf$ и $f - fgf \in J(\mathrm{Hom}_R(M,N))$;

3) существует регулярный гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ такой, что $f - g \in J(\mathrm{Hom}_R(M,N))$.

18.28. Покажите, что $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ регулярно в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ полурегулярно и $J(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = 0$.

18.29. Пусть M, N – правые R-модули и $M = M_1 \oplus M_2$, $N = N_1 \oplus N_2$. Тогда:

1) $\mathrm{Hom}(M, N_1)$ и $\mathrm{Hom}(M, N_2)$ полурегулярны в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}(M, N)$ полурегулярно;

2) $\mathrm{Hom}(M_1, N)$ и $\mathrm{Hom}(M_2, N)$ полурегулярны в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}(M, N)$ полурегулярно.

18.30. Пусть $(A)_{i \in I}$ – семейство правых R-модулей и N – конечно порожденный правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathrm{Hom}_R(N, A_i)$ полурегулярно для каждого $i \in I$;

2) $\mathrm{Hom}_R(N, \oplus_{i \in I} A_i)$ полурегулярно.

18.31. Пусть M, N – правые R-модули и $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathrm{Hom}(M, N)$ полурегулярно;

2) для каждых $1 \leqq i \leqq n$ и $1 \leqq j \leqq m$ $\mathrm{Hom}(M_i, N_j)$ полурегулярно.

Пусть M, N – правые R-модули. Модуль M называется *прямо N-инъективным,* если каждый подмодуль модуля N, изоморфный прямому слагаемому модуля M, является прямым слагаемым N. Модуль M называется *прямо N-проективным,* если всякий эпиморфизм, действующий из N в модуль, изоморфный прямому слагаемому модуля M, является расщепляющимся.

18.32. Пусть M, N – правые R-модули. Покажите, что если модуль M является N-прямо инъективным и $C2$-модулем, то следующие условия равносильны:

1) $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ полурегулярно и $\triangle(\mathrm{Hom}_R(M, N)) = J(\mathrm{Hom}_R(M, N))$;

2) для каждого $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ подмодуль $\mathrm{Ker}(f)$ является существенным в некотором прямом слагаемом модуля M.

18.33. Пусть M, N – правые R-модули. Покажите, что если модуль N является M-прямо проективным и $D2$-модулем, то следующие условия равносильны:

1) $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ полурегулярно и $\bigtriangledown(\mathrm{Hom}_R(M, N)) = J(\mathrm{Hom}_R(M, N))$;
2) для каждого $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ подмодуль $\mathrm{Im}(f)$ лежит над прямым слагаемым модуля N.

Частично обратимые гомоморфизмы

18.34. Пусть M, N – правые R-модули. Покажите, что для гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ следующие условия равносильны:

1) существует такой гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, что $e = gf = e^2 \neq 0$;
2) существует такой гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, что $d = fh = d^2 \neq 0$;
3) существует такой гомоморфизм $k \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, что $k = kfk \neq 0$;
4) существуют такие ненулевые прямые слагаемые A и B модуля M и модуля N соответственно, что f индуцирует изоморфизм между A и B.

Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, удовлетворяющий одному из эквивалентных условий предыдущего упражнения, называется *частично обратимым.*

18.35. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(C, A)$ и $h \in \mathrm{Hom}_R(B, D)$. Если элемент hfg частично обратим, то элемент f также частично обратим.

18.36. Пусть A, B – правые R-модули. Имеют место следующие утверждения:

1) если $\mathrm{End}(B)$ является I_0-кольцом, то каждый элемент из $\mathrm{Hom}(A, B) \backslash J(\mathrm{Hom}(A, B))$ частично обратим;

2) если $\mathrm{End}(A)$ является I_0-кольцом, то каждый элемент из $\mathrm{Hom}(A,B)\backslash J(\mathrm{Hom}(A,B))$ частично обратим.

18.37. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$. Тогда следующие условия равносильны:

1) каждый элемент из $\mathrm{Hom}(A,B)\backslash J(\mathrm{Hom}(A,B))$ частично обратим;

2) каждый элемент из $\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\backslash J(\mathrm{Hom}(A_i,B_j))$ частично обратим для всех i и j.

18.38. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathrm{End}(A)$ – I_0-кольцо;

2) каждый элемент из $\mathrm{Hom}(A_i,A_j)\backslash J(\mathrm{Hom}(A_i,A_j))$ частично обратим для всех i и j;

3) каждый элемент из $\mathrm{Hom}(A_i,A_i)\backslash J(\mathrm{Hom}(A_i,A_i))$ частично обратим для всех i.

18.39. Пусть $(A)_{i\in I}$ – семейство правых R-модулей и B – конечно порожденный правый R- модуль. Тогда следующие условия равносильны:

1) всякий элемент из $\mathrm{Hom}(B,A_i)\backslash J(\mathrm{Hom}(B,A_i))$ частично обратим для каждого $i \in I$;

2) всякий элемент из $\mathrm{Hom}(B,\oplus_{i\in I}A_i)\backslash J(\mathrm{Hom}(B,\oplus_{i\in I}A_i))$ частично обратим.

Слабо регулярные гомоморфизмы

Пусть $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$. Введем следующие обозначения

$H_r(f) := \{\sum\limits_i g_i f s_i | g_i \in \mathrm{Hom}_R(B,A), s_i \in \mathrm{Hom}_R(A,A)$ для каждого $i\}$;

$H_l(f) := \{\sum\limits_i s_i f g_i | g_i \in \mathrm{Hom}_R(B,A), s_i \in \mathrm{Hom}_R(B,B)$ для каждого $i\}$.

Легко видеть, что, если $f \in \mathrm{Hom}_R(B,C), g \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$, то $H_r(fg) \subset H_r(g)$. Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ назовем *слабо регулярными справа (слева)*, если выполнено условие $f \in fH_r(f)(f \in H_l(f)f)$. Подмножество $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ назовем слабо регулярным справа (слева), если каждый его элемент является слабо регулярным справа(слева). $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ называется *слабо регулярным*, если $f \in \mathrm{Hom}_R(B, B) f H_r(f)$ для каждого $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$.

18.40. Если $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ слабо регулярен справа (соответственно слева), то $J(\mathrm{Hom}_R(A, B)) = 0$

18.41. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B), g \in H_r(f)$. Если $f - fg \in (f - fg)H_r(f - fg)$, то f слабо регулярен справа.

18.42. Пусть A, B – правые R-модули. Тогда $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ содержит наибольший слабо регулярный справа (слева) $\mathrm{End}_R(B)$-$\mathrm{End}_R(A)$-подбимодуль.

18.43. 1) Пусть $\mathrm{Hom}_R(A, C_1), \ldots, \mathrm{Hom}_R(A, C_m)$ слабо регулярны справа. Тогда для каждого семейства гомоморфизмов

$$f_1 \in \mathrm{Hom}_R(B, C_1), \ldots, f_m \in \mathrm{Hom}_R(B, C_m)$$

и каждого гомоморфизма $s \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ существует такой гомоморфизм $h \in H_r(s)$, что для каждого $1 \leqq i \leqq m$ имеет место равенство $f_i s = f_i s h$.

2) Пусть $\mathrm{Hom}_R(C_1, A), \ldots, \mathrm{Hom}_R(C_m, A)$ слабо регулярны слева. Тогда для каждого семейства гомоморфизмов

$$f_1 \in \mathrm{Hom}_R(C_1, B), \ldots, f_m \in \mathrm{Hom}_R(C_m, B)$$

и каждого гомоморфизма $s \in \mathrm{Hom}_R(B, A)$ существует такой гомоморфизм $h \in H_l(s)$, что для каждого $1 \leqq i \leqq m$ имеет место равенство $s f_i = h s f_i$.

18.44. Пусть $B = B_1 \oplus B_2$ – правый R-модуль. Тогда если $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ слабо регулярно (соотв., справа, слева), то $\mathrm{Hom}_R(A, B_1)$ слабо регулярно (соотв., справа, слева).

18.45. Пусть $B = B_1 \oplus B_2$ – правый R-модуль. Тогда если $\mathrm{Hom}_R(A, B_1)$ и $\mathrm{Hom}_R(A, B_2)$ слабо регулярно (соотв., справа, слева), то $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ слабо регулярно (соотв., справа, слева).

18.46. Пусть $(A)_{i\in I}$ – семейство правых R-модулей и N – конечно порожденный правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathrm{Hom}_R(N, A_i)$ слабо регулярно (соотв., справа, слева) для каждого $i \in I$;

2) $\mathrm{Hom}_R(N, \oplus_{i\in I} A_i)$ слабо регулярно (соотв., справа, слева).

18.47. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ – правые R-модули. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ слабо регулярно (соотв., справа, слева);

2) для каждых $1 \leqq i \leqq n$ и $1 \leqq j \leqq m$ $\mathrm{Hom}_R(A_i, B_j)$ слабо регулярно (соотв., справа, слева).

18.48. Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n следующие условия равносильны:

1) K – регулярное кольцо;

2) для каждой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и каждого элемента $m \in M_{ij}$ выполнено условие $m \in mM_{ji}m$.

18.49. Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n следующие условия равносильны:

1) K – слабо регулярное справа кольцо;

2) для каждой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и каждого элемента $m \in M_{ij}$ выполнено условие $m \in mM_{ji}mR_j$.

18.50. Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, у которого для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ кольцо R_i коммутативно, следующие условия равносильны:

1) K – слабо регулярное справа кольцо;

2) K – слабо регулярное слева кольцо;

3) K – регулярное кольцо.

18.51. Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n следующие условия равносильны:

1) K – I_0-кольцо;

2) для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ кольцо R_i является I_0-кольцом.

Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n и для каждых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ через $\mathrm{Reg}(M_{ij})$ обозначим множество вида $\{m \in M_{ij} \mid m \in mM_{ji}m\}$.

18.52. Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n имеет место равенство

$$\mathrm{Reg}(K) = \{r \in K \mid M_{ti}r_{ij}M_{js} \subset \mathrm{Reg}(M_{ts})\},$$

где $\mathrm{Reg}(K)$ – наибольший регулярный идеал кольца K.

Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n и для каждых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ через $I(M_{ij})$ обозначим множество вида $\{m \in M_{ij} \mid m \in mM_{ji}mR_j\}$.

18.53. Для кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n имеет место равенство

$$I(K) = \{r \in K \mid M_{ti}r_{ij}M_{js} \subset I(M_{ts})\},$$

где $I(K)$ – наибольший слабо регулярный справа идеал кольца K.

18.54. Пусть $K = K_n(R\colon \{\eta_{ikj}\})$ – кольцо формальных матриц над R порядка n.

1) Если каждый элемент из множества $\{\eta_{ikj}\}$ не является делителем нуля, то имеют место равенства:

а) $I(K) = \begin{pmatrix} I(R) & I(R) & \dots & I(R) \\ I(R) & I(R) & \dots & I(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I(R) & I(R) & \dots & I(R) \end{pmatrix};$

b) $\operatorname{Reg}(K) = \begin{pmatrix} \operatorname{Reg}(R) & \operatorname{Reg}(R) & \dots & \operatorname{Reg}(R) \\ \operatorname{Reg}(R) & \operatorname{Reg}(R) & \dots & \operatorname{Reg}(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{Reg}(R) & \operatorname{Reg}(R) & \dots & \operatorname{Reg}(R) \end{pmatrix}.$

2) K слабо регулярное справа кольцо $\Leftrightarrow$ R слабо регулярное справа кольцо и $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$.

3) K регулярно $\Leftrightarrow$ R регулярно и $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$.

19 Решения и указания

1.6. 3) Пусть I – ненулевой идеал кольца $R[x]$. Выберем в идеале I ненулевой многочлен f наименьшей степени. Поскольку кольцо R просто, то без ограничения общности можно считать, что многочлен f имеет вид $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. В силу выбора многочлена f его коэффициенты принадлежат $C(R)$. Тогда, используя деление с остатком на многочлен f, несложно показать, что $I = fR[x]$.

1.12. Заметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1+ab \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1+ba & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ получаются из матрицы $\begin{pmatrix} 1 & b \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований над строками. Таким образом, имеют место эквивалентности

$$
\begin{gathered}
1+ab - \text{обратимый слева элемент} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+ba & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} - \text{обратимая слева матрица} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ -a & 1 \end{pmatrix} - \text{обратимая слева матрица} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+ba & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} - \text{обратимая слева матрица} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 1+ba - \text{обратимый слева элемент.}
\end{gathered}
$$

1.18. 2) Пусть $R' = R/N(R)$. Ясно, что $\mathrm{Nil}(R')$ аддитивно замкнуто. Тогда в кольце R' сумма двух правых (левых) ниль-идеалов является правым (левым) ниль-идеалом. Так как $N(R') = 0$, то всякий односторонний ниль-идеал кольца R является нулевым.

Покажем, что если для элементов $a, b \in R'$ выполнены равенства $a^2 = b^2 = 0$, то $ab \in \mathrm{Nil}(R')$. Так как $a + b \in \mathrm{Nil}(R')$, то $(a+b)^2 = ab + ba \in \mathrm{Nil}(R')$. Для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$(ab+ba)^k = (ab)^k + (ba)^k = 0.$$

Следовательно, $(ab)^{k+1} = 0$.

Покажем, что для произвольных элементов $a, b \in R'$, удовлетворяющих условиям $a^2 = 0, b^{2^n} = 0 (n \in \mathbb{N})$, выполнено равенство $(ab)^{2^{n-1}}a = 0$. Докажем с помощью индукции по n. При $n = 1$ для произвольного $r \in R$ имеем равенства $a^2 = b^2 = 0, (ara)^2 = 0$ Следовательно, согласно доказанному выше $arab \in \mathrm{Nil}(R')$. Тогда $R'aba$ – ниль-идеал. Так как в кольце R' всякий односторонний ниль-идеал является нулевым, то $aba = 0$. Пусть для элементов $a, b \in R'$ выполнены равенства $a^2 = 0, b^{2^n} = 0$. Согласно предположению индукции имеем равенство $(ab^2)^{2^{n-2}}a = 0$. Тогда $0 = b(ab^2)^{2^{n-2}}ab = (bab)^{2^{n-2}+1}$ и, следовательно, $(bab)^{2^{n-1}} = 0$. По предположению индукции имеем $(abab)^{2^{n-2}}a = 0$, т.е. $(ab)^{2^{n-1}}a = 0$.

Пусть $a, b \in \mathrm{Nil}(R')$. Тогда имеет место равенство $a^n = 0 (n \in \mathbb{N})$. Покажем, что для каждого $1 \leqslant k \leqslant n-1$ выполнено равенство $a^{n-k}(ba)^k = 0$ с помощью индукции по k. Так как $(ara^{n-1})^2 = 0$ для произвольного $r \in R'$, то согласно доказанному выше $ara^{n-1}b \in \mathrm{Nil}(R')$ и, следовательно, $Ra^{n-1}ba$ – ниль-идеал. Так как в кольце R' всякий односторонний ниль-идеал является нулевым, то $a^{n-1}ba = 0$. Предположим, что равенство $a^{n-k}(ba)^k = 0$ выполнено для $1 \leqslant k < n-1$. Так как $(a(ba)^k ra^{n-k-1})^2 = 0$ для произвольного $r \in R'$, то согласно доказанному выше $a(ba)^k ra^{n-k-1}b \in \mathrm{Nil}(R')$. Тогда $Ra^{n-k-1}(ba)^{k+1}$ – ниль-идеал и, следовательно, $a^{n-k-1}(ba)^{k+1} = 0$. Таким образом, $(ab)^{n-1}a = 0$ и $ab \in \mathrm{Nil}(R')$.

Так как $\mathrm{Nil}(R')$ мультипликативно замкнуто, то множество $\mathrm{Nil}(R)$ также, очевидно, мультипликативно замкнуто.

1.20. 2) В силу равенства $C_{M_n(S)}(A) = C_{M_n(S)}(A^{-1})$ и условия $A \in M_n(R)$ компоненты матриц A и A^{-1} содержатся в коммутативном подкольце кольца S.

1.26. Имеет место равенство $(r^2 - r)^n = 0$, где n – нечетное натуральное число. Следовательно, $r^n = f(r)r^{n+1}$ и $f(x) - 1 = (x-1)g(x)$, где $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Таким образом, $r^n = f(r)rr^n$ и, как легко видеть, для каждого $i \geqslant 1$ имеем $r^n = (f(r)r)^i r^n$. В частности, $r^n = r^n f(r)^n r^n$ и $((f(r)r)^n)^2 = (f(r)r)^n$. Так как $r - (f(r)r)^n \in (r^2 - r)\mathbb{Z}[r]$, то $r - (f(r)r)^n$ нильпотент.

1.27. 1) Доказывается аналогично 1.26.

2) Пусть $x+I$ – идемпотент кольца R/I. Тогда $x^2-x \in e_1R+\ldots+e_nR$, где $e_1, \ldots, e_n$ – центральные идемпотенты кольца R. Следовательно, для некоторого центрального идемпотента e имеем $x^2-x \in eR$. Тогда $x(1-e)-(x(1-e))^2 = (x-x^2)(1-e) = 0$. Поэтому $x(1-e)$ – идемпотент и $x(1-e)+I = x+I$.

1.28. Пусть I – идеал кольца R и $a^2-a \in I$. Для некоторых $e = e^2, u \in U(R)$ имеет место равенство $a = e+u$. Тогда

$$a - u(1-e)u^{-1} = (a^2-a)u^{-1} \in I.$$

1.29. 1) Пусть $I = (i_1, \ldots, i_n)$. Так как I конечно порожден, то для некоторой матрицы $A \in M_n(I)$ имеет место матричное равенство

$$(i_1, \ldots, i_n)A = (i_1, \ldots, i_n).$$

Пусть B – матрица взаимная матрице $A-E$. Тогда

$$0 = (i_1, \ldots, i_n)(A-E)B = (i_1, \ldots, i_n)\det(A-E).$$

Несложно заметить, что $\det(A-E) = 1-e$, где $e \in I$. Тогда непосредственно проверяется, что $e^2 = e$ и $I = eR$.

2) Рассмотрите бесконечное прямое произведние полей.

3) Доказывается аналогично пункту 1).

1.30. Если $I^2 \neq 0$, то $ab \neq 0$ для некоторых $a, b \in I$. Тогда из минимальности правого идеала I имеем $aI = I, r(a) \cap I = 0$. Следовательно, существует элемент $e \in I$ такой, что $ae = a, a(e^2-e) = 0$. Таким образом, $e^2-e = 0$.

1.32. 1) Пусть ere – произвольный ненулевой элемент из кольца eRe. Так как eR – минимальный правый идеал, то для некоторого элемента $s \in R$ имеет место равенство $eres = e$. Следовательно, $ereese = e$.

2) Пусть re – произвольный ненулевой элемент из Re. Поскольку Re не содержит нильпотентных левых идеалов, то для некоторого элемента $s \in R$ имеет место неравенство $esre \neq 0$. Так как eRe – тело, то для некоторого элемента $t \in R$ имеем $(ete)(esre) = e$. Следовательно, $Rre = Re$.

1.35. Утверждение следует из следующих равенств

$$(1+(f-e)(2e-1))e = f(1+(f-e)(2e-1))$$

$$(1+(f-e)(2e-1))(1+(2e-1)(f-e)) = (1+(2e-1)(f-e))(1+(f-e)(2e-1)) =$$
$$= 1-(f-e)^2.$$

1.43. Пусть $R = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{2^i}$. Тогда $I = \bigoplus_{i=1}^{\infty} 2\mathbb{Z}_{2^i}$ идеал кольца R, удовлетворяющий необходимым условиям.

1.45. Достаточно показать, что $N(\mathcal{A})$ – нильпотентный идеал. Предположим, что $N(\mathcal{A})$ – ненильпотентный идеал. Тогда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеем $N(\mathcal{A})^k = N(\mathcal{A})^{k+1} \neq 0$. Пусть $I = N(\mathcal{A})^k$. Так как $I^2 = I$ и $\mathcal{A}$ – конечномерная алгебра, то существует минимальный элемент J в множестве всех ненулевых правых идеалов X, для которых выполнены условия $XI = X, X \subset N(\mathcal{A})$. Тогда для некоторого ненулевого элемента $j \in J$ имеем $jI \neq 0, jII = jI$. В силу выбора J имеем $jR \subseteq J = jI \subseteq jR$. Тогда $ji = j$ для некоторого $i \in N(\mathcal{A})$. Так как элемент $1-i$ обратим, то $j = 0$, что противоречит выбору элемента j.

1.51. Воспользуйтесь результатами упражнения 1.10.

1.52. 1) Следует из конечномерности алгебры $\mathcal{A}$ и 1.30.

2) Рефлексивность отношения $\sim$ очевидна. Докажем транзитивность отношения $\sim$. Пусть $e_iae_j \neq 0, e_jbe_k \neq 0$. Из минимальности идеала $e_j\mathcal{A}$ следует равенство $e_jbe_k\mathcal{A} = e_j\mathcal{A}$. Тогда $0 \neq e_iae_j\mathcal{A} = e_iae_jbe_k\mathcal{A}$. Следовательно, $e_i\mathcal{A}e_k \neq 0$. Аналогично проверяется симметричность отношения $\sim$.

3) Покажем, что $\dim_P(e_j\mathcal{A}e_i) = \dim_P(e_i\mathcal{A}e_i)$. Для некоторого $a \in \mathcal{A}$ имеем $e_jae_i \neq 0$. Поскольку $e_j\mathcal{A}$ – минимальный правый идеал, то $e_jae_i\mathcal{A} = e_j\mathcal{A}$ и, следовательно, $e_jae_i\mathcal{A}e_i = e_j\mathcal{A}e_i$. Тогда $\dim_P(e_j\mathcal{A}e_i) \leqslant \dim_P(e_i\mathcal{A}e_i)$. Аналогично можно показать, что $\dim_P(e_i\mathcal{A}e_i) \leqslant \dim_P(e_j\mathcal{A}e_i)$. Следовательно, $\dim_P(e_j\mathcal{A}e_i) = \dim_P(e_i\mathcal{A}e_i)$. Остальные равенства доказываются аналогично.

4) Проверяется непосредственно.

5) Согласно 1.32 $e_1\mathcal{A}e_1$ – тело. Рассмотрим векторное пространство ${}_{e_1\mathcal{A}e_1}e_1\mathcal{A}$ над телом $e_1\mathcal{A}e_1$. Если $e_1ae_i \neq 0$, то из минимальности идеала

$\mathcal{A}e_i$ следует равенство $e_1\mathcal{A}e_1ae_i = e_1\mathcal{A}e_i$. Следовательно,

$$\dim_{e_1\mathcal{A}e_1} e_1\mathcal{A}e_i = 1.$$

Так как

$$_{e_1\mathcal{A}e_1}e_1\mathcal{A} = e_1\mathcal{A}e_1 \oplus \ldots \oplus e_1\mathcal{A}e_n,$$

то $\dim_{e_1\mathcal{A}e_1} e_1\mathcal{A} = n$. Отображение $\phi : \mathcal{A}^\circ \to \operatorname{End}_{e_1\mathcal{A}e_1} e_1\mathcal{A}$, действующее по правилу

$$a \mapsto (eb \mapsto eba),$$

является гомоморфизмом алгебр. Если $e_1\mathcal{A}a = 0$, то $e_i\mathcal{A}a = e_i\mathcal{A}e_1\mathcal{A}a = 0$. Таким образом, ϕ – инъективный гомоморфизм алгебр. Так как согласно 1.49 $\mathcal{A} \cong (e_i\mathcal{A}e_j)$ и $\operatorname{End}_{e_1\mathcal{A}e_1} e_1\mathcal{A} \cong M_n(e_1Re_1)$, то из третьего пункта следует равенство

$$\dim_P(\mathcal{A}) = \dim_P(M_n(e_1Re_1)).$$

Следовательно, ϕ – изоморфизм.

1.56. 1) $\Rightarrow$ 2) Согласно лемме Цорна кольцо R обладает максимальным независимым множеством $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных правых идеалов. Если $\oplus_{i\in I}A_i \neq R$, то $\oplus_{i\in I}A_i \subset M'$ для некоторого максимального правого идеала M' кольца R. Так как $R = M' \oplus A$, где A – минимальный идеал кольца R, то получаем противоречие с выбором множества $\{A_i\}_{i\in I}$. Таким образом, кольцо R является конечной прямой суммой минимальных идеалов.

2) $\Rightarrow$ 3) Аналогично 1.52.

3) $\Rightarrow$ 1) Проверяется непосредственно.

1.59. Без ограничения общности можно считать, что P – алгебраически замкнутое поле. Ясно, что B – идеал в алгебре $\mathcal{A}' = B + P1_{\mathcal{A}}$. Пусть $f : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}'/N(\mathcal{A}')$ – естественный гомоморфизм. Из 1.54 следует существование изоморфизма алгебр $g : \mathcal{A}'/N(\mathcal{A}') \to M_{n_1}(P) \times \ldots \times M_{n_k}(P)$. Пусть $\pi_i : M_{n_1}(P) \times \ldots \times M_{n_k}(P) \to M_{n_i}(P)$ – естественная проекция для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$. Если $\pi_i gf(B) \neq 0$ для некоторого i, то $\pi_i gf(B) = M_{n_i}(P)$. Тогда каждый элемент в алгебре матриц $M_{n_i}(P)$ является линейной комбинацией нильпотентных матриц, что, очевидно, невозможно. Таким образом, $B \subset N(\mathcal{A}')$ и, следовательно, $B^n = 0$ для некотрого $n \in \mathbb{N}$.

