1. Численные модели

Что такое численная модель?

Используя введенную терминологию, мы можем дать более строгое определение математической модели. Для построения математической модели нужны два множества: множество–объект (реальный или идеальный, эмпирический или теоретический) и моделирующее множество (идеальное, состоящее из математических понятий). Математическая модель – это отображение из первого множества во второе.

Элементы моделирующего множества могут иметь самую разную природу. Однако, пожалуй, самые распространенные и известные математические модели состоят из чисел. Число является одним из основных понятий математики (особенно элементарной, “школьной”). Правда, в современных прикладных разделах оно не играет уже настолько важной роли, однако чаще всего приложения математики начинаются там, где объект исследования можно описать численно. Поэтому важным классом математических моделей являются численные модели.

> Определение 1.1. Численной моделью называется функционал (отображение) f: $X \to \mathcal{R}$ из множества–объекта X в множество чисел $\mathcal{R}$.

Численную модель называют еще показателем. Например, показателем зажиточности семьи может служить ее доход. Хотя для каждой семьи он имеет конкретное числовое значение, однако это не число, а именно численная модель, т.е. отображение из множества семей в множество чисел.

Любой ли объект допускает такое описание? Вообще говоря, да: если он содержит не слишком много элементов (не больше, чем существует чисел), то можно пометить его элементы числами. Другое дело, будет ли польза от такого моделирования. Как мы уже говорили, модель должна адекватно отражать свойства объекта. Это возможно только в том случае, если сами эти свойства хотя бы отчасти похожи на свойства множества чисел.

Перечислим эти свойства. Их можно разбить на 3 основные группы.

1. Арифметические свойства. Как известно, к числам можно применять четыре действия арифметики. Основным среди них является сложение. Вычитание определяется как операция, обратная к сложению. Сложение одинаковых величин приводит к операции умножения. Обратной к умножению является операция деления. Таким образом, операция сложения в некотором смысле порождает все остальные арифметические операции.

2. Порядковые свойства. Числа можно сравнивать между собой, т. е. говорить о том, что одно число больше, а другое меньше. Отношение “больше” и связанные с ним отношения “меньше”, “не больше”, “не меньше” позволяют выстроить числа в некотором порядке, например, от меньшего к большему.

3. Различимость. Отношения равенства и неравенства, которые существуют в любом множестве.

Моделируемый объект должен обладать такими же свойствами, хотя и не обязательно всеми ими. Чем больше свойств чисел мы найдем у объекта, тем эффективнее применение числовых моделей.

Рассмотрим в качестве примера модели, состоящие из чисел 1, 2, 3:

а) 1 – глагол, 2 – существительное, 3 – прилагательное.

б) 1 место, 2 место, 3 место.

в) 1 кг, 2 кг, 3 кг.

Способ использования чисел в этих моделях совершенно различен. В первом случае из всех свойств числа используются только отношение равенства/неравенства. Нет смысла в сложении: “глагол”+”существительное” не равно “прилагательному”. Не имеют применения и порядковые свойства числа: мы вполне могли бы пронумеровать части речи и в другом порядке. Таким образом, в этом примере числа просто заменяют названия объектов. Фактически они не используются по назначению. Такую численную модель можно назвать номинальной (номинация – называние).

Во втором примере использованы порядковые свойства чисел. Когда элементам присвоены места, то они выстраиваются в некотором порядке (например, от лучшего к худшему). В модели понятие “лучше” заменено понятием “меньше”, так как лучшему объекту присваивается меньшее место. Однако арифметические операции применять бессмысленно. Нельзя сказать, что первое место в сумме со вторым дает третье. Также мы не можем считать, что занявший второе место хуже первого на столько же, на сколько третий хуже второго. В подобном случае говорят, что модель является порядковой.

И, наконец, в третьем примере число используется “на полную мощность”, т. е. применяются и арифметические, и порядковые свойства. Такую численную модель мы назовем количественной. Она отличается от порядковой тем, что можно выделить некоторую единицу измерения (эталон). Построение количественной модели происходит при помощи измерения, т.е. сравнения объекта с эталоном. Для этой операции, кроме эталона, нужна точка отсчета. «Откладывая» от нее эталон (т. е. прибавляя его), мы узнаем, сколько раз эталон содержится в объекте измерения. При необходимости можно взять для измерения доли эталона (половинки, трети, десятые, сотые и т. д.).

Из описания процесса измерения видно, что арифметические операции сами по себе порождают на множестве некоторый порядок. Действительно, прибавляя к элементу эталон или его долю мы увеличиваем его, а отнимая – уменьшаем. Поэтому всякая количественная модель является в каком-то смысле и порядковой. А значит, нет смысла вводить численные модели, для которых арифметические свойства выполняются, а порядковые – нет. Таким образом, три введенных типа дают полную классификацию моделей.

> ☝ Замечание. Чтобы проверить, к какому типу относится данная модель, надо попробовать и з м е н и т ь ее. Так, в номинальной модели числа можно менять гораздо свободнее, чем в порядковой, а в количественной изменений, наоборот, меньше. Подробнее об этом будет рассказано в следующем параграфе. ☺

Приведем примеры численных моделей различных типов:

1. Номера документов представляют собой обычно номинальную модель. Порядок, в котором пронумерованы документы, чаще всего является хронологическим и не отражает свойств самих документов или лиц, которым они выданы.

2. Школьные оценки представляют собой порядковую модель качества знаний. Понятию “лучше”, которое они моделируют, соответствует отношение “больше” на множестве чисел: чем лучше ответ, тем большую оценку получит ученик. Однако единой единицы измерения для выставления оценок не существует: нельзя сказать, что один балл соответствует определенному количеству знаний. Недаром в вузе численные оценки заменяются словесными: “неудовлетворительно”, “удовлетворительно”, “хорошо”, “отлично”. Эти слова служат для оценивания нисколько не хуже чисел.

3. Оценки, выставляемые судьями в фигурном катании, также используются в виде порядковой модели, т. к. судьи оценивают качество выступления, поэтому выставленные ими баллы весьма условны. При подсчете окончательных результатов численные значения оценок отбрасывают, а учитывают только места, на которые поставил соперников каждый из судей. По сути дела, в этих целых числах содержится ровно столько же информации, сколько в баллах, записанных с точностью до десятых долей.

4. Порядковая модель изображает упорядоченность элементов объекта с помощью упорядоченных чисел. Но числа можно упорядочить двумя способами: по возрастанию и по убыванию. Какой из них выбрать – дело вкуса. Действительно, у нас обычно более высокую оценку ставят за лучшие знания, а в некоторых странах – наоборот, лучший ученик получает оценку 1. Другой пример: в игре “Угадай мелодию” игроки торгуются за право ответа, причем высшей ставкой являются 3 ноты, а низшей – 7, хотя 7 > 3.

5. Количественные величины чаще всего появляются в естественных науках. Это, например, длина, вес, температура, возраст и т. п. Чтобы рассматривать какой-то объект как количественный, необходимо отвлечься от большинства различий, существующих между его элементами. Например, с точки зрения веса килограмм сахара и килограмм железа неразличимы, хотя по другим параметрам они сильно отличаются друг от друга. Чем сложнее объект или система, тем меньше смысла описывать его с помощью количественных моделей, так как при

этом теряется существенная информация. Поэтому в гуманитарных науках количественные модели применяются гораздо реже и менее эффективно, чем в естественных.

Шкалы и их типы

В предыдущем параграфе мы ввели понятие численной модели. Создание такой модели состоит в том, что каждому элементу оригинала приписывается некоторое число. Конечно, это можно сделать разными способами. Например, у нас принято выставлять оценки в 5–балльной системе, в то время как в других странах существуют и 10–, 20–. и 100–балльные системы. Точно так же для измерения температуры в разных странах используются разные шкалы: Цельсия, Фаренгейта, Реомюра, а в научных исследованиях – Кельвина. Мы видим, что в выборе численной модели существует обычно значительный произвол.

Но значит ли это, что элементам объекта можно приписывать числа как попало? Нет, не значит. Модель будет эффективной, если она отражает существенные свойства оригинала. Если между элементами объекта существуют какие–либо соотношения, взаимосвязи, то аналогичные соотношения должны связывать и приписанные им числа.

> Определение 1.2. Набор численных моделей, адекватно отражающих структуру объекта, называется ш к а л о й (в обобщенном смысле).

> ☝ Замечание 1. Следует сразу же отметить разницу между обыденным и теоретическим смыслом этого слова. В обычном языке слово “шкала” используется как синоним понятия “численная модель”, мы же будем понимать под шкалой все м н о ж е с т в о численных моделей, адекватных данному объекту. ☺

Отдельные модели, входящие в шкалу, относятся к тому или иному типу (номинальные, порядковые или количественные). Вообще говоря, можно объединять в одной шкале модели разных типов, но это не имеет смысла. Например, порядковая модель дает нам меньше информации об объекте, чем количественная, поэтому, если нам удалось описать объект количественно, то порядковая модель будет неадекватной (или менее адекватной). То же можно сказать о порядковых и номинальных моделях: там, где есть порядок, номинальная модель не нужна. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что все модели одной шкалы относятся к одному типу. Тогда к тому же типу можно отнести и всю шкалу. Итак, шкалы можно разделить на количественные, порядковые и номинальные. Однако эту классификацию можно уточнить, выделив внутри каждого типа более мелкие классы шкал.

Возникает вопрос: как можно описать или задать ту или иную шкалу? Конечно, существует прямой путь – перечислить (или описать) все входящие в нее численные модели. Однако такой способ чрезвычайно громоздок и неудобен. Кроме того, он не обладает универсальностью, ведь численная модель включает в себя конкретный объект.

Можно поступить и по–другому. Пусть у нас есть две модели одного объекта. Будем считать, что они сохраняют различимость объектов, т.е. разным элементам ставят в соответствие разные числа. Тогда, зная численное значение элемента в одной модели, можно найти сам элемент, а по нему – значение во второй модели. Таким образом, от одной модели мы можем перейти к другой.

Пусть, например, у нас есть термометр, градуированный по Цельсию. Чтобы создать его, надо произвести некоторые действия:

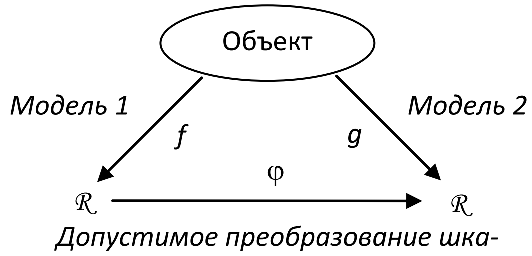
1. заморозить воду и температуру замерзания пометить как 0°;
2. вскипятить воду и пометить соответствующую температуру как 100°;
3. поделить отрезок между двумя пометками на 100 частей, тогда каждое деление будет соответствовать 1°.

Предположим, что температуру надо записать по Фаренгейту. Надо ли для этого создавать новый термометр? Нет, ведь два значения температуры связаны простой формулой $F = {}^{5}\!/_{9}\, C + 32$ (здесь C – температура по Цельсию, а F – по Фаренгейту). Подобные соотношения связывают между собой только ч и с л е н н ы е з н а ч е н и я , а не элементы объекта, поэтому их применение гораздо менее трудоемко.

> Определение 1.3. Преобразование, переводящее одну численную модель данной шкалы в другую, называется д о п у с т и м ы м .

Пусть X – множество–объект, а f: $X \to \mathcal{R}$ – численная модель (через $\mathcal{R}$ обозначено множество чисел). Преобразование φ: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ будет допустимым для данной шкалы, если отображение $g = \varphi \circ f$: $X \to \mathcal{R}$ будет численной моделью из той же шкалы. И наоборот, если даны две численные модели $f : X \to \mathcal{R}$ и $g : X \to \mathcal{R}$, принадлежащие данной шкале, то преобразование $\varphi = g \circ f^{-1}$: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ будет допустимым.

Такие преобразования сохраняют существенные свойства объекта и поэтому их можно назвать изоморфизмами (см. ?).



Допустимое преобразование шкалы (изоморфизм)

При задании шкалы вместо перечисления всех входящих в нее моделей можно указать одну модель и все ее допустимые преобразования. При этом для разных изучаемых объектов эти преобразования могут оказаться одинаковыми. В этом случае говорят, что шкалы принадлежат к одному типу. Итак, тип шкалы определяется набором ее допустимых преобразований.

> ☝ Замечание 2. Хотя каждая шкала относится к своей предметной области, тип шкалы – математическое понятие, изучаемое в общей теории измерений. Впрочем, когда надо отнести конкретную шкалу к какому-нибудь типу, приходится использовать свойства объекта. Это – не математическая задача, а проблема соответствующей науки.☺

Среди различных типов шкал некоторые встречаются наиболее часто. Перечислим их.