1.73. 1) Легко видеть, что факторкольцо квазиинвариантного справа кольца по максимальному справа идеалу является телом. Тогда, если R – полупримитивное квазиинвариантное справа кольцо, то оно является подпрямым произведением тел и, следовательно, является редуцированным.

2) Очевидно, достаточно показать, что для каждого ненулевого элемента r кольца R имеет место равенство $rR = R$. Допустим противное. Тогда для некоторого ненулевого элемента $r \in R$ имеем $rR \neq R$. В силу леммы Цорна существует такой максимальный правый идеал M кольца R, что $rR \subseteq M \subsetneqq R$. Поскольку R квазиинвариантно, то M – собственный идеал кольца R, что противоречит простоте кольца R.

1.75. 1) Поскольку $rs = 0$, то $(sRr)^2 = 0$. Следовательно, $sRr = 0$, $(rRs)^2 = 0$ и $rRs = 0$. Остальные пункты упражнения следуют из первого пункта.

1.76. Без ограничения общности можно считать, что $m = n$. Из равенства $fg = 0$ следуют равенства $a_0b_0 = 0, a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \ldots, a_0b_n + \ldots + a_nb_0 = 0$. Тогда $b_0a_0 = 0$ и, следовательно, $a_0b_1a_0 = 0$, $a_0b_1 = 0$. Рассуждая аналогично далее, получаем равенства $a_0b_j = 0 (0 \leqslant j \leqslant n)$. Равенства $a_ib_j = 0 (0 \leqslant j \leqslant n)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ доказываются аналогично.

1.78. Утверждения пунктов 1) - 3) проверяются непосредственно.

4) Пусть $r \in R$. Для элементов $1, r \in R[x]$ имеет место равенство $c_r(1)c_r(r) = c_r(r)$. Следовательно, $RrR = rR$.

1.79. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из 1.78.

2) $\Rightarrow$ 1) Очевидно, что $c_r(fg) \subset c_r(f)c_r(g)$. Пусть $f = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i, g = \sum_{i=1}^{m} b_ix^i$ и $\overline{r} = r + c_r(fg)$ для каждого $r \in R$. Тогда

$$(\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_ix^i)(\sum_{i=1}^{m} \overline{b}_ix^i) = 0.$$

Так как согласно условию пункта 2) $\overline{a}_i\overline{b}_j = 0 (0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m)$, то $a_iRb_jR \subset a_ib_jR \subset c_r(fg)$. Таким образом, $c_r(fg) = c_r(f)c_r(g)$.

1.80. Пункты 1) - 7) проверяются непосредственно. 9) следует из равенств $[i, q] = 2\alpha q_3 j + 2q_2 k$, $[j, q] = -2\beta q_3 i - 2q_1 k$, $[k, q] = 2\beta q_2 i - 2\alpha q_1 j$.

1.82. 1). Импликация $\Leftarrow$ следует из 1.80(3).

$\Rightarrow$. Пусть $q \equiv q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ – ненулевой кватернион,

$$|q| = 0, \quad x \equiv q_0 q_1 + \beta q_2 q_3 \in A, \quad y \equiv q_1^2 - \beta q_3^2 \in A, \quad z \equiv q_0 q_3 + q_1 q_2 \in A.$$

Тогда

$$\begin{gathered} x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 = (x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2) - y|q| = \\ = (q_0 q_1 + \beta q_2 q_3)^2 - \alpha(q_1^2 - \beta q_3^2)^2 - \beta(q_0 q_3 + q_1 q_2)^2 - \\ -(q_1^2 - \beta q_3^2)(q_0^2 - \alpha q_1^2 - \beta q_2^2 + \alpha\beta q_3^2) = \\ = (q_0 q_1)^2 + 2\beta q_0 q_1 q_2 q_3 + \beta^2 (q_2 q_3)^2 - \alpha q_1^4 + \\ +2\alpha\beta q_1^2 q_3^2 - \alpha\beta^2 q_3^4 - \beta(q_0 q_3)^2 - 2\beta q_0 q_1 q_2 q_3 - \beta(q_1 q_2)^2 - q_1^2 q_0^2 + \\ +\alpha q_1^4 + \beta q_1^2 q_2^2 - \alpha\beta q_1^2 q_3^2 + \beta q_3^2 q_0^2 - \\ -\alpha\beta q_3^2 q_1^2 - \beta^2 q_3^2 q_2^2 + \alpha\beta^2 q_3^4 = 0. \end{gathered}$$

Так как A – (α, β)-кольцо и $x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 = 0$, то $y = q_1^2 - \beta q_3^2 = 0$. Поскольку A – (α, β)-кольцо и $q_1^2 - \beta q_3^2 = 0$, то $q_1 = q_3 = 0$. Так как $0 = |q| = q_0^2 - \alpha q_1^2 - \beta q_2^2 + \alpha\beta q_3^2$ и $q_1 = q_3 = 0$, то $q_0^2 - \beta q_2^2 = 0$. оскольку A – (α, β)-кольцо и $q_0^2 - \beta q_2^2 = 0$, то $q_0 = q_2 = 0$. Тогда $q = 0$. Получено противоречие.

2). Пусть $x \in A$, что $x^2 = 0$. Обозначим $y = z = 0$. Так как $x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 = 0$ и A – (α, β)-кольцо, то $x = 0$. Поэтому A – редуцированное кольцо.

Пусть $q \in Q$ и $q^2 = 0$. Тогда $|q|^2 = |q^2| = 0$ по 1.80(2). Так как A – редуцированное кольцо, то $|q| = 0$. По 1) $q = 0$. Поэтому Q – редуцированное кольцо.

3). Докажем импликацию $\Rightarrow$. Так как подкольцо области – область, то A – область. Пусть $x, y, z \in A$ и $x - \alpha y^2 - \beta z^2 = 0$. Так как Q – область и $(x + yi + zj)(x - yi - zj) = |x + yi + zj| = x - \alpha y^2 - \beta z^2 = 0$, то $x = y = z = 0$.

$\Leftarrow$. Пусть $0 \neq q, t \in Q$. Так как A – (α, β)-кольцо без делителей нуля, то по 1) и 1.80(2) $|qt| = |q||t| \neq 0$. По 1) $qt \neq 0$.

4). Докажем импликацию $\Rightarrow$. По 3) A – (α, β)-кольцо. Каждый ненулевой элемент $a \in A$ имеет обратный элемент a^{-1} в теле Q. Непосредственно проверяется, что $a^{-1} \in A$. Поэтому A – поле.

$\Leftarrow$. Следует из 1.19.

1.83. Так как $2^{-1} \in A$, то 1) следует из 1.80(9). Поскольку $2^{-1} \in A$, то 2) следует из равенств $4q_1 = [[k, q], i](\alpha k)^{-1} \in QqQ$, $4q_2 = [[i, q], j](\beta i)^{-1} \in QqQ$, $4q_3 = [k, [j, q]](\alpha\beta j)^{-1} \in QqQ$ и $4q_0 = 4(q - q_1 - q_2 - q_3) \in QqQ$ и 1.80(4).

3), 4) и 5) следуют из 2).

6). Импликация $\Leftarrow$ следует из 1.82 (2).

$\Rightarrow$. Пусть $x, y, z \in A$, $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$, B – идеал кольца A, порожденный элементами x, y и z. Обозначим $q = x + yi + zj \in Q$. Так как $qq^* = x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$, то $(q^*Qq)^2 = 0$. Поскольку Q – редуцированное кольцо, то $q^*Qq = 0$. Поэтому $(Qq^*Q)(QqQ) = 0$. По 2) $B^2 \subseteq (Qq^*Q)(QqQ) = 0$. Так как Q – редуцированное кольцо, то $B = 0$ и $x = y = z = 0$.

1.84. 1) Достаточно показать, что $\dim(V_\lambda) = 1$ для каждого собственного значения линейного оператора A. Пусть для элементов $t_1, t_2 \in T$ выполнены равенства $at_1 = t_1\lambda, at_2 = t_2\lambda$. Тогда $t_1t_2^{-1}a(t_1t_2^{-1})^{-1} = a$. Так как F – максимальное подполе тела T, то $t_2 = t_1\alpha$, где $\alpha \in F$.

2) Для ненулевого элемента $t \in T$ выполнены эквивалентности

$$t - \text{собственный вектор линейного оператора } A \Leftrightarrow$$

$$at = t\lambda, \text{ где } \lambda \in F \Leftrightarrow$$

$$t^{-1}at = \lambda, \text{ где } \lambda \in F \Leftrightarrow$$

$$t \in N(F).$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все попарно различные собственные значения A и $t_1, \ldots, t_n$ – отвечающие им собственные вектора. Так как $N(F)$ – группа, то для произвольных индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$ существует индекс $1 \leqslant k \leqslant n$ такой, что $at_it_j = t_it_j\lambda_k$. Поскольку $at_it_j = t_i\lambda_it_j$, то $t_j^{-1}\lambda_it_j = \lambda_k$. Следовательно, коэффициенты многочлена $g(x) = (x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n)$ коммутируют с элементами $t_1, \ldots, t_n$. Так как $T_F = t_1F \oplus \ldots \oplus t_nF$, то

$g(x) \in P[x]$. Поскольку a – собственное значение линейного оператора A, то $g(a) = 0$ и, следовательно, многочлен $g(x)$ делится на $m(x)$. Так как $m(A) = 0$, то $m(\lambda_i) = 0$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, $m(x) = g(x)$.

Пункт 3) следует из пуктов 1) и 2).

4) Ясно, что $F' = K(a')$, где $a' \in T$ – корень многочлена f. Рассмотрим линейный оператор $A' \in \mathrm{End}_F(T_F)$, действующий по правилу $A'(v) = a'v$. Так как $f(A') = 0$, то для некоторого ненулевого элемента $t \in T$ имеет место равенство $a't = t\lambda$, где $\lambda \in F$ – корень многочлена $m(x)$. Таким образом, $t^{-1}F't = F$.

Пункт 5) следует из пукта 4).

1.85. 1) $\Rightarrow$ 2) Несложно заметить, что максимальное подполе F алгебры A имеет вид $F = P(i)$, где $i^2 = \alpha \in P$. Согласно 1.841) имеет место равенство $A = F \oplus jF$, где $ij = j(-i)$. Так как $j^2 i = ij^2$, то $j^2 = \beta \in P$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из 1.82.

1.86. 1) $\Rightarrow$ 2) Из 1.22 и 1.30 следует, что $A \cong M_2(P)$. Непосредственно проверяется, что существует изоморфизм $\phi : \left(\dfrac{1,-1}{P}\right) \to M_2(P)$, действующий по правилу $\phi(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \phi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, $A \cong \left(\dfrac{1,-1}{P}\right)$. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из 1.83.

1.87. 1) Следует из 1.82 и того факто, что $\left(\dfrac{-1}{p}\right)$ в точности тогда, когда $p \equiv 1(\mod 4)$.

1.90. Пусть A – алгебраическая алгебра с делением над $\mathbb{R}$. Без ограничения общности можно ситать, что $\dim(A) > 2$. Из алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}$ следует, что всякое максимальное подполе алгебры A изоморфно $\mathbb{C}$. Тогда из 1.84 1.85 следует, что $\dim(A) = 4$ и $A \cong \left(\dfrac{\alpha,\beta}{\mathbb{R}}\right)$. Пусть $1, i, j, k,$ – канонический базис A. Так как A – тело, то $\alpha < 0, \beta < 0$. Следовательно, $A \cong \left(\dfrac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$.

1.92. Пусть T – конечное тело, $P = C(T)$ и F – максимальное подполе тела. Из 1.84(3) следует, что $\dim_P(F)^2 = \dim(T)$. Так как любые два расширения поля P одинаковой степени изоморфны и любой элемент из T содержится в некотором максимальном подполе тела T, то из 1.84(4) следую неравенства

$$|\, U(T) \,| \leqslant (U(T) : N(U(F)))(|\, U(F) \,| -1) + 1 \leqslant$$

$$(U(T) : U(F))(|\, U(F) \,| -1) + 1 = U(T) - (U(T) : U(F)) + 1,$$

где $N(U(F))$ – нормализатор подгруппы $U(F)$ в группе $U(T)$. Следовательно, $(U(T) : U(F)) = 1$ и $F = T = K$.

1.94. В теле T для произвольных элементов a, b рассмотрите выражение $a^2b - aba$.

3.15. 1). Будем вести индукцию по n. Так как каждый идемпотент кольца R/A поднимается до идемпотента кольца R, то утверждение верно для $n = 1$. Пусть $h\colon R \to R/A$ – естественный эпиморфизм, $\{\overline{e}_i\}_{i=1}^{k}$ – множество ортогональных идемпотентов кольца $h(R)$, $k > 1$ и утверждение верно для всех $n < k$. По предположению индукции существуют такие ортогональные идемпотенты $e_1, \ldots, e_{k-1} \in R$, что $h(e_i) = \overline{e}_i$ для $i = 1, \ldots, k-1$. Обозначим $e = \sum_{i=1}^{k-1} e_i$. Тогда e – идемпотент и идемпотент $h(e) \in h(R)$ ортогонален к идемпотенту $\overline{e}_k \in h(R)$. Существует такой идемпотент $f \in R$, что $h(f) = \overline{e}_k$. Так как $fe \in A \subseteq J(R)$, то элемент $1 - fe$ обратим в R. Обозначим $e_k = (1-e)(1-fe)^{-1}f(1-e)$. Тогда $h(e_k) = h(f) = \overline{e}_k$ и $e_k e_i = e_i e_k = 0$ для всех $i < k$. Так как $f(1-e) = f(1-fe)$, то $e_k^2 = e_k$.

2). Доказательство аналогично доказательству 1).

3). Следует из пункта 2).

4.6. Пусть G – циклическая группа порядка n. В этом случае имеют место изоморфизмы

$$PG \cong P[x]/(x^n - 1) \cong \bigoplus_{d|n} P[x]/(\Phi_d) \cong \bigoplus_{d|n} \bigoplus_{i=1}^{m_d} P[x]/(f_{di}),$$

где $\Phi_d(x)$ – циклотомический многочлен степени $\phi(d)$ и

$$\Phi_d(x) = f_{d1}(x) \ldots f_{dm_d}(x)$$

– разложение многочлена $\Phi_d(x)$ на неразложимые множители над полем P. Несложно заметить, что $P[x]/(f_{di}) \cong P(\varepsilon_d)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant m_d$.

Тогда $m_d(P(\varepsilon_d) : P) = \phi(d)$ для каждого $d \mid n$. Очевидно, $\phi(d) = n_d$. Таким образом,

$$PG \cong \bigoplus_{d|n} P(\varepsilon_d)^{m_d}.$$

4.7. Докажем с помощью индукции по порядку группы G. Предположим, что G – абелева группа порядка n и утверждение упражнения 4.7 верно для абелевых групп порядков меньших n. Ввиду упражнения 4.6 можно считать, что $G = G_1 \times G_2$, где G_1, G_2 – абелевы группы порядков соответственно $n_1, n_2 < n$. Тогда

$$PG = (PG_1)G_2 \cong (\bigoplus_{d|n_1} P(\varepsilon_d)^{m_d})G_2 \cong \bigoplus_{d_1|n_1} \bigoplus_{d_2|n_2} P(\varepsilon_{d_1}, \varepsilon_{d_2})^{m_{d_1} m_{d_2}},$$

где $m_{d_1} = \frac{n_{d_1}}{(P(\varepsilon_{d_1}):P)}$, n_{d_1} – количество элементов порядка d_1 из группы G_1 и $m_{d_2} = \frac{n_{d_2}}{(P(\varepsilon_{d_1},\varepsilon_{d_2}):(P(\varepsilon_{d_1}))}$, n_{d_2} – количество элементов порядка d_2 из группы G_2. Очевидно, $P(\varepsilon_{d_1}, \varepsilon_{d_2}) = P([\varepsilon_{d_1}, \varepsilon_{d_2}])$. Тогда

$$PG \cong \bigoplus_{d|n} P(\varepsilon_d)^{h_d},$$

где $h_d = \sum_{d_1,d_2,[d_1,d_2]=d} m_{d_1} m_{d_2}$ Так как

$$h_d(P(\varepsilon_{d_1}, \varepsilon_{d_2}) : P) = \sum_{d_1,d_2,[d_1,d_2]=d} m_{d_1} m_{d_2} (P(\varepsilon_{d_1}, \varepsilon_{d_2}) : (P(\varepsilon_{d_1})) =$$

$$(P(\varepsilon_{d_1}) : P) = \sum_{d_1,d_2,[d_1,d_2]=d} n_{d_1} n_{d_2}.$$

Несложно заметить, что количество элементов порядка d в группе $G = G_1 \times G_2$ равно $\sum_{d_1,d_2,[d_1,d_2]=d} n_{d_1} n_{d_2}$. Таким образом, доказан изоморфизм

$$PG \cong \bigoplus_{d|n} P(\varepsilon_d)^m_d.$$

4.8. Рассмотрим множество всех корней степени n из единицы. Запишем это множество в виде:

$\sqrt[n]{1} = \{1, \xi_1, \ldots, \xi_{\frac{n-1}{2}}, \overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_{\frac{n-1}{2}}}\}$, если n нечётно.
$\sqrt[n]{1} = \{1, \xi_1, \ldots, \xi_{\frac{n-2}{2}}, \overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_{\frac{n-2}{2}}}\}$, если n чётно.

Пусть $D_n =< a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, bab = a^{-1} >$. Для нечётного n определим гомоморфизмы алгебр $\varphi_1 : \mathbb{C}D_n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\varphi_{\xi_k} : \mathbb{C}D_n \to M_2(\mathbb{C})$, которые на образующих базисных элементах групповой алгебры действуют следующим образом:

$\varphi_1(a) = (1, 1), \quad \varphi_1(b) = (1, -1),$

$\varphi_{\xi_k}(a) = \begin{pmatrix} \xi_k & 0 \\ 0 & \overline{\xi_k} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\xi_k}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Для чётного n определим гомоморфизмы алгебр $\varphi_1 : \mathbb{C}D_n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \varphi_{-1} : \mathbb{C}D_n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \varphi_{\xi_k} : \mathbb{C}D_n \to M_2(\mathbb{C})$, которые на образующих базисных элементах групповой алгебры действуют следующим образом:

$\varphi_1(a) = (1, 1), \quad \varphi_1(b) = (1, -1),$

$\varphi_{-1}(a) = (-1, -1), \quad \varphi_{-1}(b) = (1, -1),$

$\varphi_{\xi_k}(a) = \begin{pmatrix} \xi_k & 0 \\ 0 & \overline{\xi_k} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\xi_k}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Рассмотрим гомоморфизмы алгебр

$F_n : \mathbb{C}D_n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_2(\mathbb{C})}_{\frac{n-1}{2}}$, если n нечётное и

$F_n : \mathbb{C}D_n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_2(\mathbb{C})}_{\frac{n-2}{2}}$, если n чётное,

действующие по правилу: $F(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_{\xi_k}(u), \ldots)$.

Непосредственная проверка показывает, что для любого $n > 2$ гомоморфизм F является изоморфизмом.

4.9. Пусть $D_n =< a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, bab = a^{-1} >$. Для каждого натурального делителя d числа n рассмотрим отображение $\psi_d : \mathbb{Q}D_n \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$. При $d = 1, 2$ положим

$$\psi_1(a) = (1, 1), \quad \psi_1(b) = (1, -1), \quad \psi_2(a) = (-1, -1), \psi_2(b) = (1, -1).$$

Если $d > 2$, то отображение $\psi_d : \mathbb{Q}D_n \to M_2(\mathbb{Q}[\xi_d])$, действует по правилу:

$$\psi_d(a) = \begin{bmatrix} \epsilon_d & 0 \\ 0 & \epsilon_d^{-1} \end{bmatrix}, \psi_d(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Положим $E_d = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, если $d = 1, 2$ и $E_d = M_2(\mathbb{Q}[\epsilon_d])$, если $d > 2$.

Непосредственно проверяется, что отображение $\psi : \mathbb{Q}D_n \to \oplus_{d|n} E_d$, действующее по следующему правилу:

$$\psi(u) = (\psi_1(u), \ldots, \psi_d(u), \ldots, \psi_n(u)).$$

является мономорфизмом алгебр.

Для каждого натурального делителя d числа n введём отображение μ_d. Если $d = 1, 2$, то $\mu_d = \psi_d$ и если $d > 2$, то μ_d – отображение, действующее из $\mathbb{Q}D_n$ в $M_2(\mathbb{Q}[\epsilon_d])$, согласно правилу:

$u \to Z_d^{-1}\psi_d(u)Z_d$,

где $Z_d = \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon_d \\ 1 & -\epsilon_d^{-1} \end{bmatrix}$. Рассмотрим отображение $\mu : \mathbb{Q}D_n \to \oplus_{d|n}E_d$, действующее по правилу:

$$u \to (\mu_1(u), \dots, \mu_d(u), \dots, \mu_n(u)).$$

Ясно, что $\operatorname{Im}(\mu) \subset \oplus_{d|n}A_d$. Вычислим размерность $\oplus_{d|n}A_d$. Если $d = 1, 2$, то $\dim A_d = 2$. Так как $\dim \mathbb{Q}[\epsilon_d + \epsilon_d^{-1}]) = \frac{\varphi(d)}{2}$, то

$$\dim(M_2(\mathbb{Q}[\xi_d + \xi_d^{-1}])) = 4\frac{\varphi(d)}{2} = 2\varphi(d).$$

Следовательно,

$$\dim(\oplus_{d|n}A_d) = 2\varphi(1) + 2\varphi(2) + \sum_{d|n, d\neq 1,2} 2\varphi(d) = 2\sum_{d|n}\varphi(d) = 2n.$$

Поскольку $\mu : \mathbb{Q}D_n \to \oplus_{d|n}A_d$ является мономорфизмом и $\dim(\mathbb{Q}D_n) = \dim(\oplus_{d|n}A_d) = 2n$, то μ – изоморфизм.

4.12. Для каждого неотрицательного целого числа i в группе G рассмотрим подмножество $G_i = \{g \in G \mid o(g) = p^i\}$. Пусть $T_i(e) = \sum_{g\in G_i}\alpha_g$ для каждого i. Несложно заметить, что для каждого $i \geqslant 1$ имеет место равенство

$$T_i(e) = T_i(e^p) = (T_{i+1}(e))^p.$$

Следовательно, $T_1(e) = 0$. Тогда

$$\alpha_1 = T_0(e) = T_0(e^p) = T_0(\sum_{g\in G}\alpha_g^p g^p) = \alpha_1^p + T_1(e) = \alpha_1^p.$$

4.13. Рассмотрите регулярное представление алгебры PG.

4.16. Если p делит порядок группы G, то из 4.15 следует, что $PG(\sum_{g\in G} g)$ – нильпотентный идеал. Предположим, что групповая алгебра PG содержит ненулевой нильпотентный идеал I. Рассмотрим регулярное представление алгебры PG, т.е. гомоморфизм алгебр $\phi : PG \to \operatorname{End}_P(PG)$, действующий согласно правилу

$$a \mapsto (v \mapsto av).$$

Несложно заметить, что $\operatorname{tr}(\phi(1)) = \mid G \mid$ и $\operatorname{tr}(\phi(g)) = 0$, если $g \neq 1$. Пусть $a = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in I \setminus \{0\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $0 = \operatorname{tr}(\phi(a)) = \sum_{g \in G} \alpha_g \operatorname{tr}(\phi(g)) = \alpha_1 \mid G \mid$. Таким образом, p делит порядок группы G.

4.19. 1) Пусть $S_g = \{g, ..., g^{q^{t_s - 1}}\}$ и $g^{q^i} \in S_g$. Из равенства

$$S_{g^{q^i}} = \{g^{q^i}, ..., g^{q^i q^{t_g - 1}}\} = \{g, ..., g^{q^{t_g - 1}}\}$$

следует, что что $S_g = S_{g^{q^i}}$. Предположим, что $S_{g_1} \neq S_{g_2}$. Если $S_{g_1} \cap S_{g_2} \neq \emptyset$, то существует такой h, что $h = g_1^{q^{i_1}} = g_2^{q^{i_2}}$. Следовательно, $S_{g_1} = S_h = S_{g_2}$. Получаем противоречие. Таким образом, $S_{g_1} \cap S_{g_2} = \emptyset$.

2)Имеют место равенства:

$$(\overline{S_g})^q = (g + g^q + ... + g^{q^{t_g - 1}})^q = g^q + g^{q \cdot q} + ... + g^{q \cdot q^{t_g - 1}} = g + g^q + ... + g^{q^{t_g - 1}} = \overline{S_g}.$$

4.21. Пусть $\alpha \in PG$. Запишем α в виде:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

где $\alpha_i = \alpha e_i \in PGe_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда α принадлежит подалгебре $\mathcal{A}$ в точности тогда, когда $\alpha_i \in Pe_i$. Условие $\alpha_i \in Pe_i$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ равносильно равенству $\alpha^q = \alpha$.