1. Номинальная шкала (шкала наименований). Она состоит из номинальных моделей. В номинальной модели конкретные значения показателя не играют роли, лишь бы разным элементам были присвоены разные числа. Поэтому допустимы все преобразования, сохраняющие различимость объектов, т.е. любые взаимно однозначные преобразования. Примером номинальной шкалы может служить любая нумерация, например, игроков в футбольной команде, регистрационные номера автомобилей и т.п. При необходимости нумерацию можно менять произвольно, проследив только за тем, чтобы разным объектам не достались одинаковые номера.

Различные номинальные шкалы отличаются только количеством элементов.

2. Шкала порядка состоит из порядковых моделей. Как известно, отображение, сохраняющее порядок, называется строго возрастающим (см. стр. **Ошибка! Закладка не определена.**), поэтому в порядковой модели допустимы все строго возрастающие преобразования. Примером может служить шкала твердости минералов Мооса. Она получается с помощью попарного сравнения: если один минерал оставляет царапину на другом, то он тверже. В качестве эталонов берутся 10 различных минералов от талька до алмаза.

Порядковые шкалы с конечным числом элементов различаются только их количеством. Для бесконечных шкал эти различия могут быть более тонкими.

3. Шкала отношений является примером количественной шкалы. Как и для всех количественных моделей, она получается при помощи “откладывания” эталона. Особенность ее в том, что у объекта существует естественная точка отсчета, которую берут за 0. В этом случае разные шкалы отличаются только величиной эталона. Если эталон увеличить в k раз, то значение показателя уменьшится в такое же число раз и наоборот. Поэтому допустимыми будут только преобразования вида $y = kx$. Обычно считают, что эталон имеет положительную величину, поэтому и k естественно считать положительным. Шкала отношений применяется при измерении массы, длины, стоимости и т.п. Такого же типа и шкала Кельвина для температуры (вернее, все модели, которые получаются из нее при помощи замены величины градуса).

Название шкалы связано с тем, что отношение значений показателя для двух объектов не меняется при переходе к другому эталону. Например, если один объект в 38 раз длиннее другого, то это будет верно и в метрах, и в аршинах, и в футах, и в попугаях.

4. Шкала интервалов также является количественной. Однако, в отличие от предыдущего случая, объект не имеет естественного “нуля”. Поэтому при переходе к другой модели может меняться не только единица измерения, но и точка отсчета. Последнее выражается в том, что значение показателя сдвигается на определенную величину, т.е. к нему прибавляется (или вычитается) некоторая константа. Итак, для шкалы интервалов допустимыми являются все преобразования вида $y = kx + b$, где число k положительное, а b – произвольное. Типичным примером объекта, для которого применима шкала интервалов, является время. Как известно, человечество и в наше время, а тем более на протяжении своей истории имело множество самых различных календарей. И хотя единица измерения во многих из них одинакова (это год, солнечный или лунный), но даты очень отличаются. Обычно за начало отсчета берется какое-то памятное событие, но представление о важности той или иной даты весьма условно. В той или иной культуре это может быть Рождество Христово, Хиджра (год переселения Магомета из Мекки в Медину) или воцарение очередного императора. Поэтому, когда мы говорим, что сейчас 1996 год, надо удостовериться, что все знают, какой календарь имеется в виду. Особенно большой проблемой это становится в исторических исследованиях.

Название шкалы подчеркивает тот факт, что реальный смысл в этом случае имеют не сами численные величины, а только интервалы между ними. Например, независимо от используемого календаря можно утверждать, что между двумя событиями прошло два года, хотя даты того и другого будут различными с разных точек зрения.

5. Абсолютная шкала. Эта количественная шкала имеет и абсолютный нуль, и абсолютную единицу измерения. Поэтому допустимым для нее является только тождественное преобразование. Численное значение в такой шкале присваивается объекту однозначно. Единица измерения (эталон) безразмерна. Самым простым примером измерения в абсолютной шкале является обычный счет.

> ☝ Замечание 3. Когда мы вводили понятие допустимого преобразования, мы исходили из того, что у нас есть какая-то конкретная модель как представитель шкалы. Вообще говоря, ниоткуда не следует, что для другой модели допустимые преобразования будут такими же. Однако в рассмотренных пяти типичных шкалах допустимые преобразования не зависят от “начальной” модели, они одинаковы для всех численных моделей. Этот случай типичен. По–видимому, он отражает некоторую “симметрию”, регулярность природы и мышления. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только такие шкалы, в которых допустимые преобразования одинаковы для всех моделей. ☺

Сравнение пяти разобранных типов шкал показывает, что они не являются изолированными, независимыми друг от друга. Например, зафиксировав в шкале интервалов начальную точку, мы получаем шкалу отношений, а выбрав, кроме того, эталон – абсолютную шкалу. Эти наблюдения приводят нас к сравнению шкал “по силе”, т.е. по количеству информации об объекте, которую они содержат. Дело в том, что свойства чисел, замеченные для конкретной модели не всегда отражают свойства оригинала. Собственными свойствами объекта являются те, которые не зависят от модели, т.е. те, которые сохраняются при всех допустимых преобразованиях. Математики говорят в этом случае, что они являются инвариантами данных преобразований. Поэтому чем больше допустимых преобразований, тем больше теряется информации, тем меньше свойств объекта отражено в шкале. Теперь можно сформулировать строгое определение силы шкалы.

> Определение 1.4. Пусть нам даны две шкалы, состоящие из одних и тех же чисел. Говорят, что первая шкала сильнее второй, если все преобразования, допустимые в ней, допустимы и во второй шкале.

Например, номинальная шкала слабее порядковой, имеющей то же количество элементов, так как любая строго возрастающая функция является взаимно однозначной (см. стр. **Ошибка! Закладка не определена.**).

Вообще говоря, могут существовать шкалы, не сравнимые между собой (когда у каждой шкалы есть “индивидуальные” изоморфизмы, не подходящие для другой шкалы). Но все разобранные выше 5 шкал сравнимы, если они используют одно и то же множество чисел.

Понятия и операции, допустимые в разных шкалах

Правильный выбор шкалы очень важен для адекватности математической модели. Однако численное описание объекта не является, конечно, самоцелью. Оно полезно тем, что позволяет делать определенные выводы на основе свойств чисел. Это значит, что с численными показателями необходимо производить какие-то действия: вычисления, сравнение и т.п. При этом необходимо следить, чтобы действия были осмысленными в выбранной шкале.

Понятие “осмысленности” можно определить строго.