4.22. Заметим, что количество компонент в разложении Вендерберна алгебры PG совпадает с размерностью алгебры $\mathcal{A}$ из упражнения 4.21. Пусть $S_{g_1}, ..., S_{g_k}$ – все попарно различные q-циклотомических класса группы G. Покажем, что множество $\{\overline{S_{g_1}}, ..., \overline{S_{g_k}}\}$ является базисом $\mathcal{A}$. Из 4.19 следует, что множество $\{\overline{S_{g_1}}, ..., \overline{S_{g_k}}\}$ линейно независимо. Так как $\overline{S_{g_i}}^q = \overline{S_{g_i}}$, то из 4.21 следует включение $\{S_{g_1}, ..., S_{g_k}\} \subset \mathcal{A}$. Покажем, что любой элемент $a \in \mathcal{A}$ линейно выражается через $\{S_{g_1}, ..., S_{g_k}\}$. Пусть $a = \sum_{g \in A} \alpha_g g$. Имеют место равенства:

$$a^q = a,$$

$$(\sum_{g\in A}\alpha_g g)^q=\sum_{g\in A}\alpha_g g,$$

$$\sum_{g\in A}\alpha_g^q g^q=\sum_{g\in A}\alpha_g g,$$

$$\sum_{g\in A}\alpha_g g^q=\sum_{g\in A}\alpha_g g.$$

Тогда для каждого g имеем: $\alpha_g=\alpha_{g^q}=...=\alpha_{g^{t_{q-1}}}$ и $a=\sum_{i=1}^k\alpha_{g_i}\overline{S_{g_i}}$.

5.17. Из соображения симметрии, очевидно, достаточно доказать эквивалентность пунктов 1),3),4) и 5).

1)⇒3) Пусть $\phi: eR\to fR$ изоморфизм правых R-модулей. Положим $a=\phi^{-1}(f)\in eRf$ и $b=\phi(e)\in fRe$. Тогда $ab=\phi^{-1}(f)b=\phi^{-1}(fb)=\phi^{-1}(b)=e$. Аналогично $f=ba$.

3)⇒4) Положим $a_1=eaf$ и $b_1=fbe$. Тогда $a_1b_1=eafbe=eababe=e^4=e$. Аналогично $b_1a_1=f$.

4)⇒5) Очевидно.

5)⇒1) Из условия пункта следует, что $a\in eR\cap Rf=eRf$ и для некоторых элементов $x,y\in R$ имеют место равенства $e=ax, f=ya$. Положим $b=fx=yax=ye\in fRe$. Пусть $\phi: eR\to fR$ гомоморфизм, при котором $\phi(e)=b$, и $\psi: fR\to eR$ гомоморфизм, при котором $\psi(f)=a$. Поскольку $\psi(\phi(e))=\psi(b)=\psi(fx)=\psi(f)x=ax=e$ и $\phi(\psi(f))=\phi(a)=\phi(ea)=\phi(e)a=ba=yea=ya=f$, то ϕ и ψ – взаимообратные гомоморфизмы.

5.16. 1) Очевидно.

2) Воспользуйтесь пунктом 1), 1.35 и 2.9.

5.32. 1) Пусть P – идеал кольца R, порожденный всеми центральными идемпотентами из $\mathrm{Ann}(M)$. Если $e\in R\setminus P$ – центральный идемпотент, то $Me\neq 0$. Тогда $M=Me\oplus M(1-e)$ и поскольку M неразложим, то $M(1-e)=0$. Следовательно, $P+eR=R$. Таким образом, $P\in\mathcal{P}(R)$.

2) Пусть m-ненулевой элемент модуля M. Используя лемму Цорна, легко показать, что для некоторого подмодуля N модуля M фактормодуль M/N является неразложимым и $m\neq N$. Тогда модуль M является подпрямым произведением некоторого семейства неразложимых модулей

$\{M_i\}_{i\in I}$. По 1) для каждого $i \in I$ существует такой идеал $P_i \in \mathcal{P}(R)$, что $M_iP_i = 0$. Тогда, как легко видеть, $\bigcap\limits_{i\in I} MP_i = 0$.

3) следует из 2).

4) С помощью трансфинитной индукции в идеале $\mathrm{Ann}(M)$ построим возрастающую цепочку идеалов кольца R. При $\alpha = 0$ положим $J_0 = 0$. Если α – непредельный ординал, то J_α – такой идеал, что $J_\alpha/J_{\alpha-1}$ – идеал, порожденный всеми центральными идемпотентами из $\mathrm{Ann}_{R/J_{\alpha-1}}(M)$. Если α – предельный ординал, то $J_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} J_\beta$. Покажем, что для каждого непредельного ординала α $J_\alpha/J_{\alpha-1} \in \mathcal{P}(R/J_{\alpha-1})$. Пусть $e \in R/J_{\alpha-1}$ – центральный идемпотент и $e \notin J_\alpha/J_{\alpha-1}$. Тогда $M = Me \oplus M(1-e)$. Поскольку $Me \neq 0$, то из нашего предположения следует, что $M(1-e) = 0$ и $1 - e \in J_\alpha/J_{\alpha-1}$. Тогда $R/J_{\alpha-1} = J_\alpha/J_{\alpha-1} + e(R/J_{\alpha-1})$. Ясно, что для некоторого ординального числа τ имеет место равенство $J_\tau = J_{\tau+1}$ и, следовательно, $J_\tau \in \mathcal{M}(R)$.

Доказательство пункта 5) аналогично доказательству 2).

5.33. 2) Пусть $M = M_3 \oplus M'$ и $\pi : M_3 \oplus M' \to M_3$ – естественная проекция. Рассмотрим гомоморфизм $f : M \to M_2$, действующий согласно правилу

$$f(m_1 + m_2) = \pi(m_1) + m_2,$$

где $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$. Непосредственно проверяется, что гомоморфизм f определен корректно. Пусть $\varepsilon : M_2 \to M$ – вложение модуля M_2 в модуль M. Так как $f\varepsilon = 1_{M_2}$, то M_2 – прямое слагаемое модуля M.

5.41. Утверждение непосредственно следует из следующих канонических S-изоморфизмов:

$$_SS^n \cong \mathrm{Hom}_R(M^n, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R_R, M) \oplus \mathrm{Hom}_R(N, M),$$

$$_SM \cong \mathrm{Hom}_R(R_R, M).$$

5.55. Согласно 1.65 $R(1-r_1) \subseteq R(1-r_2) \subseteq \ldots$ – возрастающая цепочка собственных левых идеалов кольца R и, следовательно, найдется такой максимальный левый идеал M кольца R, что $\cup_{i=1}^{\infty} R(1-r_i) \subset M$. Поскольку $r_n \notin M$ для каждого n, то $r_n \notin l(R/M) \subset M$. Таким образом, $l(R/M)$ – примитивный слева идеал и $r_n \notin l(R/M)$.

5.57. Без ограничения общности можно считать, что $A \neq 0$. Элементарными преобразованиями над строками матрицы A назовем следующие преобразования:

1) перестановка двух строк;

2) умножение строки на обратимый элемент;

3) прибавление к строке другогой строки, умноженой на элемент кольца R;

4) умножение двух строк слева на обратимую матрицу порядка 2×2.

Аналогично определяются элементарные преобразования над столбцами матрицы A. Две матрицы над кольцом R назовем эквивалентными, если одну из этих матриц можно получить из другой с помощью введенных выше элементарных преобразований.

Достаточно показать, что матрицу A с помощью элементарных преобразований можно привести к диагональному виду, удовлетворяющему условию упражнения 5.57. Сначало заметим, что если $(a, b) \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}$, то для некоторой матрицы $C \in GL_2(R)$ имеет место равенство $(a, b)C = (d, 0)$, где d – наибольший общий делитель элементов a, b. Действительно, для некоторых элементов $x, y, s, t \in R$ имеют место равентсва

$$d = ax + by, ds = a, dt = b.$$

Следовательно,

$$1 = sx + ty, (a, b) = (d, 0) \begin{pmatrix} s & t \\ -y & x \end{pmatrix} .$$

Для произвольного элемента $a \in R \setminus \{0\}$ через $l(a)$ будем обозначать количество простых сомножителей в представлении a в виде произведения простых элементов кольца R. Несложно заметить, что $l(a) = \lg(R_R/aR)$. Пусть A' – матрица эквивалентная матрице A, у которой компонента a', находящаяся на пересечении первой строки и первого столбца, ненулевая и $l(a')$ принимает наименьшее значении среди всех компонент матриц, эквивалентных матрице A. Из замечания, сделанного выше, следует, что все элементы из первой строки и первого столбца матрицы A' делятся на элемент a'. Тогда матрица A' эквивалентна матрице вида

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Несложно заметить, что в силу выбора элемента a' все компоненты матрицы B делятся на a'. Применим аналогичные рассуждения к матрице B и т.д. В результате получим диагональную матрицу эквивалентную матрице A, удовлетворяющую условию упражнения 5.57.

5.61. Согласно 5.60 имеет место изоморфизм

$$V(A) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{N_i} P[x]/(p_i^{n_{ij}})$$

Тогда согласно 5.28 имеем

$$C(A) = \mathrm{End}_{P[x]}(V(A)) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{i=1}^{m} (\mathrm{Hom}_{P[x]}(P[x]/(p_i^{n_{is}}), P[x]/(p_i^{n_{it}}))).$$

Так как для каждого неприводимого многочлена $f \in P[x]$ и каждой пары натуральных чисел s, t выполнено равенство

$$\dim_P(\mathrm{Hom}(P[x]/(f^s), P[x]/(f^t))) = \deg(f)\min(s,t),$$

то

$$\dim_P(C(A)) = \dim_P(\mathrm{End}_{P[x]}(V(A))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \dim_P((\mathrm{Hom}_{P[x]}(P[x]/(p_i^{n_{is}}), P[x]/(p_i^{n_{it}})))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,t} \dim_P(\mathrm{Hom}_{P[x]}(P[x]/(p_i^{n_{is}}), P[x]/(p_i^{n_{it}}))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,t} \deg(p_i)\min(n_{is}, n_{it}).$$

5.62. Равенство $\dim_P(C(A)) = n$ следует из 5.61. Ясно, что $\{f(A) \mid f \in P[x]\} \subset C(A)$. Так как степень минимального многочлена $m(x)$ матрицы A равна n, то $\dim(\{f(A) \mid f \in P[x]\}) = \dim(P[x]/(m(x))) = n$. Таким образом, $C(A) = \{f(A) \mid f \in P[x]\}$.

5.64. 1) Так как, очевидно, векторные пространства $\{X \mid AX - XB = 0\}$ и $\mathrm{Hom}_{P[x]}(M(A), M(B))$ изоморфны, то согласно 5.60 размерность пространства решений уравнения $AX - XB = 0$ равна

$$\dim_P(\mathrm{Hom}_{P[x]}(M(A), M(B))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,t} \dim_P(\mathrm{Hom}_{P[x]}(P[x]/(p_i^{n_{is}}), P[x]/(p_i^{n'_{i,t}}))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,t} \deg(p_i) \min(n_{is}, n'_{it}).$$

2) Следует из 1).

5.65. Согласно 5.58 имеет место изоморфизм:

$$V(A) \cong P[x]/(p_1) \oplus \ldots \oplus P[x]/(p_k),$$

где $p_1, \ldots, p_k$ – инвариантные множители оператора A и $(p_i) \subset (p_{i-1})$ для каждого $2 \leqslant i \leqslant k$. Тогда

$$V(A) = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k,$$

где $M_i \cong P[x]/(p_i)$. Для каждой пары индексов $i < j$ существует гомоморфизм $P[x]$-модулей $\pi_{ij} : M_j \to M_i$, действующий по правилу $\pi_{ij}(e_j) = e_i$, где e_t – элемент соответствующий элементу $1 + (p_t)$ при изоморфизме $M_t \cong P[x]/(p_t)$. Продолжим гомоморфизм π_{ij} на модуль M полагая $\pi_{ij}(M_t) = 0$, если $t \neq j$. Для каждого i обозначим через π_i проекцию модуля $V(A) = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ на прямое слагаемое M_i. Так как π_{ij}, π_i – $P[x]$-гомоморфизмы, то эти гомоморфизмы коммутируют с A. Следовательно, эти гомоморфизмы коммутируют также и с B. Тогда

$$B(e_k) = B\pi_k(e_k) = \pi_k B(e_k) = f(A)(e_k) = f(x)e_k,$$

где $f(x) \in P[x]$. Следовательно, для каждого i имеем

$$B(e_i) = B\pi_{ik}(e_k) = \pi_{ik} B(e_k) = \pi_{ik}(f(x)e_k) =$$

$$= f(x)\pi_{ik}(e_k) = f(x)e_i = f(A)(e_i).$$

Так как элементы $e_1, \ldots e_k$ порождают модуль $V(A)$, то $f(A) = B$.

7.4. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $M = M_1 \oplus M_2$, $f \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$. Так как $M =< f > \oplus M_2$ и $< f > + M_1 = M_1 \oplus \mathrm{Im}(f)$ - прямое слагаемое модуля M, то $\mathrm{Im}(f)$ является прямым слагаемым M.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A, B – прямые слагаемые модуля M и $M = A \oplus A' = B \oplus B'$. Из условия пункта и леммы следует, что подмодуль $B' \cap (A+B) \cap (A'+B)$ является прямым слагаемым в B'. Следовательно, для некоторого подмодуля M_0 модуля M имеем $B' = B' \cap (A+B) \cap (A'+B) \oplus M_0$. Пусть π – проекция на прямое слагаемое M_0 относительно разложения
$M = B \oplus B' \cap (A+B) \cap (A'+B) \oplus M_0$.

Так как
$M_0 = \pi(M) = \pi(A+B+A'+B) = \pi(A+B) + \pi(A'+B) = M_0 \cap (A+B) + M_0 \cap (A'+B) \subset A+B+M_0 \cap (A'+B)$ и
$B + B' \cap (A+B) \cap (A'+B) \subset A+B+M_0 \cap (A'+B)$, то $M = (A+B) + M_0 \cap (A'+B)$. Тогда из равенства $(A+B) \cap M_0 \cap (A'+B) = 0$ следует, что $M = (A+B) \oplus M_0 \cap (A'+B)$.

7.6. 3) $\Rightarrow$ 2). Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть π, π' – идемпотенты кольца $\mathrm{End}_R(M)$. Из 7.3 следует, что подмодуль $(\pi M + \pi' M) \cap (1-\pi')M$ является прямым слагаемым в $(1-\pi')M$. Так $(\pi M + \pi' M) = \pi' M \oplus (\pi M + \pi' M) \cap (1-\pi')M$, то $\pi M + \pi' M$ - прямое слагаемое модуля M.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $M = \mathrm{Ker}(f) \oplus A = \mathrm{Im}(f) \oplus B = \mathrm{Ker}(g) \oplus A' = \mathrm{Im}(g) \oplus B'$. Так как $\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus A \cap (\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f))$, то из условия пункта следует, что $A \cap (\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f))$ – прямое слагаемое модуля M. Поскольку $f_{|A} : A \to \mathrm{Im}(f)$ – изоморфизм, то $f(A \cap (\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)))$ – прямое слагаемое модуля M. Тогда из 7.5 следует, что $\mathrm{Im}(fg)$ – прямое слагаемое модуля M.

7.7. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $M = M_1 \oplus M_2$, $f \in Hom(M_1, M_2)$. Так как $M =< f > \oplus M_2$, то из условия пункта следует, что$< f > \cap M_1 = Ker(f)$ – прямое слагаемое модуля M.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A, B – прямые слагаемые модуля M и $M = A \oplus A' = B \oplus B'$. Тогда из 7.3 следует, что $= A \cap B \oplus A' \cap B'$ – прямое слагаемое модуля M. Следовательно, $A \cap B$ – прямое слагаемое M.

7.8. 3) $\Rightarrow$ 2). Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть π, π' – идемпотенты кольца $\mathrm{End}_R(M)$. Из 7.3 следует, что подмодуль $\pi M \cap \pi' M \oplus (1-\pi)M$ является прямым слагаемым модуля M. Следовательно, $\pi M \cap \pi' M$ - прямое слагаемое M.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $M = \mathrm{Ker}(f) \oplus A = \mathrm{Im}(f) \oplus B = \mathrm{Ker}(g) \oplus A' = \mathrm{Im}(g) \oplus B'$. Так как согласно условию пункта $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)$ – прямое слагаемое модуля M, то $g^{-1}_{|A'}(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f))$ – прямое слагаемое A'. Поскольку согласно 7.5 $\mathrm{Ker}(fg) = g^{-1}_{|A'}(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)) \oplus \mathrm{Ker}(g)$, то $\mathrm{Ker}(fg)$ – прямое слагаемое модуля M.

9.8. Импликации 2)$\Rightarrow$ 3), 4)$\Rightarrow$ 5) и 6)$\Rightarrow$ 7) очевидны.

1)$\Rightarrow$ 2). Предположим, что для некоторого ненулевого элемента $m \in M$ имеет место равенство $Rm \cap r_M(I) = 0$. Поскольку $m \notin r_M(I)$,то для некоторого элемента $r_1 \in I$ имеем $r_1 m \neq 0$. Так как $r_1 m \notin r_M(I)$, то $r_2 r_1 m \neq 0$ для некоторого элемента $r_2 \in I$. Повторяя эти рассуждения, мы получим последовательность элементов $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ из идеала I, у которой $r_n \dots r_2 r_1 \neq 0$ для каждого натурального числа n. Получили противоречие с условием пункта 1).

3)$\Rightarrow$ 4). Допустим MI не является косущественным в M. Тогда $MI + X = M$ для некоторого подмодуля $X \neq M$ модуля M. Рассмотрим модуль $N = M/X$. Ясно, что $NI = N$ и $N \neq 0$. Рассмотрим левый R-модуль $T = R/\mathrm{Ann}(N)$. По условию пункта существует ненулевой элемент $t + \mathrm{Ann}(N) \in r_T(I)$. Тогда $It \in \mathrm{Ann}(N)$ и, следовательно, $NIt = 0$. С другой стороны, поскольку $t \notin \mathrm{Ann}(N)$, то имеем $NIt = Nt \neq 0$.

5)$\Rightarrow$6). Если $PI + X = P$ для некоторого подмодуля X модуля P, то $(P/X)I = P/X$. Тогда $P/X = 0$ и $P = X$.

7)$\Rightarrow$1). Пусть $\{e_1, e_2, \dots\}$ – базис модуля F и $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ – последовательность элементов из I. Рассмотрим в модуле F подмодуль $G = (e_1 - e_2 r_1)R + (e_2 - e_3 r_2)R + \dots$. Поскольку $e_i = (e_i - e_{i+1} r_i) + e_{i+1} r_i$ для каждого i, то $F = FI + G$ и, следовательно, $F = G$. Тогда

$e_1 = (e_1 - e_2 r_1)s_1 + (e_2 - e_3 r_2)s_2 + \dots + (e_n - e_{n+1} r_n)s_n$,

где $s_1, s_2, \dots, s_n \in R$. Таким образом, $s_1 = 1, s_2 = r_1 s_1, s_3 = r_2 s_2, \dots, s_n = r_{n-1} s_{n-1}, r_n s_n = 0$ и, следовательно, $r_n \dots r_2 r_1 = 0$.

10.11. Пусть $m_1, \dots, m_n$ – семейство образующих модуля M. Из условия упражнения 10.11 следуют равенства

$$(m_1, \dots, m_n) = (m_1, \dots, m_n)A,$$

$$(m_1, \dots, m_n)(E - A) = 0,$$

где $A \in M_n(I)$. Пусть B – матрица взаимная к матрице $E - A$. Тогда $0 = (m_1, \dots, m_n)(E - A)B = (m_1, \dots, m_n)\det(E - A)$. Следовательно, $M\det(E - A) = 0$. При этом не сложно заметить, что $\det(E - A) \in 1 + I$.

Пункт 2) следует из пункта 1)

10.12. Модуль M можно рассматривать как модуль над кольцом $R[x]$. При этом $mx = f(m)$ для каждого $m \in M$. Так как согласно условию упражнения 10.12 $Mx = M$, то из 10.11 следует, что для некоторого $g \in R[x]$ выполнено равенство $M(1 + xg) = 0$. Следовательно, f – мономорфизм.

10.27. 1) Для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $r_M(\triangle(S)^n) = r_M(\triangle(S)^{n+1})$. Пусть $f \in \triangle(S)$ – гомоморфизм, у которого ядро является максимальным среди таких $g \in \triangle(S)$, что $\triangle(S)^n g \neq 0$. Несложно заметить, что для произвольного гомоморфизма $g \in \triangle(S)$ имеет место строгое включение $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(gf)$. Следовательно, $\triangle(S)^n gf = 0$ и $0 = \triangle(S)^{n+1} f = \triangle(S)^n f$, что противоречит выбору элемента f.

2) Пусть $f \in \triangle(S)$ – ненулевой гомоморфизм. Для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^{n+1})$. Так как $\mathrm{Ker}(f) \leqslant^e M$, то $f^n = 0$.

3) Несложно заметить, что для каждого $m \in M$ и каждого $f \in \triangle(S)$ существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $f^n(m) = 0$. Следовательно, корректно определен гомоморфизм $g = 1 + f + f^2 + \dots$ и $g(1 - f) = (1 - f)g = 1$.

10.14. 1) Рассмотрим локальное подкольцо $R_I = \{rs^{-1} \mid r \in R, s \notin I\}$ поля частных кольца R. Можно считать, что $R_I \subset Q(A)$. Тогда R_I - модуль $R_I[a]$ конечно порожден. Следовательно, согласно лемме Накаямы, $R_I[a]I \neq R_I[a]$ и $AI \neq A$.

2) В силу 3.11 без ограничения общности можно считать, что алгебра $R[a]$ не изоморфно алгебре $R[x]$. Предположим, что $J(A) \neq 0$. Пусть b – ненулевой элемент из $J(A)$. Так как $Q(R)[a]$ – алгебраическое расширение поля $Q(R)$, то существует ненулевой многочлен $g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i b_i \in$

$R[x]$ наименьшей степени, для которого выполнено равенство $g(b) = 0$. Очевидно, что $b_0 \neq 0$ и $b_0 \in J(A)$. Так как $J(R) = 0$, то для некоторого максимального идеала I кольца R имеем $b_0 \notin I$. Так как согласно 10.141) $AI \neq A$, то $I = I' \cap R$, где I' – максимальный идеал кольца A, в котором содержится идеал AI. Следовательно, $b_0 \notin I'$. Что противоречит тому факту, что $b_0 \in J(A)$.

3) Существуют многочлен $f(x) \in R[x]$ и максимальный идеал I кольца R, для которых выполнены условия 10.141). Тогда $AI \neq A$. Так как A – поле, то $I = 0$ и, следовательно, R – поле.

10.15. Непосредственно следует из 10.14(2).

10.16. Вытекает из 10.15 и 10.14(3) с помощью индукции по количеству порождающих R-алгебры A.

10.17. Достаточно показать, что каждый простой идеал алгебры A является пресечением максимальных идеалов алгебры A. Последнее утверждение непосредственно вытекает из 10.15.

10.18. Вытекает из 10.16.

10.19. Вытекает из 10.17 и 10.18.

11.16. На векторном пространстве P^n вектор-строк длины n с компонентами из поля P можно задать структуру правого $\mathcal{A}$-модуля двумя способами: с помощью умножения справа на элементы из $\mathcal{A}$ и согласно правилу $ma := m\phi(a)$, где $a \in \mathcal{A}, m \in P^n$. Эти правые $\mathcal{A}$-модули обозначим соответственно через M_1 и M_2. Из 11.13 следует существование изоморфизма $f : M_1 \to M_2$. Следовательно, для некоторой обратимой матрицы A имеет место равенство

$$aA = A\phi(a).$$

11.17. Докажем импликацию $\Rightarrow$. Пусть $\omega H = e \cdot RG$, где $e = e^2$. Так как $\omega H \subseteq \omega G \neq AG$, то $e \neq 1$. Поскольку $0 \neq 1 - e \in \ell(\omega H)$, то $|H| = n < \infty$ и $\ell(\omega H) = RG \sum_{h \in H} h$ (4.1). Пусть $1 - e = x \sum_{h \in H} h$, где $x = \sum a_i g_i \in RG$. Тогда $1 = \chi(1 - e) = \chi(x)\chi(\sum_{h \in H} h)$.

$\Leftarrow$. Обозначим $e = n^{-1}(n - \sum_{h \in H} h) = 1 - n^{-1} \sum_{h \in H} h$. Так как $n - \sum_{h \in H} h = \sum_{h \in H}(1 - h)$, то $eRG \subseteq \omega H$. С другой стороны, непосредственно проверяются равенства $e^2 = e, e(1-h) = 1-h$, где произвольный элемент из H.

11.18. Достаточно доказать первый пункт. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^{n} Ht_i$. Рассмотрим отображение, $\overline{f}\colon M \to N$, которое задается равенством $\overline{f}(m) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(mt_i{}^{-1})t_i$. Несложно заметить, что задание отображения $\overline{f}$ не зависит от выбора представителей смежных классов группы G по подгруппе H. Если $g \in G$ и $m \in M$, то

$$\overline{f}(mg) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(mgt_i{}^{-1})t_i = n^{-1}(\sum_{i=1}^{n} f(mgt_i{}^{-1})(gt_i{}^{-1})^{-1})g = \overline{f}(m)g.$$

Поэтому $\overline{f}$ – гомоморфизм правых RG-модулей. Кроме того,

$$\overline{f}(m) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(mt_i{}^{-1})t_i = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(m) = n^{-1}nf(m) = f(m).$$

11.20. Пусть $S = \mathrm{End}_R(M^n), S' = \mathrm{Biend}_R(M^n)$ и $(x_1, x_2, \dots x_n) = \overline{x}$. Так как M^n – полупростой правый R модуль, то для некоторого идемпотента $\pi \in S$ имеет место равенство $\pi M^n = \overline{x}R$. Тогда

$$\overline{x}S' = \overline{x}RS' = (\pi M^n)S' =$$

$$= (\mathrm{Hom}_R(M^n, \pi M^n)M^n)S' = \mathrm{Hom}_R(M^n, \pi M^n)(M^n S') =$$

$$= \mathrm{Hom}_R(M^n, \pi M^n)M^n = \pi M^n = \overline{x}R.$$

Следовательно, для некоторого элемента $r \in R$ имеет место равенство $\overline{x}\beta = \overline{x}r$.