> Определение 1.5. Высказывание является допустимым в некоторой шкале, если оно остается верным (или неверным) при любом допустимом преобразовании численной модели.

Можно сказать, что высказывание должно “выдержать” все преобразования. Необходимо подчеркнуть, что допустимым может быть и ложное высказывание. Бессмысленным же считается только то высказывание, которое истинно в одной численной модели и ложно в другой. Тогда оно является свойством модели, а не самого объекта.

Приведем несколько примеров.

1. На полке стоят два сосуда с водой.

Это высказывание осмысленно, так как счет происходит в абсолютной шкале. В этой шкале любое высказывание осмысленно потому, что она состоит из одной–единственной модели. Заметьте, что на полке на самом деле могут стоять 3 сосуда или ни одного, при этом высказывание остается осмысленным, хотя и неверным.

2. Вес воды, заключенной в одном сосуде, равен 10.

Вес измеряется в шкале отношений, так что его числовое значение меняется при переходе к новому эталону. Высказывание бессмысленно.

3. Один из сосудов вдвое тяжелее другого.

В шкале отношений, как уже говорилось, отношение численных значений для двух объектов не зависит от выбора модели (единицы измерения), поэтому высказывание осмысленно.

4. Температура воды в первом сосуде в 2 раза больше, чем во втором.

Температура измеряется в шкале интервалов, более слабой, чем шкала отношений. Отношение показателей в ней не сохраняются. Например, пусть по шкале Цельсия объекты имеют температуру 20° и 10° соответственно. Тогда в шкале Кельвина их температуры будут равны 293° и 283°. В первом случае высказывание верно, а во втором – нет, значит, оно бессмысленно.

Понятие осмысленности можно распространить и на различные операции. Для этого их надо представить в виде высказываний со сказуемым "равно". Например, операция сложения приводит к высказыванию типа $a + b = c$.

> Определение 1.6. Операцию будем считать д о п у с т и м о й в некоторой шкале, если допустимо соответствующее равенство. Это значит, что при допустимом преобразовании всех аргументов результат операции преобразуется по тому же закону.

В качестве примера рассмотрим различные арифметические операции в количественных шкалах. Ясно, что в абсолютной шкале допустимы все операции, даже возведение в степень. Осталось исследовать две более слабые шкалы.

5. Сумма. Пусть верно равенство $x + y = z$. Начнем со шкалы интервалов. В новой модели значения показателя будут равны $x_1 = kx + b$, $y_1 = ky + b$, $z_1 = kz + b$. Необходимо проверить, выполняется ли равенство $x_1 + y_1 = z_1$. Подставим в это равенство новые значения переменных. Получаем соотношение $kx + b + ky + b = kz + b$, т.е. $k(x + y) + b = kz$. По предположению $x + y = z$, поэтому $b = 0$. Это значит, что равенство остается верным только при преобразованиях вида $y = kx$. Итак, понятие суммы допустимо в шкале отношений, но недопустимо в шкале интервалов.

6. Разность. Равенство $x - y = z$ равносильно равенству $y + z = x$, поэтому разность допустима в тех же шкалах, что и сумма.

7. Произведение и частное. Пусть $x \cdot y = z$. Выберем новую единицу измерения, тогда показатель примет значения $x_1 = kx$, $y_1 = ky$, $z_1 = kz$, а проверяемое равенство – вид $kx \cdot ky = kz$. Подставляя значение для z, получаем, что $k \cdot k = k$, откуда $k = 1$ (мы учли, что $k \neq 0$). Итак, равенство не сохраняется при замене единицы измерения, а значит, произведение недопустимо ни в шкале отношений, ни в шкале интервалов. То же верно и для частного (почему?).

8. Среднее арифметическое. В отличие от суммы, среднее арифметическое имеет смысл и в шкале интервалов. Действительно, если $(x+y)/2 = z$, то и $\frac{(kx+b)+(ky+b)}{2} = \frac{k(x+y)}{2} + b = kz + b$. Смысл этого соотношения таков: если сдвинуть все значения на одну и ту же константу (прибавить ее или вычесть), то и средняя величина сдвинется на ту же константу.

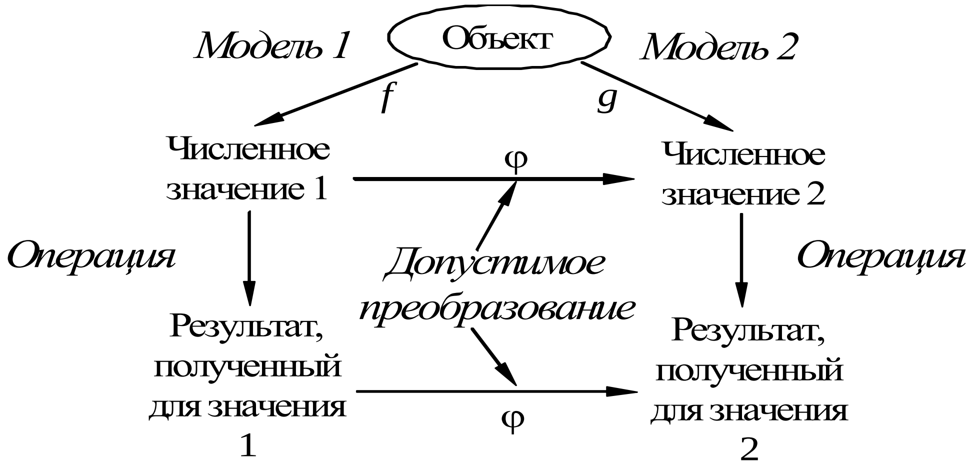
9. Умножение на безразмерную константу. В отличие от перемножения двух значений показателя, умножение на число допустимо в шкале отношений. Действительно, если $y = \lambda x$, то и $ky = \lambda(kx)$. Для шкалы интервалов подобное соотношение неверно.

10. Прибавление размерной константы допустимо в шкале интервалов (покажите самостоятельно). Например, нельзя отложить 10 мая от 1 сентября, но можно отложить от этой даты 10 дней.

Ясно, что в порядковых шкалах арифметические операции недопустимы. В такой шкале имеет смысл сравнение значений показателя. Можно сказать, что значение показателя одного объекта больше (или меньше), чем у другого, но нельзя сказать на сколько или во сколько раз.

В номинальной шкале допустимо только сравнение на равенство (неравенство) объектов.

☝ Замечание 1. Следует различать понятия допустимого преобразования шкалы (изоморфизма) и допустимой в данной шкале операции. В первом случае происходит переход от одной численной модели к другой, а во втором – действия с одним или несколькими значениями показателя в одной модели:



Заметим, что слова «осмысленность», «корректность» в обычном языке многозначны. Приведенное выше определение выделяет только частный случай этих понятий.

В более широком смысле некоторые операции, некорректные в смысле **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, кажутся вполне осмысленными. Например, показатели, заданные в шкале отношений, нельзя умножать или делить друг на друга, однако мы пользуемся такими величинами, как м^2, т.е. метр, умноженный на метр. Фактически, эта величина описывает другой объект: произведение двух д л и н даст нам п л о щ а д ь . При этом длина приписывается отрезку, а площадь – прямоугольнику (шире – плоской фигуре). С другой стороны, такие величины, как кг^2 и особенно руб.^{2} кажутся менее осмысленными, т.е. не соответствующими реальным объектам.

В некоторых случаях такие «присоединенные» объекты можно строить единообразно для разных реализаций шкалы. Например, в шкале интервалов промежутки (интервалы) между объектами являются новыми объектами, для которых подходит шкала отношений. Можно сказать, что эта шкала «присоединена» к шкале интервалов. В этом смысле к шкале дат присоединена шкала возрастов, так как возраст – это разница между двумя датами (текущей и датой рождения).

Аналогично к шкале отношений можно присоединить абсолютную шкалу. Для каждой пары объектов отношение приписанных им показателей постоянно, не зависит от эталона, т.е. является некоторой «безразмерной» величиной. Именно такую величину мы имели в виду в примере 5.

Обобщенные характеристики набора чисел

Предположим, что мы ввели модель, которая описывает объект с помощью некоторого численного показателя. В этой модели элементам объекта присвоены численные значения, например, 3, 7, 3, 5, 12. Можно ли эти пять чисел заменить одним, которое наилучшим образом характеризует всю совокупность? Эту задачу можно решать бесчисленным множеством способов. Среди них наиболее употребительны следующие три характеристики.

1. Среднее арифметическое. Его выделяют из всех средних, так как оно допустимо в большем числе шкал. Часто его называют просто средним значением. Можно заменить его также средним взвешенным (см. Упражнение 5.6). В нашем примере значение среднего арифметического равно (3+7+3+5+12)/5 = 30/5 = 6.

Меня спросили, сколько мне лет, а я не могла вспомнить – 20 или 21. Тогда я взяла среднее и сказала, что 19.

2. Медиана. Это то число, которое оказывается в середине ряда чисел, если его упорядочить по возрастанию. В данном примере получаем ряд 3, 3, 5, 7, 12, поэтому срединное число (медиана) равно 5. Медиану можно определить еще так: это то из чисел, для которого поровну значений меньше и больше его (в данном примере по два). Она как бы делит ряд чисел на две равные по числу элементов части. Если число значений четное, то в середине стоят два числа. В качестве медианы можно взять любое промежуточное значение, например, их полусумму.

3. Мода. Так называется число, чаще других появляющееся в списке значений. В данном случае это 3.

Мы видим, что три способа усреднения дали три разных результата. Какой же из них правильный? Такая постановка вопроса неправомерна. Каждое из этих понятий определенным образом характеризует распределение значений и каждое имеет свою область применения.

В некоторых типах моделей имеют смысл лишь часть приведенных понятий. Например, вычисление среднего требует арифметических операций, поэтому оно может применяться только в количественных моделях (а некоторые типы средних, которые описаны ниже в упражнениях, только в шкале не слабее шкалы отношений). Понятие медианы шире – для ее определения требуется только операция сравнения. Поэтому медиану можно вычислять и в порядковой модели. Ну, а мода вообще не требует никаких операций над значениями показателя, поэтому ее можно использовать даже в номинальных моделях.

Правда, на практике люди часто отступают от этих правил. Например, что такое средний балл (средняя оценка)? Ведь оценки образуют порядковую модель, так что понятие среднего не имеет для них смысла. Это не значит, что средний балл нельзя рассчитывать, но нужно помнить, что его величина весьма условна. Например, при переходе от 5–балльной системы оценок к 10–балльной или обратно картина может кардинально измениться.

Пример. При проведении теста по 10–балльной системе десять учеников получили следующие оценки: 1, 2, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 9. Каковы средние успехи этих учеников? Подсчитаем для данного набора чисел среднее, медиану и моду.

Среднее арифметическое данных чисел равно 5. Таким образом, один ученик получил среднюю оценку, четыре – ниже средней и пятеро – выше средней.

Найдем медиану данного набора чисел. Так как в середине ряда стоят числа 5 и 6, то она равна 5,5. Таким образом, учеников, получивших 5 и 6 баллов можно считать средними учениками этой группы.

И, наконец, мода (наиболее распространенная оценка) здесь равна 6.

А теперь найдем все три величины в обычной системе оценок. Будем считать, что оценка 5 ставится за 9–10 баллов, 4 – за 7–8 баллов, 3 – за 4–6 и 2 – за 0–3 балла. Тогда ученики получат такие оценки: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5.

Средняя оценка в этом случае равна 3,1. При таком подсчете никто не получил точно среднюю оценку, 8 человек ответили хуже среднего и только двое – лучше среднего.

Медианой данного набора будет число 3. С этой точки зрения можно считать средними учеников, которые получили тройку, что соответствует 4–6 баллам за тест. Мода, как и медиана, здесь равна 3.

Мы видим, что среднее арифметическое – плохая характеристика для порядковой модели. При переходе к 5–балльной системе мы не изменили п о р я д о к лучше/хуже, но представление о том, кто лучше с р е д н е г о , а кто хуже, кардинально изменилось. Медиана “показала себя” гораздо лучше: представление о том, кого можно считать “средними” учениками мало изменилось при переходе на новую модель. А если бы преобразование было взаимно–однозначным, изменений бы вообще не было.

Мода также может использоваться в порядковой модели, но для отыскания не среднего значения, а наиболее типичного.

> Модальную проверку однажды применила Лусик Лазаревна Андроникова. Она сказала Вивиане Абелевне, жене художника Мартироса Сергеевича Сарьяна: «Лия Леонардовна, я начинаю подозревать, что я называю Вас как-то неправильно. Потому что, как я заметила, другие называют Вас по-другому и при этом одинаково между собой».
>
> В. Успенский, в кн. «Труды по НЕ математике»

Кроме усредненных характеристик можно вводить и другие – например, сумму значений, максимальный и минимальный элемент и множество других. Все они имеют свои свойства и свою область применения. Усредненные характеристики выделяются среди них тем, что их значения всегда лежат между максимальным и минимальным числами набора (включительно). В частности, если все числа списка равны, то и любое среднее равно тому же числу.