11.24. Достаточно показать, что если $n = \dim(V) \geqslant 2$, то V как модуль над алгеброй $\mathcal{B}$ не является простым. Если $\mathcal{B}$ – модуль V является простым, то из теоремы Бернсайда следует равенство $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. С другой стороны, несложно привести пример квадратных матриц X, Y порядка n таких, что $[X, Y]$ не является нильпотентной матрицей.

11.25. Необходимость проверяется непосредственно. Докажем достаточность. Пусть $\mathcal{A}$ – подалгебра алгебры $\mathrm{End}_F(V)$ порожденная линейными операторами A и B. Если $[A, B] = 0$, то триангулизируемость алгебры $\mathcal{A}$ следует из 11.24. Предположим, что $[A, B] \neq 0$. Достаточно показать, что если $n = \dim(V) \geqslant 2$, то V как модуль над алгеброй $\mathcal{A}$ не является простым. Если $\mathcal{A}$ - модуль V является простым, то из теоремы

Бернсайда следует равенство $\mathrm{End}_F(V) = \mathcal{A}$. С другой стороны, несложно привести пример линейного оператора C такого, что $C[A, B]$ не является нильпотентным оператором.

11.26. Докажем первый пункт. Пусть $\mathcal{A}$ – подалгебра алгебры $\mathrm{End}_F(V)$ порожденная линейными операторами A и B. Достаточно показать, что если $n = \dim(V) \geqslant 2$, то V как модуль над алгеброй $\mathcal{A}$ не является простым. Если $\mathcal{A}$ - модуль V является простым, то из теоремы Бернсайда следует равенство $\mathrm{End}_F(V) = \mathcal{A}$. Из равенств $A[A, B] = [A, B]B = 0$ следует, что линейный оператор AB коммутирует с линейными операторами A и B. Следовательно, $AB = \alpha\mathcal{E}$, где $\alpha \in F$ и $\mathcal{E}$ – тождественный линейный оператор. Тогда $[A, B] = 0$ и, следовательно, согласно 11.24 $\mathcal{A}$ - модуль V не является простым. Получили противоречие. Из полученного противоречия следует, что $\mathcal{A}$ - модуль V не является простым.

11.28. Применить 11.27 и 1.93.

11.29. Применить 11.27 и 1.94.

11.30. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из 3.8 и 3.11.

2) $\Rightarrow$ 1) Без ограничения общности можно считать, что $J(R) = 0$. Заметим, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

над кольцом R обратимы в точности тогда, когда обратимы соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a - cb \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & a - bc \end{pmatrix}.$$

Тогда из условия пункта 2) следует, что для произвольных элементов $a, b, c \in R$ имеет место эквивалентность

$$a + bc \in U(R) \Leftrightarrow a + cb \in U(R).$$

Тогда для произвольного обратимого элемента u из кольца R имеют место импликации

$$u^{-1} \in U(R) \Rightarrow \forall r, s \in R(u^{-1} + rs - rs \in U(R)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall r,s \in R(u^{-1} + rs - sr \in U(R)) \Rightarrow \forall r,s \in R(1 + u(rs - sr) \in U(R)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall r,s \in R(1 + (ur - ru)s \in U(R)) \Rightarrow \forall r \in R([u,r] = 0).$$

Таким образом, $U(R) \subset C(R)$. Так как для любых элементов $a,b \in R$ элемент $1+ab-ba$ обратим, то $[R,R] \in C(R)$. Тогда импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из 11.29.

11.35. 1) $\Rightarrow$ 2) Импликация проверяется непосредственно.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть L – подмодуль модуля P и $p \in P$ такой, что $p + L \in J(P/L)$. Если $p + L + N \neq L + N$, то в силу (2) существует такой максимальный подмодуль M модуля P, что $L + N \subset M$ и $p \notin M$. Тогда $L \subset M$ и $p + L \notin M/L$ и, следовательно, $p + L \notin J(P/L)$. Полученное противоречие показывает, что $p + L + N = L + N$. Таким образом, $p \in L + N$ без ограничения общности мы можем считать, что $p \in N$.

Предположим, что $p \notin L$. Тогда $p \notin L \cap N$ и по (2) существует максимальный подмодуль S модуля N, для которого $p \notin S$ и $L \cap N \subset S$. Следовательно, согласно (2) существует такой максимальный подмодуль T модуля P, что $p \notin T$ и $S \subset T$. Таким образом, $p \in N$ и $p \notin T$ и, следовательно, $N \not\subseteq T$. Тогда $S = N \cap T$. Если $L \not\subseteq T$, то $P = L + T$ и в силу π-проективности модуля P для некоторого $f \in \mathrm{End}(P)$ имеем $\mathrm{Im}(f) \subset L$, $\mathrm{Im}(1 - f)(P) \subset T$. Тогда для каждого $n \in N$ имеет место равенство $n = f(n) + (1 - f)(n)$, где $f(n) \in N \cap L$ и $(1 - f)(n) \in N \cap T$. Отсюда $N \subset N \cap L + N \cap T = N \cap L + S = S$, что противоречит максимальности S в N. Таким образом, $L \subset T$ и поскольку $p + L \in J(P/L)$, то $p \in T$. Полученное противоречие показывает, что $J(P/L) = 0$.

11.36. 1) $\Rightarrow$ 2) Импликация непосредственно следует из 11.31.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть N - некоторый подмодуль модуля M, S – простой правый R – модуль и $I = \mathrm{Ann}(S)$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $f : N \to S$. Так как $f(NI) = 0$, то для естественного гомоморфизма $f_1 : N \to N/NI$ и некоторого гомоморфизма $f_2 : N/NI \to S$ имеем $f = f_2 f_1$. Непосредственные вычисления показывают, что из условия $(*)$ следует равенство $NI = N \cap MI$. Тогда отображение $g : N/NI \to M/MI$, действующее по правилу $f(n + NI) = n + MI$, является мономорфизмом. Тогда из условия пункта следует, что для некоторого гомоморфиз-

ма $h : M/MI \to S$ имеет место равенство $f_2 = hg$. Если $i : N \to M$ - естественное вложение и $p :\to N/NI$ - естественный гомоморфизм, то $gf_1 = pi$. Тогда $f = f_2 f_1 = hgf_1 = (hp)i$.

11.37. Предположим, что

$$N/\operatorname{Hom}(M,N)N + L/\operatorname{Hom}(M,N)N = M/\operatorname{Hom}(M,N)N.$$

Так как модуль M π-проективен, то $\operatorname{Hom}(M,N)+\operatorname{Hom}(M,L) = \operatorname{End}(M)$. Тогда $N = \operatorname{End}(M)N \subset \operatorname{Hom}(M,N)N + L = L$. Следовательно,

$$L/\operatorname{Hom}(M,N)N = M/\operatorname{Hom}(M,N)N.$$

11.39. Пусть N – подмодуль модуля P. Так как

$$\operatorname{Hom}(P,N)\operatorname{Hom}(P,N)N \subset \operatorname{Hom}(P,N)N,$$

то каждый гомоморфизм из $\operatorname{Hom}(P,N)$ индуцирует гомоморфизм из

$$\operatorname{Hom}(P/\operatorname{Hom}(P,N)N, N/\operatorname{Hom}(P,N)N).$$

Поскольку модуль P является строго кополиформным, то из 11.37 следует, что $\operatorname{Hom}(P,N)P = \operatorname{Hom}(P,N)N$. Так как модуль P порождает каждый свой подмодуль, то $\operatorname{Hom}(P,N)P = N$. Следовательно, $\operatorname{Hom}(P,N)N = N$.

12.8. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) следует из 9.12.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть M – однородный модуль, удовлетворяющий условию пункта 3). Без ограничения общности можно считать, что $S \leqslant M$. Согласно 12.7 для некоторых $m \in M$ и $j \in J(R)$ имеет место равенство $S = mjR$. Так как $mj(J(R) \cap jR) = 0$, то S изоморфен подмодулю полупростого модуля $jR/(J(R) \cap jR)$.

12.11. Достаточно показать, что $R/J(R)$ – редуцированное кольцо. Предположим, что кольцо $R/J(R)$ обладает ненулевым элементом $\overline{r}$, для которого выполнено равенство $\overline{r}^2 = 0$. Так как $R/J(R)$ – конечное прямое произведение полных матричных колец над телами, то кольцо $R/J(R)$ обладает системой ненулевых матричных единиц $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$. Для некоторого идемпотента $e \in R$ имеем $e + J(R) = e_{11}$ и $(eR(1-e))^2 =$

$((1-e)Re)^2=0$. Тогда $eR(1-e)\cup(1-e)Re\subset J(R)$ и, следовательно, e_{11} – центральный идемпотент, что невозможно. Таким образом, $R/J(R)$ – редуцированное кольцо.

12.12. Импликации 1)⇒2) следует из 3.15 и 12.3.

2)⇒1) Обозначим через $\overline{R}$ факторкольцо $R/J(R)$ и для каждого r положим $\overline{r}=r+J(R)$. Тогда $\overline{1}=\overline{e}_1+\ldots+\overline{e}_n$, где для каждого i правый $\bar{R}$-модуль $\bar{e}_i\bar{R}$ является простым, и, следовательно, $\bar{R}$ – классически полупростое кольцо. Допустим, что для некоторого элемента $r\in R$ имеет место равенство $\bar{r}^2=\bar{r}$. Тогда $\bar{r}=\bar{f}_1+\ldots+\bar{f}_k$ и $1-\bar{r}=\overline{f}_{n-k}+\ldots+\overline{f}_m$, где $\bar{f}_i$ – примитивные взаимоортогональные идемпотенты. Из теоремы Жордана - Гёльдера следует, что $n=m$ и без ограничения общности мы можем считать для каждого i имеет место изоморфизм $\bar{e}_i\bar{R}\cong\bar{f}_i\bar{R}$. Согласно 5.17 для каждого i имеем $\overline{e}_i=\overline{a}_i\overline{b}_i$, $\bar{f}_i=\bar{b}_i\bar{a}_i$, где $\bar{a}_i\in\bar{e}_i\bar{R}\bar{f}_i$, $\bar{b}_i\in\bar{f}_i\bar{R}\bar{e}_i$. Если $\overline{u}=\overline{a}_1+\ldots+\overline{a}_n$ $\overline{v}=\overline{b}_1+\ldots+\overline{b}_n$, то $\bar{u}\bar{v}=\bar{v}\bar{u}=\overline{1}$ и $\overline{u}\overline{f}_i=\overline{e}_i\overline{u}=\overline{a}_i$ для каждого i. Очевидно, u – обратимый элемент. Положим $f=u^{-1}(e_1+\ldots+e_k)u$. Тогда $\overline{f}=\overline{u^{-1}(e_1+\ldots+e_k)u}=\overline{u^{-1}}\overline{e}_1\overline{u}+\ldots+\overline{u^{-1}}\overline{e}_k\overline{u}=\overline{f}_1+\ldots+\overline{f}_k=\overline{r}$.

13.6. Пусть IM/I^2M – артиновый модуль. Докажем с помощью индукции по n, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ модуль $I^nM/I^{n+1}M$ артинов. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $I^nM/I^{n+1}M$ – артиновый модуль и $\{f_1,\ldots,f_k\}$ – множество порождающих для правого S-модуля I. Для каждого $1\leqslant i\leqslant k$ определены эпиморфизмы

$$\phi_i: I^nM/I^{n+1}M\to(f_iI^nM+I^{n+2}M)/I^{n+2}M,$$

действующие по правилу $m+I^{n+1}M\mapsto f_im+/I^{n+2}M$. Тогда для каждого $1\leqslant i\leqslant k$ модули $(f_iI^nM+I^{n+2}M)/I^{n+2}M$ являются артиновыми и, следовательно, модуль

$$\sum_{i=1}^{k}(f_iI^nM+I^{n+2}M)/I^{n+2}M=I^{n+1}M/I^{n+2}M$$

также является артиновым.

13.10. Пусть $M_{ij}=M_{i-1}+M_i\cap M'_j(1\leqslant i\leqslant n,0\leqslant j\leqslant m)$. Тогда имеем цепь подмодулей

$$
\begin{aligned}
M = M_{nm} \supseteq M_{n,m-1} \supseteq \ldots \supseteq M_{n1} \supseteq M_{n0} = M_{n-1} = \\
= M_{n-1,m} \supseteq M_{n-1,m-1} \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1,1} \supseteq M_{n-1,0} = M_{n-2} \\
\vdots \\
= M_{im} \supseteq M_{i,m-1} \supseteq \ldots \supseteq M_{i1} \supseteq M_{i0} = M_{i-1} \\
\vdots \\
= M_{1m} \supseteq M_{1,m-1} \supseteq \ldots \supseteq M_{11} \supseteq M_{10} = M_0 = 0,
\end{aligned}
$$

которая является уплотнением цепи $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$. Факторами этой цепи являются модули

$$M_{ij}/M_{i,j-1}(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m).$$

Аналогично полагая $M'_{ji} = M'_{j-1} + M'_j \cap M_i(1 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m)$ получим уплотнение цепи $0 = M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \ldots \subseteq M'_{n-1} \subseteq M'_m = M$, у которой факторами являются модули

$$M'_{ji}/M'_{j,i-1}(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m).$$

Поскольку согласно лемме о бабочке $M_{ij}/M_{i,j-1} \cong M'_{ji}/M'_{j,i-1}$, то построенные уплотнения цепей $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$ и $0 = M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \ldots \subseteq M'_{n-1} \subseteq M'_m = M$ являются изоморфными.

13.13. Докажите с помощью математической индукции по длине модуля B.

13.21. Предположим, что R – артиново справа кольцо, у которого радикал Джекобсона не является нильпотентным идеалом. Тогда для некоторого ненулевого идеала I кольца R имеем $I^2 = I \neq 0, I \subset J(R)$. Пусть A – минимальный элемент в множестве всех таких ненулевых правых идеалов B, что $BI = B, B \subset J(R)$. Тогда для некоторого ненулевого элемента $a \in A$ имеем $aI \neq 0, aII = aI$. В силу выбора A имеем $aR \subseteq A = aI \subseteq aR$. Тогда $ai = a$ для некоторого $i \in J(R)$. Следовательно, $a = 0$, что противоречит выбору элемента a.

13.25. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3)очевидны.

3) $\Rightarrow$ 1) Согласно условию пункта 3) имеет место равенство

$$J(R) = x_1R + \ldots + x_nR + J^2(R).$$

С помощью математической индукции несложно показать, что для произвольного $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$J^k(R) = \sum x_{i_1} \dots x_{i_k} R + J^{k+1}(R).$$

Тогда согласно 9.10 для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеем $J^n(R) = 0$. Из условия пункта 3) следует, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ $J^k(R)/J^{k+1}(R)$ конечно порожден как правый R – модуль. Следовательно, R_R – модуль конечной длины.

13.27. Поскольку A – конечная прямая сумма локальных колец, то без ограничения общности можно считать, что A – локальное кольцо (проверьте !). Так как модуль M точен, то отображение

$$f : J(A) \to \mathrm{Hom}_A(M, MJ(A)),$$

действующее по правилу $a \mapsto (m \mapsto ma)$ является инъективным гомоморфизмом A - модулей. Следовательно, $\lg(J(A)) \leqslant \lg(\mathrm{Hom}_A(M, MJ(A)))$. Если $m = \lg(M/MJ(A))$, то из леммы Накаямы следует существование эпиморфизма $g : A^m \to M$. Отображение

$$\overline{g} : \mathrm{Hom}_A(M, MJ(A))) \to \mathrm{Hom}_A(A^m, MJ(A)),$$

действующее по правилу $\varphi \mapsto \varphi g$ является мономорфизмом A - модулей. Так как

$$\mathrm{Hom}_A(A^m, MJ(A)) \cong \mathrm{Hom}_A(A, MJ(A))^m \cong MJ(A)^m,$$

то $\lg(\mathrm{Hom}_A(M, MJ(A))) \leqslant m \lg(MJ(A)) = \lg(M/MJ(A)) \lg(MJ(A))$. Тогда

$$\lg(J(A)) \leqslant \lg(\mathrm{Hom}_A(M, MJ(A))) \leqslant \lg(M/MJ(A)) \lg(MJ(A)) =$$

$$= \lg(M/MJ(A))(\lg(M) - \lg(M/MJ(A))) \leqslant [\frac{\lg^2(M)}{4}].$$

Так как $\lg(A) = \lg(J(A)) + 1$, то $\lg(A) \leqslant [\frac{\lg^2(M)}{4}] + 1$.

13.28. Пусть A – коммутативная подалгебра полной матричной алгебры $M_n(P)$. Рассмотрим сначало случай, когда P – алгебраически замкнутое поле. Пусть V – векторное пространство вектор - строк длины

n над полем P. Векторное пространство V имеет естественную структуру точного правого A – модуля. Тогда из 13.12 и 13.28 следует неравенство $\dim_P(A) \leqslant [\frac{n^2}{4}] + 1$. Пусть теперь P – произвольное поле и $\overline{P}$ – его алгебраическое замыкание. Так как $M_n(\overline{P}) \cong \overline{P} \otimes_P M_n(P)$ и $\dim_{\overline{P}} \overline{P} \otimes_P A = \dim_P(A)$, то согласно доказанному выше имеем неравенство

$$\dim_P(A) = \dim_{\overline{P}}(\overline{P} \otimes_P A) \leqslant [\frac{n^2}{4}] + 1.$$

13.32. Покажем, что R – нетерово справа кольцо. Для произвольного правого идеала I и для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим подмножество I_n кольца S вида

$$I_n = \{s \in S \mid \exists s_0, \ldots, s_n \in S : s_n r^n + \ldots + s_1 r + s_0 \in I, s_n = s\}.$$

Непосредственно проверяется, что I_n – идеал кольца R. Несложно заметить, что два идеала $I \subset I'$ кольца R совпадают в точности тогда, когда $I_n = I'_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \ldots$ – возрастающая цепь правых идеалов кольца R. Ясно, что $A^{(i)}_j \subset A^{(i')}_{j'}$, если $i \leqslant i', j \leqslant j'$. Так как S – нетерово справа кольцо, то существует m такое, что $A^{(i)}_i = A^{(j)}_j$ для каждых $i, j \geqslant m$ и существует m', для которого $A^{(i)}_s = A^{(i)}_j$, если $0 \leqslant i \leqslant m-1$ и $j, s \geqslant m'$. Тогда для каждых $i, j \geqslant \max(m, m')$ имеет место равенство $A^{(i)} = A^{(i)}$.

13.41 Пусть M – ненулевой правый RG-модуль. Модуль M обладает максимальным R-подмодулем N. Несложно заметить, что $\bigcap_{g \in G} Ng$ – RG-подмодуль модуля M и $M/\bigcap_{g \in G} Ng$ как правый R модуль является ненулевым полупростым модулем. Следовательно, модуль M обладает максимальным RG-подмодулем, который содержит подмодуль $\bigcap_{g \in G} Ng$.

13.43. 1) Рассмотрим естественный гомоморфизм $f : F \to F/G$. Так как для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $f(x_i) - f(x_{i+1})b_i = 0$, то $F/G = (F/G)J(R)$. Тогда $F/G = 0$.

2) Пусть $r = r_i$ для каждого индекса i. Для каждого $m \in F$ положим $\bar{m} = m + G$. Тогда $F/G = \oplus_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i R$. Предположим, что $F \neq G$. Тогда модуль F/G содержит максимальный подмодуль T. Поскольку для каждого i имеет место равенство $\overline{x}_{i+1} r = \bar{x}_i$, то для некоторого i_0 имеем $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i_0} \in T; \overline{x}_{i_0+1}, \overline{x}_{i_0+2}, \ldots \notin T$. Для каждого $\bar{m} \in$

F/G положим $\overline{\overline{m}} = \bar{m} + T$. Поскольку $(M/N)/T$ – простой модуль, то $\overline{\overline{x}}_{i_0+1}R = \overline{\overline{x}}_{i_0+2}R$. Так как $\mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+1})$ и $\mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+2})$ – двусторонние идеалы и $R/\mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+1}) \cong \overline{\overline{x}}_{i_0+1}R = \overline{\overline{x}}_{i_0+2}R \cong R/\mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+2})$, то $\mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+1}) = \mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+1}R) = \mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+2}R) = \mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+2})$. Из равенства $\overline{x}_{i_0+1}r = \overline{x}_{i_0}$ следует, что $r \in \mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+1}) = \mathrm{Ann}(\overline{\overline{x}}_{i_0+2})$. Тогда $0 = \overline{\overline{x}}_{i_0+2}r = \overline{\overline{x}}_{i_0+1}$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $F = G$.

13.44. 1) $\Rightarrow$ 2) Поскольку каждый правый $R/J(R)$-модуль можно рассматривать как правый R-модуль, то кольцо $R/J(R)$ является max - кольцом. Покажем, что $J(R)$ – t-нильпотентно справа. Предположим противное. Тогда существует такое семейстово $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов идеала $J(R)$, что для каждого натурального n имеет место неравенство $b_n b_{n-1} \ldots b_1 \neq 0$. Рассмотрим свободный модуль F с базисом $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, его подмодуль $G = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - x_{i+1}b_i)R$. Согласно 13.43 $F = G = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - x_{i+1}b_i)R$. Тогда существуют такие элементы $r_1, r_2, \ldots, r_n$, что $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1}b_i)r_i = x_1r_1 + x_2(r_2 - b_1r_1) + \ldots + x_n(r_n - b_{n-1}r_{n-1}) - x_{n+1}b_nr_n$. Сравнивая коэффициенты при базисных элементах, из последнего равенства получаем $r_1 = 1, r_2 = b_1r_1 = b_1, r_3 = b_2r_2 = b_2b_1, \ldots, r_n = b_{n-1}r_{n-1} = b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1$ и $0 = b_nr_n = b_nb_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1$. Полученное противоречие показывает, что идеал $J(R)$ является t-нильпотентным справа.

2) $\Rightarrow$ 1) Если M – ненулевой правый R-модуль, то $MJ(R) \neq M$. Поскольку $R/J(R)$ – правое max-кольцо, то правый $R/J(R)$ – модуль $M/MJ(R)$ содержит содержит максимальный подмодуль. Отсюда следует, что M содержит максимальный подмодуль.

13.47. 1) Пусть r – элемент кольца R, который не является левым делителем нуля. Рассмотрим модуль

$M = \oplus_{i=1}^{\infty} x_iR$,

где $x_iR = R/r^iR$. Пусть $N = \sum_{i=1}^{\infty}(x_{i+1}r - x_i)$. Согласно 13.43 существуют такие элементы $r_1, \ldots, r_n \in R$, что

$x_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}r - x_i)r_i = -x_1r_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i(rr_{i-1} - r_i) + x_{n+1}rr_n$.

Тогда

$x_1 = -x_1r_1; rr_{i-1} - r_i \in r^iR, (i = 2, \ldots, n); rr_n \in r^{n+1}R$.

Поскольку r не является левым делителем нуля, то из $rr_n \in r^{n+1}R$

следует $r_n \in r^n R$. Если $r_k \in r^k R$, где $k = 2, \ldots, n$, то из $rr_{k-1} - r_k \in r^k R$ следует $rr_{k-1} \in r^k R$ и, следовательно, $r_{k-1} \in r^{k-1} R$. По индукции мы имеем $r_1 \in r^1 R$. Тогда $x_1 = -x_1 r_1 = 0$. Таким образом, $rR = R$ и для некоторого элемента s имеем $rs = 1$. Поскольку $(sr - 1)s$, то $sr = 1$ и $r \in U(R)$.

2) Покажем, что для каждого $r \in R$ имеет место равенство $rR \oplus r_R(r) = R_R$. Из леммы следует, что R – редуцированное кольцо и $r_R(r)$ – двусторонний идеал. Пусть $s \in rR \cap r_R(r)$. Тогда для некоторого $x \in R$ имеем $s = rx$ и $rs = 0$. Отсюда получаем $xs \in r_R(r)$, $s^2 = rxs = 0$ и, следовательно, поскольку R – редуцированное, то $s = 0$. Рассмотрим кольцо $\overline{R} = R/r_R(r)$. Легко видеть, что $\overline{R}$ является правым инвариантным кольцом и правым max-кольцом. Если для некоторого элемента $\overline{s} = s + r_R(r) \in \overline{R}$ имеет место равенство $\overline{rs} = 0$, то $rs \in r_R(r) \cap rR = 0$. Следовательно, $s \in r_R(r)$ и $\overline{s} = 0$. Таким образом, $\overline{r}$ не является левым делителем нуля и из пункта 1) следует, что $\overline{r} \in U(\overline{R})$. Таким образом, $\overline{r}\overline{R} = \overline{R}$ и, следовательно, $rR + r_R(r) = R_R$.

13.51. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 4) и 5) $\Rightarrow$ 1) проверяются непосредственно.