При подборе обобщенной характеристики надо следить за допустимостью соответствующих понятий. Например, сумма имеет смысл, как мы знаем, только в количественных моделях, да и то не во всех (не слабее шкалы отношений, см. Упражнение 5.2). Максимальный и минимальный элемент применяются шире – они допустимы и в шкале порядка.

При обработке данных конкретного эксперимента выбор обобщенной характеристики становится важной и нетривиальной задачей. Предположим, вы проводите исследование двух групп людей, причем предполагаете, что результат будет зависеть от возраста членов группы. Конечно, сравнить возраст двух человек просто. Но как оценить, какая группа старше, а какая младше? Например, в одной группе собраны люди с возрастами 20, 22, 22, 26, 20 лет, а во второй – 18, 17, 50 и 21 год. Какую группу считать старше?

Один из возможных подходов при решении этой задачи – охарактеризовать каждую группу одним числом, ведь числа сравнивать мы умеем. Вычислим для этих групп разные обобщенные характеристики.

Характеристика	20, 20, 22, 22, 26	17, 18, 21, 50
Среднее арифметическое	22	26,5
Среднее квадратичное	22,12	29,81
Среднее геометрическое	21,90	23,81
Среднее гармоническое	21,80	21,98
Медиана	22	19,5
Мода	20 и 22	17, 18, 21 и 50
Сумма	110	106
Максимальный элемент	26	50
Минимальный элемент	20	17

Возраст можно измерять в шкале отношений, так как он имеет и единицу измерения (например, год), и начало отсчета – момент рождения данного человека. Поэтому допустимыми будут все средние величины и даже сумма.

Мы видим, что в разных строках таблицы соотношение между числами не совпадает. С точки зрения всех средних и максимального элемента старше вторая группа; медиана, сумма и минимальный элемент дают обратную картину; а моду вообще нельзя использовать для сравнения, так как она принимает не единственное значение.

Какая же из обобщенных характеристик здесь подходит лучше? Это зависит от многих причин, в частности, от того, какие свойства группы мы исследуем.

Пусть, например, в эксперименте исследуются индивидуальные качества людей. Тогда человек, которому 50 лет, дает нетипичное, нехарактерное отклонение во второй группе, и его данные лучше отбросить при обработке. Именно это делает медиана: если заменить число 50 любым другим не меньше 21, то медиана не изменится. Поэтому медианное исследование проводится, когда надо исключить влияние отдельных больших “выбросов” в данных. В этом она ближе к моде, так как дает более типичное значение. Моду тоже можно использовать для выделения типичного варианта, но только тогда, когда она ярко выражена: например, 10 человек одного возраста и по одному двух–трех других. Если же данные более или менее "размазанные", то лучше использовать медиану.

Другая картина возникает, если мы исследуем не индивидуальные свойства людей, а поведение всей группы как единого целого. Тогда наличие во второй группе 50–летнего испытуемого может оказаться важным. Например, он может стать лидером по опыту и авторитету, сплотить группу. Поэтому в конкретном эксперименте наличие одного такого человека может сделать более "взрослой" вторую группу, хотя она и состоит в основном из более молодых людей. Именно такой результат у нас получился при использовании средних величин.

Сумма возрастов вряд ли может считаться хорошей характеристикой группы, так как она зависит не только от возраста участников, но и от их числа. Правда, существуют эксперименты, в которых результат зависит от количества испытуемых, но все же вряд ли можно представить ситуацию, в которой одного 50–летнего человека можно заменить на двух 25–летних (а ведь сумма возрастов в обоих случаях одинакова).

Больше пользы может принести исследование по минимальному и максимальному элементу. Например, пусть члены группы выполняют какое–либо задание на скорость. Тогда можно поставить задачу двояко. Можно считать, что группа выполнила задание, если хотя бы один человек из нее выполнил его – тогда нам надо ориентироваться на самого "сильного" члена группы (имеющего м а к с и м а л ь н у ю "силу"). А если требовать, чтобы задание выполнили все члены группы, то придется ждать отстающего, так что вся группа закончит работу вместе с самым "слабым" ее членом (имеющим м и н и м а л ь н у ю "силу"). Можно придумать аналогичный эксперимент не только для "силы" испытуемого (физической, интеллектуальной, силы воли и т.п.), но и для возраста.

Кроме разбора качества отдельных обобщенных характеристик, в данном примере можно привести и такое теоретическое замечание. Хотя мы сказали, что возраст можно измерять в шкале отношений, вряд ли его можно считать к о л и ч е с т в е н н о й величиной в гуманитарных исследованиях. Это показывает уже пример с одним 50–летним и двумя 25–летними людьми. Хотя год и может считаться единицей измерения возраста, но для большинства характеристик человека он не является эталоном. Например, известно, что первые годы жизни человека – наиболее насыщенные с точки зрения количества получаемой информации. Позже эта характеристика уменьшается, а может и вовсе стать отрицательной, когда человек забывает больше, чем узнает. Другие характеристики меняются с годами также причудливым образом – то растут, то убывают и могут иметь несколько "пиков" в течение жизни человека.

Из всего сказанного следует, что в психологических и социологических исследованиях лучше рассматривать возраст, как и другие характеристики, не в количественной, а в порядковой шкале. Тогда сразу отпадают такие обобщенные характеристики, как все средние и сумма, а остаются медиана, мода, минимальный и максимальный элемент.

Мы видим, что можно привести много соображений “за” и “против” использования тех или иных обобщенных характеристик. Эта задача не только не тривиальная, но и не формализуемая: в ней нет никаких строгих объективных критериев для выбора. На практике исследователь должен руководствоваться своим здравым смыслом, опытом и интуицией – конечно, в рамках тех теоретических ограничений, которые дает теория измерений.

Вернемся к исходной задаче сравнения двух групп чисел. Студенты, впервые столкнувшись с данным примером, предлагали такой подход. В первой группе все участники старше большинства участников второй, поэтому ее надо считать более “взрослой”. Подход сам по себе разумный, но не универсальный, так как использует особенности данного набора чисел. Если для каждого конкретного списка численных данных придумывать свой метод сравнения, то это будет, во–первых, сложно, а во–вторых, необъективно: мы видели, что, варьируя метод сравнения, можно, вообще говоря, получить любой желаемый ответ.