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset \ldots \subset M_\tau = M$ – возрастающая цепочка подмодулей, удовлетворяющая условию пункта 4). Для доказательства 1) достаточно показать, что каждый ненулевой подфактор модуля M имеет ненулевой цоколь. Пусть G и F – подмодули модуля M и $G \subsetneqq F$. Допустим β – наименьшее ординальное число, для которого имеет место неравенство $M_\beta \cap G \neq M_\beta \cap F$. Очевидно, что β – непредельное ординальное число. Таким образом, $M_{\beta-1} \cap G = M_{\beta-1} \cap F$ и $(F + M_{\beta-1})/(G + M_{\beta-1}) \cong F/(G + (F \cap M_{\beta-1})) \cong F/G$. Если $F \cap M_\beta \subset G + M_{\beta-1}$, то $F \cap M_\beta \subset G + (F \cap M_{\beta-1}) = G + (G \cap M_{\beta-1}) = G$. Следовательно, $M_\beta \cap G = M_\beta \cap F$, что противоречит нашему предположению. Полученное противоречие показывает, что $F \cap M_\beta \not\subseteq G + M_{\beta-1}$. Тогда из изоморфизма $((F \cap M_\beta) + G + M_{\beta-1})/(G + M_{\beta-1}) \cong (F \cap M_\beta)/F \cap (M_{\beta-1} + (G \cap M_\beta))$ следует, что ненулевой модуль $((F \cap M_\beta) + G + M_{\beta-1})/(G + M_{\beta-1})$ является гомоморфным образом модуля $(F \cap M_\beta)/(F \cap M_{\beta-1}) \cong ((F \cap M_\beta) + M_{\beta-1})/M_{\beta-1}$, который является полупростым.

1) $\Rightarrow$ 5). Для доказательства импликации достаточно показать, что класс полуартиновых модулей, замкнут относительно взятия подмодулей, фактормодулей и прямых сумм. Замкнутость полуартиновых модулей относительно подмодулей и фактормодулей проверяется непосредственно. Равносильность пунктов 1) и 4) показывает, что полуартиновы модули замкнуты относительно прямых сумм.

13.54. Используем трансфинитную индкуцию по α. Случай $\alpha = 0$ очевиден. Если α – предельный ординал, то равенство проверяется непосредственно. Пусть α – непредельный ординал. Из предположения индукции получаем

$$(\operatorname{Soc}_\alpha(N) + \operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M))/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M) \cong \\ \operatorname{Soc}_\alpha(N)/(\operatorname{Soc}_\alpha(N) \cap \operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M)) = \operatorname{Soc}_\alpha(N)/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(N).$$

Отсюдо следует включение $\operatorname{Soc}_\alpha(N) \subset \operatorname{Soc}_\alpha(M) \cap N$. С другой стороны имеем

$$(\operatorname{Soc}_\alpha(M) \cap N)/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(N) = (\operatorname{Soc}_\alpha(M) \cap N)/(\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M) \cap N) \cong \\ (\operatorname{Soc}_\alpha(M) \cap N + Soc_{\alpha-1}(M))/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M),$$

что доказывает обратное включение.

13.55. Используем трансфинитную индкуцию по α. Пусть $M = \oplus_{i\in I} M_i$. Случай $\alpha = 1$ очевиден. Если α – предельный ординал, то равенство проверяется непосредственно. Пусть α – непредельный ординал. Тогда по предположению индукции $\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(\oplus_{i\in I} M_i) = \oplus_{i\in I}\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M_i)$. Из естественного изоморфизма

$$M_i/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M_i) \cong (M_i + \operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M))/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M)$$

следует

$$\operatorname{Soc}(M_i/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M_i)) = \operatorname{Soc}_\alpha(M_i)/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M_i) \cong (\operatorname{Soc}_\alpha(M_i) + \\ \operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M))/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M) = \operatorname{Soc}((M_i + \operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M))/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M)).$$

Тогда

$$\operatorname{Soc}_\alpha(M)/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M) = \operatorname{Soc}(M/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M)) = \\ \oplus_{i\in I}\operatorname{Soc}((M_i + \operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M))/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M)) = \\ \oplus_{i\in I}(\operatorname{Soc}_\alpha(M_i) + \operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M))/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M) = (\oplus_{i\in I}\operatorname{Soc}_\alpha(M_i))/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M)$$

и, следовательно, $\mathrm{Soc}_\alpha(\oplus_{i\in I} M_i) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Soc}_\alpha(M_i)$.

13.56. Используя трансфинитную индукцию, покажем, что для каждого ординала α имеет место включение $f(\mathrm{Soc}_\alpha(M)) \subset \mathrm{Soc}_\alpha(N)$. Если $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. Допустим, что для каждого $\beta < \alpha$ наше утверждение доказано. Если β – предельный ординал, то включение проверяется непосредственно. Пусть α – непредельный ординал. По предположению индукции $f(\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)) \subset \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N)$. Тогда отображение f индуцирует гомоморфизм $\bar{f} : M/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)) \to N/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N)$. Поскольку $\bar{f}(\mathrm{Soc}(M/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M))) \subset \mathrm{Soc}(N/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N))$, то $f(\mathrm{Soc}_\alpha(M)) \subset \mathrm{Soc}_\alpha(N)$.

13.60. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

3) $\Rightarrow$ 1) Из условия пункта 3) следует, что f – мономорфизм. Предположим, что f не является автоморфизмом. Пусть α – наименьший ординал такой, что $f_{|\mathrm{Soc}_\alpha(M)} : \mathrm{Soc}_\alpha(M) \to \mathrm{Soc}_\alpha(M)$ не автоморфизм. Ясно, что α – непредельный ординал. Гомоморфизм $f_{|\mathrm{Soc}_\alpha(M)}$ индуцирует гомоморфизм $g : \mathrm{Soc}_\alpha(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M) \to \mathrm{Soc}_\alpha(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$, действующий по правилу: $m + \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M) \mapsto f(m) + \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$. Если $\mathrm{Ker}(g) \neq 0$, то $f(m) \in \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$ для некоторого элемента $m \in \mathrm{Soc}_\alpha(M) \setminus \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$. С другой строны, поскольку $f_{|\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)} : \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M) \to \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$ – автоморфизм, то для некоторого элемента $m' \in \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$ выполнено равенство $f(m') = f(m)$. Получили противоречие с инъективностью f. Таким образом, g инъективно и поскольку $\mathrm{Soc}_\alpha(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$ – модуль конечной длины, то g – автоморфизм. Следовательно, для каждого $m \in \mathrm{Soc}_\alpha(M)$ существует элемент $m' \in \mathrm{Soc}_\alpha(M)$ такой, что $f(m) = f(m') + n$, где $n \in \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$. Так как $f_{|\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)} : \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M) \to \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$ – автоморфизм, то $f(n') = n$ для некоторого $n' \in \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$. Таким образом, $m = f(m' + n')$. Следовательно, $f_{|\mathrm{Soc}_\alpha(M)}$ – автоморфизм, что противоречит сделанному выше предположению.

13.64. 1) $\Rightarrow$ 2) Достаточно показать, что $J(R)$ – t-нильпотентный слева идеал. Для каждого элемента $r \in R$ обозначим через $h(r)$ наименьший ординал β, для которого выполнено условие $r \in \mathrm{Soc}_\beta(R_R)$. Непосредственно проверяется, что $h(r)$ – непредельный ординал. Пусть $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ – семейство элементов из $J(R)$. Поскольку для каждого ординала α и правого R-модуля M модуль $\mathrm{Soc}_\alpha(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$ полупрост, то $\mathrm{Soc}_\alpha(M)J(R) \subset$

$\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)$. Следовательно, мы имеем убывающую цепочку $h(r_1) \geqslant h(r_1r_2) \geqslant \ldots$. Поскольку каждая убывающая цепочка ординалов стабилизируется, то существет такое натуральное число n, что $r_1r_2\ldots r_n = 0$

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть M – произвольный ненулевой правый R-модуль. Если $mJ(R) \neq 0$ для каждого ненулевого $m \in M$, то для каждого ненулевого $m \in M$ мы сможем найти такую последовательность $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов из $J(R)$, что для каждого n имеет место неравенство $mr_1r_2\ldots r_n \neq 0$. Что противоречит условию пункта 2. Следовательно, модуль M содержит такой ненулевой элемент m, что $mJ(R) = 0$. Поскольку $R/J(R)$ полуартиново справа, то модуль mR содержит простой подмодуль.

13.65. Пусть P – некоторое поле и I – частично упорядоченное множество. Рассмотрим в кольце $CFM_I(P)$ подкольцо R вида $PE + N$, где E – единичная матрица, а $N = \{A \in CFM_I(P) \mid A_{ij} = 0$ для почти всех пар $(i, j) \in I \times I$ и $A_{ij} = 0$, если $i > j\}$. Непосредственно проверяется, что R – локальное кольцо и $J(R) = N$.

Покажем, что если I удовлетворяет условию обрыва убывающих (возрастающих) цепочек, то идеал $J(R)$ является t-нильпотентным справа(слева). Пусть $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ – система элементов из N и $s_n = r_n \ldots r_1$ ($t_n = r_1 \ldots r_n$). Обозначим через A_n (B_n) множестов индексов $i \in I$, для которых найдется такой элемент $k \in I$, что $(s_n)_{ik} \neq 0((t_n)_{ki} \neq 0)$. Ясно, что для каждого $i \in A_{n+1}(i \in B_{n+1})$ найдется такой элемент $j \in A_n(j \in B_n)$, для которого $i < j(i > j)$. Таким образом, для каждого натурального $j \in A_{n+1}(j \in B_{n+1})$ существует такая цепочка $j < j_n < \ldots < j_1(j > j_n > \ldots > j_1)$, что $j_k \in A_k(j_k \in B_k)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$. Поскольку I удовлетворяет условию обрыва убывающих(возрастающих) цепочек и A_n (B_n) конечно для каждого n, то из теоремы Кенинга следует, что $A_m = \varnothing$ ($B_m = \varnothing$) для некоторого m. Следовательно, $0 = r_m \ldots r_1$ ($0 = r_1 \ldots r_m$).

Если I не удовлетворяет условию обрыва убывающих(возрастающих) цепочек, то в I существует бесконечная убывающая(возрастающая) цепь $i_1 > i_2 > \ldots$ ($i_1 < i_2 < \ldots$). Тогда для системы матричных единиц $\{e_{i_2,i_1}, e_{i_3,i_2}, \ldots\}$ ($\{e_{i_1,i_2}, e_{i_2,i_3}, \ldots\}$) неравенство $e_{i_n,i_{n-1}} \ldots e_{i_3,i_2}e_{i_2,i_1} \neq 0$ ($e_{i_1,i_2}e_{i_2,i_3} \ldots e_{i_{n-1},i_n} \neq 0$) имеет место для каждого натурального n.

Таким образом, из приведенных выше рассуждений следует, что идеал

$J(R)$ t-нильпотентен справа(слева) тогда и только тогда, когда I удовлетворяет условию обрыва убывающих(возрастающих) цепочек. В частности, если положить $I = \mathbb{N}$, то мы получим пример кольца, которое полуартиново слева, но не полуартиново справа.

13.61. Достаточно показать, что $\mathrm{Soc}(M)$ имеет конечную длину. Предположим, что $\mathrm{Soc}(M)$ не является модулем конечной длины. Пусть $\mathcal{A}$ – множество всех замкнутых подмодулей модуля M, у которых цоколи не являются модулями конечной длины. Ясно, что $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Тогда существует подмодуль $N_0 \in \mathcal{A}$ модуля M такой, что

$$\mathrm{Loewy}(N_0) = \min\{\mathrm{Loewy}(N) \mid N \in \mathcal{A}\}.$$

Положим $\alpha = \mathrm{Loewy}(N_0)$. Поскольку N_0 конечно порожден, то модуль $N_0/Soc_{\alpha-1}(N_0)$ является полупростым модулем конечной длины. Пусть $n = \lg(N_0/Soc_{\alpha-1}(N_0))$. Так как подмодуль $\mathrm{Soc}(N_0)$ имеет бесконечную длину, то имеет место равенство

$$Soc(N_0) = S_1 \oplus \ldots \oplus S_{n+1},$$

где $S_1, \ldots, S_{n+1}$ подмодули модуля M, у которых длины бесконечны. Пусть $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_{n+1}$ – замыкания соответственно подмодулей $S_1, \ldots, S_{n+1}$ в модуле N_0. Согласно 9.25 подмодули $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_{n+1}$ замкнуты в модуле M. Тогда в силу выбора модуля N_0 имееют место равенства

$$\alpha = \mathrm{Loewy}(\overline{S}_1) = \ldots = Loewy(\overline{S}_{n+1}).$$

Пусть $f : N_0 \to N_0/Soc_{\alpha-1}(N_0)$. Согласно 13.54 имеют место равенства

$$\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N_0) \cap (\overline{S}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{S}_{n+1}) = \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(\overline{S}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{S}_{n+1})$$

$$\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(\overline{S}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{S}_{n+1}) = \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(\overline{S}_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Soc}_{\alpha-1}(\overline{S}_{n+1}).$$

Тогда

$$f(\overline{S}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{S}_{n+1}) \cong \overline{S}_1/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(\overline{S}_1) \oplus \ldots \oplus \overline{S}_{n+1}/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(\overline{S}_{n+1}).$$

Так как $\overline{S}_i/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(\overline{S}_i) \neq 0$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n+1$, то модуль $N_0/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N_0)$ содержит подмодуль, у которого длина больше n, что противоречит равенству $n = \lg(N_0/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(N_0))$.

13.41 Пусть M – ненулевой правый RG-модуль. Модуль M обладает простым R-подмодулем S. Несложно заметить, что $\sum_{g\in G} Sg$ – RG-подмодуль модуля M, который как правый R модуль является модулем конечной длины. Следовательно, модуль M обладает простым RG-подмодулем, который содержится в подмодуле $\sum_{g\in G} Sg$.

13.70. Из 13.54 следует, что

$$\mathrm{Loewy}(N) = \min\{\alpha \mid N = N \cap \mathrm{Soc}_\alpha(M)\}.$$

Из 13.56 следует, что

$$\mathrm{Loewy}(M/\operatorname{Soc}_{\mathrm{Loewy}(N)}(M)) \leqslant \mathrm{Loewy}(M/N).$$

Тогда

$$\mathrm{Loewy}(M) = \mathrm{Loewy}(\mathrm{Soc}_{\mathrm{Loewy}(N)}(M)) + \mathrm{Loewy}(M/\operatorname{Soc}_{\mathrm{Loewy}(N)}(M)) \leqslant$$

$$\mathrm{Loewy}(N) + \mathrm{Loewy}(M/N).$$

13.71. Доказательство будем проводить, используя математическую индукцию по правой длине Леви кольца. Случай $\mathrm{Loewy}(R_R) = 1$ следует из теоремы Веддербарна - Артина. Допустим $\mathrm{Loewy}(R_R) = n$ и $M = J(R) \cap \mathrm{Soc}(R_R)$. Поскольку $\mathrm{Soc}(R_R)M = 0$, то модуль ${}_RM$ мы можем рассматривать как левый $\overline{R} = R/\operatorname{Soc}(R_R)$-модуль и, следовательно, по предположению индукции $\mathrm{Loewy}({}_RM) \leqslant \mathrm{Loewy}({}_{\overline{R}}\overline{R}) \leqslant 2^{n-1} - 1$.

Покажем, что $\mathrm{Soc}(R_R)/M$ является полупростым левым R-модулем. Пусть e – примитивный идемпотент из $\mathrm{Soc}(R_R)$. Если левый R/M-модуль $(R/M)(e+M)$ содержит нильпотентный идеал $(A+M)/M$, где A-подмодуль Re, то из равентсва $M^2 = 0$ следует, что левый идеал A является нильпотентным. Тогда $A \subset J(R)\cap\mathrm{Soc}(R_R) = M$ и, следовательно, $(R/M)(e+M)$ – простой модуль. Поскольку $\mathrm{Soc}(R_R) = \oplus_{i\in I} e_iR \oplus M$, где e_i – примитивные идемпотенты, то из равенства $\mathrm{Soc}(R_R)/M = (\sum_{i\in I} Re_iR + M)/M$ следует, что $\mathrm{Soc}(R_R)/M$ является полупростым левым R-модулем.

Тогда

$$\mathrm{Loewy}({}_RR) \leqslant \mathrm{Loewy}({}_RR/\operatorname{Soc}(R_R)) + \mathrm{Loewy}({}_R\mathrm{Soc}(R_R)/M) + \mathrm{Loewy}({}_RM) \leqslant$$

$$(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1.$$

13.72. Пусть D – некоторое тело, $T = CFM_{\mathbb{N}}(D)$ и $S = \mathrm{Soc}(T)$. Пусть $\phi : S \to S$ – отображение, при котором $\phi(A)_{ij} = A_{i+1,j}$, где $A \in S$ и $i, j \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что ϕ – $D-T$-гомоморфизм и $Ker(\phi) = \{A \in S \mid A_{i,j} = 0$ для каждого $i > 1$ $\}$. На множестве $R = D \times S$ определим операцию сложения покоординатно и операцию умножение по правилу

$$(d, s)(d', s') = (dd', sd' + ds' + s\phi(s')).$$

Непосредственная проверка показывает, что относительно введенных операций R – кольцо с единицей $(1, 0)$ и $(0, S)$, $(0, \mathrm{Ker}(\phi))$ – его идеалы, причем $(0, S)(0, \mathrm{Ker}(\phi)) = 0$. Так как $(0, s)(d', s') = (0, s(d' + \phi(s')))$ и ϕ – эпиморфизм, то $\mathrm{Lat}((0, S)_R) = \mathrm{Lat}(S_T)$. Таким образом, правый идеал $(0, S)$ кольца R полупрост и поскольку $R/(0, S) \cong D$, то R – полуартиново кольцо и $l(R_R) = 2$.

Так как $(0, S)(0, \mathrm{Ker}(\phi)) = 0$, то левый идеал $(0, \mathrm{Ker}(\phi))$ можно рассматривать как левый модуль над кольцом $R/(0, S) \cong D$. Тогда $(0, \mathrm{Ker}(\phi))$ – полупростой левый R – модуль. Непосредственная проверка показывает, что $\mathrm{Ker}(\phi)$ – точный правый T-модуль. Пусть (d, s) – произвольный элемент кольца R, который не лежит в $(0, \mathrm{Ker}(\phi))$. В этом случае либо $d \neq 0$, либо $s \notin \mathrm{Ker}(\phi)$. Поскольку в кольце $CFM_{\mathbb{N}}(D)$ имеет место равенство $D \cap S = 0$, то $d + \phi(s) \neq 0$. Тогда найдется такой ненулевой элемент $(0, n) \in (0, \mathrm{Ker}(\phi))$, что $(0, n)(d, s) = (0, n(d + \phi(s))) \neq 0$. Таким образом, левый идеал $(0, \mathrm{Ker}(\phi))$ является существенным в ${}_RR$ и, следовательно, $\mathrm{Soc}({}_RR) = \mathrm{Ker}(\phi)$. Поскольку $R/(0, \mathrm{Ker}(\phi))$, очевидно, не является полупростым, то $l({}_RR) = 3$.

14.5. 1) Поскольку $r^{n-1}R \neq 0$, то существует такой элемент $s \in R$, что $e = r^{n-1}s$ – ненулевой идемпотент и $s = se$. Пусть $e_i = r^{n-i}sr^{i-1}$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Легко видеть, что $e_i^2 = e_i$ и так как $r^{i-1}e_ir^{n-i}s = e \neq 0$, то $e_i \neq 0$. Если $i < j$, то

$e_je_i = r^{n-j}sr^{j-1}r^{n-i}sr^{i-1} = r^{n-j}sr^{n+j-i-1}sr^{i-1} = 0.$

Пусть $f = e_1 \circ \ldots \circ e_n$. Тогда из 3.4 следует, что f – ненулевой идемпотент и $fe_i = e_if = e_i$ для каждого i. Рассмотрим кольцо $S = fRf$. Ясно, что $S = \oplus_{i=1}^n e_iS$. Поскольку $e_i = (r^{n-i}s)r^{i-1}$ и $e = e_1 = r^{i-1}(r^{n-i}s)$, то $e_iS \cong e_1S$ для каждого i. Тогда $S \cong \mathrm{End}_S(S_S) = \mathrm{End}_S(\oplus_{i=1}^n e_iS) \cong$

$M_n(eSe)$ и, следовательно, кольцо S содержит систему из n^2 матричных единиц.

2) Предположим, что $e_{11}Re_{11}$ – нередуцированное кольцо. Пусть $f = e_{11} + \ldots + e_{nn}$ и $S = fRf$. Тогда $S \cong M_n(e_{11}Se_{11})$, причем $e_{11}Se_{11} = e_{11}Re_{11}$. Следовательно, согласно 1) кольцо $e_{11}Se_{11}$ содержит систему $\{t_{ij}\}_{i,j=1}^{k}$ из $k^2 > 1$ матричных единиц. Таким образом, кольцо R содержит систему $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^{nk}$ из $(nk)^2$ матричных единиц, причем без ограничения общности мы можем считать, что $f_{11} \in e_{11}Re_{11}$.

Допустим, что f не является центральным идемпотентом. Поскольку R –полупервичное кольцо, то $fR(1-f) \neq 0$. Тогда $e_{ss}R(1-f) \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant s \leqslant n$. Так как $e_{ss}R(1-f)R$ не является нильпотентным идеалом, то $e_{ss}R(1-f)Re_{ss} \neq 0$. Легко видеть, что предкольцо $e_{ss}R(1-f)Re_{ss}$ является полупримитивным I_0-предкольцом. Тогда существует такой ненулевой идемпотент $f_{ss} \in e_{ss}R(1-f)Re_{ss}$, что для некоторых элементов $f_{s,n+1} \in e_{ss}R(1-f)$, $f_{n+1,s} \in (1-f)Re_{ss}$ имеет место равенство $f_{ss} = f_{s,n+1}f_{n+1,s}$. Без ограничения общности можно считать, что $f_{ss}f_{s,n+1} = f_{s,n+1}$ и $f_{n+1,s}f_{ss} = f_{n+1,s}$. Непосредственная проверка показывает, что $f_{n+1,n+1} = f_{n+1,s}f_{s,n+1}$ – ненулевой идемпотент. Пусть $f_{si} = f_{ss}e_{si}$ и $f_{is} = e_{is}f_{ss}$, где $i = 1, \ldots, n$, и $f_{ij} = f_{is}f_{sj}$, где $i, j = 1, \ldots, n+1$. Легко видеть, что $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$ – система матричных единиц и f_{11} – ненулевой идемпотент кольца $e_{11}Re_{11}$.

14.6. Пусть I – ненулевой идеал кольца R, $\mathrm{In}(I) = m$ и $r \in I$ – такой элемент, что $\mathrm{In}(r) = m$. Тогда из 14.5 следует, что в идеале I существует ненулевая система матричных единиц $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$. Если либо кольцо $e_{11}Re_{11}$ не редуцировано, либо идемпотент $f = e_{11} + \ldots + e_{mm}$ нецентрален в R, то из пункта 2 14.5 следует, что в идеале I существует ненулевая система матричных единиц $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^{s}$, где $s > m$. Тогда легко видеть, что $\mathrm{In}(f_{12} + f_{23} + \ldots + f_{s-1,s}) = s > m$. Полученное противоречие показывает, что идемпотент f централен в R, а кольцо $e_{11}Re_{11}$ является редуцированным.

14.7. 1) $\Rightarrow$ 2) Из леммы Цорна следует существование такого максимального множества ортогональных ненулевых центральных идемпотентов $\{f_i\}_{i \in I}$, что $f_iR = M_{n_i}(D_i)$, где D_i – редуцированное кольцо, и

$n_i \leqslant n$ для каждого $i \in I$. Рассмотрим идеал $A = \oplus_{i \in I} M_{n_i}(D_i)$. Если для некоторого ненулевого правого идеала B кольца R имеет место равенство $B \cap A = 0$, то $BA = 0$ и, следовательно, $l(A) \neq 0$. Тогда, согласно 14.6 идеал $l(A)$ содержит такой центральный идемпотент f, что $fR = M_{n_0}(D)$, где D – редуцированное кольцо и $n_0 \leqslant n$. Получили противоречие с выбором множества $\{f_i\}_{i \in I}$. Таким образом, идеал A является существенным в R. Выполнимость условия пункта b) для колец D_i проверяется непосредственно.

2) $\Rightarrow$ 1) Очевидно.

14.8. Так как идеал I содержит ненулевой идемпотент, то мы можем предположить, что I содержит систему из $n_1 \geqslant 1$ матричных единиц $\{e^{(1)}_{i_1 j_1}\}$. Если либо кольцо $e^{(1)}_{11} R e^{(1)}_{11}$ не редуцировано, либо идемпотент $\sum e^{(1)}_{i_1 j_1}$ не централен, то по 14.5 существует такая ненулевая система $\{e^{(2)}_{i_2 j_2}\}$ из n_2 матричных единиц, что $e^{(2)}_{11} \in e^{(1)}_{11} R e^{(1)}_{11}$ и $n_2 > n_1$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, мы получим последовательность систем из n_k матричных единиц $\{e^{(k)}_{i_k j_k}\}$ $(k = 1, 2, \dots)$, где $n_1 < n_2 < \dots$ и $e^{(k)}_{11} \in e^{(k-1)}_{11} R e^{(k-1)}_{11}$. Допустим, эта последовательность бесконечна. Тогда мы имеем бесконечную возрастающую цепочку правых идеалов $(1 - e^{(1)}_{11})R \subseteq (1 - e^{(2)}_{11})R \subseteq \dots$. Поскольку $e^{(k)}_{11} \neq 0$ для каждого k, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} (1 - e^{(i)}_{11})R \neq R$. Пусть M – максимальный правый идеал кольца R, который содержит правый идеал $\bigcup_{i=1}^{\infty} (1 - e^{(i)}_{11})R$, и $P = \mathrm{Ann}_R(R/M)$. Если $e^{(i)}_{11} \in P \subset M$ для некоторого i, то $1 \in M$, что невозможно. Таким образом, $e^{(i)}_{11} \notin P$ для каждого i. Тогда для каждого i кольцо R/P содержит систему из n_i матричных единиц и, следовательно, R/P не является кольцом ограниченного индекса. Полученное противоречие показывает, что для некоторого натурального числа k кольцо $e^{(k)}_{11} R e^{(k)}_{11}$ редуцировано и идемпотент $f = \sum e^{(k)}_{i_k j_k}$ централен. Так как $e^{(k)}_{11} \in e^{(1)}_{11} R e^{(1)}_{11}$, то $\{e^{(k)}_{i_k j_k}\} \subset I$. Тогда I содержит идеал $S = fRf$, который как кольцо изоморфен кольцу $M_n(e^{(k)}_{11} S e^{(k)}_{11})$, где кольцо $e^{(k)}_{11} S e^{(k)}_{11} = e^{(k)}_{11} R e^{(k)}_{11}$ редуцировано.

14.9. Поскольку R – неразложимое кольцо, то из 14.8 следует, что $R = M_n(D)$, где D – редуцированное кольцо. Так как в редуцированном кольце каждый идемпотент является центральным, то D – I_0-кольцо, в котором нет нетривиальных идемпотентов. Т.е. D – тело.

14.8. См. 12.11

14.12. Ясно, что утверждение достаточно показать для подмодулей модуля M, которые порождаются двумя элементами. Пусть $m,\ n \in M$. Тогда $mR = eM$ и $(n - e(n))R = fM$, где e и f – идемпотенты кольца $\mathrm{End}(M)$. Рассмотрим элемент $e + f - fe$. Имеем

$$(e + f - fe)(m) = e(m) + f(m) - fe(m) = m$$

и

$$(e{+}f{-}fe)(n) = e(n){+}f(n){-}fe(n) = e(n){+}f(n{-}e(n)) = e(n){+}n{-}e(n) = n.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Im}(e + f - fe) = nR + mR$$

и

$$(e + f - fe)_{|nR+mR} = 1_{nR+mR}.$$

Следовательно, $e + f - fe$ – идемпотент и $mR + nR = (e + f - fe)M$.

14.18. 1) Пусть $x + I$ – идемпотент кольца R/I. Тогда $x^2 - x \in I$ и, следовательно, для некоторого $y \in I$ имеем $(x^2 - x)y(x^2 - x) = (x^2 - x)$. Если $z = 1 - (1 - x)y(1 - x)$, то $x = xzx$. Поскольку $x - xz \in I$, то $x + I = xz + I$ и $(xz)^2 = xz$.

2) Согласно 1) существует такой идемпотент $f_1 \in R$, что $f_1 + I = e_1$. Рассмотрим кольцо $R_1 = (1 - f_1)R(1 - f_1)$ и идеал $I_1 = (1 - f_1)I(1 - f_1)$ в нем. Пусть $r + I = e_2$, где $r \in R$. Тогда для элемента $s = (1 - f_1)r(1 - f_1)$ имеем $s + I = e_2$ и $s - s^2 \in I_1$. Согласно 1) существует такой идемпотент $f_2 \in (1 - f_1)R(1 - f_1)$, что $f_2 + I_1 = s + I_1$. Тогда f_2 ортогонален f_1 и $f_2 + I = s + I = e_2$.

Допустим, для $n \geqslant 2$ мы построили идемпотенты $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Из предыдущих рассуждений следует, что существует такой элемент e_{n+1}, что $f_{n+1} + I = e_{n+1} + I$ и f_{n+1} ортогонален к $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$. Тогда очевидно, что f_{n+1} ортогонален к каждому из идемпотентов $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

3) Рассмотрим систему элементов $f_1{+}(1{-}(f_1{+}\ldots{+}f_n)), f_2, \ldots, f_n, 0, \ldots,$ у которой все элементы, начиная с $n + 1$ места, равны нулю. Непосредственная проверка показывает, что эта система удовлетворяет утверждению пункта 3).

14.19. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $x \in J$. Тогда $x = xyx$, где $y \in R$. Следовательно, $x = xyx = x(yxy)x$ и $yxy \in J$.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $x \in R$. Тогда из регулярности кольца R/J следует существование такого элемента $y \in R$, что $x - xyx \in J$. Следовательно, $x - xyx = (x - xyx)z(x - xyx)$, где $z \in J$. Отсюда следует, что $x = xwx$, где $w \in R$.

14.22. 1) Пусть $x, y \in T$. Тогда RyR и $(RxR+RyR)/RyR$ – регулярные идеалы. Из 14.19 следует, что $RxR + RyR$ – регулярный идеал. Таким образом, T – регулярный идеал.

2) Проверяется непосредственно.

3) Следует из 14.19.

14.23. Если R – регулярное кольцо, то условия 1) - 3) проверяются непосредственно.

Пусть для кольца R выполнены условия 1) - 3) и существует такой элемент $r \in R$, что $r \notin rRr$. Поскольку, согласно условию 1), 0 – полупервичный идеал кольца R и r не лежит в $rRr + 0$, то из условия 2) следует существование такого полупервичного идеала J, что J – максимальный полупервичный идеал со свойством $r \notin rRr + J$.

Так как R/J – нерегулярное кольцо, то J – непервичный идеал. Тогда существуют такие идеалы A и B, строго содержащие J, что $AB \subset J$. Пусть $L = \{s \in R \mid sB \subset J\}$ и $K = \{s \in R \mid Ls \subset J\}$. Если для некоторого идеала T, строго содержащего идеал L, имеет место включение $T^2 \subset L$, то $TBTB \subset J$ и, следовательно, $TB \subset J$. Тогда $T \subset L$, что противоречит нашему допущению. Полученное противоречие показывает, что L – полупервичный идеал. Аналогичными рассуждениями можно показать, что K – полупервичный идеал. Так как $(L \cap K)^2 \subset LK \subset J$, то $L \cap K \subset J$. Из включений $A \subset L$ и $B \subset K$ следует, что идеалы L и K строго содержат идеал J. Из максимальности идеала J следует существование таких элементов x и y, что $r - rxr \in L$ и $r - ryr \in K$. Так как

$$r - r(x + y - xry)r = (r - rxr) - (r - rxr)yr \in L \text{ и}$$
$$r - r(x + y - xry)r = (r - ryr) - rx(r - ryr) \in K,$$

то $r \in rRr + (K \cap L) \subset rRr + J$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что R – регулярное кольцо.

14.30. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3), 1) $\Rightarrow$ 5) проверяются непосредственно. Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) следует из того факта, что всякое полупримитивное квазиинвариантное справа кольцо является подпрямым произведением тел. Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) следует из 1.67.

5) $\Rightarrow$ 4) Поскольку R полупервично, то кольцо R является подпрямым произведением тел. Следовательно, R – редуцировано.

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 6) следует из 1.76 и 1.79.

14.32. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $r \in R$. Если $r(r) = 0$, то несложно показать, что $r \in U(R)$. Предположим, что $r(r) \neq 0$. Тогда для некоторого ненулевого элемента $s \in R$ выполнено равенство $rR = r(s)$. Из 1.75 следует, что $r(r) \cap r(s) = 0$. Поэтому, если $(r+s)t = 0$, то $rt = -st \in r(r) \cap r(s) = 0$. Следовательно, $t \in r(r) \cap r(s) = 0$. Таким образом, $d = r + s \in U(R)$. Так как $rd = r^2$, то $(r - rd^{-1}r)^2 = 0$. Поскольку R – редуцированное кольцо, то $r = rd^{-1}r$.

14.35. Пусть P – некоторое поле. Рассмотрим кольцо $S = \prod_{i \geqslant 1} R_i$, где $R_i = M_2(P)$ для каждого i. Выделим в кольце S подкольцо $R = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S \mid \exists N \forall i, j > N : a_i = a_j\}$. Несложно заметить, что R – регулярное кольцо. Пусть $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(P)$ и ϕ – автоморфизм кольца $M_2(P)$, действующий по правилу $\phi(a) = uau^{-1}$. Для каждого натурального числа n в кольце R рассмотрим подкольцо $R_n = \{(a)_{i\in\mathbb{N}} \in R \mid a_i = \phi(a_{i+1})$для каждого $i = 1, \ldots, n\}$. Непосредственная проверка показывает, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение из R_n в R, при котором $(a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$, является изоморфизмом. Таким образом, для каждого $n \in \mathbb{N}$ кольцо R_n регулярно. Легко видеть, что $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} R_n$ тогда и только тогда, когда $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a, a, \ldots)$, где a элемент из $M_2(P)$, коммутирующий с u. Следовательно, кольцо $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} R_n$ изоморфно кольцу $\{a \in M_2(P) \mid au = ua\}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\{a \in M_2(P) \mid au = ua\} = \{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in P\}$.

Таким образом, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} R_n$ является локальным неполупростым кольцом и, следовательно, не является регулярным.

14.36. 1) $\Rightarrow$ 4) Предположим, что $e_1r_1e_2r_2\dots,e_nr_n \neq 0$ для каждого n. Тогда $e_1r_1R \supseteq e_1r_1e_2r_2R \supseteq \dots$ – убывающая цепочка ненулевых правых идеалов кольца R и из 5.55 следует существования такого примитивного слева идеала P, что $e_n \notin P$ для каждого n. Тогда $e_1+P, e_2+P, \dots$ – бесконечное семейство ненулевых ортогональных идемпотентов кольца R/P, что противоречит артиновости R/P.

4)$\Rightarrow$3) Предположим, что для некоторого первичного идеала P кольцо R/P не является артиновым. Тогда в кольце R/P существует бесконечное семейство ненулевых ортогональных идемпотентов $f_1, f_2, \dots$. Из 14.18 следует существование такого семейства ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, e_2, \dots$, что $e_n + P = f_n$ для каждого n. Поскольку P первично и $e_n \notin P$ для каждого n, то существует такое семейство элементов $r_1, r_2, \dots \in R$, что $e_1r_1e_2r_2\dots,e_nr_n \notin P$ и, следовательно, $e_1r_1e_2r_2\dots,e_nrx_n \neq 0$.

3)$\Rightarrow$1) Импликация следует из того факта, что каждый примитивный слева идеал является первичным.

2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 5) доказывается симметрично.

14.41. 1) В силу регулярности гомоморфизма ϕ^i для каждого i подмодуль $\phi^i(P)$ выделяется в виде прямого слагаемого в P и, следовательно, является проективным модулем. Тогда утверждение пункта следует из того факта, что для каждого i $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \phi^i(P)$ является ядром эпиморфизма $f : \phi^i(P) \to \phi^{i+1}(P)$, который действует по правилу $f(p) = \phi(p)$ для каждого $p \in \phi^i(P)$.

2)Построим такие подмодули $P_1, \dots, P_t$ модуля P, что

$$\phi^i(P) = \phi^{i+1}(P) \oplus P_{i+1}$$

для $i = 0, \dots, t-1$ и $P_{i+1} = \phi(P_i)$ для $i = 1, \dots, t-1$. Положим $P_t = \phi^{t-1}(P)$. Ясно, что $\phi^{t-1}(P) = \phi^t(P) \oplus P_t$. Допустим для некоторого $1 \leqslant k < t$ мы построили модули $P_{k+1}, \dots, P_t$. Пусть π – проекция на первое прямое слагаемое относительно разложения $\phi^k(P) = \phi^{k+1}(P) \oplus P_{k+1}$. Рассмотрим гомоморфизм $\phi_0 : \phi^{k-1}(P) \to \phi^k(P)$, который действует по правилу $\phi_0(p) = \phi(p)$ для каждого $p \in \phi^{k-1}(P)$. Легко видеть, что

$$\mathrm{Ker}(\pi\phi_0) = \phi^{-1}(P_{k+1}) \cap \phi^{k-1}(P) = \mathrm{Ker}(\phi_0) \oplus P'_k,$$

где P'_k – подмодуль модуля P, удовлетворяющий условию $\phi(P'_k) = P_{k+1}$. Из предыдущего пункта следует, что для некоторого подмодуля A модуля P имеет место равенство

$$\phi^k(P) = \mathrm{Ker}(\phi) \cap \phi^k(P) \oplus A.$$

Ясно, что $A \cap \mathrm{Ker}(\pi\phi_0) = 0$. Так как $\pi\phi_0(A) = \phi^{k+1}(P)$, то

$$\phi^{k-1}(P) = \mathrm{Ker}(\pi\phi_0) \oplus A = \mathrm{Ker}(\phi_0) \oplus P'_k \oplus A.$$

Поскольку

$$\mathrm{Ker}(\phi) \cap \phi^k(P) \subset \mathrm{Ker}(\phi) \cap \phi^{k-1}(P) = \mathrm{Ker}(\phi_0),$$

то из предыдущего пункта следует, что для некоторого подмодуля B модуля P имеет место равенство

$$\mathrm{Ker}(\phi_0) = B \oplus \mathrm{Ker}(\phi) \cap \phi^k(P).$$

Пусть $P_k = B \oplus P'_k$. Тогда $\phi^{k-1}(P) = P_k \oplus \phi^k(P)$ и $\phi(P_k) = P_{k+1}$.

Из равенств

$$P = P_1 \oplus \phi^1(P) = P_1 \oplus P_2 \oplus \phi^2(P) = \ldots = P_1 \oplus P_2 \ldots \oplus P_t$$

следует утверждение пункта.

14.42. Достаточно показать, что для каждого $t \in I/J$, удовлетворяющего равенству $t^n = 0$, существует элемент $s \in I$, для которого выполнены равенства $s + J = t$ и $s^n = 0$. Из 14.41 следует, что в кольце R/J существует система ортогональных идемпотентов $f_1, \ldots, f_n$, удовлетворяющая условиям $tf_iR/J = f_{i+1}R/J$ для каждого $i = 1, \ldots, n-1$, $f_1 + \ldots + f_n = 1$ и $tf_nR/J = 0$. Ясно, что для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ имеет место равенство $tf_i = f_{i+1}tf_i$. Из 14.18 следует существование такой системы ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ кольца R, что $e_1 + \ldots + e_n = 1$ и $e_i + J = f_i$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим элемент

$s = e_2 s_0 e_1 + \ldots + e_n s_0 e_{n-1}$, где s_0 – элемент идеала I, удовлетворяющий условию $s_0 + J = t$. Тогда

$$s + J = f_2 t f_1 + \ldots + f_n t f_{n-1} = t f_1 + \ldots + t f_n = t$$

и $s^n = 0$.

14.43. Пусть R – произвольное кольцо и I – сумма всех регулярных идеалов кольца R, чьи индексы не превосходят натурального числа n. Тогда I – регулярный идеал. Покажем, что $In(I) \leqslant n$. Для этого достаточно показать, что сумма двух идеалов кольца R, чьи индексы не превосходят n, является идеалом, у которого индекс не превосходит n. Пусть I_1, I_2 - идеалы кольца R, и $In(I_1), In(I_2) \leqslant n$. Предположим, что $In(I_1+I_2) > n$. Тогда из теоремы Левицкого следует,что идеал $I_1 + I_2$ содержит систему матричных единиц $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^m$, у которой $n < m$. Рассмотрим естественный гомоморфизм колец $\phi : R \to R/I_1$. Предположим, что $\phi(e_{i_0 j_0}) = 0$ для некоторых индексов $1 \leqslant i_0, j_0 \leqslant m$. Тогда, очевидно, $\phi(e_{ij}) = 0$ для каждой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant m$ и $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^m \subset I_1$, что противоречит неравенству $In(I_1) \leqslant n$. Следовательно, $\phi(e_{ij}) \neq 0$ для каждой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant m$ и $\{\phi(e_{ij})\}_{i,j=1}^m$ система матричных единиц из идеала $(I_1 + I_2)/I_1 \cong I_2/(I_1 \cap I_2)$. Тогда $In(I_2/(I_1 \cap I_2)) > n$, что противоречит 14.42. Из полученного противоречия следует, что $In(I_1 + I_2) \leqslant n$.

14.45. Предположим, что кольцо R не является регулярным. Тогда найдется такой элемент $r \in R$, что $r \notin rRr$. Множество идеалов I, для которых $r \notin rRr + I$, вполне упорядочено по включению. Тогда по лемме Цорна найдется максимальный элемент в этом множестве, который мы обозначим через I'.

Покажем, что кольцо R/I' неразложимо. Если это кольцо является прямым произведением двух ненулевых колец R_1 и R_2, то в силу выбора идеала I' проекции элемента r будут регулярными в этих кольцах. Тогда, очевидно, сам элемент r будет регулярным, что противоречит нашему допущению. Таким образом, кольцо R/I' является неразложимым полупримитивным I'-кольцом, у которого каждый примитивный образ имеет ограниченный индекс нильпотентности. Из 14.9 следует, что R/I' – артиново простое кольцо и, следовательно, регулярно. Полученное противоречие показывает регулярность кольца R.

14.46. 3) Достаточно показать, что каждый главный правый идеал кольца R порождается идемпотентами. Пусть s, m – натуральные числа и $s \leqslant m$. Выделим в R подкольцо R_{sm}, состоящее из всех матриц, у которых ненулевые элементы стоят только в квадратных клетках, расположенных друг за другом на главной диагонали, причем первая клетка имеет размер $s \times s$, а все остальные – $m \times m$. Очевидно, R_{sm} – регулярное кольцо. Пусть $r \in R$ и $m = 2n(r)+1$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ через $e^{(i)}$ обозначим такой элемент кольца R, что $e^{(i)}_{xy} = 1$, если $x = y = km+i$ для некоторого целого числа k и $e^{(i)}_{xy} = 0$ в остальных случаях. Ясно, что $e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}$ – ортогональные ненулевые идемпотенты и $1 = e^{(1)}+\ldots+e^{(m)}$. Рассмотрим элемент $re^{(i)}$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$. Несложные вычисления показывают, что найдется такое натуральное число s_i, при котором $re^{(i)} \in R_{s_i m}$. Поскольку кольцо $R_{s_i m}$ регулярно, то для некоторого $t_i \in R_{s_i m}$ имеет место равенство $re^{(i)} = re^{(i)}t_i re^{(i)}$. Положим $f_i = re^{(i)}t_i$. Тогда $f_i^2 = f_i$ для каждого i и

$$r = re^{(1)} + \ldots + re^{(m)} = f_1 re^{(1)} + \ldots + f_m re^{(m)} \subseteqq f_1 R + \ldots + f_m R.$$

Таким образом, $rR \subseteqq f_1 R + \ldots + f_m R$. Обратное включение следует из соотношений $f_i = re^{(i)}t_i \in rR$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$.

4) Пусть $a \in R$ – такой элемент, что $a_{ii} = 1, a_{i,i+1} = -1$ для каждого натурального числа i и $a_{r,s} = 0$ в остальных случаях. Через $b \in CFM_{\mathbb{N}}(P)$ обозначим верхнюю треугольную матрицу, у которой все элементы, стоящие не ниже главной диагонали, равны 1. Непосредственная проверка показывает, что $ab = ba = 1$. Если $a = aca$ для некоторого $c \in R$, то $c = b$ и $b \in R$, что невозможно.

14.50. 1) Пусть $r \in J(R)$. Тогда для некоторых элементов $r_1, \ldots, r_n$, $s_1, \ldots, s_n \in R$ имеем $r = rr_1 rs_1 + \ldots + rr_n rs_n$. Поскольку для некоторого элемента $s \in U(R)$ выполнено равенство $(1 - (r_1 rs_1 + \ldots + r_n rs_n))s = 1$, то $0 = r(1 - (r_1 rs_1 + \ldots + r_n rs_n))s = r$.

2) Пусть I – ненулевой идеал кольца R и r – ненулевой элемент I. Для некоторых элементов $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n \in R$ имеем $r = rr_1 rs_1 + \ldots + rr_n rs_n$. Тогда $0 = r(1 - (r_1 rs_1 + \ldots + r_n rs_n))$ и, следовательно, $r_1 rs_1 + \ldots + r_n rs_n = 1$. Таким образом, $I = R$.

3) Проверяется непосредственно.

14.58. Пункт 1) проверяется непосредственно.

2) Пусть $a \in M'$ – ненулевой элемент. Так как A' – регулярная простая неартинова алгебра, то $a \in M'a$ и $\mathrm{Soc}(A'_{A'}) = 0$. Следовательно, $\{x \in A' \mid xM' = 0\} = 0$ и $M'aM' \neq 0$. Поскольку $A'M'aM'$ – ненулевой идеал A', то в силу простоты алгебры A' имеем $A'M'aM' = A'$. Тогда $M' = M'A' = M'A'M'aM' \subset M'aM'$. Таким образом, $M' = M'aM'$ и $a \in M'aM'a$ и, следовательно, M' – слабо регулярный слева правый идеал.

3) Так как $R/M' \cong P$, то из 14.54 следует, что R – слабо регулярная слева алгебра. Поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & M \end{pmatrix},$$

то алгебра R не является слабо регулярной справа.

14.59. 1) Пусть J – произвольный ненулевой идеал кольца R и r – ненулевой элемент из J. Так как кольцо R слабо регулярно справа, то существует правая регулярная последовательность вида

$$r = rr_1, r_1 = r_1r_2, \ldots, r_k = r_kr_{k+1}, \ldots$$

где $r_k \in I$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Согласно условию пункта 1) и для некоторого индекса k имеет место равенство $r_k = r_k^2$. Ясно, что идемпотент $e = r_k$ ненулевой и $e \in J$. Так как, очевидно, R – I-конечное кольцо, то идеал J содержит максимальный правый идеал вида fR, где $f^2 = f$. Если $(1-f)J(1-f) \neq 0$, то с помощью рассуждений, которые аналогичны рассуждениям приведенных выше, можно показать, что идеал $(1-f)J(1-f)$ кольца $(1-f)R(1-f)$ содержит ненулевой идемпотент g. Так как идемпотент g ортогонален f и $g \in J$, то получаем противоречие с выбором идеала fR. Так как кольцо R полупервично, то $J(1-f) = (1-f)J = 0$. Тогда $J = fR$ и f – центральный идемпотент. Таким образом, каждый идеал кольца R порождается центральным идемпотентом и из 1.56 следует, что R – прямая сумма простых колец.

2) Следует из первого пункта 1).

14.62. Пусть $a \in A$. Существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и $b \in Aa^nA$, что $a^n(1-b) = 0$. Если $a \in J(A)$, то $b \in J(A)$, элемент $1-b$ обратим и $a^n = 0$.

Поэтому $J(A)$ – ниль-идеал.

Допустим, что $a \in \mathrm{Sing}({}_AA)$. Тогда $b \in Aa^nA \subseteq \mathrm{Sing}({}_AA)$. Левый идеал $\ell(b)$ кольца A существенен . Пусть $x = ya^n \in \ell(b) \cap Aa^n$, где $y \in A$. Тогда

$$0 = xb = ya^nb = ya^n = x, \quad \ell(b) \cap Aa^n = 0.$$

Так как $\ell(b)$ – существенный левый идеал, то $Aa^n = 0$ и $a^n = 0$.

14.67. Достаточно доказать эквивалентность условий 1), 2) и 4). Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) и эквивалентность условий 2) и 4) проверяется непосредственно.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $x \in R$. По предположению $x^h = x^{h+1}y$ и $y^k = y^{k+1}z$ для некоторых $y, z \in R$ и $h, k \in \mathbb{N}$. Пусть $a \equiv x^{h+k}$, $b \equiv y^{h+k}$ и $c \equiv z^{h+k}$. Тогда $a^2b = a$ и $b^2c = b$. По условию 2) существует такое $d \in R$, что $(c-a)^n = (c-a)^{n+1}d$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$abc = a^2b^2c = a^2b = a, \quad ac = a^2bc = a^2, \quad a(c-a) = 0,$$
$$b^2(c-a)^2 = b^2c(c-a) - b^2a(c-a) = b(c-a).$$

Поэтому верны соотношения

$$b^m(c-a)^m = b(c-a) \ (m = 1, 2, \ldots)(*).$$

Учитывая равенства

$$abc = a, \quad (c-a)^n = (c-a)^{n+2}d^2, \quad a(c-a) = 0,$$

применим несколько раз соотношения (*) и получим

$$a - ab^2a^2 = ab(c-a) + ab^2(c-a)a = ab^{n+1}(c-a)^{n+1} + ab^{n+1}(c-a)^na =$$
$$= ab^{n+1}(c-a)^na = ab^{n+1}(c-a)^{n+2}d^2c = ab(c-a)^2d^2c =$$
$$= (a - aba)(c-a)d^2c = 0, \quad a = ab^2a^2, \quad x^{h+k} \in Ax^{h+k+1}.$$

Так как $x^h = x^{h+1}y$, то $x^{h+k} = x^{h+k+1}y$ и положим $n = h + k$.

14.68. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3) следуют из того, что все фактор-кольца строго π-регулярных колец строго π-регулярны.

3) $\Rightarrow$ 1). Допустим, что $a^n \in R \setminus a^{n+1}R$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{E}$ – множество всех таких идеалов E в R, что $h(a^n) \in h(R) \setminus h(a^{n+1}R)$, где

$h\colon R \to R/E$ – естественный эпиморфизм. Так как $0 \in \mathcal{E}$, то непустое множество $\mathcal{E}$ содержит максимальный элемент I по лемме Цорна. По условию 3) идеал I не первичен. Поэтому в R существуют такие идеалы K и L, что K и L строго содержат I и $KL \subseteq I$. Тогда существуют такие $x, y \in R$, что $a^n - a^{2n+1}x \in K$ и $a^n - a^{2n+1}y \in L$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$a^{2n} - a^{2n+1}(a^n y + x a^n - x a^{2n+1}) = (a^n - a^{2n+1}x)(a^n - a^{2n+1}y) \in KL \subseteq I.$$

Это противоречит включению $I \in \mathcal{E}$.