Но это еще полбеды. Еще большие сложности возникают, если вам надо сравнить не две группы чисел, а несколько. Если использовать для каждой пары свой метод, то вполне может получиться, что группа I старше группы II, группа II старше группы III, а группа III – старше группы I, что создает порочный круг (математики называют это качество нетранзитивностью). При использовании обобщенных характеристик такого случиться не может, так как в результате мы сравниваем обычные числа.

> ☝ Замечание 1. Тем не менее, методы сравнения, не основанные на использовании обобщенных характеристик, часто бывают полезны. Действительно, заменяя всю группу одним числом, мы теряем много существенной информации. Можно попытаться сравнить группы значений и непосредственно. Существуют разнообразные методы такого сравнения, каждый со своими особенностями и своей областью применимости. Некоторые из них мы рассмотрим подробнее в разделе “Неколичественные модели”. ☺

Хотя различные арифметические характеристики, как мы сказали, имеют ограниченное применение в гуманитарных науках, все же пренебрегать ими не следует. Поэтому присмотримся повнимательнее к различным способам вычисления средних величин. В приведенной таблице видна некоторая регулярность. В обоих столбцах среднее квадратичное больше среднего арифметического, а другие два средних меньше его. Это не случайно: эти соотношения не зависят от конкретных значений усредняемых величин.

Теорема. Для любого набора положительных чисел четыре средних располагаются в таком порядке (по возрастанию): среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное. Причем два из перечисленных средних значений совпадают только в том случае, когда все числа в наборе равны. Тогда совпадают и все средние значения.

Интересно посмотреть, от чего зависит величина различия между средними – например, средним квадратичным и средним арифметическим. Рассмотрим для примера наборы чисел, у которых среднее арифметическое совпадает, а среднее квадратичное отличается.

Набор чисел	Ср. арифметическое	Ср. квадратичное
9, 9, 10, 10, 12	10	10,06
4, 5, 12, 14, 15	10	11,01
1, 8, 11, 14, 16	10	11,30

Присматриваясь к числам в этой таблице, можно сделать наблюдение, что большее среднее квадратичное соответствует более “разбросанным” значениям. Поэтому разность между двумя этими средними может служить мерой разбросанности значений. Однако обычно эту меру вводят несколько по–другому.

заменить рисунок

Введем для каждой величины x_i из заданного списка ее отклонение от среднего значения x в виде $x_i – x$. Если усреднить эти величины, то мы получим некоторую характеристику отклонения значений от среднего. Но какое среднее здесь взять? Попробуем среднее арифметическое:

$$\frac{\sum(x_i - x)}{n} = \frac{\left(\sum x_i\right) - nx}{n} = x - x = 0 \ .$$

Итак, среднее значение отклонения от x равно нулю. Это, кстати, можно считать еще одним определением для x.

Чтобы значения отклонений не сокращались между собой, их можно взять по модулю или возвести в квадрат. Обычно используют второй способ.

Определение 1.7. Среднее квадратичное отклонение значений величины от ее среднего называется стандартным отклонением данного набора чисел. Квадрат стандартного отклонения называется дисперсией этого набора чисел.

Найдем значение среднего квадратичного для отклонений $x_i – x$. Сначала подсчитаем сумму квадратов этих величин:

$$\sum(x_i - x)^2 = \sum(x_i^2 - 2x_i x + x^2) = \sum x_i^2 - 2x\sum x_i + nx^2.$$

Эту сумму надо поделить на n. Если учесть при этом, что $\sum x_i \big/ n = x$, получаем

$$\frac{\sum x_i^2 - 2x\sum x_i + nx^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - 2x \cdot x + x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - x^2.$$

Эта величина и есть дисперсия. По сути дела, дисперсия вычисляется как разность квадратов двух чисел, записанных в таблице. Для трех данных наборов чисел она равна, соответственно, 1,2; 21,2 и 27,6.

Если исходные величины заданы в некоторых единицах измерения, то дисперсия, как это видно из ее определения, будет выражена в квадратных единицах. Поэтому корень из дисперсии $\sigma = \sqrt{D}$, т.е. стандартное отклонение имеет ту же единицу измерения, что и исходные величины.

> ☝ Замечание 2. Все определения обобщенных характеристик были даны для случая, когда показатель принимает конечное число значений. Случай бесконечного числа значений будет рассмотрен во второй части пособия. ☺

Упражнения

1. Покажите, что, если численная модель сохраняет различимость объектов, то соответствующее отображение (см. определение на стр. 1) является взаимно однозначным.

2. В какой численной модели – номинальной, порядковой или количественной – имеет смысл понятие процента, доли?

3. В одной рекламе косметического средства говорилось, что оно разглаживает морщины на 54% и улучшает цвет лица на 71%. Какой тип численной модели применили авторы рекламы? Правомерно ли такое использование чисел?

4. К какому типу моделей относятся: а) инвентарные номера; б) номера классов (параллелей) в школе; в) номера кабинетов (комнат, аудиторий) на одном этаже; г) номера томов многотомного издания?

5. Как известно, пункты стандартной советской анкеты были пронумерованы следующим образом: 1 – фамилия, 2 – имя, 3 – отчество, 4 – дата рождения, 5 – национальность и т.п. Какой тип модели создает такая нумерация?

6. Как уже было сказано, школьные оценки представляют собой порядковую модель, в которой арифметические действия неприменимы. Имеют ли смысл такие понятия как средний балл и процент успеваемости?

7. Для проверки умственных способностей испытуемых им выдали тест, причем в качестве результата фиксировалось время, затраченное на его выполнение. Численная модель какого типа применялась в данном эксперименте?

8. Приведите несколько примеров моделей разного типа.

9. К каким типам шкал относятся следующие числовые модели:

а) номера на документах;

б) возраст человека;

в) номера банкнот;

г) высота географических объектов;

д) шкала компаса.

10. И дата и возраст – временн’ые величины. Почему они измеряются в разных шкалах?

11. Сила ветра по Бофорту измеряется следующим образом. Для определенного числа баллов (между 0 и 12) существуют описания ветра, состояния поверхности моря, силы волнения, высоты волн и т.п. Например, 5 баллам соответствует свежий ветер, волны хорошо выраженной формы, брызги, повсюду “барашки”, полощутся большие флаги, высота самых высоких волн 1,5 – 2 метра, волнение значительное. К какому типу шкал относится шкала Бофорта?