14.72. Пусть R – бирегулярное кольцо и $r \in R$. Тогда $RrR = eR$, где e – центральный идемпотент кольца R, и $rR = reR \subset rRrR \subset rR$. Таким образом, для каждого элемента $r \in R$ имеет место равенство $rRrR = rR$.

14.73. Ясно, что достаточно доказать эквивалентность пунктов 1) и 3).

1)$\Rightarrow$(3) Рассмотрим произвольный элемент $s \in R$. Поскольку согласно лемме 3.2 $s \in sRsR$, то для некоторого элемента $t \in RsR$ имеем $s(1-t) = 0$. Тогда $RsR + r(s) = R$. Так как $r(s)$ – идеал и $RsR \cap r(s) = 0$, то кольцо R является прямой суммой своих идеалов RsR и $r(s)$. Следовательно, для некоторого центрального идемпотента e имеем $RsR = eR$ и $r(s) = (1-e)R$.

3)$\Rightarrow$ 1) Импликация следует из 14.72.

14.79. Пусть $f \in \mathrm{End}_T(V)$. Рассмотрим множество

$S = \{(A, a) \mid A \leqslant V, fA \subset A, a = a^2 \in \mathrm{End}_T(A), f_{|A} - a \in U(\mathrm{End}_T(A))\}$.

На множестве S введем отношение частичного порядка согласно следующему правилу

$$(A, a) \leqslant (B, b) \Longleftrightarrow A \leqslant B, b_{|A} = a.$$

Несложно заметить, что множество S индуктивно упорядочено. Следовательно, согласно лемме Цорна в S существует максимальный элемент (W, e). Для некоторого подпространства $U \leqslant V$ имеет место равенство $V = W \oplus U$. Покажем, что $V = W$.

Линейное отображение f относительно разложения $V = W \oplus U$ имеет матричное представление вида

$$\begin{pmatrix} f_{|W} & g \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

Если $\mathrm{Ker}(h) \neq 0$, то линейное отображение $f_{|W\oplus \mathrm{Ker}(h)}$ имеет следующее матричное представление

$$\begin{pmatrix} f_{|W} & g' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\begin{pmatrix} f_{|W} & g' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(\mathrm{End}_T(W \oplus \mathrm{Ker}(h)))$, то получаем противоречие с выбором пары (W, e). Таким образом, h – инъективный гомоморфизм.

Предположим, что $h(U) \neq U$. Тогда для некоторого подпространства $U' \leqslant V$ имеет место равенство $U = U' \oplus h(U)$. Тогда несложно видеть, что для всякого натурального числа n имеет место равенство

$$U = U' \oplus h(U') \oplus \ldots \oplus h^{n-1}(U') \oplus h^n(U).$$

На векторном подпространстве $V' = \bigoplus_{i \geqslant 0} h^i(U')$ рассмотрим линейное отображение ϕ, действующее согласно следующему правилу

$$\phi(h^{2i}(v)) = h^{2i}(v), \phi(h^{2i+1}(v)) = h^{2i+2}(v) - h^{2i}(v),$$

где $i \in \mathbb{N}, v \in U'$. Непосредственно проверяется, что $\phi^2 = \phi$ и $h_{|V'} - \phi$ – обратимое линейное отображение и $(h_{|V'} - \phi)^{-1} = 1_{|V'} + (h_{|V'} - \phi)$. Линейное отображение $f_{|W\oplus V'}$ имеет матричное представление

$$\begin{pmatrix} f_{|W} & g'' \\ 0 & h_{|V'} \end{pmatrix}$$

Так как $\begin{pmatrix} f_{|W} & g'' \\ 0 & h_{|V'} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \in U(\mathrm{End}_T(W \oplus V'))$, то получаем противоречие с выбором пары (W, e). Таким образом, $h \in \mathrm{End}_T(U)$ – обратимое линейное отображение. Если $U \neq 0$, то как и выше получаем противоречие с выбором пары (W, e). Таким образом, $U = 0$.

14.86. Пусть a – строго π-регулярный элемент кольца R. Тогда согласно 14.64 для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $R_R = r(a^n) \oplus a^n R$. Пусть $\bar{a} \in \mathrm{End}_R(R_R)$ – гомоморфизм, действующий по правилу $r \mapsto ar$. Несложно заметить, что $\alpha = \bar{a}_{|l(a^n)} \in \mathrm{End}_R(l(a^n))$ – нильпотентный гомоморфизм и $\beta = \bar{a}_{|a^n R} \in \mathrm{End}_R(a^n R)$ – автоморфизм. Тогда из равенства

$$\bar{a} = \alpha \oplus \beta = (\alpha - 1) \oplus \beta + 1 \oplus 0$$

следует строгая чистота элемента a.

6.8. Применить упражнения 1.35 и 6.7.

15.26. Пусть $r(R/M) = I$.

1) $\Rightarrow$ 2) Из теоремы плотности следует, что R/I – простое артиново кольцо. Тогда R/M – Σ-инъективный как правый R/I-модуль. Так как R – регулярное кольцо, то R/M является Σ-инъективным правым R-модулем.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть правый R-модуль $\oplus_{i=1}^{\infty} R/M$ инъективен. Если кольцо R/I не является артиновым, то оно обладает счетным семейством ортогональных идемпотентов $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ таких, что $x_1 e_1 \neq 0, x_2 e_2 \neq 0, \ldots, x_n e_n \neq 0, \ldots$ для некоторых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ модуля R/M. Рассмотрим гомоморфизм $f : \oplus_{i=1}^{\infty} e_i R \to \oplus_{i=1}^{\infty} R/M$ при котором $f(e_i) = x_i$ для каждого i. Так как модуль $\oplus_{i=1}^{\infty} R/M$ инъективен, то гомоморфизм f можно продолжить на модуль R_R, что, очевидно, не возможно.

15.29. Эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 2) и 3) $\Leftrightarrow$ 4) проверяются непосредственно.

1) $\Rightarrow$ 4) Пусть Ω – система представителей классов изоморфных простых правых R-модулей. Согласно 15.24 $E = \oplus_{S \in \Omega} E(S)$ – копорождающий правый R – модуль. Следовательно, существует вложение $f : M \to \Pi_{\alpha \in A} E_\alpha$, где $E = E_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Для каждого $S \in \Omega$ через $\pi_{\alpha,S}$ обозначим проекцию модуля $\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha$ на прямое слагаемое $E(S)$ модуля E_α. Поскольку $E(S)$ имеет конечную длину, то $\lg(M/\mathrm{Ker}(\pi_{\alpha,S} f)) < \infty$ и, следовательно, $\cap_{\alpha \in A, S \in \Omega} \mathrm{Ker}(\pi_{\alpha,S} f) = \mathrm{Ker}(f) = 0$.

4) $\Rightarrow$ 1) Пусть S – простой правый R-модуль. Согласно нашему предположению, пересечение всех подмодулей N модуля $E(S)$, у которых

$\lg(E(S)/N) < \infty$, равно 0. Следовательно, существует такой подмодуль N_0 модуля $E(S)$, что $N_0 \cap S = 0$ и $\lg(E(S)/N_0) < \infty$. Поскольку S существен в $E(S)$, то $N_0 = 0$ и, следовательно, $\lg(E(S)) < \infty$.

15.30. Пусть I – собственный правый идеал кольца R. Предположим, что $I^n \neq I^{n+1}$. Тогда из 15.30 следует существование такого правого идеала L, что $I^{n+1} \subset L$, $I^n \nsubseteqq L$ и $\lg(R_R/L) < n+1$. Если для некоторого неотрицательного целого числа $i < n+1$ имеет место равенство $I^i + L = I^{i+1} + L$, то $I^n \subset (I^i + L)I^{n-i} = (I^{i+1} + L)I^{n-i} \subset I^{n+1} + L = L$, что противоречит нашему допущению. Таким образом, $I^i + L \neq I^{i+1} + L$ для $i = 0, \ldots, n$. Следовательно, $\lg(R_R/L) \geqslant n+1$. Полученное противоречие, показывает, что $I^n = I^{n+1}$.

15.32. Пусть M – правый R-модуль и N – его S-подмодуль, у которого $\lg((M/N)_S) = k$. Рассмотрим S-подмодуль $Na_i^{-1} = \{m \in M \mid ma_i \in N\}$ модуля M. Непосредственная проверка показывает, что отображение $f : M/Na_i^{-1} \to M/N$, при котором $f(m + Na_i^{-1}) = ma_i + N$ для каждого $m \in M$, является групповым вложением, индуцирующие вложение $\mathrm{Lat}((M/Na_i^{-1})_S)$ в $\mathrm{Lat}((M/N)_S)$. Тогда $\lg((M/Na_i^{-1})_S) \leqslant \lg((M/N)_S) = k$. Легко видеть, что $\cap_{i=1}^n Na_i^{-1}$ – R-подмодуль модуля M и $\lg((M/\cap_{i=1}^n Na_i^{-1})_R) \leqslant \lg((M/\cap_{i=1}^n Na_i^{-1})_S) \leqslant nk$. Таким образом, каждый S-подмодуль N модуля M, у которого $\lg((M/N)_S) = k$, содержит R-подмодуль N_0, у которого $\lg((M/N_0)_R) \leqslant nk$. Тогда пересечение всех R-подмодулей N модуля M, у которых $\lg((M/N)_R) < \infty$, равняется 0.

16.9. 1) Достаточно показать, что если $\{M_i\}_{i \in I}$ – множество подмодулей модуля M, которое является локальным прямым слагаемым модуля M, то $N = \oplus_{i \in I} M_i$ – замкнутый подмодуль модуля M. Пусть $\overline{N}$ – замыкание модуля N в модуле M. Предположим, что $N \neq \overline{N}$. Существует элемент $m \in \overline{N} \setminus N$, у которого $r(m)$ максимален. Для некоторого элемента $r \in R$ имеем $mr \neq 0$ и $mr \in \oplus_{i \in I'} M_i$, где I' – конечное подмножество I. Тогда имеют место равенства $\overline{N} = N_0 \oplus (\oplus_{i \in I'} M_i)$ и $m = m_1 + m_2$, где $N_0 \leqslant N, m_1 \in M$ и $m_2 \in \oplus_{i \in I'} M_i$. В силу выбора элемента m имеет место равенство $r(m) = r(m_1)$. Тогда $m_1 r \neq 0$ и $m_1 r = mr - m_2 r \in N \cap (\oplus_{i \in I'} M_i)$, что невозможно.

2) Следует из пункта 1).

16.10. Предположим, что каждый замкнутый подмодуль каждого циклического подфактора модуля M является циклическим. Модуль $\mathrm{Soc}(M)$ представим в виде $\mathrm{Soc}(M) = \oplus_{i=1}^{\infty} M_i$, где M_i не является конечно порожденным для каждого $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\overline{M_i}$ – замыкание подмодуля в модуле M для каждого $i \in \mathbb{N}$ и $\phi : M \to M/\mathrm{Soc}(M)$ – естественный гомоморфизм. Тогда множество $\{\phi(\overline{M_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ подмодулей модуля $\phi(M)$ является локальным прямым слагаемым и, очевидно, $\phi(\overline{M_i}) \neq 0$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Пусть $N/\mathrm{Soc}(M)$ – замыкание подмодуля $\oplus_{i\in\mathbb{N}}\phi(\overline{M_i})$ в модуле $\phi(M)$. Согласно условию 16.10 $N/\mathrm{Soc}(M)$ – циклический модуль. Тогда для некоторого подмодуля S' модуля $\mathrm{Soc}(M)$ и некоторого циклического подмодуля M_0 модуля M имеет место равенство $N = M_0 \oplus S'$. Ясно, что $\overline{M_i} \cap M_0 \neq 0$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует простой подмодуль S_i модуля M такой, что $S_i \subset \overline{M_i} \cap M_0$. Пусть T – замыкание модуля $\oplus_{i\in\mathbb{N}} S_i$ в модуле M_0. Тогда $\phi(T)$ – ненулевой подмодуль модуля $N/\mathrm{Soc}(M)$ и $T \cap \oplus_{i\in\mathbb{N}}\overline{M_i} \subset \mathrm{Soc}(M)$. Следовательно, $\phi(T) \cap \oplus_{i\in\mathbb{N}}\phi(\overline{M_i}) = 0$, что противоречит существенности подмодуля $\oplus_{i\in\mathbb{N}}\phi(\overline{M_i})$ в модуле $N/\mathrm{Soc}(M)$.

16.11. Предположим, что модуль M имеет бесконечную размерность Голди. Тогда M не является I-конечным модулем и, следовательно, согласно 7.1, 7.2 существуют бесконечная строго убывающая цепочка $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ – прямых слагаемых модуля M и ненулевые подмодули $B_1, B_2, \ldots$ модуля M такие, что $M = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n$ и $\oplus_{i=n+1}^{\infty} B_i \subset A_n$ для каждого n. Пусть C_i – максимальный подмодуль модуля B_i для каждого $i \in \mathbb{N}$ и $N/(\oplus_{i\in\mathbb{N}} C_i)$ – замыкание подмодуля $(\oplus_{i\in\mathbb{N}} B_i)/(\oplus_{i\in\mathbb{N}} C_i)$ в модуле $M/(\oplus_{i\in\mathbb{N}} C_i)$. Тогда $N' = N/(\oplus_{i\in\mathbb{N}} C_i)$ – циклический модуль, $\mathrm{Soc}(N') \trianglelefteq N'$ и $J(N') = 0$. Так как N' – CS-модуль, то каждый замкнутый подмодуль модуля N' является циклическим, что противоречит 16.10.

16.20. В силу леммы Цорна существует максимальное множество $\{M_i\}_{i\in I}$ локальных подмодулей модуля M, которое является локальным прямым слагаемым модуля M. Пусть $N = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Так как M – модуль со свойством подъема, то $M = N_1 \oplus N_2$, где $N_1 \subset N$ и $N \cap N_2 \ll M$. Несложно заметить, что $N \cap J(M) = J(N)$ и $J(N) \ll N$. Тогда $N \cap N_2 \ll N$ и, следовательно, $N = N_1$. Если $N_2 \neq 0$, то модуль N_2 согласно предыдущему упражнению содержит локальный подмодуль, что противоречит выбору множества $\{M_i\}_{i\in I}$. Таким образом, $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$.

17.15. Достаточно показать, что для каждого элемента $r \in I$ существует элемент $t \in I$, для которого выполнено равенство $r = tr$. Пусть $r \in I$. Поскольку R/I – плоский правый R-модуль, то из 17.14 следует равенство $I \cap RrR = Ir$. Следовательно, для некоторого элемента $t \in I$ выполнено равенство $r = tr$.

17.16. 1) Следует из 17.14.

2) Пусть $M = \oplus_{i\in\mathbb{N}} P_i$, где $P_i = P$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим отображения $F : M \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(P), G : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(P) \to M$, действующие согласно следующим правилам:

$$F((p_1, p_2, \ldots)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(p_i),$$

$$G(p) = (p, (1_P - f_1)p, (1_P - f_2)p, \ldots).$$

Непосредственно проверяется равенство $FG = 1_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(P)}$. Следовательно, модуль $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(P)$ изоморфен прямому слагаемому модуля M и, следовательно, он является проективным.

3) следует из 1).

17.17. 1) $\Rightarrow$ 2) Следует из 17.16.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть I – правый идеал кольца, для которого правый R-модуль R/I является плоским. Предположим, что правый R-модуль R/I не является проективным. Из 17.15 следует существование возрастающей регулярной справа ненулевой последовательности элементов из правого идеал I. Тогда из условия пункта 2) и 1.65 следует, что идеал I содержите ненулевой идемпотент e_1. Следовательно, имет место равенство $I = e_1R \oplus I \cap e_1R$. Так как R/I не является проективным и

$$R/I \cong (1 - e_1)R/I \cap e_1R,$$

$$R/I \cap e_1R \cong e_1R \oplus (1 - e_1)R/I \cap e_1R,$$

то $R/I \cap (1 - e_1)R$ – непроективый плоский модуль. Следовательно, к идеалу $I_1 = (1 - e_1)R \cap I$ применимы те же рассуждения, что и к идеалу I. Тогда для некоторого идемпотента $e_2 \in I_1$ имеет место равенство

$$I_1 = e_2R \oplus I_2,$$

где $I_2 = I_1 \cap (1-e_2)R$, и R/I_2 – непроективный плоский модуль. Продолжая аналогичные построения далее, получим последовательность $e_1, e_2, \ldots$ ненулевых идемпотентов кольца R, для которых выполнено условие $e_j \in (1-e_i)R$, если $i < j$. Тогда из 3.5 следует существование возрастающей регулярной справа последовательность элементов из R, которая не является сходящейся. Получили противоречие с условием пункта 2).

17.23. Пусть M – инъективный правый R – модуль и $f : A \to B$ – мономорфизм правых S-модулей. Тогда в силу точности слева функтора G гомоморфизм $G(f) : G(A) \to G(B)$ является мономорфизмом. Поскольку M инъективен, то отображение $\mathrm{Hom}(G(f), M) : \mathrm{Hom}(G(B), M) \to \mathrm{Hom}(G(A), M)$ является эпиморфизмом. Следовательно, в силу естественного изоморфизма $\mathrm{Hom}_R(G(\_), M) \cong \mathrm{Hom}_S(\_, F(M))$ отображение

$$\mathrm{Hom}(f, F(M)) : \mathrm{Hom}(B, F(M)) \to \mathrm{Hom}(A, F(M))$$

также является эпиморфизмом, что и доказывает инъективность модуля $F(M)$.

18.9. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть A – ненулевой правый R-модуль. Согласно условию пункта, правый K-модуль $T(A) = (A, A \otimes M)$ содержит максимальный подмодуль (X, Y). Если $X = A$, то, очевидно, $Y = A \otimes M$ что невозможно. Таким образом, $X \neq A$ и из максимальности подмодуля (X, Y) следует, что X – максимальный подмодуль R-модуля A. Из приведенных выше рассуждений следует, что каждый ненулевой правый R-модуль содержит максимальный подмодуль и, следовательно, R – правое max-кольцо. Аналогичными рассуждениями можно показать, S – правое max-кольцо.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть (A, B) – ненулевой правый K-модуль и (X, Y) – собственный подмодуль модуля (A, B). Так как R, S – max-справа кольца, то ненулевые фактормодули модулей A, B содержат максимальные подмодули. Если $(A/X)M \neq B/Y$, то B обладает максимальным подмодулем Y' таким, что $(A/X)M \subset Y'/Y$. В этом случае несложно заметить, что модуль $(A/X, Y'/Y)$ является максимальным подмодулем модуля $(A/X, B/Y)$. Если $(B/Y)M \neq A/X$, то аналогичными рассуждениями можно показать, что модуль $(A/X, B/Y)$ содержит максимальный под-

модуль. Предположим, что $(A/X)M = B/Y$ и $(B/Y)N = A/X$. Модуль A обладает максимальным подмодулем A_0 таким, что $X \subset A_0$. В модуле B рассмотрим подмодуль B_0, для которого выполнено равенство

$$B_0/Y = \{\bar{b} \in B/Y \mid \bar{b}N \subset A_0/X\}.$$

Ясно, что $B_0/Y \neq B/Y$ и $(A_0/X)M \subset B_0/Y$. Покажем, что B_0 - максимальный подмодуль S-модуля B. Пусть $\bar{b} \notin B_0/Y$. Тогда $\bar{b}N \not\subseteq A_0/X$ и, следовательно,

$$\bar{b}N + A_0/X = A/X, \bar{b}NM + (A_0/X)M = (A/X)M = B/Y.$$

Таким образом, равенство $\bar{b}S + B_0/Y = B/Y$ выполнено для любого элемента $\bar{b} \in (B/Y) \setminus (B_0/Y)$ и, следовательно, $(B/Y)/(B_0/Y)$ – простой S-модуль. Поскольку

$$(A_0/X)M \subset B_0/Y, (B_0/Y)N \subset A_0/X,$$

то $(A_0/X, B_0/Y)$ - подмодуль T-модуля $(A/X, B/Y)$. Несложно заметить, что правый K-модуль $((A/X)/(A_0/X), (B/Y)/(B_0/Y))$ имеет длину не больше двух. Следовательно, подмодуль (X, Y) содержится в максимальном подмодуле модуля (A, B).

18.10. $1) \Rightarrow 2)$. Пусть A – ненулевой правый R-модуль. Согласно условию пункта, правый K-модуль $H(A) = (A, Hom_R(N, A))$ содержит простой подмодуль (X, Y). Если $X = 0$, то для каждого $f \in Y$ имеем $f(N) = fN = 0$. Следовательно, $Y = 0$, что невозможно. Таким образом, $X \neq 0$ и из простоты модуля (X, Y) следует, что X - простой подмодуль R-модуля A. Из приведенных выше рассуждений следует, что каждый ненулевой правый R-модуль содержит простой подмодуль и, следовательно, R – полуартиново справа кольцо. Аналогичными рассуждениями можно показать, что S – полуартиново справа кольцо.

$2) \Rightarrow 1)$. Пусть (A, B) – правый K-модуль и (A_0, B_0) – его ненулевой подмодуль. Без ограничения общности можно считать, что $A_0 \neq 0$. Так как R и S – полуартиновы справа кольца, то $\mathrm{Soc}(A)$ существен в A и $\mathrm{Soc}(B)$ существен в B. Тогда модуль A_0 содержит простой подмодуль aR, где $a \in A_0$. Если $aRM = aM = 0$, то $(aR, 0)$ - простой подмодуль K-модуля (A_0, B_0). Если $aM \neq 0$, то из существенности подмодуля $\mathrm{Soc}(B)$

в модуле B следует, что S - модуль aM содержит простой подмодуль bS, где $b \in B_0$. Ясно, что элемент b имеет вид $b = am$, где $m \in M$. Если $bN = 0$, то $(0, bS)$ - простой подмодуль K - модуля (A_0, B_0). Если $bN \neq 0$, то $bN = amN \subset aMN$ - ненулевой подмодуль простого модуля aR. Следовательно, $bN = aR$. Из равенства $aRM = bNM$ и простоты модуля bS следует, что $aRM = bS$. Так как aR – простой R-модуль, bS – простой S-модуль и $aRM = bS$, $bSN = aR$, то (aR, bS) – простой подмодуль K-модуля (A_0, B_0).

18.14. Пусть $f \in J(\mathrm{Hom}(A, B))$, $g \in \mathrm{Hom}(C, A)$,$h \in \mathrm{Hom}(B, D)$. Для произвольного элемента $s \in \mathrm{Hom}(D, C)$ выполнено условие $1_A - (gsh)f \in U_A$. Тогда $1_D - (hfg)s \in U_D$ и, следовательно, $hfg \in J(\mathrm{Hom}(C, D))$.

18.15. 1) Рассмотрим произвольный элемент $f = (f_{ij})$ из $J(\mathrm{Hom}(A, B))$. Тогда согасно равенству $f_{ij} = \pi'_i f \varepsilon_j$ и 18.14 имеем $f \in (J(\mathrm{Hom}(A_i, B_j)))$. Следовательно, $J(\mathrm{Hom}(A, B)) \subset (J(\mathrm{Hom}(A_i, B_j)))$. Пусть $f = (f_{ij}) \in (J(\mathrm{Hom}(A_i, B_j)))$. Тогда

$$f = (\textstyle\sum_{i=1}^{m} \varepsilon'_i \pi'_i) f (\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \pi_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon'_j f_{ji} \pi_i \in J(\mathrm{Hom}(A, B)).$$

Таким образом, $(J(\mathrm{Hom}(A_i, B_j))) \subset J(\mathrm{Hom}(A, B))$.

18.17. 1) Пусть $f \in \triangle(\mathrm{Hom}_R(M, N))$ и $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$. Так как $\mathrm{Ker}(f) \leqslant^e M$ и $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(1_M - gf) = 0$, то $1_M - gf$ – мономорфизм. Поскольку M – $C2$-модуль и $\mathrm{Ker}(f) \in J(1_M - gf)$, то $1_M - gf$ – изоморфизм.

2) Доказательство двойственно пункту 1).

18.20. 1) $\Rightarrow$ 2). Рассмотрим отображения $e = gf$ и $d = fg$. Если $m \in \mathrm{Ker}\, f$, то $em = gfm = 0$. Следовательно, $m = (1 - e)m$ и $\mathrm{Ker}(f) \subset (1 - e)M$. Поскольку $f(1 - e)M = 0$, то $\mathrm{Ker}\, f = (1 - e)M$. Так как $fM = dM$, $e = e^2$ и $d = d^2$, то имеют место следующие разложения $M = \mathrm{Ker}\, f \oplus eM, N = fM \oplus (1 - d)M$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $M = A \oplus \mathrm{Ker}\, f, N = fM \oplus B$, где A – подмодуль M и B – подмодуль N. Тогда отображение f относительно этих разложений имеет следующее матричное представление

$\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где φ – изоморфизм между A и fM, индуцированный гомоморфизмом f.

Тогда в качестве k можно взять гомоморфизм
$\begin{pmatrix} \varphi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18.34. 1) $\Rightarrow$ 2) Определим $d = feg$. Тогда $d^2 = fegfeg = feg = d$. Поскольку $gdf = gfegf = e \neq 0$, то $d \neq 0$ и в качестве h можно взять элемент eg.