12. Мы рассмотрели далеко не все виды шкал. Например, все три количественные шкалы являются аддитивными (additio – прибавление), т.е. связанными со сложением. Однако существуют и мультипликативные шкалы (multiplicatio – умножение). От аддитивной шкалы можно перейти к мультипликативной, используя экспоненциальную функцию: если x – показатель в аддитивной шкале, то $\lambda = e^x$ – в мультипликативной. И наоборот, от мультипликативной шкалы к аддитивной переходят с помощью логарифмирования. Действительно, логарифм произведения равен сумме логарифмов.

а) Какие преобразования соответствуют в мультипликативной шкале аддитивным преобразованиям $y = kx$ и $y = kx+b$?

б) Что играет роль начала отсчета в мультипликативной шкале?

13. Среди мультипликативных шкал больше всего используется та, которая аналогична шкале интервалов. Именно она обычно и называется мультипликативной шкалой. Как вы думаете, почему аналоги двух других аддитивных шкал не получили распространения?

14. Расположите известные вам типы шкал по порядку от слабой к сильной.

15. Сила звука в акустике (и некоторые другие величины) измеряются в белах (по имени изобретателя телефона А.Г. Белла, десятая часть – децибел). Один бел – это десятичный логарифм отношения двух одноименных величин. Например, если P и Q – мощности двух сигналов, то сила звука $N = \lg(P/Q)$. Правомерно ли такое определение, если известно, что мощность сигнала измеряется в шкале отношений? Можно ли сказать, что сила звука некоторого сигнала равна 5 децибел?

16. Выбор той или иной шкалы для описания объекта определяется его собственными свойствами, однако более сильную шкалу всегда можно заменить более слабой. Обязательно ли использовать для измерений самую сильную из возможных шкал? В качестве примера рассмотрите измерение температуры: какой тип шкалы используется в школьных физических задачах? в бытовых целях? От чего зависит выбор шкалы той или иной силы?

17. Пусть преобразования φ и ψ допустимы в некоторой шкале. Покажите, что

а) композиция $\varphi \circ \psi$ также является изоморфизмом этой шкалы;

б) тождественное преобразование id допустимо;

в) преобразование φ^{-1} допустимо.

При решении задачи учтите замечание 3. Эти три свойства показывают, что допустимые преобразования образуют г р у п п у .

18. Покажите, что высказывание или операция, допустимые в более слабой шкале, допустимы и в более сильной. Можно сказать, что, чем сильнее шкала, тем меньше в ней допустимых преобразований и тем больше допустимых понятий.

19. * Покажите, что сумма допустима только в шкалах не слабее шкалы отношений (имеются в виду не только изученные шкалы, но и все возможные).

20. Кроме среднего арифметического существуют и другие способы усреднения. Например, среднее геометрическое вычисляется как корень n–ой степени из произведения n сомножителей. В частности, для двух значений переменной среднее геометрическое выглядит как $\sqrt{xy}$. В каких шкалах допустимо это понятие?

21. Тот же вопрос для среднего квадратичного, которое вычисляется так. Значения показателя возводятся в квадрат, от этих квадратов берется среднее арифметическое, из которого потом извлекается корень. Для двух значений среднее квадратичное выглядит как

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

22. То же для среднего гармонического, которое является обратной величиной к среднему арифметическому обратных величин. Для двух значений *x*, *y* среднее гармоническое *z* вычисляется из соотношения $\frac{1}{z}=\frac{1/x+1/y}{2}$.

23. То же для среднего взвешенного: оно равно сумме усредняемых значений с коэффициентами, сумма которых равна 1. Для двух величин это $px + qy$, где $p + q = 1$, *p* и *q* – положительные безразмерные константы, называемые весами отдельных значений. В зависимости от важности того или иного значения ему приписывают больший или меньший вес. При $p = q = 1/2$ получаем обычное среднее арифметическое.

24. Какие арифметические действия являются допустимыми в мультипликативной шкале (определение см. в упражнении 13)?

25. В каких шкалах допустимо понятие "между"?

26. В одной телевизионной передаче представители оккультных наук рассказывали о своих предсказаниях по карте звездного неба. Вычисляя различные углы на карте в градусах, они находили для полученных чисел интерпретации в виде дат различных важных событий. Правомерен ли такой расчет?

27. В астрологии есть понятие числового корня для имени человека. Вычисляется он так: каждой букве присвоен некоторый цифровой код. Все цифры, соответствующие буквам имени, суммируются. Если полученная сумма не однозначная, ее цифры также суммируются и т.д., пока не получим одну цифру. Является ли это понятие допустимым при переходе к другим языкам?

28. При проведении некоторого теста получены следующие значения показателя: 100, 83, 88, 81, 83, 96, 105, 108, 78, 102, 97, 113, 126, 94, 85, 119, 67, 91, 88, 99, 88, 72, 77, 88, 114. Найдите среднее, медиану и моду этого набора чисел.

Указание. Как уже было сказано, при сдвиге всех значений из списка на одну и ту же величину, среднее сдвигается на ту же величину. Поэтому среднее значение для больших чисел лучше считать так. Сначала вычитаем из всех чисел одно и то же число, близкое к их среднему значению (в данном примере можно взять 100 или 90). Для полученных остатков вычисляем среднее, к которому снова прибавляем то число, что раньше вычли.

29. Можно ли применять понятие медианы и моды в количественных моделях?

30. Сколько может быть у одного набора чисел средних арифметических? медиан? мод?

31. Пусть у нас есть кубы с длиной стороны 1, 7, 8, 12. Какой из них по размеру ближе всего к среднему? При решении задачи за размер возьмите а) длину стороны; б) объем куба. Почему ответы получились разными?

32. Построим для одного и того же набора объектов две численные модели, задающие один и тот же порядок. Можно ли сказать, что при переходе от одной модели к другой сохра-

няются а) среднее значение; б) средний объект, т.е. объект, значения показателя на котором наиболее близко к среднему (или совпадает с ним); в) медиана; г) медианный объект; д) мода; е) модальный объект?

33. Предположим, что вы хотите купить комнатный термометр. В магазине на прилавке вы видите множество образцов, но не все они показывают одинаковую температуру. Какая на самом деле температура в помещении, вы не знаете. Какой из приборов вы выберете?

34. Мы ввели две меры разбросанности значений – разность между средним квадратичным и средним арифметическим и стандартное отклонение. В какой шкале имеет смысл разность? Покажите, что понятия дисперсии и стандартного отклонения имеют смысл в шкале интервалов.