2) $\Rightarrow$ 3) Поскольку $hfhfhfh = hfh$ и $f(hfh) = fh \neq 0$, то в качестве k можно взять элемент hfh.

3) $\Rightarrow$ 1) Поскольку $kf = kfkf$ и $kf \neq 0$, то в качестве g можно взять элемент k.

1) $\Rightarrow$ 4) Пусть $d = feg$. Поскольку $d^2 = d$, то $M = dM \oplus (1-d)M = eM \oplus (1-e)M$. Тогда $feM = fgfgfM = dfM \subset dM$, $gdM = gfegM = egM \subset eM$ и для каждого m из M имеем $gf(em) = gfgfm = em$, $fg(dm) = fgfegm = dm$. Следовательно, f индуцирует изоморфизм между eM и dM.

4) $\Rightarrow$ 3) Пусть φ – изоморфизм между A и B, индуцированный гомоморфизмом f. Согласно условию $M = A \oplus A'$ и $N = B \oplus B'$, где A' - подмодуль модуля M и B' - подмодуль модуля N. В матричной форме гомоморфизм f относительно этих разложений имеет вид
$\begin{pmatrix} \varphi & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
Тогда в качестве k можно взять гомоморфизм
$\begin{pmatrix} \varphi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18.21. 2). Докажем импликацию $\Rightarrow$. Так как $\mathrm{End}(M)$ – строго π-регулярное кольцо, то существуют такие эндоморфизмов g и h модуля M, что $f^n = f^{2n}g = hf^{2n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$(1-f^ng)(M) \subseteq \mathrm{Ker}(f^n), \quad M = (1-f^ng)(M) + f^ng(M),$$
$$M = \mathrm{Ker}(f^n) + f^n(M).$$

Если $x = f^n(m) \in \mathrm{Ker}(f^n) \cap f^n(M)$, то $0 = hf^n(x) = hf^{2n}(m) = f^n(m) = x$. Поэтому $\mathrm{Ker}(f^n) \cap f^n(M) = 0$.

$\Leftarrow$. Пусть $f \in \mathrm{End}(M)$. По предположению $M = \mathrm{Ker}(f^n) \oplus f^n(M)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $t = f^n$. Тогда

$$M = \mathrm{Ker}(t) \oplus t(M), \quad t(M) = t(\mathrm{Ker}(t) \oplus t(M)) = t^2(M),$$
$$t(\mathrm{Ker}(t^2)) \subseteq t(M) \cap \mathrm{Ker}(t) = 0, \quad \mathrm{Ker}(t^2) \subseteq \mathrm{Ker}(t) \subseteq \mathrm{Ker}(t^2),$$
$$\mathrm{Ker}(t^2) = \mathrm{Ker}(t), \quad M = \mathrm{Ker}(t^2) \oplus t^2(M).$$

Равенством $u(x+t^2(y)) = t(y)$ корректно задается эндоморфизм u модуля M ($x \in \mathrm{Ker}(t) = \mathrm{Ker}(t^2)$ и $t^2(y) \in t^2(M)$). Тогда $t = ut^2$. Поэтому $f^n = uf^{2n}$ и кольцо $\mathrm{End}(M)$ строго π-регулярно.

18.22. 1)$\Rightarrow$2) Пусть $M = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$ и $A_1 \cong A_2$. Тогда существует такой гомоморфизм $s \in S$, что $s(B_1) = 0$ и $s_{|A_1} : A_1 \to s(A_1) = A_2$ – изоморфизм. Для некоторого автоморфизма $t \in S$ имеет место равенство $s = sts$. Легко видеть, что $M = \mathrm{Ker}(s) \oplus \mathrm{Im}(ts) = B_1 \oplus t(A_2)$. Поскольку t индуцирует изоморфизм между M/A_2 и $M/t(A_2)$, то $B_2 \cong B_1$.

2)$\Rightarrow$1) Пусть $s \in S$. Из 18.20 следует, что $M = \mathrm{Ker}(s) \oplus A = \mathrm{Im}(s) \oplus B$ для некоторых подмодулей A и B модуля M. Поскольку $A \cong \mathrm{Im}(s)$, то по нашему предположению $B \cong \mathrm{Ker}(s)$. Таким образом, существуют изоморфизмы $\alpha : \mathrm{Im}(s) \to A$ и $\beta : B \to \mathrm{Ker}(s)$. Рассмотрим гомоморфизм $t \in S$, который каждый элемент вида $m + n$, где $m \in \mathrm{Im}(s)$ и $n \in B$, переводит в элемент $\alpha(m) + \beta(n)$. Ясно, что t – автоморфизм и $s = sts$.

18.25. Обозначим

$$A = \{f \in \mathrm{Hom}(M, N) \mid \mathrm{Hom}(N_i, N_t) f_{ij} \mathrm{Hom}(M_s, M_j) \subset Reg(M_s, N_t)\}.$$

Несложно заметить, что A является $\mathrm{End}(B)$-$\mathrm{End}(A)$-подбимодулем бимодуля ${}_{\mathrm{End}(N)}\mathrm{Hom}(M, N)_{\mathrm{End}(M)}$.

Покажем, что $\mathrm{Reg}(\mathrm{Hom}(M, N)) \subset A$. Так как

$$\mathrm{Hom}(N_j, N_t)\pi'_j \mathrm{Reg}(\mathrm{Hom}(M, N))\varepsilon_i \mathrm{Hom}(M_s, M_i) \subset \pi'_t \mathrm{Reg}(\mathrm{Hom}(M, N))\varepsilon_t,$$

то достаточно показать, что каждый элемент из $\pi'_j \mathrm{Reg}(\mathrm{Hom}(M, N))\varepsilon_i$ является регулярным. Предположим, что $f \in \mathrm{Reg}(M, N)$. Так как $\varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i \in Reg(\mathrm{Hom}(M, N))$, то для некоторого элемента $g \in \mathrm{Hom}(N, M)$ имеем $\varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i = \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i g \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i$. Тогда

$$\pi'_j f \varepsilon_i = \pi'_j \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i \varepsilon_i = \pi'_j \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i g \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i \varepsilon_i = (\pi'_j f \varepsilon_i)\pi_i g \varepsilon'_j (\pi'_j f \varepsilon_i).$$

Покажем, что $A \subset \mathrm{Reg}(\mathrm{Hom}(M,N))$. Так как A является является $\mathrm{End}(B)$-$\mathrm{End}(A)$-подбимодулем бимодуля ${}_{\mathrm{End}(N)}\mathrm{Hom}(M,N)_{\mathrm{End}(M)}$, то достаточно показать регулярность каждого элемента из A. Покажем это от противного. Допустим в A существует нерегулярный элемент. Тогда в A существует нерегулярный элемент f, у которого в строке $f_{11},\dots,f_{1n},\dots,f_{m1},\dots,f_{mn}$, составленной из строк матрицы (f_{ij}), наибольшее количество первых нулей. Пусть $f_{i_0j_0}$ – первый ненулевой элемент из этой строки. Так как $f_{i_0j_0}$ – регулярный элемент, то для некоторого элемента $g_{j_0i_0} \in \mathrm{Hom}(N_{i_0}, M_{j_0})$ имеем $f_{i_0j_0} = f_{i_0j_0}g_{j_0i_0}f_{i_0j_0}$. Тогда

$$f - f\varepsilon_{j_0}g_{j_0i_0}\pi'_{i_0}f = \textstyle\sum_{i,j}\varepsilon'_i f_{ij}\pi_j - (\sum_{i,j}\varepsilon'_i f_{ij}\pi_j)\varepsilon_{j_0}g_{j_0i_0}\pi'_{i_0}(\sum_{i,j}\varepsilon'_i f_{ij}\pi_j) = \\ \textstyle\sum_{i,j}\varepsilon'_i h_{ij}\pi_j,$$

где $h_{ij} = f_{ij} - f_{ij_0}g_{j_0i_0}f_{i_0j}$. Ясно, что $h_{ij} = 0$, когда либо $i < i_0$, либо $i = i_0, j < j_0$, либо $i = i_0, j = j_0$. Тогда в силу выбора элемента f элемент $f - f\varepsilon_{j_0}g_{j_0i_0}\pi'_{i_0}f$ является регулярным. Из 18.23 следует регулярность элемента f, что противоречит нашим начальным предположениям.

18.32. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Согласно условию пункта 1) для некоторого $g \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ выполнены условия $g = gfg, f - fgf \in J(\mathrm{Hom}_R(M,N))$. Так как $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f(1_M - gf)) \cap \mathrm{Ker}(gf) \leqslant \mathrm{Ker}(gf)$ и $\mathrm{Ker}(f(1_M - gf)) \leqslant^e M$, то $\mathrm{Ker}(f)$ существен в прямом слагаемом $(1 - gf)M$ модуля M.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Согласно условию пункта 2) $\mathrm{Ker}(f) \leqslant^e \pi(M)$ для некоторого $\pi = \pi^2 \in \mathrm{End}_R(M)$. Так как модуль M является N - прямо инъективным, то для некоторого $h \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ выполнено равенство $1_M - \pi = hf$. Положим $g = (1_M - \pi)h$. Тогда $gfg = g$ и $\mathrm{Ker}(f - fgf) = \mathrm{Ker}(f) \oplus (1_M - \pi)(M) \leqslant^e M$. Заметим, что если $f \in J(\mathrm{Hom}_R(M,N))$, то согласно равенству $1_M - \pi = hf$ имеем $\pi = 1_M$ и, следовательно, $f \in \triangle(\mathrm{Hom}_R(M,N))$. Таким образом, $J(\mathrm{Hom}_R(M,N)) \subset \triangle(\mathrm{Hom}_R(M,N))$. Тогда из 18.17 следует равенство $\triangle(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = J(\mathrm{Hom}_R(M,N))$ и $f - fgf \in J(\mathrm{Hom}_R(M,N))$.

18.35. Согласно 18.34 для некоторого $t \in \mathrm{Hom}(D,C)$ имеем $thfgt = t \neq 0$. Тогда $(gth)f(gth) = gth$. При этом несложно заметить, что $gth \neq 0$.

18.36. 1) Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A,B) \backslash J(\mathrm{Hom}(A,B))$. Тогда для некоторого элемента $g \in \mathrm{Hom}(B, A)$ имеем $fg \in \mathrm{End}(B)\backslash J(\mathrm{End}(B))$. Следовательно, согласно условию пункта элемент fg частично обратим и из 18.35 следует, что элемент f также частично обратим.

Второй пункт доказывается аналогично.

18.37. $\pi_i : A \to A_i$, $\pi'_j : B \to B_j$ – канонические проекции, $\varepsilon_i : A_i \to A$, $\varepsilon'_j : B_j \to B$ – канонические вложения.
1)⇒2) Рассмотрим произвольный элемент f из $\mathrm{Hom}(A_i, B_j)\backslash J(\mathrm{Hom}(A_i, B_j))$. Так как $f = \pi'_j(\varepsilon'_j f \pi_j)\varepsilon_j$, то $\varepsilon'_j f \pi_j \notin J(\mathrm{Hom}(A, B))$. Тогда из условия пункта следует, что элемент $\varepsilon'_j f \pi_j$ частично обратим и, следовательно, элемент f также частично обратим.

2)⇒1) Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B)\backslash J(\mathrm{Hom}(A, B))$. Так как

$$f = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i,$$

то $\pi'_{j_0} f \varepsilon_{j_0} \notin J(\mathrm{Hom}(A_{i_0}, B_{j_0})$ для некоторых индексов i_0, j_0. Тогда элемент $\pi'_{j_0} f \varepsilon_{j_0}$ частично обратим и, следовательно, f также частично обратим.

18.39. 1)⇒2) Пусть $f \in \mathrm{Hom}(B, \oplus_{i\in I} A_i)\backslash J(\mathrm{Hom}(B, \oplus_{i\in I} A_i))$. Так как модуль B конечно порожден, то для некоторого конечного набора попарно различных индексов $i_1, \ldots, i_k$ из I имеем $f(B) \subset A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$. Пусть π – проекция модуля $\oplus_{i\in I} A_i$ на модуль $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$, ε – вложение модуля $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$ в модуль $\oplus_{i\in I} A_i$. Из 18.37 следует, что в $\mathrm{Hom}(B, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k})\backslash J(\mathrm{Hom}(B, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}))$ каждый элемент частично обратим. Так как $\varepsilon\pi f = f$ и $f \in \mathrm{Hom}(B, \oplus_{i\in I} A_i)\backslash J(\mathrm{Hom}(B, \oplus_{i\in I} A_i))$, то $\pi f \in \mathrm{Hom}(B, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k})\backslash J(\mathrm{Hom}(B, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}))$. Тогда элемент πf частично обратим и, следовательно, элемента f также частично обратим.

Импликация 2)⇒1) следует из 18.37.

18.40. Пусть $f \in J(\mathrm{Hom}(A, B))$. Тогда для некоторого элемента $g \in H_r(f)$ имеет место равенство $f = fg$. Так как $g \in J(\mathrm{Hom}(A, A))$, то для некоторого элемента $h \in \mathrm{Hom}(A, A)$ имеем $(1_A - g)h = 1_A$. Следовательно, $0 = f(1_A - g)h = f$.

18.41 . Непосредственно следует из следующих включений $H_r(f - fg) \subset H_r(f)$, $gH_r(f - fg) \subset H_r(f)$.

18.42. Рассмотрим множество

$$I = \{f \in \mathrm{Hom}(A,B) \mid \mathrm{End}(B) f \,\mathrm{End}(A) \text{ слабо регулярно справа }\}.$$

Легко видеть, что I замкнуто относительно умножения слева на элементы из $\mathrm{End}(B)$ и умножения справа на элементы из $\mathrm{End}(A)$. Покажем, что I замкнуто относительно сложения. Пусть $f, g \in I$ и $h \in \mathrm{End}(B)(f + g)\,\mathrm{End}(A)$. Тогда для некоторых элементов $h_1 \in \mathrm{End}(B) f \,\mathrm{End}(A)$, $h_2 \in \mathrm{End}(B) g \,\mathrm{End}(A)$ имеет место равенство $h = h_1 + h_2$. Так как элемент h_1 слабо регулярен справа, то $h_1 = h_1 \sum_{i=1}^{n} s_i h_1 a_i$, где $s_i \in \mathrm{Hom}(B, A)$, $a_i \in \mathrm{End}(A)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда элемент $h_1 + h_2 - (h_1 + h_2) \sum_{i=1}^{n} s_i (h_1 + h_2) a_i = h_2 - h_1 \sum_{i=1}^{n} s_i h_2 a_i - h_2 \sum_{i=1}^{n} s_i (h_1 + h_2) a_i \in \mathrm{End}(B) h_2 \,\mathrm{End}(A)$ является слабо регулярным справа и из 18.41 следует, что элемент $h_1 + h_2$ также является слабо регулярным справа.

18.43. 1) Доказательство будем проводить с помощью математической индукции. Докажем наше утверждение при $m = 1$. Так как $\mathrm{Hom}(A, C_1)$ слабо регулярно справа, то $f_1 s \in f_1 s H_r(f_1 s) \subset f_1 s H_r(s)$. Предположим, что наше утверждение верно для $m = k$. Пусть $\mathrm{Hom}(A, C_1), \ldots,$ $\mathrm{Hom}(A, C_{k+1})$ слабо регулярны справа и $f_1 \in \mathrm{Hom}(B, C_1), \ldots, f_{k+1} \in \mathrm{Hom}(B, C_{k+1})$,$s \in \mathrm{Hom}(A, B)$. По предположению индукции найдется такой гомоморфизм $h \in H_r(s)$, что для каждого $1 \leqq i \leqq k$ имеет место равенство $f_i s = f_i s h$. Так как $\mathrm{Hom}(A, C_{k+1})$ слабо регулярен справа, то для некоторого гомоморфизма $h' \in H_r(f_{k+1} s - f_{k+1} s h) \subset H_r(s)$ имеет место равенство $(f_{k+1} s - f_{k+1} s h) = (f_{k+1} s - f_{k+1} s h) h'$. Тогда для каждого $1 \leqq i \leqq k$ имеем $f_i s (h + h' - h h') = f_i s h + f_i s (1_A - h) h' = f_i s$ и $f_{k+1} s (h + h' - h h') = f_{k+1} s$. При этом, очевидно, что $h + h' - h h' \in H_r(s)$.

2) Доказательство двойственно доказательству предыдущего пункта.

18.44. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B_1)$ и i – вложение модуля B_1 в модуль B и π – проекция модуля B на модуль B_1 относительно разложения $B = B_1 \oplus B_2$.

Поскольку $\mathrm{Hom}(A, B)$ слабо регулярно, то имеет равенство

$$if = \sum_{k=1}^{m} h_k i f g_k,$$

где $g_k \in H_r(if)$, а $h_k \in \mathrm{Hom}(B, B)$ для каждого k. Тогда

$$f = \sum_{k=1}^{m} \pi h_k i f g_k \in \mathrm{Hom}(B_1, B_1) f H_r(f).$$

18.45. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, π_1 и π_2 – проекции модуля B на первое и соответственно на второе прямое слагаемое относительно разложения $B = B_1 \oplus B_2$, i_1 и i_2 – вложения модуля B_1 и соответственно модуля B_2 в модуль B.

Из слабо регулярности $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ и $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ следует, что

$$\pi_1 f = \sum_{k=1}^{m} g_k \pi_1 f h_k$$

и

$$\pi_2 f = \sum_{k=1}^{n} s_k \pi_2 f t_k,$$

где $g_k \in \mathrm{Hom}(B_1, B_1), h_k \in H_r(\pi_1 f)$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant m$ и $s_k \in Hom(B_2, B_2)$ $t_k \in H_r(\pi_2 f)$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = \textstyle\sum_{k=1}^{m} i_1 g_k \pi_1 f h_k + \sum_{k=1}^{n} i_2 s_k \pi_2 f t_k.$$

Так как $i_1 g_k \pi_1 f h_k, i_2 s_k \pi_2 f t_k \in \mathrm{Hom}(B, B) f H_r(f)$ для каждого k, то $f \in \mathrm{Hom}(B, B) f H_r(f)$.

18.46. 1)⇒2) Предположим, что $\mathrm{Hom}(N, A_i)$ слабо регулярно для каждого $i \in I$. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(N, \oplus_{i\in I} A_i)$. Так как модуль N конечно порожден, то для некоторого конечного набора попарно различных индексов $i_1, \ldots, i_k$ из I имеем $f(N) \subset A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$. Пусть π – проекция модуля $\oplus_{i\in I} A_i$ на модуль $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$, i - вложение модуля $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$ в модуль $\oplus_{i\in I} A_i$. Из леммы 4 следует, что $\mathrm{Hom}(N, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k})$ слабо регулярно. Следовательно, $\pi f \in \mathrm{Hom}(A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}) \pi f H_r(\pi f) \subset \mathrm{Hom}(A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}) \pi f H_r(f)$. Так как $i\pi f = f$, то $f \in \mathrm{Hom}(\oplus_{i\in I} A_i, \oplus_{i\in I} A_i) f H_r(f)$. Случаи слабо регулярных справа и слабо регулярных слева множеств гомоморфизмов рассматриваются аналогично.

2)⇒1) Импликация следует из 18.45.

18.53. Элемент кольца формальных матриц $K = K(\{M_{ij}\}\colon \{\varphi_{ikj}\})$, у которого компонента, находящаяся на пересечении i-й строки и j-го столбца равна r, а остальные компоненты равны нулю, будем обозначать через re_{ij}. Обозначим множество $\{r \in K \mid M_{ti}r_{ij}M_{js} \subset I(M_{ts})\}$ через I'. Несложно заметить, что I' – идеал кольца K. Покажем, что $I(K) \subset I'$. Так как $e_{ii}Ke_{jj}I(K)e_{ss}Ke_{tt} \subset I(K)$, то достаточно показать, что у каждого элемента идеала $I(K)$ все компоненты слабо регулярны справа. Пусть $a \in I(K)$. Тогда для каждой пары индексов i, j имеют место равенства

$$e_{ii}ae_{jj} = e_{ii}ae_{jj}(\sum_{k=1}^{m} b_k e_{ii}ae_{jj}c_k) = e_{ii}ae_{jj}(\sum_{k=1}^{m} b_k e_{ii}ae_{jj}c_k e_{jj}),$$

$$a_{ij} = a_{ij}(\sum_{k=1}^{m}(b_k)_{ji}a_{ij}(c_k)_{jj}.$$

Покажем, что $I' \subset I(K)$. Предположим, что идеал I' содержит элемент, который не является слабо регулярным справа. Выберем в I' не слабо регулярный элемент r, у которого строка $r_{11}, \ldots, r_{1n}, \ldots, r_{n1}, \ldots, r_{nn}$ имеет наибольшее количество первых нулей. Пусть $r_{i_0j_0}$ первый ненулевой элемент в этой строке. Имеет место равенство $r_{i_0j_0} = r_{i_0j_0}\sum_k a_k r_{i_0j_0}b_k$, где $a_k \in M_{j_0i_0}, b_k \in R_{j_0j_0}$ для каждого k. Тогда

$$r - r\sum_k a_k e_{j_0i_0} r b_k e_{j_0j_0} = \sum_{i,j} r_{ij}e_{ij} - (\sum_{i,j} r_{ij}e_{ij})(\sum_k a_k e_{j_0i_0}(\sum_{i,j} r_{ij}e_{ij})b_k e_{j_0j_0}) =$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij}e_{ij},$$

где $g_{ij} = r_{ij}$, если $j \neq j_0$, и $g_{ij_0} = r_{ij_0} - \sum_k r_{ij_0}a_k r_{i_0j_0}b_k$. Ясно, что $g_{ij} = 0$, если либо $i < i_0$, либо $i = i_0, j < j_0$, либо $i = i_0$, $j = j_0$. Следовательно, в силу выбора элемента r элемент $r - r\sum_k a_k e_{j_0i_0} r b_k e_{j_0j_0}$ является слабо регулярным справа. Тогда r – слабо регулярный элемент, что противоречит нашим исходным предположениям.

18.54. Для произвольных элементов $r_1, r_2 \in R$ через $r_1 *_{ijk} r_2$ будем обозначать выражение $\phi_{ijk}(r_1 \otimes r_2)$.

1). Покажем выполнимость равенства из пункта а). Обозначим правую часть пункта а) через I'. Включение $I(K) \subset I'$ проверяется непосредственно. Покажем, что имеет место обратное включение. Пусть $r \in I'$. Тогда для произвольных $1 \leqslant i, j, s, t \leqslant n$ и $a, b \in R$ имеют место равенства

$$ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst} = ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}\sum_{1\leqslant l\leqslant k} c_l ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}d_l,$$

$$ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij} = ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\sum_{1\leqslant l\leqslant k} c_l ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}d_l,$$

$$(a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b = ((a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b)\sum_{1\leqslant l\leqslant k}(c_l *_{tst} ((a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b))d_l.$$

Тогда $r \in I(K)$. Равенство из пункта b) доказывается аналогично.

2). $\Rightarrow$. Для произвольных $1 \leqslant i, j \leqslant n$ имеет место равенство

$$1 = \sum_{1\leqslant t\leqslant k} r_t *_{iji} s_t = \eta_{iji}\sum_{1\leqslant t\leqslant k} r_t s_t.$$

Таким образом, элементы вида η_{iji} обратимы в R. Поскольку для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место равенство $\eta_{iji} = \eta_{ijk}\eta_{jik}$, то $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$

$\Leftarrow$. Импликация непосредственно следует из первого пункта исходной теоремы.

3). Доказательство аналогично доказательству предыдущего пункта.

20 Список обозначений

1) $C(R)$ центр кольца R
2) $N(R)$ верхний ниль-радикал кольца R
3) $\mathrm{Nil}(R)$ множество всех нильпотентных элементов кольца R.
4) $\mathrm{Reg}(R)$ наибольший регулярный идеал кольца R
5) $J(R)$ радикал Джекобсона кольца R
6) $rad(R)$ первичный радикал (или нижний ниль-радикал) кольца R
7) $U(R)$ группа обратимых элементов кольца R.
8) $\mathrm{End}(M)$ кольцо эндоморфизмов правого модуля M
9) $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ множество всех гомоморфизмов из правого R-модуля M в правый R-модуль N
10) $\mathrm{Loewy}(M)$ длина Леви модуля M
11) $\mathrm{Soc}(M)$ цоколь модуля M
12) $J(M)$ радикал Джекобсона модуля M
13) $r(s)$ правый аннулятор элемента s из кольца R.
14) $l(s)$ левый аннулятор элемента s из кольца R.
15) $N \ll M$ N малый подмодуль модуля M.
16) $N \leqslant^e M$ N – существенный подмодуль модуля M
17) $N \leqslant M$ N – подмодуль модуля M
18) $N \leqslant^d M$ N – прямое слагаемое модуля M
19) $CFM_{\mathbb{N}}(R)$ кольцо конечно столбцевых матриц из $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, где R – некоторое кольцо
20) $\lg(M)$ длина модуля конечной длины M
21) $\sigma(M)$ множество всех модулей подпорожденных модулем M

Научное издание

Абызов Адель Наилевич
Туганбаев Аскар Аканович

КОЛЬЦА И МОДУЛИ

Монография

Подписано в печать 28.04.2017.
Электронное издание для распространения через Интернет.

ООО «ФЛИНТА», 117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17-Б, комн. 324.
Тел./факс: (495) 334-82-65; тел. (495) 336-03-11.
E-mail: flinta@mail.ru; WebSite: www.flinta.ru